Scalari e vettori

In fisica si trattano grandezze misurabili, ma di diversa natura.

Alcune grandezze sono completamente definite da un valore numerico e da un'unità di misura. Queste grandezze sono dette grandezze **scalari**, e non contengono alcuna informazione direzionale. Non sono influenzate dall'orientazione di un sistema fisico.

Esempi: **Massa – Temperatura – Lunghezza-distanza – Angoli – Densità – Tempo**

Se il sistema fisico a cui queste grandezze sono riferite viene ruotato, esse non variano.

Gli scalari sono **invarianti per rotazione**.

Altre grandezze invece acquistano senso compiuto solo se corredate da informazioni di direzione e verso.

Una grandezza vettoriale è sempre definita da una **direzione**, un **verso** e un **modulo** (o **intensità**) consistente in un numero accompagnato da un'unità di misura.

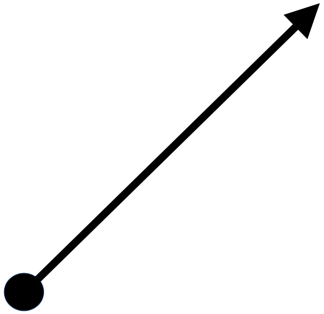
Esempi: **Spostamento – Velocità – Forza – Campo elettrico – Campo magnetico**

In generale, se si ruota il sistema fisico a cui una grandezza vettoriale è attribuita, essa accompagna rigidamente la rotazione del sistema. I vettori **non** sono invarianti per rotazioni, e anzi le riproducono fedelmente.

Vettori

In fisica si considerano due tipi di vettori: applicati e liberi

Vettori applicati



Un vettore applicato è definito da:

1) Un punto dello spazio
2) Una semiretta che ha origine nel punto
3) Un'intensità

Il verso del vettore applicato è quello che parte dall'origine della semiretta e se ne allontana. Si dice anche che un vettore è un **segmento orientato**.

Un vettore applicato può sempre essere trasportato lungo la sua retta di applicazione (ossia la retta di cui fa parte la semiretta).

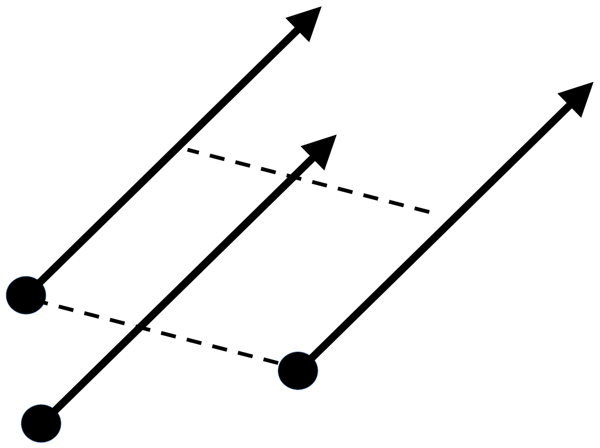
Caso particolare: un vettore applicato può avere modulo nullo. In tal caso la sua semiretta si riduce ad un punto e l'intensità è nulla.

Un vettore applicato v nel punto P si indica con la grafia

$$\vec{v}_P$$

Vettori

In fisica si considerano due tipi di vettori: applicati e liberi



Vettori liberi

Se consideriamo tutti i vettori applicati che giacciono su semirette tra loro parallele, definiamo:

1) **Direzione** l'insieme delle rette in cui esse giacciono

2) **Verso** ciascuno dei due insiemi di semirette che originano dal punto di applicazione

In geometria euclidea esistono punti e rette. Il concetto di direzione e il concetto di verso richiedono di generalizzare ed astrarre. Sebbene un vettore libero contenga meno informazione di un vettore applicato, può essere definito correttamente solo a partire dai vettori applicati.

Vettori

Un vettore libero v si indica con la grafia $\vec{v}$

Un **versore** o vettore direzione è un vettore libero di modulo unitario ed **adimensionale** (ossia non ha unità di misura)

Il vettore di intensità nulla si indica con $\vec{0}$

La sua direzione ed il suo verso sono **indefiniti**.

Va osservato che un vettore nullo conserva comunque l'informazione dell'unità di misura della grandezza a cui si riferisce:

$$\vec{0}\, m/s \text{ è diverso da } \vec{0}\, N$$

Il **modulo** o **norma** di un vettore si indica con $\|\vec{v}\|$

Vettori

Riepilogando:

Vettore libero: direzione + verso + modulo

Vettore applicato: direzione + verso + modulo + punto di applicazione

I vettori si rappresentano spesso come **frecce**, evidenziando o no il punto di applicazione a seconda che si tratti di vettori applicati o liberi.

