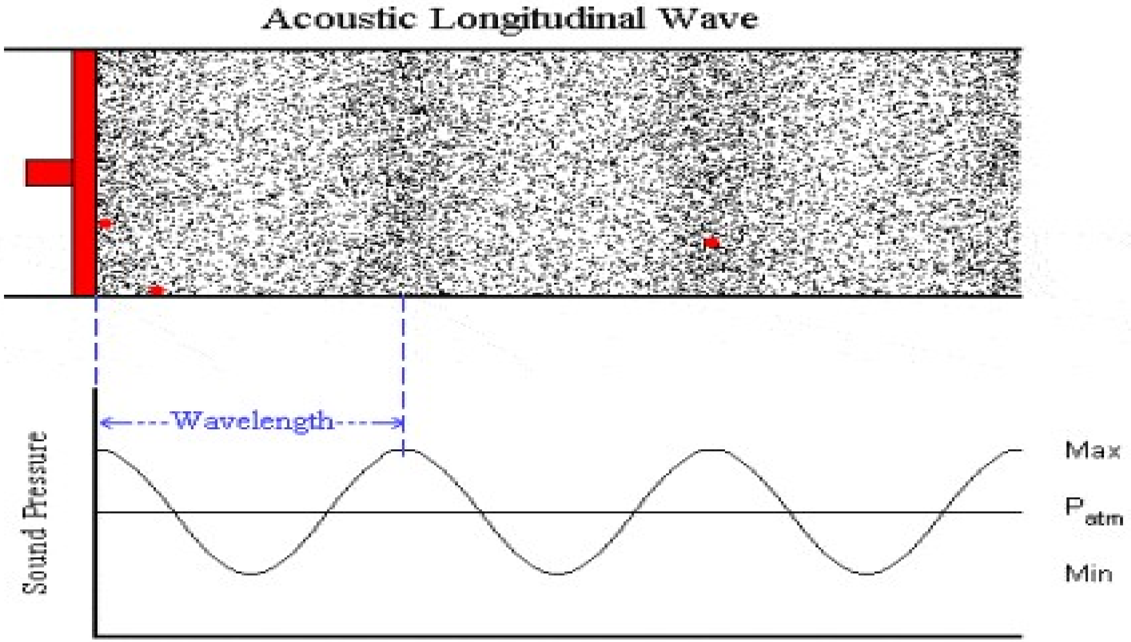
Onde acustiche

Onde di pressione in un fluido (aria, gas, liquidi)

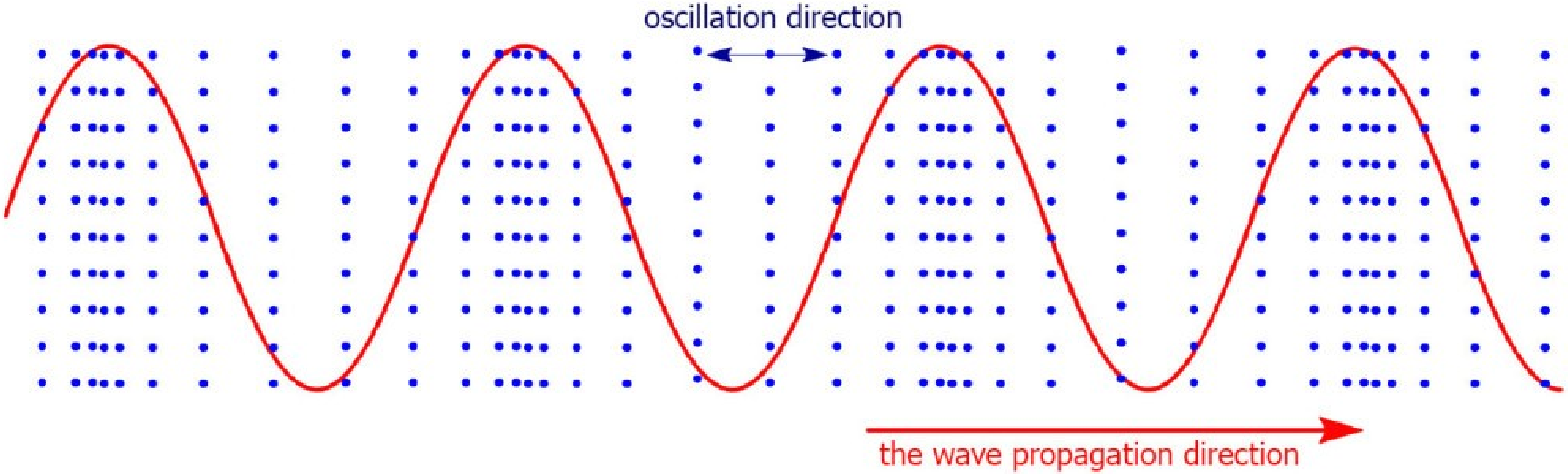


Onde acustiche

Onde di pressione in un fluido (aria, gas, liquidi)

