Moti relativi

Moti relativi

Non esiste un osservatore privilegiato. Naturalmente, alcuni osservatori rendono i calcoli più semplici, ma i fenomeni fisici devono essere gli stessi, qualunque sia l'osservatore che li descrive.

Come si passa dalla descrizione di un osservatore a quella di un altro?

Ricordiamo che osservatore =

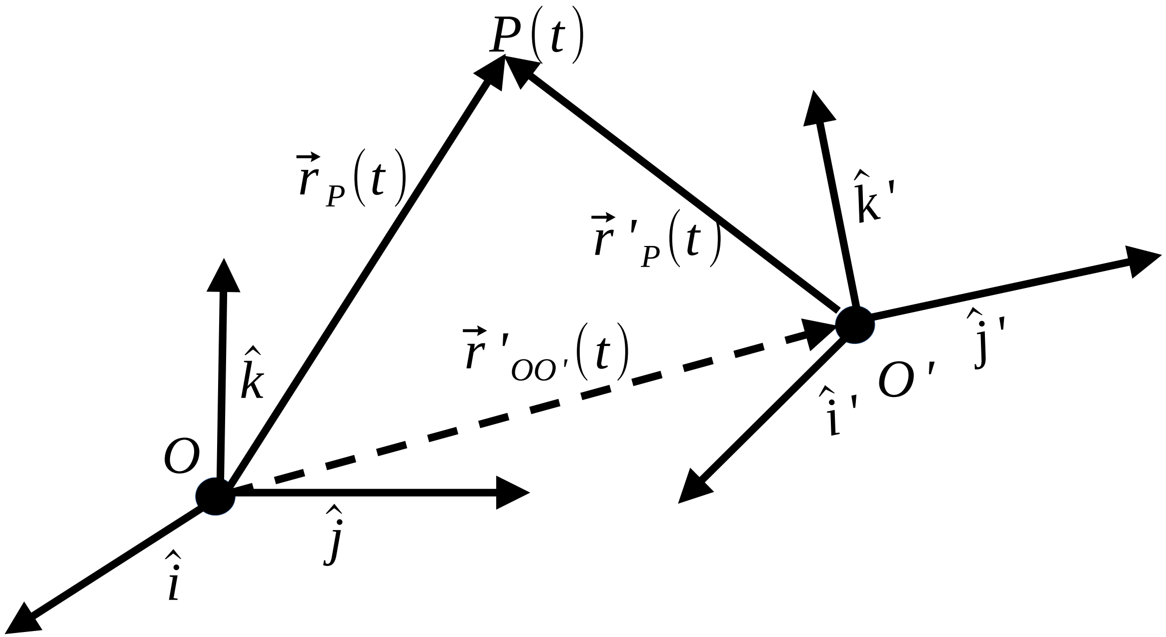
1) Origine di un sistema di riferimento
2) Terna ortonormale (possibilmente levogira)
3) Sistema di orologi tutti sincronizzati in ogni punto dello spazio

Nella **relatività galileiana**, ossia della meccanica classica, tutti gli osservatori usano lo stesso tempo, mentre possono cambiare (1) e (2), ossia origine e terna ortonormale

Il calcolo vettoriale ci aiuterà anche in questo caso: le posizioni sono le stesse, ma i vettori posizione cambiano, e diversi osservatori li descriveranno in maniera diversa.

