Oscillatore armonico

Consideriamo un punto materiale che si muove solo sull'asse *x*, soggetto ad una forza di richiamo elastica

$$\vec{F}=-k\,\vec{r}$$
$$F_x=-k\,x$$
$$\vec{F}=m\,\vec{a}$$
$$F_x=m\,\ddot{x}$$
$$-k\,x=m\,\ddot{x}$$
$$m\,\ddot{x}+k\,x=0$$

Ricordiamo che abbiamo già risolto l'equazione differenziale $\ddot{x}+\omega_0^2\,x=0$

Quindi basta porre $\ddot{x}+\frac{k}{m}\,x=0 \qquad \omega_0^2=\frac{k}{m} \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Oscillatore armonico

L'equazione del moto sarà $$x = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

Ci rimangono due costanti libere, *A* e *B*. Abbiamo infiniti moti possibili. Dobbiamo ancora sfruttare le **condizioni iniziali**, ossia posizione e velocità iniziale.

Questo vale per ogni moto. Per trovare le equazioni del moto, si scrive il secondo principio della dinamica inserendo le espressioni delle forze attive e passive, e si ottengono infiniti moti possibili. Il moto che il punto materiale compirà dipende dalle condizioni iniziali, che sono **due condizioni vettoriali** (ossia 6 condizioni scalari, 3 per la posizione e 3 per la velocità iniziale). In questo caso si riducono a due perché abbiamo confinato il moto ad una retta.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = B = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = v_0 / \omega_0 \\ B = x_0 \end{cases}$$

Oscillatore armonico

Alternativamente possiamo scrivere $x = A\sin(\omega_0 t + \phi)$

E quindi abbiamo ancora due costanti da fissare, A e ϕ.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = A\sin\phi = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A\cos\phi = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi = \arctan\dfrac{v_0}{\omega_0 x_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} \end{cases}$$

Si ottiene così il moto dell'**oscillatore armonico libero** con frequenza caratteristica = $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

L'oscillatore armonico smorzato

L'oscillatore armonico smorzato

Aggiungiamo uno smorzamento di tipo viscoso all'oscillatore armonico. Possiamo pensare ad esempio ad un pendolo che si muove in aria. In generale comparirà una forza dissipativa proporzionale alla velocità.

$$F_{elast,x}+F_{diss,x}=m\,a_x;\qquad -k\,x-b\,v_x=m\,a_x;\qquad k\,x+b\,\dot{x}+m\,\ddot{x}=0;\qquad \frac{k}{m}x+\frac{b}{m}\dot{x}+\ddot{x}=0$$

$$\omega_0^2 x+\gamma\dot{x}+\ddot{x}=0$$

Anche questa è un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenea.

Proponiamo una soluzione del tipo:

Questi calcoli
non vanno svolti per l'esame
orale. Studiare i concetti.

$$x(t)=A\,e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\phi)$$
$$\dot{x}(t)=-\lambda\,A\,e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\phi)+\omega\,A\,e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi)$$
$$\ddot{x}(t)=\lambda^2 A\,e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\phi)-\omega^2 A\,e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\phi)-2\,\lambda\,\omega\,A\,e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi)$$

L'oscillatore armonico smorzato

Effettuiamo le sostituzioni

$$\omega_0^2 A e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\phi)-\gamma\lambda A e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\phi)+\gamma\omega A e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi)+$$
$$+\lambda^2 A e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\phi)-\omega^2 A e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\phi)-2\lambda\omega A e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi)=0$$

Raggruppiamo i termini in seno e quelli in coseno

Questi calcoli
non vanno svolti per l'esame
orale. Studiare i concetti.

$$e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\phi)[\omega_0^2-\gamma\lambda+\lambda^2-\omega^2]+e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi)[\gamma\omega-2\lambda\omega]=0 \quad \forall t$$

L'unico modo di rispettare quest'equazione per ogni valore di t è azzerare separatamente i coefficienti dei termini in seno e coseno.

$$\begin{cases}\gamma\omega-2\lambda\omega=0\\ \omega_0^2-\gamma\lambda+\lambda^2-\omega^2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{\gamma}{2}\\ \omega_0^2-\dfrac{\gamma^2}{2}+\dfrac{\gamma^2}{4}-\omega^2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{\gamma}{2}\\ \omega^2=\omega_0^2-\dfrac{\gamma^2}{4}\end{cases}$$

L'oscillatore armonico smorzato

Questa soluzione è valida per $\gamma < 2\,\omega_0$: **oscillatore sottosmorzato**

$$x(t) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\,t + \phi\right)$$

Ad ogni ciclo abbiamo

$$U_{elastica} = \frac{1}{2}k\,x_{max}^2 = \frac{1}{2}k\,A\left(e^{-\frac{\gamma}{2}nT}\right)^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 e^{-n\gamma T} = U_0 e^{-n\gamma T}$$

Ad ogni ciclo l'energia decade di $e^{-\gamma T}$

Al solito, le costanti si determinano dalle condizioni iniziali.

