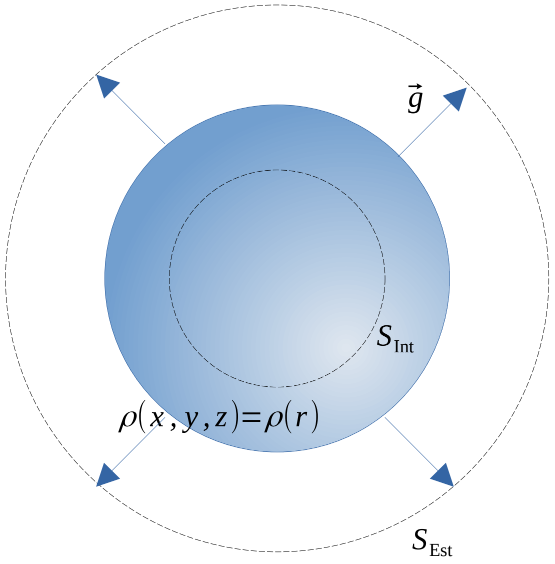
Applicazioni del teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Supponiamo di avere una distribuzione di densità di massa con simmetria sferica.

Anche il campo gravitazionale avrà la stessa simmetria.

Per calcolare il campo in un punto si dovrebbe usare:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \int_V G \frac{\rho(x,y,z)}{\|(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-\vec{r}\|^3}((x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-\vec{r})\,dx\,dy\,dz$$



Questo integrale non è facilmente calcolabile.

Grazie al teorema di Gauss e alla simmetria sferica invece possiamo osservare che per tutta una superficie posta a distanza *r* dal centro il campo è sempre ortogonale alla superficie, e quindi parallelo alla normale:

$$\vec{g}(x,y,z)\cdot d\vec{S} = \vec{g}(x,y,z)\cdot\hat{n}\,dS = -\|\vec{g}(x,y,z)\|\,dS = -\|\vec{g}\|(r)\;\; r^2\,d\Omega$$

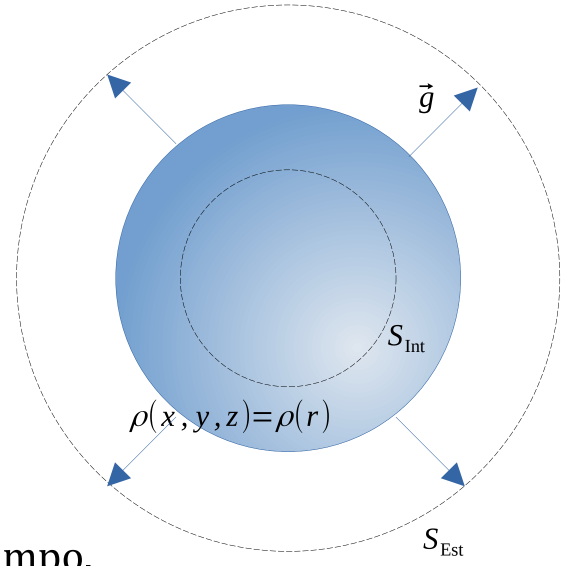
Applicazioni del teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Supponiamo di avere una distribuzione di densità di massa con simmetria sferica.

Quindi per simmetria abbiamo:

$$\vec{g}(x,y,z)\cdot\vec{dS}=\vec{g}(x,y,z)\cdot\hat{n}\,dS=-\|\vec{g}(x,y,z)\|\,dS=-\|\vec{g}\|(r)\;\;r^2\,d\Omega$$

$$\Phi=\int_S \vec{g}(x,y,z)\cdot\vec{dS}=-\int_\Omega \|\vec{g}\|(r)\;\;r^2\,d\Omega=-4\pi r^2\|\vec{g}\|(r)$$



Dal teorema di Gauss:

$$\Phi=\int_S \vec{g}\cdot\vec{ds}=-4\pi G\,M_{\mathrm{int}}$$

Dove M_{int} somma solo le masse all’interno della superficie su cui valutiamo il campo.