Moti relativi

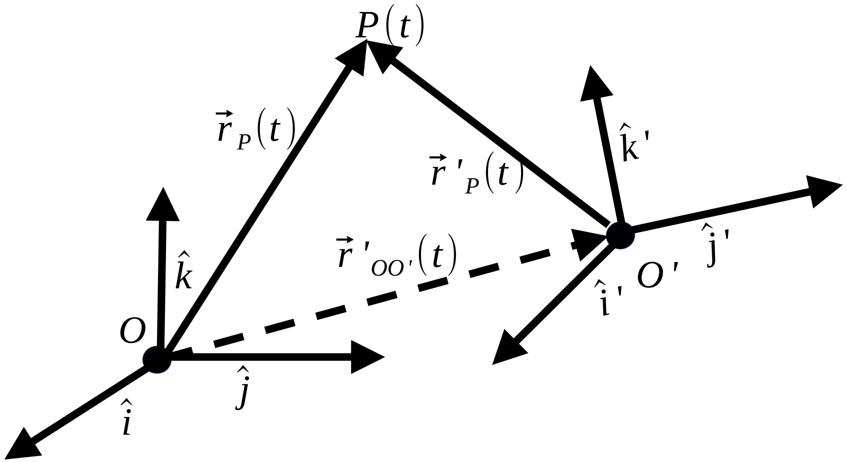
Consideriamo quindi due osservatori l'uno in moto rispetto all'altro:



Moti relativi

Sappiamo già che:

$$\vec{r}_P(t)=\vec{r}_{P'}(t)+\vec{r}_{OO'}(t)$$



Tuttavia l'osservatore in O vorrà usare i suoi versori di base **ijk** per descrivere la posizione del punto P, mentre l'osservatore in O' vorrà usare **i'j'k'**

Per comodità il vettore posizione dell'osservatore O' rispetto ad O sarà scritto usando il riferimento di O (si può fare l'opposto, usando O', ma la trattazione non cambia significato).

$$\vec{r}_P(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}=x'(t)\hat{i}'(t)+y'(t)\hat{j}'(t)+z'(t)\hat{k}'(t)+\Delta_x(t)\hat{i}+\Delta_y(t)\hat{j}+\Delta_z(t)\hat{k}$$

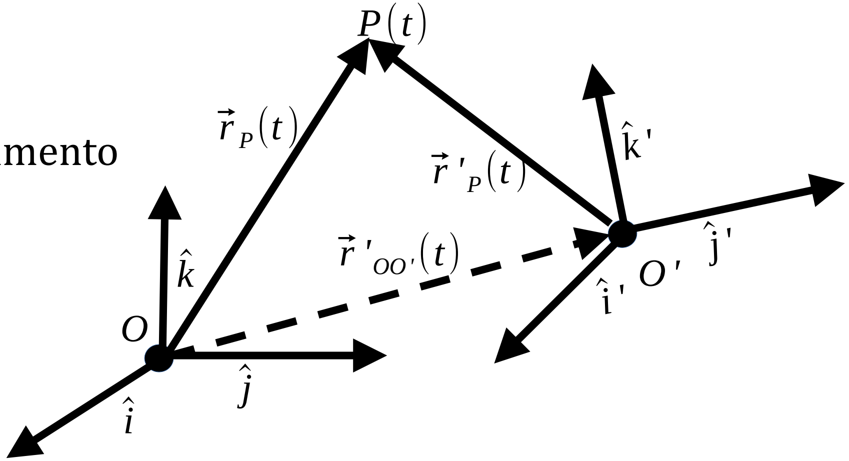
Si possono naturalmente esprimere i versori **i'j'k'** nella base **ijk** e ottenere un'uguaglianza tra componenti

Attenzione: i versori dell'osservatore O' dipendono dal tempo!

Moti relativi

Che cosa accade per le velocità?

Basta derivare rispetto al tempo, ma attenzione: i versori **i'j'k'**
in generale possono cambiare rispetto a **ijk**, se il sistema di riferimento
O' sta **ruotando**!



$$\vec{v}_P(t)=\frac{d}{dt}\vec{r}_P(t)=\dot{x}\,\hat{i}+\dot{y}\,\hat{j}+\dot{z}\,\hat{k}=$$

$$=\dot{x}'(t)\,\hat{i}'+\dot{y}'(t)\,\hat{j}'+\dot{z}'(t)\,\hat{k}'+x'(t)\frac{d\,\hat{i}'}{dt}+y'(t)\frac{d\,\hat{j}'}{dt}+z'(t)\frac{d\,\hat{k}'}{dt}+$$

$$+\dot{\Delta}_x(t)\,\hat{i}+\dot{\Delta}_y(t)\,\hat{j}+\dot{\Delta}_z(t)\,\hat{k}$$