Compressione – espansione (adiabatica, ossia senza flusso di calore)

$$c=\sqrt{\gamma p \frac{V}{M}}=\sqrt{\frac{C_p}{C_v}\frac{RT}{M}} \qquad M = \text{massa molare del gas} \qquad R=8.3145\, J\, mol^{-1} K^{-1}$$



Onde acustiche

Misura d'intensità sonora SPL (Sound Pressure Level)

È riferita alla potenza trasportata dall'onda. Considera il **valore quadratico medio** della pressione:

$$p_{rms}=\frac{1}{T}\int_0^T p^2(t)\,dt \qquad \text{se } p(t)=p_{max}\sin(\omega t) \qquad \frac{1}{T}\int_0^T p_{max}^2\sin^2(\omega t)\,dt=\frac{p_{max}^2}{T}\int_0^T\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt=\frac{p_{max}^2}{2}$$

$$p_{rms}=\frac{p_{max}}{\sqrt{2}}$$

Si misura in dB (deciBel)

$$SPL(dB)=10\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_0}\right)^2=20\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_0}\right)$$

1 Bel → 10 volte un riferimento
2 Bel → 100 volte un riferimento
3 Bel → 1000 volte un riferimento

$$p_0=20\,\mu Pa$$

$$\log_{10}0.5\simeq-0.301\simeq-3\,dB$$

La scala dei Bel è troppo grossolana. I deciBel (dB) sono più pratici.

Onde acustiche

Misura d'intensità sonora SPL (Sound Pressure Level)

$$SPL(dB)=10\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_0}\right)^2=20\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_0}\right)$$

$$1\,Pa\rightarrow 20\log_{10}\frac{1}{20\times10^{-6}}=93{,}98\,dB\simeq 94\,dB$$

$$1\,atm\simeq 10^5\,Pa\rightarrow(20\times5+94)\,dB=194\,dB$$

massimo teorico SPL in atmosfera terrestre per un'onda quadra ($p_{rms}=p_{max}$).

per un'onda sinusoidale $p_{rms}=\frac{1}{\sqrt{2}}p_{max}$ e quindi sottraiamo $20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}}=3\,dB$