Dal confronto si ha:

$$\boxed{-4\pi r^2\|\vec{g}\|(r)=-4\pi G\,M_{\mathrm{int}}\Rightarrow\|\vec{g}\|(r)=G\frac{M_{\mathrm{int}}}{r^2}}$$

Applicazioni del teorema di Gauss per il campo gravitazionale

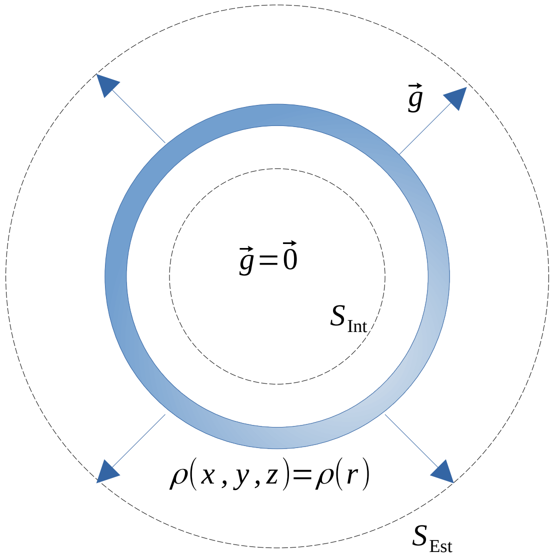
Quindi:
$$\boxed{\vec{g}(\|\vec{r}\|) = -G\frac{M_{\text{int}}}{r^2}\hat{r}}$$

1) È perfettamente lecito considerare tutte le masse a simmetria sferica concentrate nel loro centro e calcolare da lì il campo e la forza (come nel caso dell'esperienza di Cavendish)

2) Per una superficie interna ad una distribuzione sferica il campo deriva solo dalle masse all'interno

3) Per una sfera cava, il campo dentro la sfera è identicamente nullo in tutti i punti della cavità

4) ...



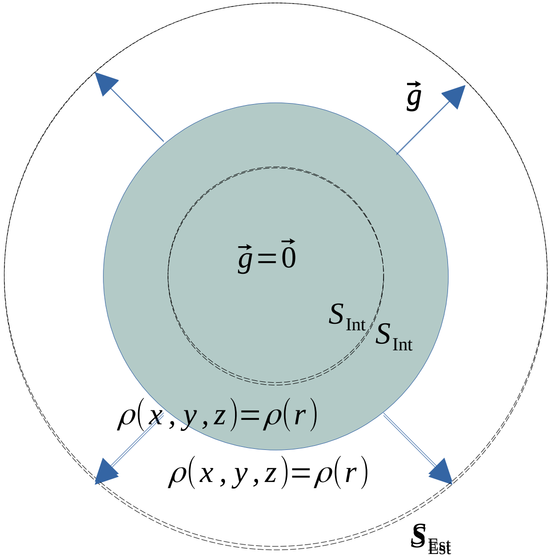
Applicazioni del teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Sappiamo che:

$$\boxed{\vec{g}(\|\vec{r}\|) = -G\frac{M_{\text{int}}}{r^2}\hat{r}}$$

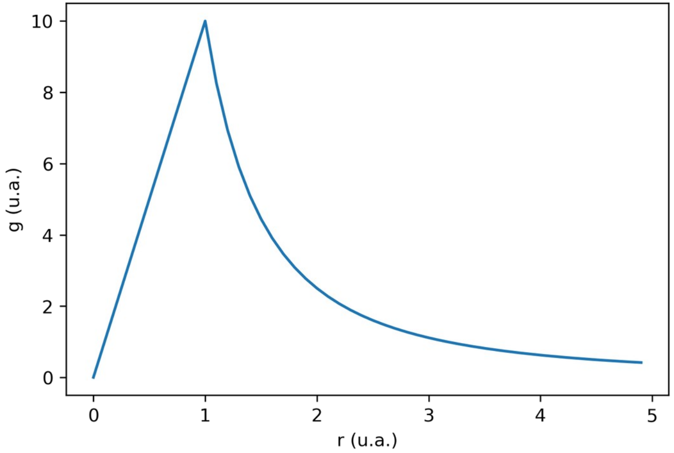
4) Per una sfera di densità costante:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\frac{M_{\text{int}}}{r^2}\hat{r} = -G\frac{4}{3}\pi\rho_{\text{int}}\frac{r^3}{r^2}\hat{r} = -\frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{int}} r\,\hat{r} = -\frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{int}}\vec{r}$$