In passato, le frecce erano spesso usate per effettuare graficamente calcoli di fisica o ingegneria

Infatti, come vedremo esiste una vera e propria *"algebra delle frecce"*

Per questo motivo, si può dire che le frecce hanno una struttura di **spazio vettoriale**

Tuttavia, l'uso delle frecce spesso è scomodo, soprattutto se c'è la possibilità di usare calcolo simbolico o numerico (computer)

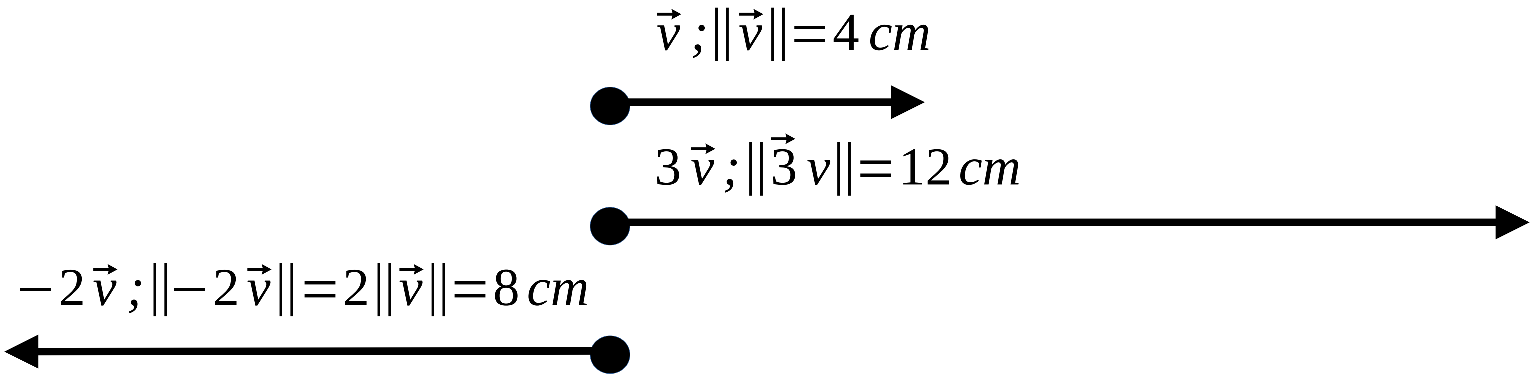
Vedremo infatti che lo spazio delle frecce è **isomorfo** allo spazio delle terne di numeri reali (che hanno anch'esse una struttura di spazio vettoriale)

Questo vuol dire che possiamo sempre effettuare i calcoli tra vettori usando i numeri reali, a patto di seguire le opportune regole di "traduzione"

Vettori

Prodotto per scalari – moltiplicare un vettore **libero** per uno scalare

Il prodotto di uno scalare per un vettore è un nuovo vettore che ha la stessa direzione, intensità uguale al prodotto dell'intensità del vettore originale per il valore assoluto dello scalare, e verso concorde o discorde rispetto all'originale a seconda che il segno dello scalare sia positivo o negativo



Come si trova il versore di un vettore? Semplice: $vers\,\vec{a}=\hat{a}=\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ Infatti $\|\hat{a}\|=\frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\|=1$

Vettori

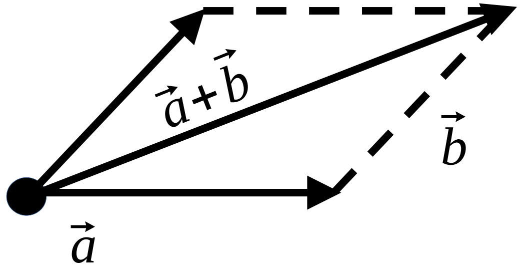
Somme e differenze tra vettori **liberi**

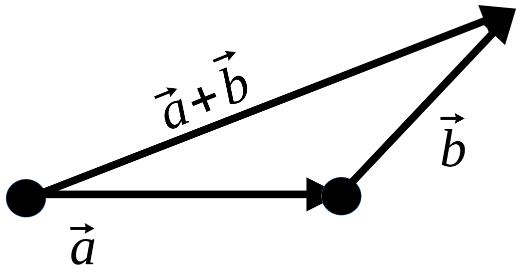
La somma di due vettori si ottiene:

a) dalla diagonale orientata del parallelogramma formato dai due vettori (regola del parallelogramma);

OPPURE

b) concatenando il secondo vettore al primo e unendo la coda del primo alla punta del secondo (metodo punta-coda)





$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$ (disuguaglianza triangolare)