$SPL_{max}(dB)=191\,dB$ per onda sinusoidale

In realtà un'onda così forte darebbe origine a processi fisico-chimici estremi

Onde acustiche

Alcuni livelli di riferimento

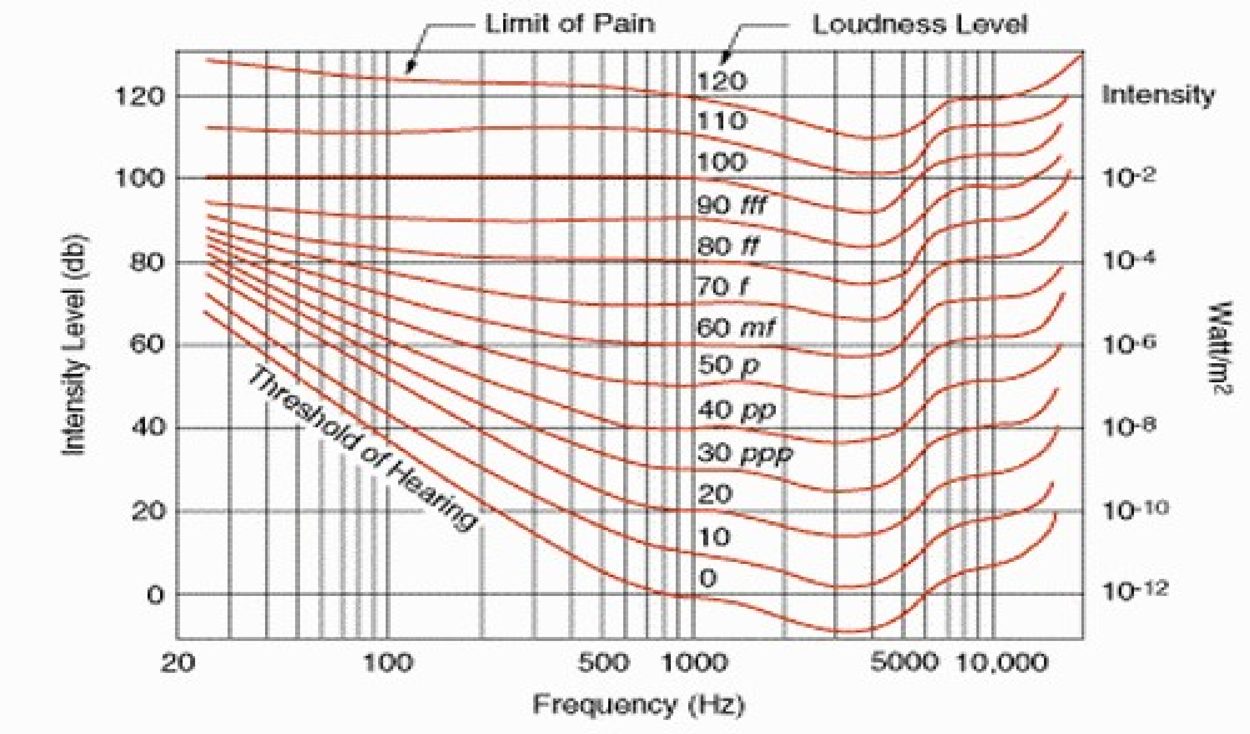
<table>
<tr><th>Livello di intensità dB</th><th>Condizione ambientale</th><th>Effetto sull'uomo</th></tr>
<tr><td>140</td><td>Soglia del dolore</td><td rowspan="2">Lesioni dell'orecchio nel caso di ascolto prolungato</td></tr>
<tr><td>120</td><td>Clacson potente, a un metro</td></tr>
<tr><td>110</td><td>Picchi d'intensità di una grande orchestra</td><td rowspan="3">Zona pericolosa per l'orecchio</td></tr>
<tr><td>100</td><td>Interno della metropolitana</td></tr>
<tr><td>90</td><td>Picchi di intensità di un pianoforte</td></tr>
<tr><td>80</td><td>Via a circolazione media</td><td rowspan="4">Zona di fatica</td></tr>
<tr><td>75</td><td>Voce forte, a un metro</td></tr>
<tr><td>70</td><td>Conversazione normale, a un metro</td></tr>
<tr><td>60</td><td>Ufficio commerciale</td></tr>
<tr><td>50</td><td>Salotto calmo</td><td rowspan="2">Zona di riposo (giorno)</td></tr>
<tr><td>40</td><td>Biblioteca</td></tr>
<tr><td>30</td><td>Camera da letto molto calma (notte)</td><td rowspan="3">Zona di riposo (notte)</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Studio di radiodiffusione</td></tr>
<tr><td>0</td><td>Soglia di udibilità</td></tr>
</table>

Onde acustiche

L'orecchio umano è sensibile da ~50 Hz a ~20000 Hz

Frequenza < 50 Hz: infrasuoni

Frequenza > 20000 Hz: ultrasuoni



Richiami ed argomenti correlati

Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

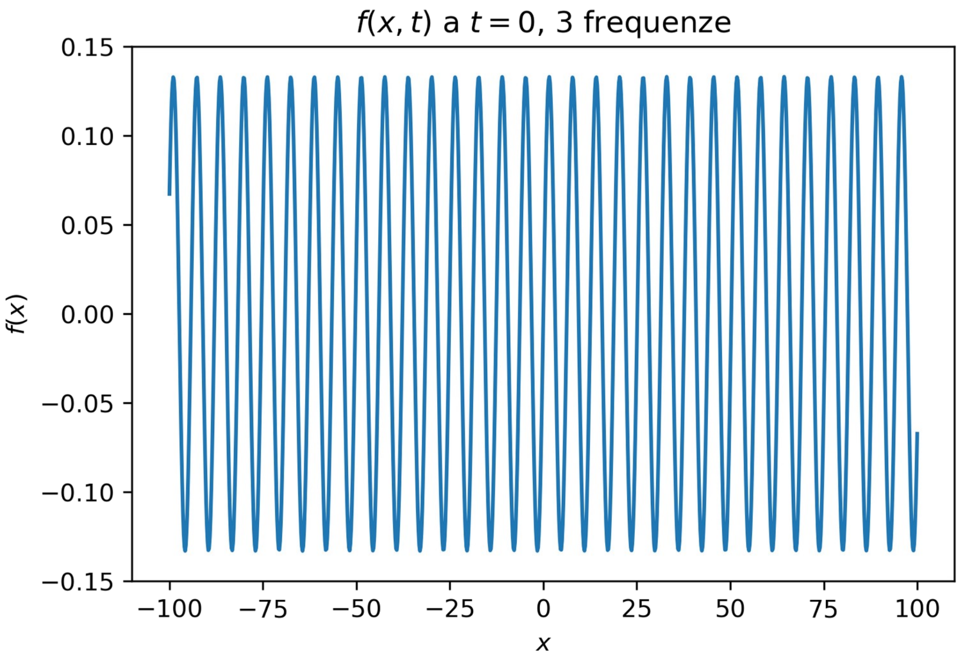
Se, anziché sommare componenti sinusoidali tutte multiple di una frequenza base, sommiamo componenti di frequenze molto simili, possiamo creare quello che si chiama un pacchetto di onde.