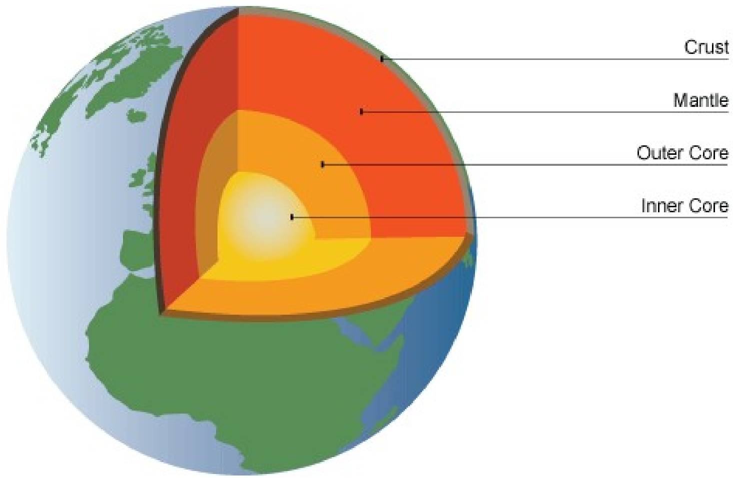
Il campo aumenta linearmente dal centro alla periferia, per poi diminuire

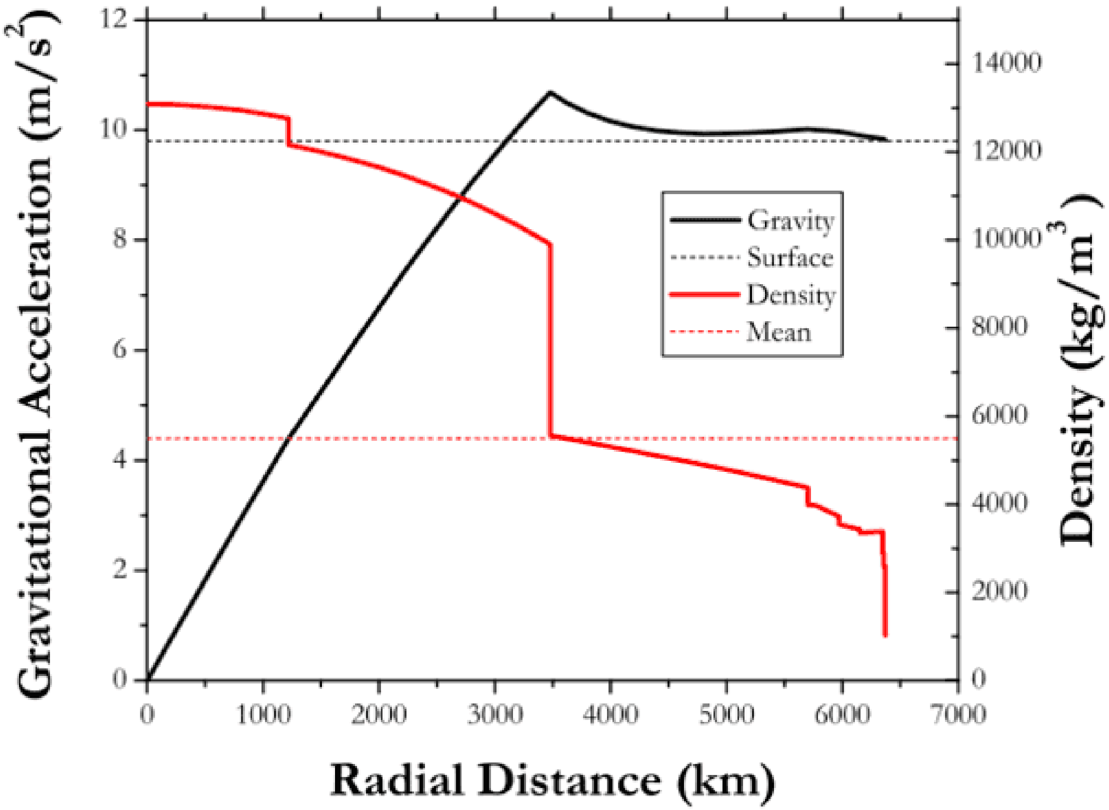
Infatti anche la forza peso diminuisce se si penetra in profondità