Vettori

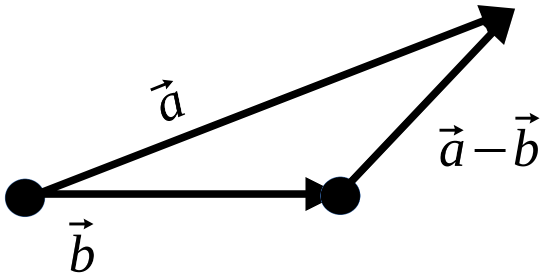
Somme e differenze tra vettori **liberi**

Dato un vettore $\vec{a}$ **, esiste sempre ed è unico il suo opposto** $-\vec{a}$ **, tale che** $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

La differenza tra due vettori si calcola sommando al primo l'opposto del secondo

OPPURE

La differenza tra due vettori si calcola fissando le code nello stesso punto e connettendo la punta del secondo alla punta del primo



$\|\vec{a}-\vec{b}\| \geq | \ \|\vec{a}\|-\|\vec{b}\| \ |$ (disuguaglianza triangolare)

Vettori

Proprietà distributive rispetto al prodotto per scalari

$$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$$

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$$

Queste due proprietà rendono molto agevole il calcolo vettoriale, e insieme alle proprietà già viste prima sono *condivise da tutti gli oggetti matematici che hanno proprietà vettoriali*

Vettori

Basi di vettori

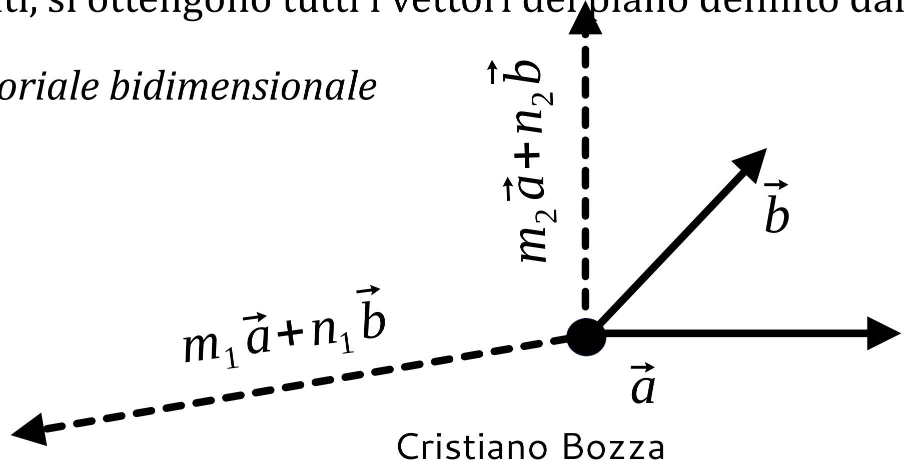
Due vettori entrambi non nulli e con diversa direzione si dicono **linearmente indipendenti**

Con due vettori linearmente indipendenti è possibile definire un piano di vettori, e i due vettori sono una **base** del piano

$$m\vec{a}+n\vec{b} \qquad m\in\Re\,,n\in\Re$$

Al variare dei due coefficienti, si ottengono tutti i vettori del piano definito dai due vettori di base

Tale piano è uno *spazio vettoriale bidimensionale*



Vettori

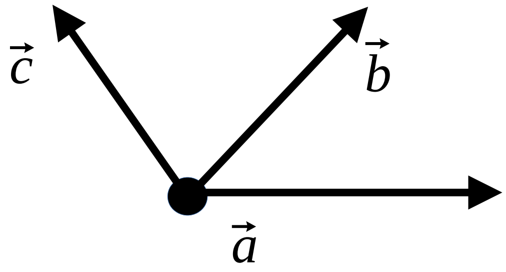
Basi di vettori

Tre vettori tutti non nulli e che non giacciano sullo stesso piano si dicono **linearmente indipendenti**

Con tre vettori è possibile definire uno *spazio vettoriale tridimensionale*, e i tre vettori sono una **base** dello spazio

$$p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c} \qquad p\in\Re\,,q\in\Re\,,r\in\Re$$

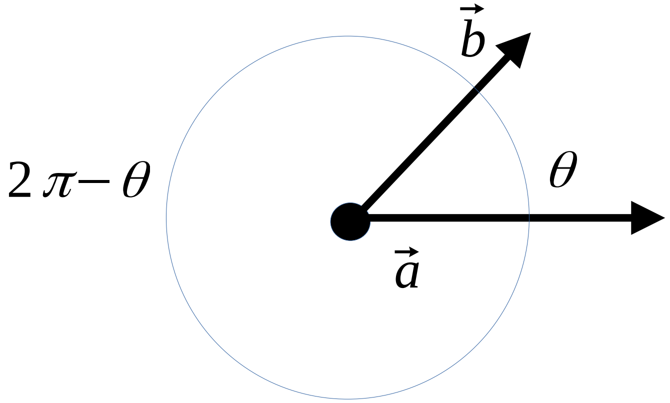
Al variare dei tre coefficienti, si ottengono tutti i vettori dello spazio