$$f(x,t)=\sum_i^N A_i \sin(k_i x-\omega_i t)$$

per esempio: $\omega_c = 10\,Hz\,;$

$$\omega_1=\omega_c-1\,Hz\,,\ \omega_3=\omega_c+1\,Hz\,;\ k_i=\frac{\omega_i}{v}$$

$$A_i=\frac{1}{N\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(\omega_i-\omega_c)^2}{2\sigma^2}}$$



Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

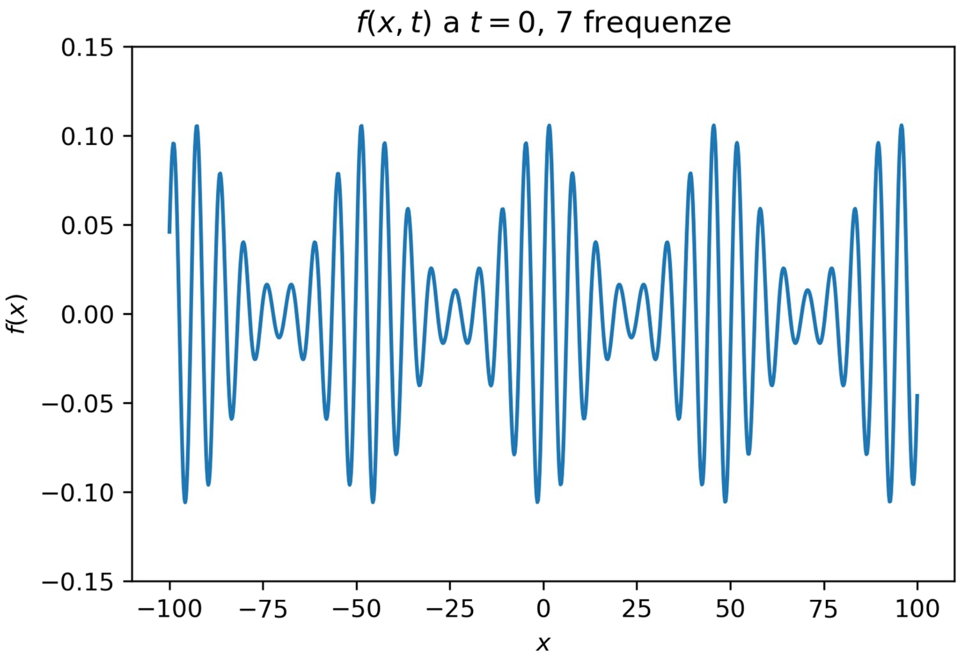
Se, anziché sommare componenti sinusoidali tutte multiple di una frequenza base, sommiamo componenti di frequenze molto simili, possiamo creare quello che si chiama un pacchetto di onde.

$$f(x,t)=\sum_i^N A_i \sin(k_i x-\omega_i t)$$

per esempio: $\omega_c = 10\,Hz$;

$$\omega_1=\omega_c-1\,Hz,\ \omega_7=\omega_c+1\,Hz;\ k_i=\frac{\omega_i}{v}$$

$$A_i=\frac{1}{N\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\omega_i-\omega_c)^2}{2\sigma^2}}$$



Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

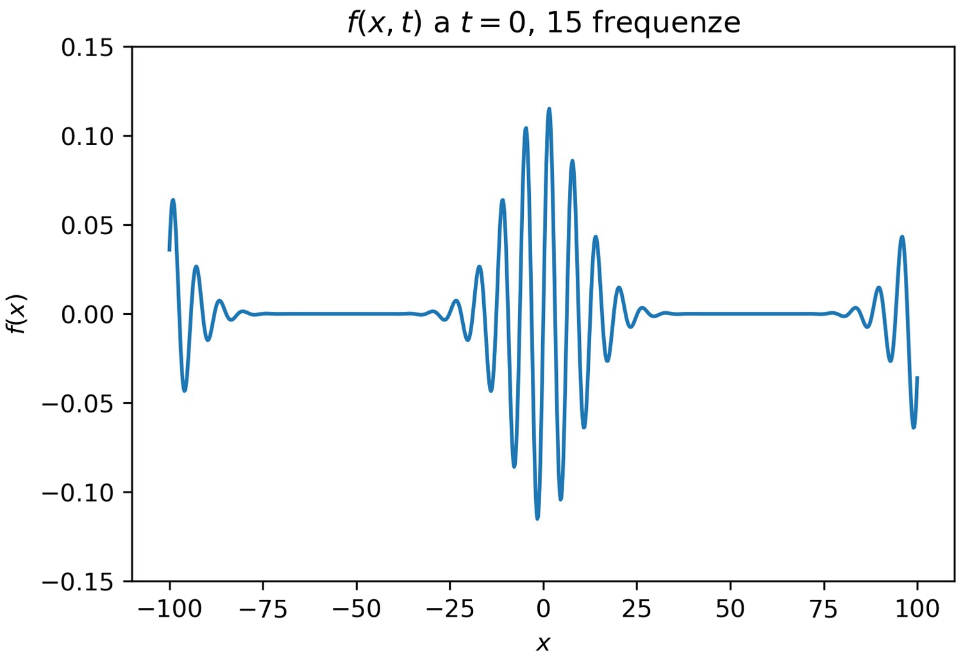
Se, anziché sommare componenti sinusoidali tutte multiple di una frequenza base, sommiamo componenti di frequenze molto simili, possiamo creare quello che si chiama un pacchetto di onde.

$$f(x,t)=\sum_i^N A_i \sin(k_i x-\omega_i t)$$

per esempio: $\omega_c=10\,Hz$;

$$\omega_1=\omega_c-1\,Hz\,,\ \omega_{15}=\omega_c+1\,Hz\,;\ k_i=\frac{\omega_i}{v}$$

$$A_i=\frac{1}{N\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\omega_i-\omega_c)^2}{2\sigma^2}}$$



Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

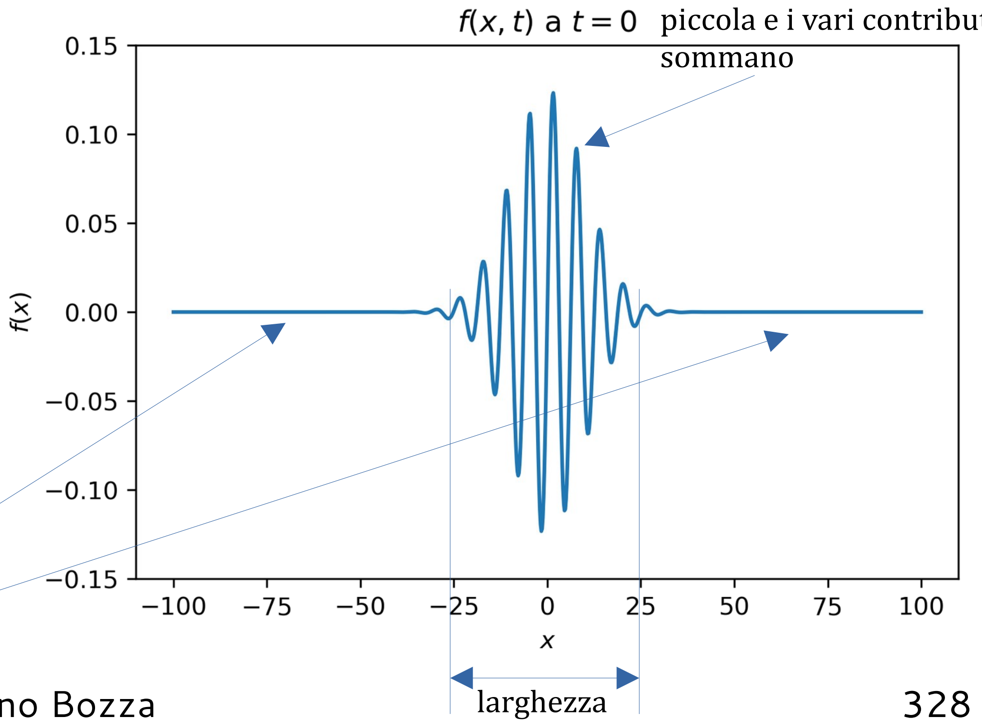
Se, anziché sommare componenti sinusoidali tutte multiple di una frequenza base, sommiamo componenti di frequenze molto simili, possiamo creare quello che si chiama un pacchetto di onde.

$$f(x,t)=\sum_{i}^{N} A_i \sin(k_i x-\omega_i t)$$

per esempio: $\omega_c = 10\,Hz$;

$$\omega_1=\omega_c-1\,Hz\,,\ \omega_{1001}=\omega_c+1\,Hz\,;\ k_i=\frac{\omega_i}{v}$$

$$A_i=\frac{1}{N\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(\omega_i-\omega_c)^2}{2\sigma^2}}$$