Profili di densità e campo gravitazionale terrestri

Modello di densità della Terra





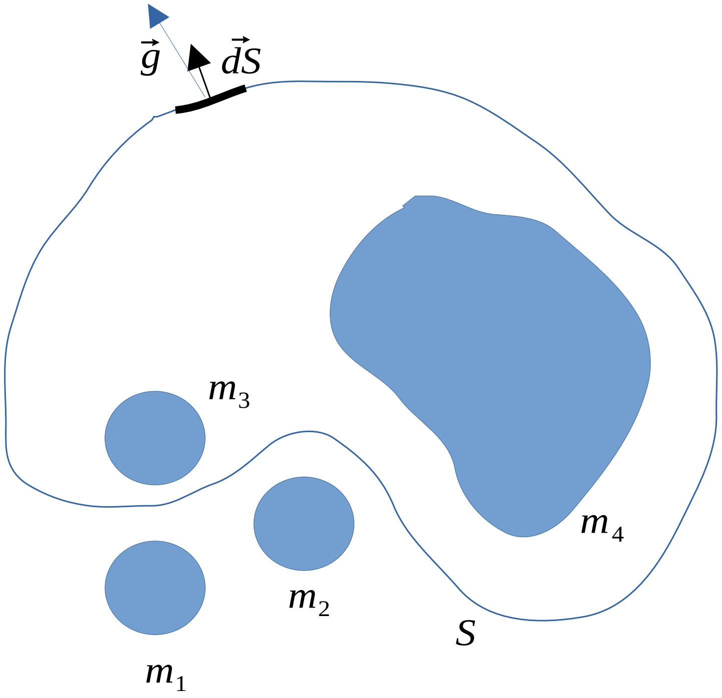
Richiami ed argomenti correlati

Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Il teorema di Gauss è legato alla proprietà fondamentale del campo gravitazionale di scalare con il quadrato della distanza. Lo stesso teorema vale per tutti i campi centrali con dipendenza $1/r^2$.

Questo teorema consente di calcolare facilmente il campo gravitazionale di distribuzioni di massa particolarmente simmetriche, o comunque riconducibili ad esse.

Consideriamo una qualsiasi distribuzione di masse (possiamo assumerla con simmetria sferica oppure no, questo non è importante). Consideriamo inoltre una superficie chiusa *S*, che può racchiudere tutte le masse, nessuna, o parte di esse.



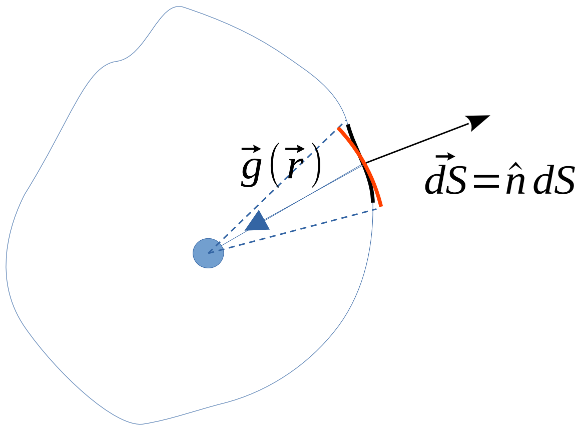
Il *flusso* del campo gravitazionale è così definito:

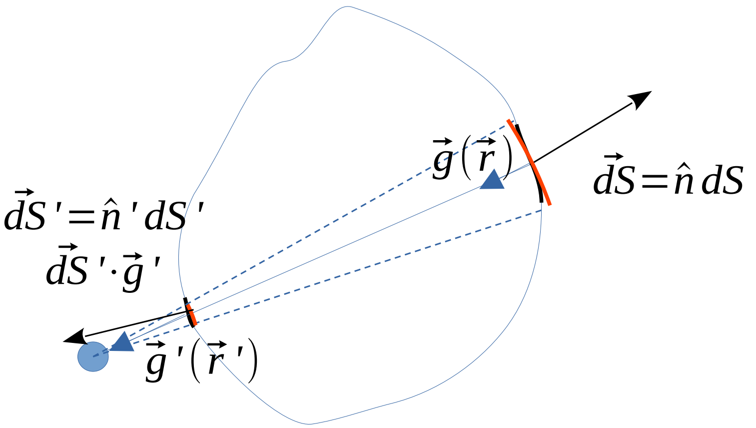
$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n}\, dS$$

Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Consideriamo una superficie chiusa intorno ad un punto materiale dotato di attrazione gravitazionale.

Per un punto interno tutti i contributi al flusso sono positivi. Per uno esterno, si annullano a coppie.





$$\vec{dS}\cdot\hat{r}=r^2\,d\Omega$$

$$\vec{dS}\cdot\vec{g}=\vec{dS}\cdot\hat{g}\,\|\vec{g}\|=-\vec{dS}\cdot\hat{r}\,G\frac{m}{r^2}=-r^2\,d\Omega\,G\frac{m}{r^2}$$

$$\vec{dS}\cdot\hat{g}=-G\,m\,d\Omega$$

$$\vec{dS}\cdot\hat{r}=r^2\,d\Omega$$

$$\vec{dS}\cdot\vec{g}=\vec{dS}\cdot\hat{g}\,\|\vec{g}\|=-\vec{dS}\cdot\hat{r}\,G\frac{m}{r^2}=-r^2\,d\Omega\,G\frac{m}{r^2}=-G\,m\,d\Omega$$