Moti relativi

Riconosciamo i vari termini

$$\dot{x}'(t)\hat{i}'+\dot{y}'(t)\hat{j}'+\dot{z}'(t)\hat{k}'=\vec{v}'_P(t)=\text{velocità di P in O'}$$

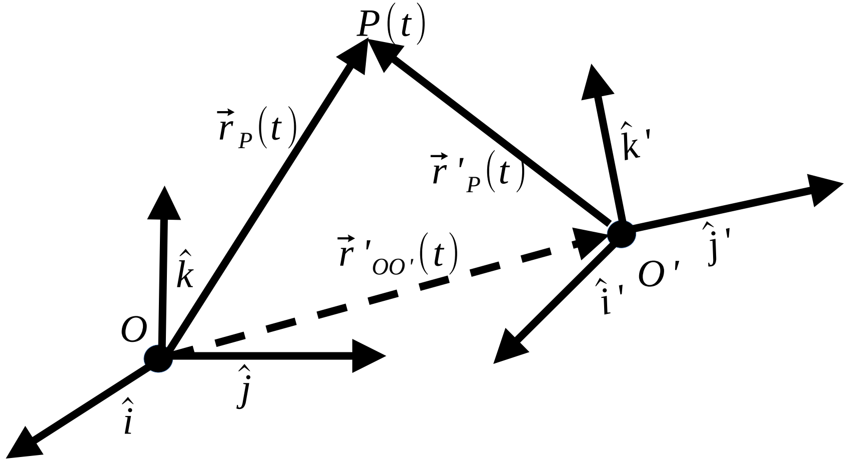
$$x'(t)\frac{d\hat{i}'}{dt}+y'(t)\frac{d\hat{j}'}{dt}+z'(t)\frac{d\hat{k}'}{dt}=???$$

$$\dot{\Delta}_x(t)\hat{i}+\dot{\Delta}_y(t)\hat{j}+\dot{\Delta}_z(t)\hat{k}=\vec{v}_{OO'}(t)=\text{velocità di O' rispetto ad O}$$

Ricordiamo che:

1) La derivata di un versore è ortogonale al versore

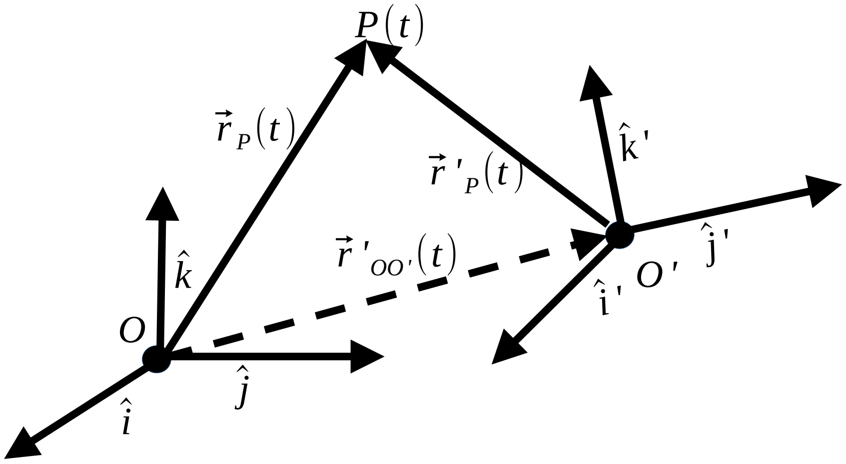
2) Se una terna di versori sta ruotando con velocità angolare **ω** rispetto all'altra, possiamo usare la conoscenza che le derivate temporali di vettori rotanti si possono scrivere come prodotti vettoriali della velocità angolare con ciascun vettore rotante



Moti relativi

Riconosciamo i vari termini

$$\frac{d\hat{i}'}{dt}=\vec{\omega}(t)\times\hat{i}'(t)$$
$$\frac{d\hat{j}'}{dt}=\vec{\omega}(t)\times\hat{j}'(t)$$
$$\frac{d\hat{k}'}{dt}=\vec{\omega}(t)\times\hat{k}'(t)$$