Per $\gamma > 2\,\omega_0$ l'oscillatore è detto **ultrasmorzato**. La pulsazione non può più essere un numero reale perché il termine sotto radice diviene negativo. Cerchiamo una soluzione del tipo:

Questi calcoli non vanno svolti per l'esame orale. Studiare i concetti.

$$x(t) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-ct} + B\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-dt}$$

$$\dot{x}(t) = -\left(\frac{\gamma}{2}+c\right)A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-ct} - \left(\frac{\gamma}{2}+d\right)B\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-dt}$$

$$\ddot{x}(t) = \left(\frac{\gamma}{2}+c\right)^2 A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-ct} + \left(\frac{\gamma}{2}+d\right)^2 B\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-dt}$$

L'oscillatore armonico smorzato

Effettuiamo le sostituzioni

$$\omega_0^2 A e^{-\frac{\gamma}{2}-ct}+\omega_0^2 B e^{-\frac{\gamma}{2}-dt}-\gamma\left(\frac{\gamma}{2}+c\right)A e^{-\frac{\gamma}{2}-ct}-\gamma\left(\frac{\gamma}{2}+d\right)B e^{-\frac{\gamma}{2}-dt}+$$
$$+\left(\frac{\gamma}{2}+c\right)^2 A e^{-\frac{\gamma}{2}-ct}+\left(\frac{\gamma}{2}+d\right)^2 B e^{-\frac{\gamma}{2}-dt}=0 \quad \forall t$$

Questi calcoli
non vanno svolti per l'esame
orale. Studiare i concetti.

Raggruppiamo i termini nei diversi esponenziali

$$\left[\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{2}-\gamma c+\frac{\gamma^2}{4}+c^2+\gamma c\right]A e^{-\frac{\gamma}{2}-ct}+\left[\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{2}-\gamma d+\frac{\gamma^2}{4}+d^2+\gamma d\right]B e^{-\frac{\gamma}{2}-dt}=0 \quad \forall t$$

$$\left[\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}+c^2\right]A e^{-\frac{\gamma}{2}-ct}+\left[\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}+d^2\right]B e^{-\frac{\gamma}{2}-dt}=0 \quad \forall t$$

L'oscillatore armonico smorzato

Risulta

$$c^2=\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2; \qquad d^2=\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2$$

È la stessa equazione, ma dobbiamo scegliere *c* e *d* diversi, quindi sceglieremo segni opposti

Questi calcoli
non vanno svolti per l'esame
orale. Studiare i concetti.

$$c=\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}; d=-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}$$

$$x(t)=A e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\,t}+B e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\,t}$$

L'oscillatore armonico smorzato

Infine consideriamo il caso di $\gamma=2\,\omega_0$ ossia di **smorzamento critico.**

Proponiamo

$$x(t)=A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}+B\,t\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$
$$\dot{x}(t)=-\frac{\gamma}{2}A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}-\frac{\gamma}{2}B\,t\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}+B\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$
$$\ddot{x}(t)=\frac{\gamma^2}{4}A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}+\frac{\gamma^2}{4}B\,t\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}-\gamma B\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

Questi calcoli
non vanno svolti per l'esame
orale. Studiare i concetti.

Effettuiamo le sostituzioni

$$\omega_0^2 A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}+\omega_0^2 B\,t\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}-\frac{\gamma^2}{2}A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}-\frac{\gamma^2}{2}B\,t\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}+\gamma B\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}+$$
$$+\frac{\gamma^2}{4}A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}+\frac{\gamma^2}{4}B\,t\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}-\gamma B\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}=0 \qquad \forall\, t$$

L'oscillatore armonico smorzato

Raggruppiamo i termini in t e quelli senza:

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t} A\left[\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^2}{4}\right] + t\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} B\left[\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^2}{4}\right] = 0 \qquad \forall\, t$$

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t} A\left[\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right] + t\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} B\left[\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right] = 0 \qquad \forall\, t$$

Questi calcoli
non vanno svolti per l'esame
orale. Studiare i concetti.

Ma poiché $\gamma = 2\,\omega_0$ si vede che l'equazione è identicamente vera (i termini dentro parentesi sono identicamente nulli)

L'oscillatore armonico smorzato

In definitiva si ha:

- **Oscillatore sottosmorzato** $$\gamma<2\,\omega_0 \Rightarrow x(t)=A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}\,t+\phi\right)$$

- **Oscillatore ultrasmorzato** $$\gamma>2\,\omega_0 \Rightarrow x(t)=A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,e^{-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\,t}+B\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,e^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\,t}$$

- **Oscillatore con smorzamento critico** $$\gamma=2\,\omega_0 \Rightarrow x(t)=A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}+B\,t\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

L'oscillatore armonico smorzato

In definitiva si ha:

- **Oscillatore sottosmorzato**
- **Oscillatore ultrasmorzato**
- **Oscillatore con smorzamento critico**