Qui la differenza di fase è piccola e i vari contributi si sommano

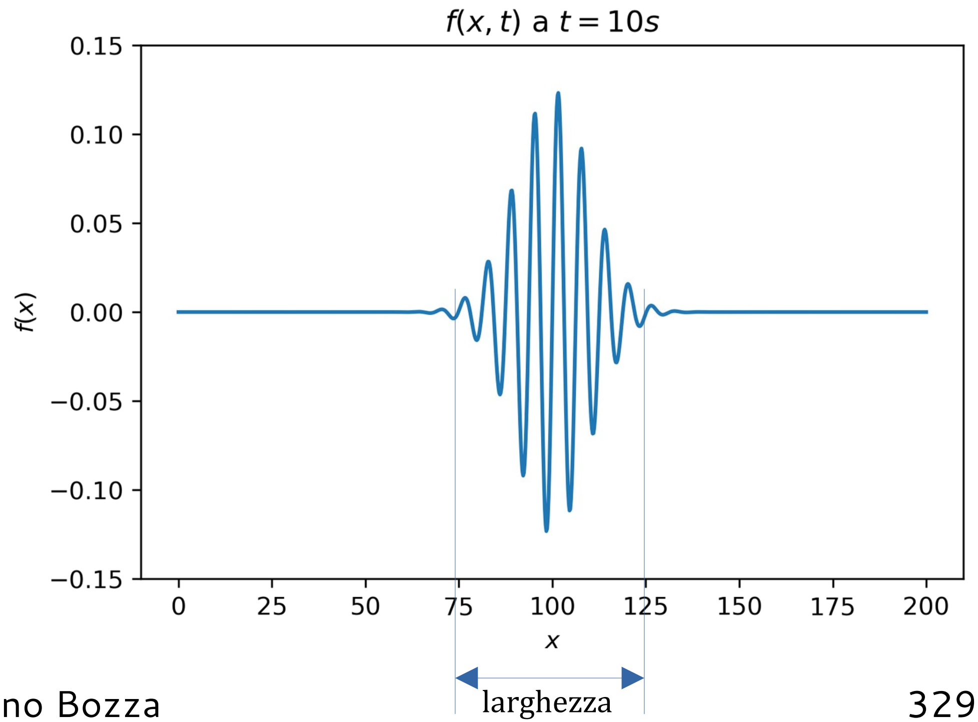
Qui la differenza di fase fa sì che le onde si annullino per interferenza reciproca

Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

Se lasciamo evolvere il pacchetto d'onda per un certo tempo, e per ogni frequenza $k_i = \omega_i / v \quad (v = cost.)$ (il mezzo *non è dispersivo*), esso trasla rimanendo invariato

$$f(x,t) = \sum_i^N A_i \sin(k_i x - \omega_i t)$$



Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

Consideriamo il caso, abbastanza frequente in realtà, in cui la velocità di propagazione dipenda leggermente dalla frequenza.

$$k_i = \omega_i / v(\omega_i)$$

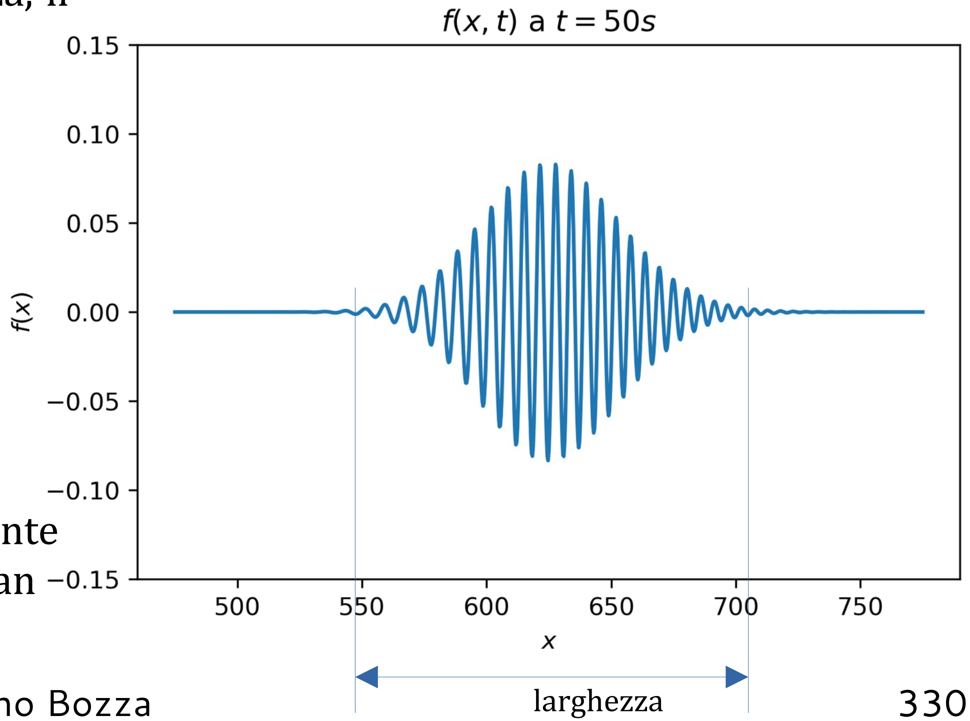
Se la velocità di propagazione dipende dalla frequenza, il mezzo si dice **dispersivo**

