**Una legge di forza attiva:**

**La forza elastica**

Forza elastica e legge di Hooke

Molti solidi, se deformati (allungati/compressi), reagiscono con una forza proporzionale allo spostamento dalla posizione di riposo

**Legge di Hooke:**

$$\|\vec{F}\| = k\,\Delta l$$

La direzione della forza è la stessa della deformazione (allungamento/compressione) e verso tale da ripristinare la lunghezza originaria. *k* è detta **costante elastica** e si misura in N/m (dimensioni **[M][T$^{-2}$]**)

Proiettando lungo la direzione di deformazione, indicata con *x*, si scrive

$$F_x = -k\,\Delta x$$

In particolare, se *x = 0* quando il corpo è a riposo, si ha: $F_x = -k\,x$

In questa forma, è detta *forza di richiamo elastica lineare* o *forza di richiamo elastica*

Forza elastica e legge di Hooke

Si parla di *elasticità* se la forza è una funzione reversibile della deformazione, tale che:

$$\vec{F}(\vec{r})=\vec{0} \quad \text{se} \quad \vec{r}=\vec{0}$$

Si parla di *elasticità lineare* se $\vec{F}(\vec{r})=0 \quad \text{se} \quad \vec{F}=-k\,\vec{r}$ ossia se la forza è una funzione lineare dello spostamento (o semplicemente è proporzionale allo spostamento)

*Attenzione al segno: se non fosse negativo, il corpo si allontanerebbe sempre di più dalla posizione di riposo, e quindi si avrebbe una catastrofe!*

Forza elastica e legge di Hooke

Se stiamo considerando la trazione di una barra (ad es. di acciaio)

$$k = E\,A/L_0$$

$A =$ area della sezione trasversa

$L_0 =$ lunghezza a riposo

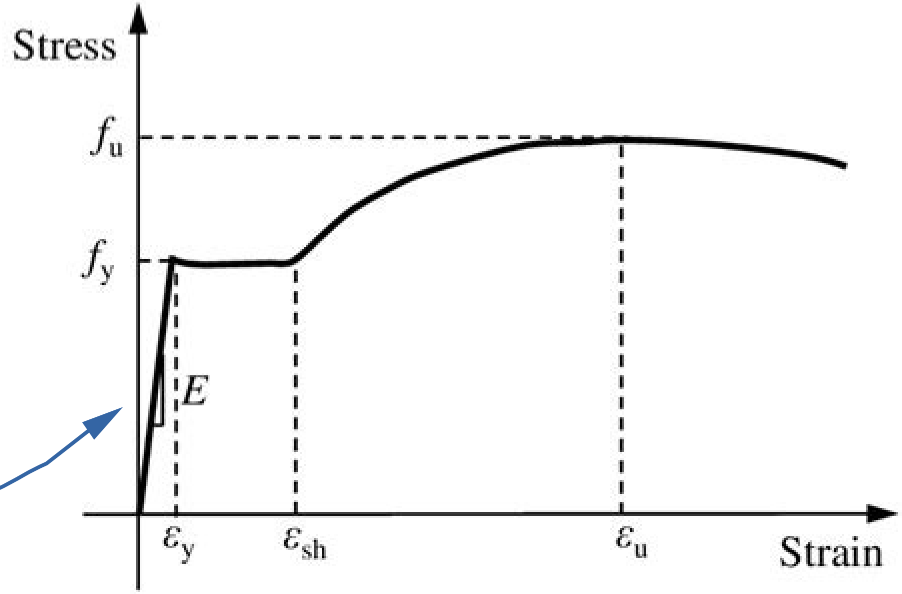
$E =$ modulo di Young

Il modulo di Young si misura in MPa o GPa
(mega-giga Pascal = $N/m^2$)

Per l'acciaio ASTM-A36 $\quad E \simeq 200\,GPa$

Quando le deformazioni non sono piccole, le cose sono molto più complicate!

Regione lineare

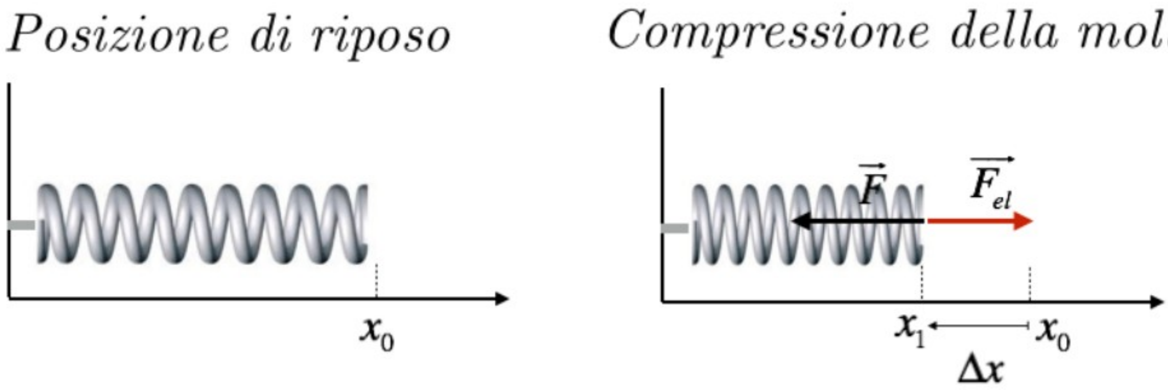


Forza elastica e legge di Hooke

Per esempio, con un tondino da 5 mm e lungo 20 cm di acciaio ASTM-36:

$$A = \pi r^2 = \pi (5\,mm)^2$$
$$L_0 = 20\,cm$$
$$E = 200\,GPa$$
$$k = 78{,}5 \times 10^6\,N/m$$