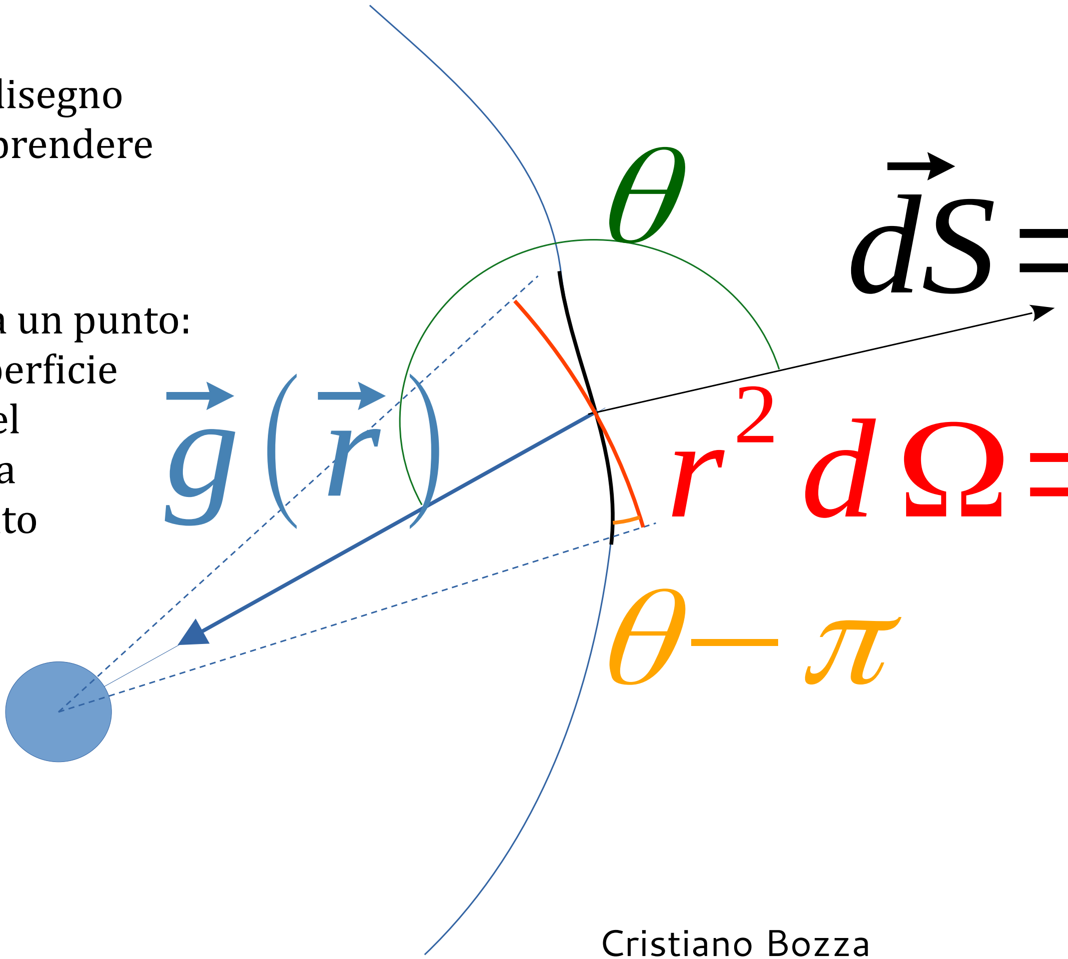
$$\vec{dS}'\cdot\vec{g}'=G\,m\,d\Omega'=G\,m\,d\Omega$$

Il flusso e gli angoli solidi

Ingrandiamo il disegno
per meglio comprendere

Angolo solido da un punto:
rapporto tra superficie
dS e quadrato del
raggio della sfera
centrata nel punto

Tutta l'area
della superficie
sferica: $4\,\pi$



$$\vec{dS} = \hat{n}\, dS$$

$$r^2\, d\Omega = -d\, S \cos\theta$$

Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

In definitiva, per ogni elemento di superficie chiusa intorno alla distribuzione di masse il contributo al flusso è

$$d\Phi = -G\,m\,d\Omega$$

mentre per quelle esterne alla superficie chiusa si ha: $d\Phi = 0$

Per il flusso di campo gravitazionale di una massa abbiamo, **indipendentemente dalla forma della superficie:**

$$\Phi_i = \int_\Omega \frac{d\Phi_i}{d\Omega}\,d\Omega = \begin{cases} m_i\,interna \rightarrow -G\,m_i \int_\Omega d\Omega = -4\pi G\,m_i \\ m_i\,esterna \rightarrow 0 \end{cases}$$

E per una distribuzione: $$\Phi = \sum_i \int_\Omega \frac{d\Phi_i}{d\Omega}\,d\Omega = -4\pi G \sum_{\text{i interne}} m_i$$

Il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è proporzionale solo alle masse all'interno della superficie. La costante di proporzionalità è 4πG.

Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Se anziché avere un insieme di masse puntiformi abbiamo una distribuzione continua di massa, conviene introdurre il concetto di densità.

Densità media: $$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Densità locale: $$\rho(x,y,z)=\frac{dm}{dV}=\frac{d^3 m}{dx\,dy\,dz}$$

La massa totale è $$M=\int_V \frac{dm}{dV}\,dV=\int_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Il campo è $$\vec{g}(\vec{r})=\int_V G\frac{\rho(x,y,z)}{\|(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-\vec{r}\|^3}((x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-\vec{r})\,dx\,dy\,dz$$

Il flusso è $$\Phi=\int_S \vec{g}\cdot d\vec{S}=-4\pi G M_{interna}$$