Esempio (esagerato!)

$$k = \frac{\omega}{v(\omega_c)(1+0.1(\omega-\omega_c)/\omega_c)}$$

Dopo $t = 50\ s$, il pacchetto d'onda è circa 3 volte più largo che $t = 0\ s$; inoltre si è ridotto di intensità

In pratica, tutti i mezzi hanno caratteristiche lievemente dispersive, e quindi i pacchetti d'onda si allargano man mano che si allontanano dal punto di produzione



Energia di un’onda

Per ricavare un’espressione dell’energia associata ad un’onda, ritorniamo ad una delle equazioni della corda vibrante, prima del passaggio al limite continuo:

$$m\,\ddot{y}(x)=T\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

L’energia cinetica associata a ciascun punto materiale si ottiene facilmente:

$$K_i=\frac{1}{2}m\left(\dot{y}(x)\right)^2;\qquad \frac{dK_i}{dx}=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

Per quella potenziale, ricordiamo che si tratta di termini di interazione tra punti materiali, e bisogna evitare i doppi conteggi: quindi includeremo solo l’interazione con $x+\Delta x$ e non con $x-\Delta x$.

$$U(x)=\sum_i \frac{1}{2}T\frac{\left(y(x_i+\Delta x)-y(x_i)\right)^2}{\Delta x}$$

Energia di un'onda

Verifichiamo l'espressione della forza

$$F(x_i) = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{T\left(y(x_i+\Delta x) - y(x_i)\right) - T\left(y(x_i) - y(x_i+\Delta x)\right)}{\Delta x}$$

L'energia potenziale associata a ciascun punto materiale si ottiene facilmente:

$$U(x) = \frac{1}{2} T \frac{\left(y(x_i+\Delta x) - y(x_i)\right)^2}{\Delta x}; \qquad \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = \frac{1}{2} T \frac{\left(y(x_i+\Delta x) - y(x_i)\right)^2}{\Delta x^2}$$

E per tratti molto piccoli:

$$\frac{dU}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2} T \frac{\left(y(x_i+\Delta x) - y(x_i)\right)^2}{\Delta x^2} = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Energia di un'onda

L'energia meccanica totale di un tratto infinitesimo di corda è $\frac{dE}{dx}=\frac{dK}{dx}+\frac{dU}{dx}=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

Per un tratto finito abbiamo $\Delta E=\int_{x_i}^{x_f}\left(\frac{dK}{dx}+\frac{dU}{dx}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_f}\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx$

Per un'onda sinusoidale

$$\frac{dE}{dx}=\frac{dK}{dx}+\frac{dU}{dx}=\left(\frac{1}{2}\mu\,\omega^2A^2\cos^2(kx-\omega t)+\frac{1}{2}T\,k^2A^2\cos^2(k\,x-\omega t)\right)=$$
$$=\mu\,\omega^2A^2\cos^2(k\,x-\omega t)\qquad \text{Ricordiamo che } k=\omega/v \text{ e } v^2=T/\mu$$

Energia di un'onda

Una **lunghezza d'onda è la distanza coperta dall'onda in un periodo** $L = T\,v = \frac{T\,\omega}{k}$

L'energia contenuta in un tratto corrispondente ad una lunghezza d'onda è:

$$E_L = \int_{x_i}^{x_i+L} \mu\,\omega^2 A^2 \cos^2(k\,x - \omega t)\,dx = \mu\,\omega^2 A^2 \int_{x_i}^{x_i+L} \cos^2(k\,x - \omega t)\,dx =$$

$$= \mu\,\omega^2 A^2 \int_{x_i}^{x_i+L} \frac{1}{2}[1 + \cos(2k\,x - 2\,\omega t)]\,dx = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 A^2 L$$

L'energia è sempre la stessa in qualsiasi tratto di lunghezza pari ad una lunghezza d'onda. L'energia media è:

$$\frac{\Delta \bar{E}}{\Delta x} = \frac{E_L}{L} = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 A^2$$

Quindi non c'è un reale trasporto di energia e informazione.