Vettori

Prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori **liberi** è uno scalare pari al prodotto dei moduli dei vettori per il coseno dell'angolo compreso *[tra le due semirette che rappresentano direzione e verso dei vettori]* (la parte tra parentesi quadre spesso si omette).



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

osserviamo che

$$\cos\theta=\cos(2\pi-\theta)$$

quindi non c'è ambiguità

$$\vec{a}\cdot\vec{b}>0\; se\; \vec{a}\neq\vec{0}\;\mathrm{e}\;\vec{b}\neq\vec{0}\;\mathrm{e}\;0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}<0\; se\; \vec{a}\neq\vec{0}\;\mathrm{e}\;\vec{b}\neq\vec{0}\;\mathrm{e}\;\frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\; se\; \vec{a}=\vec{0}\;\mathrm{o}\;\vec{b}=\vec{0}\;\mathrm{o}\;\theta=\frac{\pi}{2}$$

Vettori

Prodotto scalare

Il prodotto scalare è un'operazione **lineare, commutativa, distributiva**, ossia:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$(h\vec{a})\cdot(k\vec{b})=hk\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

Osserviam che

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|\|\vec{v}\|=\|\vec{v}\|^2 \qquad [=v^2]$$

quindi

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Segue che

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}=$$

$$=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

$$(\text{Teorema del coseno})$$

Vettori

Prodotto scalare e basi ortonormali

Il prodotto scalare ci dà l'opportunità di definire basi ortogonali e basi ortonormali

Se tre vettori non sono complanari, sono una base dello spazio vettoriale

Se sono a due a due ortogonali, sono una base ortogonale $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

Se ognuno di essi ha norma unitaria, essi formano una **base ortonormale**

$$\hat{a}=vers\,\vec{a}$$
$$\hat{b}=vers\,\vec{b}$$
$$\hat{c}=vers\,\vec{c}$$
$$\hat{a}\cdot\hat{b}=\hat{b}\cdot\hat{c}=\hat{c}\cdot\hat{a}=0$$
$$\hat{a}\cdot\hat{a}=\hat{b}\cdot\hat{b}=\hat{c}\cdot\hat{c}=1$$

Una base ortonormale è una terna di versori a due a due ortogonali

Vettori

Prodotto scalare e basi ortonormali

Avere una base ci consente di ragionare in termini di **componenti**, ossia di coefficienti che definiscono un vettore

Tutte le proprietà delle “frecce” si trasportano alle terne di numeri reali e viceversa

Le basi ortonormali si indicano ad esempio con

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \quad \text{oppure} \quad \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$$

Dato $\vec{v}$, come troviamo le componenti rispetto alla base?

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\vec{v}\cdot\hat{i} = (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k})\cdot\hat{i} = v_x \hat{i}\cdot\hat{i} + v_y \hat{j}\cdot\hat{i} + v_z \hat{k}\cdot\hat{i} = v_x$$
$$\vec{v}\cdot\hat{j} = (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k})\cdot\hat{j} = v_x \hat{i}\cdot\hat{j} + v_y \hat{j}\cdot\hat{j} + v_z \hat{k}\cdot\hat{j} = v_y$$
$$\vec{v}\cdot\hat{k} = (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k})\cdot\hat{k} = v_x \hat{i}\cdot\hat{k} + v_y \hat{j}\cdot\hat{k} + v_z \hat{k}\cdot\hat{k} = v_z$$

Vettori

Vettori e componenti

Vediamo l'algebra dei vettori in termini di componenti

$$\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$$
$$\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})+(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})=(a_x+b_x)\hat{i}+(a_y+b_y)\hat{j}+(a_z+b_z)\hat{k}$$ le componenti si sommano

$$m\vec{a}=m(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})=m\,a_x\hat{i}+m\,a_y\hat{j}+m\,a_z\hat{k}$$ il prodotto per scalari moltiplica tutte le componenti per lo scalare

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})=$$
$$=(a_xb_x)\hat{i}\cdot\hat{i}+(a_xb_y)\hat{i}\cdot\hat{j}+(a_xb_z)\hat{i}\cdot\hat{k}+(a_yb_x)\hat{j}\cdot\hat{i}+(a_yb_y)\hat{j}\cdot\hat{j}+(a_yb_z)\hat{j}\cdot\hat{k}+(a_zb_x)\hat{k}\cdot\hat{i}+(a_zb_y)\hat{k}\cdot\hat{j}+(a_zb_z)\hat{k}\cdot\hat{k}=$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$ il prodotto scalare si ottiene moltiplicando le componenti omologhe e sommando

Vettori

Vettori e componenti

Supponiamo di voler vedere il nostro sistema fisico “da un’altra prospettiva”. Come si cambia base?