Sostituendo ricaviamo l'espressione cercata

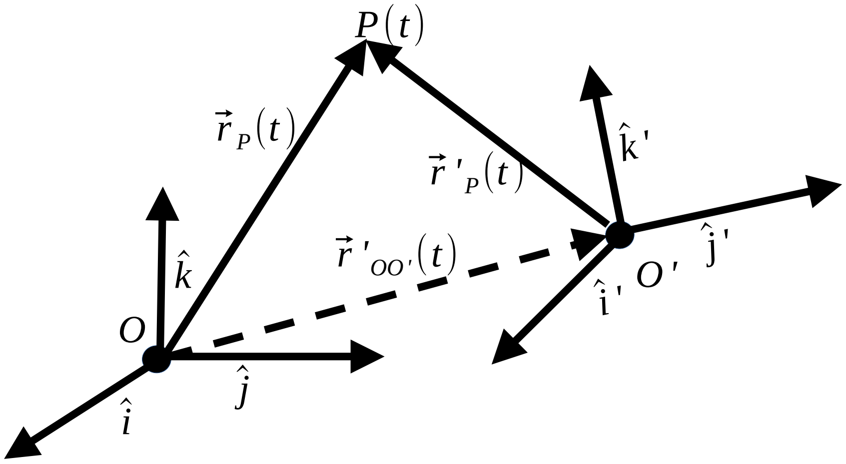
$$x'(t)\frac{d\hat{i}'}{dt}+y'(t)\frac{d\hat{j}'}{dt}+z'(t)\frac{d\hat{k}'}{dt}=x'(t)\vec{\omega}\times\hat{i}'+y'(t)\vec{\omega}\times\hat{j}'+z'(t)\vec{\omega}\times\hat{k}'=$$
$$=\vec{\omega}\times\left(x'(t)\hat{i}'+y'(t)\hat{j}'+z'(t)\hat{k}'\right)=\vec{\omega}\times\vec{r}_P{}'(t)$$

Moti relativi

Quindi, per il cambio di sistema di riferimento abbiamo

$$\vec{v}_P(t)=\vec{v}_{OO'}(t)+\vec{v}\,'_P(t)+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_P(t)$$

$$\vec{v}\,'_P(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{v}_{OO'}(t)-\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_P(t)$$



Questo è abbastanza intuitivo:

La velocità nel secondo sistema di riferimento sarà data dalla differenza della velocità vista nel primo sistema, della velocità relativa tra i due osservatori e di un termine dovuto alla rotazione istantanea di un osservatore rispetto all'altro.

In generale gli osservatori possono anche avere velocità angolare variabile, ma la formula rimane **identica.**

Moti relativi

La somma della velocità relativa e del termine di rotazione si chiama anche **velocità di trascinamento del punto P**

$$\vec{v}_{tra,P}(t)=\vec{v}_{OO'}(t)+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_P(t)$$

Il senso fisico della velocità di trascinamento è il seguente:

Possiamo immaginare che il punto mobile si trovi sovrapposto all'istante *t* ad un punto solidale all'osservatore O'

La velocità di trascinamento è la velocità che avrebbe il punto P se fosse solidale all'osservatore O' e non si muovesse invece di moto proprio

Se ci muoviamo su una giostra, è la velocità del punto del pavimento in cui posiamo il piede

Moti relativi

Studiamo le accelerazioni. Dobbiamo ancora derivare, tenendo conto che anche in questo caso la variazione dei versori in un riferimento rispetto all'altro comporta la comparsa di termini rotanti.

