Il pendolo semplice

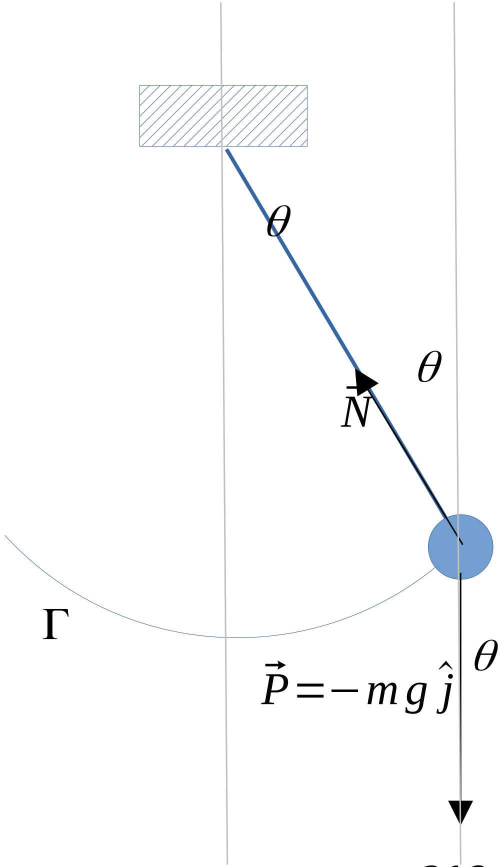
Il pendolo semplice

Un punto materiale vincolato ad un arco di circonferenza da una fune inestensibile e priva di massa si chiama "pendolo semplice".

Possiamo trovare le equazioni del moto in due modi:

1) Descrizione mediante le forze

2) Approccio energetico



$Metodo\,1:$

$\vec{P}+\vec{N}=m\vec{a};\qquad \vec{r}=l\sin\theta\hat{i}-l\cos\theta\hat{j}$

proiettiamo sugli assi

$$\begin{cases}-N\sin\theta=m\ddot{x}\\ -mg+N\cos\theta=m\ddot{y}\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}=l\dot{\theta}\cos\theta; & \ddot{x}=l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta\\ \dot{y}=l\dot{\theta}\sin\theta; & \ddot{y}=l\ddot{\theta}\sin\theta+l\dot{\theta}^2\cos\theta\end{cases}$$

per piccole oscillazioni $\cos\theta\simeq 1$, $\sin\theta\simeq\theta$(solo in radianti!)

Il pendolo semplice

Moto del pendolo semplice

$Metodo\,1:$

per piccole oscillazioni $\cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$ (solo in radianti!)

$$\begin{cases} -N\,\theta = m\,\ddot{x} \\ -m\,g + N = m\,\ddot{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = l\,\ddot{\theta} - l\,\dot{\theta}^2\,\theta \\ \ddot{y} = l\,\ddot{\theta}\,\theta + l\,\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = m\,\ddot{y} + mg \\ m\,\ddot{y}\,\theta + m\,g\,\theta = -m\,\ddot{x} \end{cases}$$

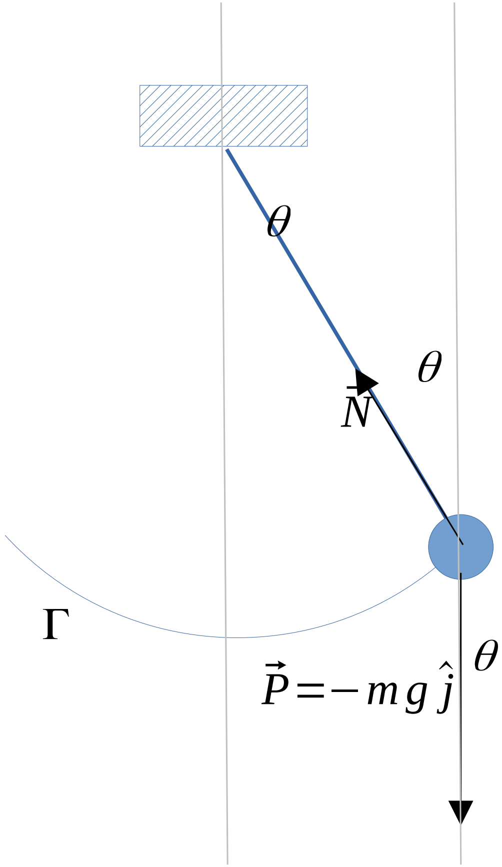
$$m\,l\,\ddot{\theta}\,\theta^2 + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\theta + m\,g\,\theta = -m\,l\,\ddot{\theta} + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\theta$$

$$l\,\ddot{\theta}\,\theta^2 + g\,\theta + l\,\ddot{\theta} = 0$$

trascurando il termine θ^2 perché θ è piccolo, si ha

$$g\,\theta + l\,\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Otteniamo quindi, **per piccole oscillazioni**, un oscillatore armonico!