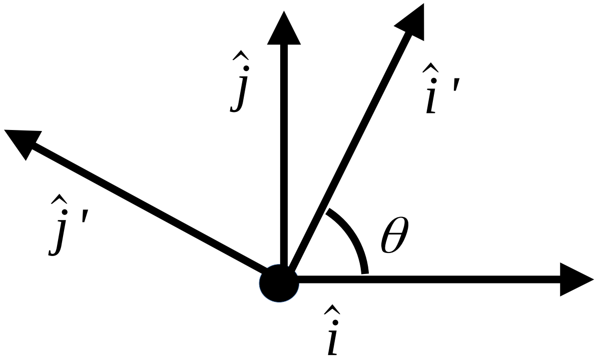
$$\hat{i},\hat{j},\hat{k} \rightarrow \hat{i}',\hat{j}',\hat{k}'$$

$$\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}=v_x'\hat{i}'+v_y'\hat{j}'+v_z'\hat{k}'$$
$$v_x'=\vec{v}\cdot\hat{i}'=(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k})\cdot(i_x'\hat{i}+i_y'\hat{j}+i_z'\hat{k})=v_x i_x'+v_y i_y'+v_z i_z'$$
$$v_y'=\vec{v}\cdot\hat{j}'=(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k})\cdot(j_x'\hat{i}+j_y'\hat{j}+j_z'\hat{k})=v_x j_x'+v_y j_y'+v_z j_z'$$
$$v_z'=\vec{v}\cdot\hat{k}'=(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k})\cdot(k_x'\hat{i}+k_y'\hat{j}+k_z'\hat{k})=v_x k_x'+v_y k_y'+v_z k_z'$$

Vettori

Vettori e componenti

Esempio



$$\hat{i}\,'\cdot\hat{i}=\cos\theta$$
$$\hat{i}\,'\cdot\hat{j}=\sin\theta$$
$$\hat{j}\,'\cdot\hat{i}=-\sin\theta$$
$$\hat{j}\,'\cdot\hat{j}=\cos\theta$$

$$\hat{i},\hat{j},\hat{k}\ \rightarrow\ \hat{i}\,',\hat{j}\,',\hat{k}\,'$$

$$\hat{i}=\hat{i}\,'\cos\theta-\hat{j}\,'\sin\theta$$
$$\hat{j}=\hat{i}\,'\sin\theta+\hat{j}\,'\cos\theta$$
$$\hat{k}=\hat{k}\,'$$

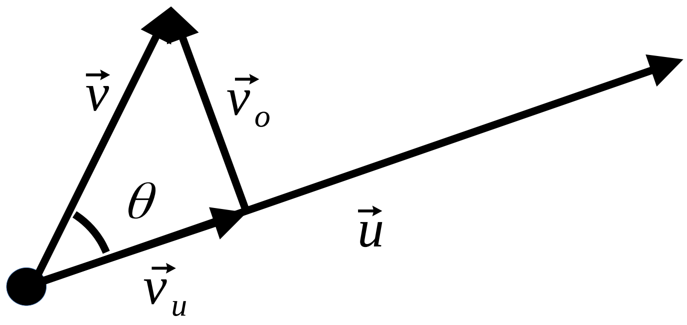
$$\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$$
$$v_x\,'=v_x\cos\theta+v_y\sin\theta$$
$$v_y\,'=-v_y\sin\theta+v_y\cos\theta$$
$$v_z\,'=v_z$$

le componenti si trasformano nel senso opposto a quello dei versori

Vettori

Vettori e componenti

Proiezione di un vettore lungo un altro vettore e parte ortogonale



$$\hat{u} = vers\, u = \frac{1}{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}\vec{u}$$

$$v_u = \vec{v}\cdot\hat{u} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}$$ componente di v lungo u

$$\vec{v}_u = (\vec{v}\cdot\hat{u})\hat{u} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}\frac{1}{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}\vec{u} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$ proiezione di v su u

$$\vec{v}_o = \vec{v} - \vec{v}_u = \vec{v} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$ parte ortogonale di v rispetto ad u