$$\vec{a}_P(t)=\frac{d}{dt}\vec{v}_P(t)=\frac{d}{dt}\left[\vec{v}_{OO'}(t)+\vec{v}\,'_P(t)+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_P(t)\right]=\frac{d}{dt}\vec{v}_{OO'}(t)+\frac{d}{dt}\vec{v}\,'_P(t)+\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_P(t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{OO'}(t)=\vec{a}_{OO'}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}\,'_P(t)=\frac{d}{dt}\left(v'_x(t)\hat{i}\,'+v'_y(t)\hat{j}\,'+v'_z(t)\hat{k}\,'\right)=$$

$$=\left(\dot{v}'_x(t)\hat{i}\,'+\dot{v}'_y(t)\hat{j}\,'+\dot{v}'_z(t)\hat{k}\,'\right)+\vec{\omega}\times\left(v'_x(t)\hat{i}\,'+v'_y(t)\hat{j}\,'+v'_z(t)\hat{k}\,'\right)=\vec{a}\,'_P(t)+\vec{\omega}\times\vec{v}\,'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_P(t)\right)=\vec{\alpha}\times\vec{r}\,'_P(t)+\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\vec{r}\,'_P(t)=\vec{\alpha}\times\vec{r}\,'_P(t)+\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\left(x'(t)\hat{i}\,'+y'(t)\hat{j}\,'+z'(t)\hat{k}\,'\right)=$$

$$=\vec{\alpha}\times\vec{r}\,'_P(t)+\vec{\omega}\times\vec{v}\,'(t)+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'(t)\right)$$

Moti relativi

Assembliamo tutti i pezzi calcolati

$$\vec{a}_P(t)=\frac{d}{dt}\vec{v}_{OO'}(t)+\frac{d}{dt}\vec{v}_P'(t)+\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_P'(t)\right)=$$
$$=\vec{a}_{OO'}(t)+\vec{a}'(t)+\vec{\omega}\times\vec{v}'(t)+\vec{\alpha}\times\vec{r}_P'(t)+\vec{\omega}\times\vec{v}'(t)+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'(t)\right)$$

$$\vec{a}_P(t)=\vec{a}_P'(t)+\vec{a}_{OO'}(t)+\vec{\alpha}\times\vec{r}_P'(t)+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'(t)\right)+2\vec{\omega}\times\vec{v}'(t)$$

Osserviamo che il termine $\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'(t)\right)=-\omega^2\vec{r}'_\perp(t)$

Dove $\vec{r}'_\perp(t)$ è la parte di $\vec{r}'_P(t)$ ortogonale alla velocità angolare

Moti relativi

Quindi possiamo scrivere

$$\vec{a}_P(t)=\vec{a}_P{}'(t)+\vec{a}_{OO'}(t)+\vec{\alpha}\times\vec{r}\,'_P(t)+2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'(t)-\omega^2\vec{r}\,'_\perp(t)$$
$$\vec{a}\,'_P(t)=\vec{a}_P(t)-\vec{a}_{OO'}(t)-\vec{\alpha}\times\vec{r}\,'_P(t)+\omega^2\vec{r}\,'_\perp(t)-2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'(t)$$

$\vec{a}_P(t)=$ accelerazione vista dal primo osservatore

$\vec{a}_{OO'}(t)+\vec{\alpha}\times\vec{r}\,'_P(t)-\omega^2\vec{r}\,'_\perp(t)=$ accelerazione di trascinamento

$-2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'(t)=$ accelerazione di Coriolis o accelerazione complementare

in particolare $\omega^2\vec{r}\,'_\perp(t)$ è l'accelerazione centrifuga

L'accelerazione di trascinamento è la velocità del punto P supposto solidale all'osservatore O'
Nella giostra, è l'accelerazione del punto del pavimento su cui posiamo il piede

L'accelerazione centrifuga è dovuta al fatto che un osservatore rotante vede i corpi in moto rettilineo uniforme fuggire dal suo asse di rotazione (un osservatore non rotante invece li vede muoversi di moto rettilineo uniforme)