Il pendolo semplice

Moto del pendolo semplice

$$Metodo\,2:$$

$$U+K=cost.; \qquad \frac{dU}{dt}+\frac{dK}{dt}=0$$

$$K=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}m\left(l\,\dot{\theta}\right)^2; \qquad \frac{dK}{dt}=m\,l^2\,\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

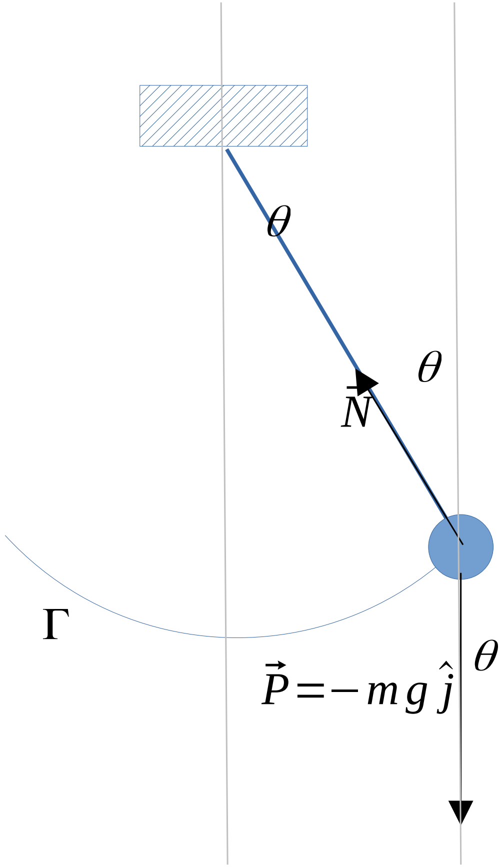
$$U=m\,g\,y=m\,g\,l\left(1-\cos\theta\right); \qquad \frac{dU}{dt}=m\,g\,l\,\dot{\theta}\sin\theta$$

$$m\,g\,l\,\dot{\theta}\sin\theta+m\,l^2\,\dot{\theta}\ddot{\theta}=0$$

questo deve valere anche dove $\dot{\theta}\neq 0 \Rightarrow g\sin\theta+l\,\ddot{\theta}=0$

per piccole oscillazioni $\sin\theta\simeq\theta \Rightarrow g\,\theta+l\,\ddot{\theta}=0$

$$\frac{g}{l}\,\theta+\ddot{\theta}=0$$



Il pendolo semplice

Il pendolo semplice, *per piccole oscillazioni*, si comporta come un oscillatore armonico libero

Il periodo delle piccole oscillazioni dipende solo dalla lunghezza del filo e dall'accelerazione di gravità, ma non dall'ampiezza di oscillazione

Questo ha consentito di utilizzare i pendoli per fabbricare orologi

Notiamo anche che si tratta di un moto piano, quindi il piano di oscillazione non varia

Il pendolo di Foucault evidenzia la rotazione terrestre: il piano di oscillazione non varia, mentre la Terra ruota

Richiami ed argomenti correlati

Oscillatore armonico

Consideriamo un punto materiale che si muove solo sull'asse *x*, soggetto ad una forza di richiamo elastica

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}$$
$$F_x = -k\,x$$
$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$
$$F_x = m\,\ddot{x}$$
$$-k\,x = m\,\ddot{x}$$
$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0$$

Ricordiamo che abbiamo già risolto l'equazione differenziale $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

Quindi basta porre $\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Oscillatore armonico

L'equazione del moto sarà $$x = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

Ci rimangono due costanti libere, *A* e *B*. Abbiamo infiniti moti possibili. Dobbiamo ancora sfruttare le **condizioni iniziali**, ossia posizione e velocità iniziale.

Questo vale per ogni moto. Per trovare le equazioni del moto, si scrive il secondo principio della dinamica inserendo le espressioni delle forze attive e passive, e si ottengono infiniti moti possibili. Il moto che il punto materiale compirà dipende dalle condizioni iniziali, che sono **due condizioni vettoriali** (ossia 6 condizioni scalari, 3 per la posizione e 3 per la velocità iniziale). In questo caso si riducono a due perché abbiamo confinato il moto ad una retta.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = B = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = v_0 / \omega_0 \\ B = x_0 \end{cases}$$

Oscillatore armonico

Alternativamente possiamo scrivere $x = A\sin(\omega_0 t + \phi)$

E quindi abbiamo ancora due costanti da fissare, A e ϕ.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = A\sin\phi = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A\cos\phi = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi = \arctan\dfrac{v_0}{\omega_0 x_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} \end{cases}$$

Si ottiene così il moto dell'**oscillatore armonico libero** con frequenza caratteristica = $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$