Nota: l'energia in un'onda dipende sempre dal quadrato dell'ampiezza.

Energia di un'onda

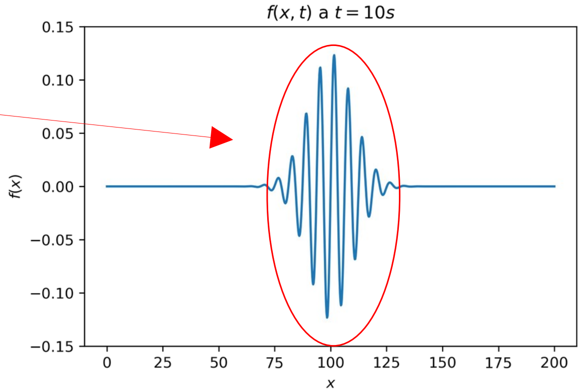
La densità di energia in ciascun tratto tra due nodi (passaggio per 0) è sempre la stessa.

Quindi non c'è trasporto di energia!

Un'onda sinusoidale infinita non trasporta energia!

$$\Delta E=\int_{x_i}^{x_f}\left(\frac{dK}{dx}+\frac{dU}{dx}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_f}\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

Consideriamo l'integrando per un pacchetto d'onda:
è diverso da 0 solo in questa regione



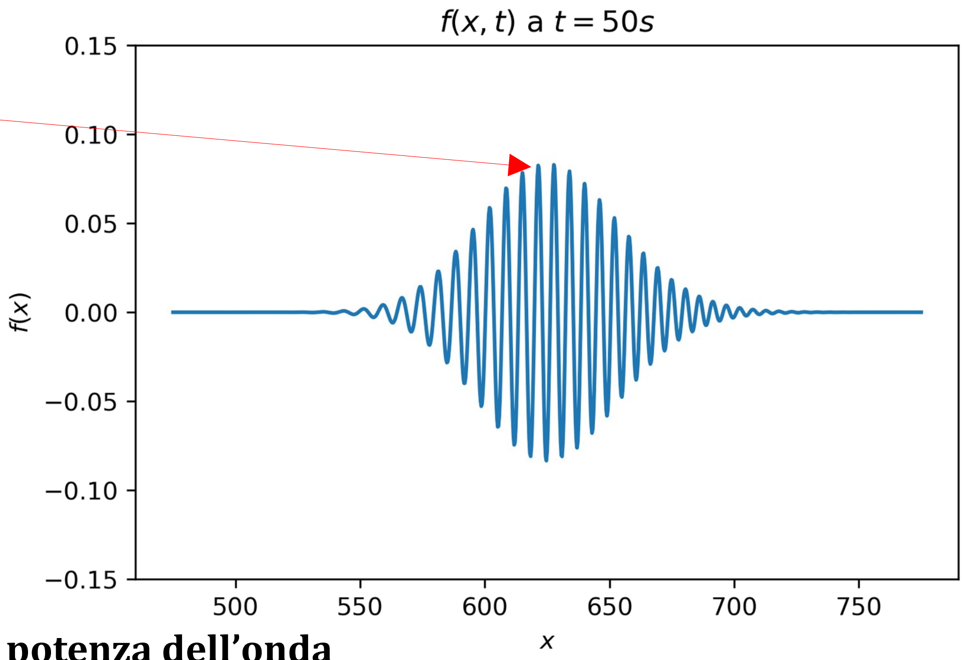
Ma le componenti dell'onda si estendono all'infinito!

Un treno d'onda o pacchetto d'onda è fatto di componenti estese all'infinito, ma la sua energia è concentrata in una regione finita, ed effettivamente viaggia!

Energia e potenza di un'onda

Ritorniamo a considerare un pacchetto in un mezzo dispersivo

La velocità con cui viaggia l'energia del pacchetto è la velocità con cui si sposta il punto di massima ampiezza.



Questo non coincide necessariamente con nessuna delle velocità di propagazione di ciascuna delle componenti

Velocità di fase: velocità di propagazione di una sola componente dell'onda.

Velocità di gruppo: velocità di propagazione dell'energia del treno di onde

Le due velocità sono in generale diverse!

L'energia trasportata da un'onda per unità di tempo si dice potenza dell'onda

Tutte queste considerazioni svolte per la corda vibrante valgono per qualsiasi onda meccanica (e non solo).