In pratica queste rigidezze sono eccessive e poco utili e si usano molle elicoidali, che lavorano a torsione (e non a trazione/compressione)



Oscillatore armonico

Consideriamo un punto materiale che si muove solo sull'asse *x*, soggetto ad una forza di richiamo elastica

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}$$
$$F_x = -k\,x$$
$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$
$$F_x = m\,\ddot{x}$$
$$-k\,x = m\,\ddot{x}$$
$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0$$

Ricordiamo che abbiamo già risolto l'equazione differenziale $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

Quindi basta porre $\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Oscillatore armonico

L'equazione del moto sarà $$x = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

Ci rimangono due costanti libere, *A* e *B*. Abbiamo infiniti moti possibili. Dobbiamo ancora sfruttare le **condizioni iniziali**, ossia posizione e velocità iniziale.

Questo vale per ogni moto. Per trovare le equazioni del moto, si scrive il secondo principio della dinamica inserendo le espressioni delle forze attive e passive, e si ottengono infiniti moti possibili. Il moto che il punto materiale compirà dipende dalle condizioni iniziali, che sono **due condizioni vettoriali** (ossia 6 condizioni scalari, 3 per la posizione e 3 per la velocità iniziale). In questo caso si riducono a due perché abbiamo confinato il moto ad una retta.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = B = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = v_0 / \omega_0 \\ B = x_0 \end{cases}$$

Oscillatore armonico

Alternativamente possiamo scrivere $x = A\sin(\omega_0 t + \phi)$

E quindi abbiamo ancora due costanti da fissare, $A$ e $\phi$.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = A\sin\phi = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A\cos\phi = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi = \arctan\dfrac{v_0}{\omega_0 x_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} \end{cases}$$

Si ottiene così il moto dell'**oscillatore armonico libero** con frequenza caratteristica = $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Energia potenziale e forze conservative

Vediamo subito alcune energie potenziali per fissare le idee:

- Energia potenziale della forza peso:

$$U(x,y,z)=m\,g\,z+cost\,.$$
$$\vec{F}=-grad\,U=-\vec{\nabla}\,U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)=0\,\hat{i}+0\,\hat{j}-m\,g\,\hat{k}=-m\,g\,\hat{k}$$

- Energia potenziale della forza elastica (1 dimensione)

$$U(x,y,z)=\frac{1}{2}k\,x^2+cost\,.$$
$$\vec{F}=-grad\,U=-\vec{\nabla}\,U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)=-k\,x\,\hat{i}+0\,\hat{j}+0\,\hat{k}=-k\,x\,\hat{i}$$

Energia potenziale e forze conservative

Vediamo subito alcune energie potenziali per fissare le idee:

- Energia potenziale della forza elastica (2 dimensioni)

$$U(x,y,z)=\frac{1}{2}k\,x^2+\frac{1}{2}k\,y^2+cost.$$

$$\vec{F}=-grad\,U=-\vec{\nabla}\,U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)=-k\,x\,\hat{i}-k\,y\,\hat{j}+0\,\hat{k}=-k\,x\,\hat{i}-k\,y\,\hat{j}$$

- Energia potenziale della forza centrifuga (rotazione intorno all'asse $z$)

$$U(x,y,z)=-\frac{1}{2}m\,\omega^2(x^2+y^2)+cost.$$

$$\vec{F}=-grad\,U=-\vec{\nabla}\,U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)=m\,\omega^2\,x\,\hat{i}+m\,\omega^2\,y\,\hat{j}+0\,\hat{k}=m\,\omega^2(x\,\hat{i}+y\,\hat{j})=m\,\omega^2\,\vec{r}_\perp$$

Applicazioni dell'energia potenziale

- Oscillatore armonico libero

$$U(x)=\frac{1}{2}k\,x^2;\quad F_x=-k\,x$$

- Verifichiamo che l'energia meccanica totale si conserva

$$x(t)=A\sin(\omega_0 t)\qquad (\text{la fase è irrilevante in questo caso, corrisponde solo ad un ritardo temporale})$$

$$U(x)=\frac{1}{2}k\,x^2=\frac{1}{2}k\,A^2\sin^2(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t)=\omega_0 A\cos(\omega_0 t);\qquad K=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}m\,A^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t)$$

$$U+K=\frac{1}{2}k\,A^2\sin^2(\omega_0 t)+\frac{1}{2}m\,A^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t)=\frac{1}{2}A^2\left(k\sin^2(\omega_0 t)+m\,\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t)\right)$$

Applicazioni dell'energia potenziale

- Oscillatore armonico libero
  Ricordiamo che $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
  E quindi

$$U + K = \frac{1}{2} A^2 \left( k \sin^2(\omega t) + m\, \omega^2 \cos^2(\omega t) \right) = \frac{1}{2} A^2 \left( k \sin^2(\omega_0 t) + k \cos^2(\omega_0 t) \right) = \frac{1}{2} k A^2$$

In effetti, durante il moto dell'oscillatore libero, energia potenziale e cinetica si trasformano l'una nell'altra continuamente