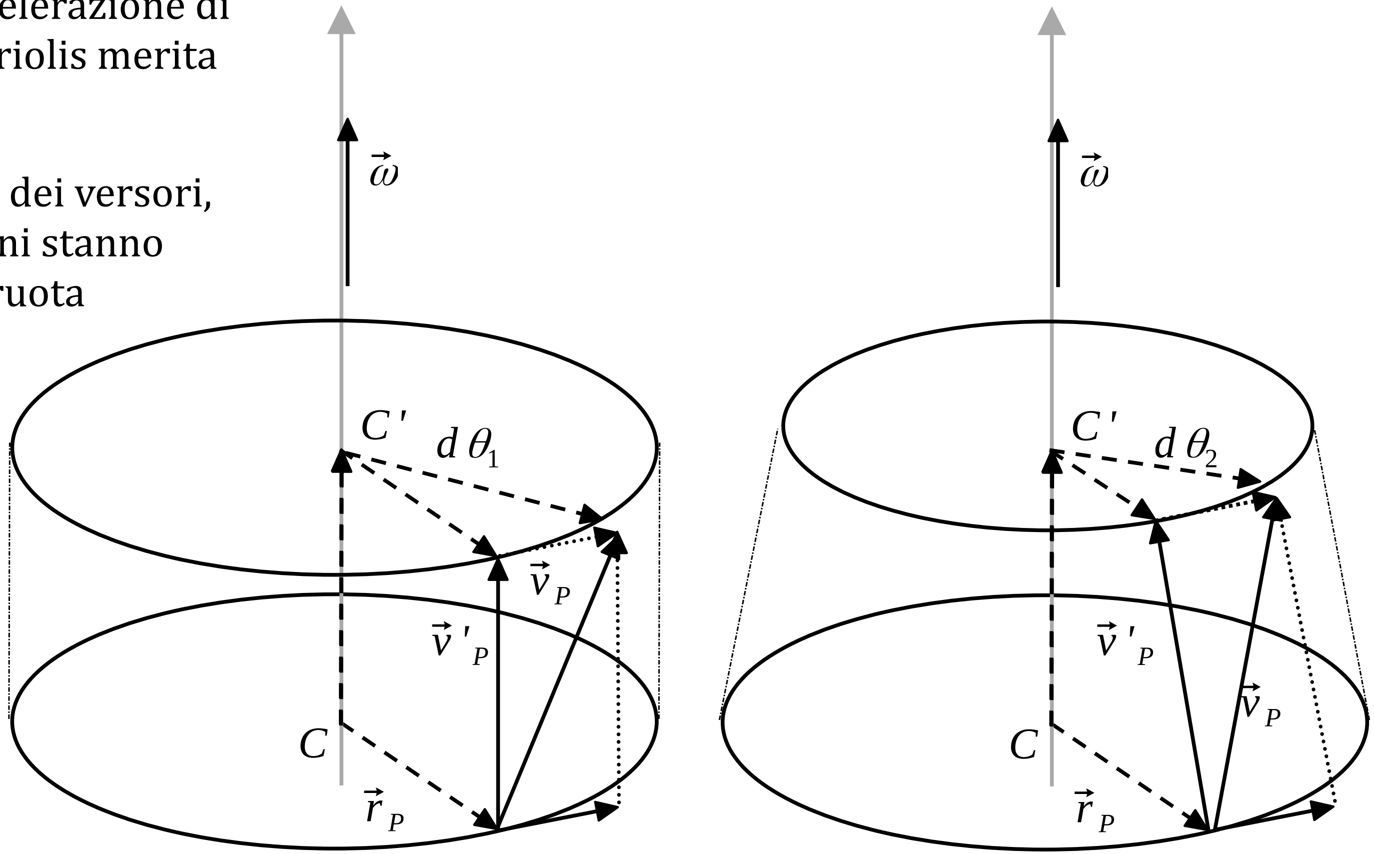
Moti relativi

Mentre è semplice interpretare l'accelerazione di trascinamento, l'accelerazione di Coriolis merita alcune considerazioni aggiuntive

Osserviamo che nasce dalle derivate dei versori, quindi è legata al fatto che le direzioni stanno cambiando mentre l'osservatore O' ruota

Se la velocità per l'osservatore O' è parallela alla velocità angolare, non c'è nessun effetto

Se il punto materiale sta passando da un'orbita circolare ad un'altra di uguale raggio, la sua velocità trasversa lo mantiene in sincrono con la rotazione (figura a sinistra)



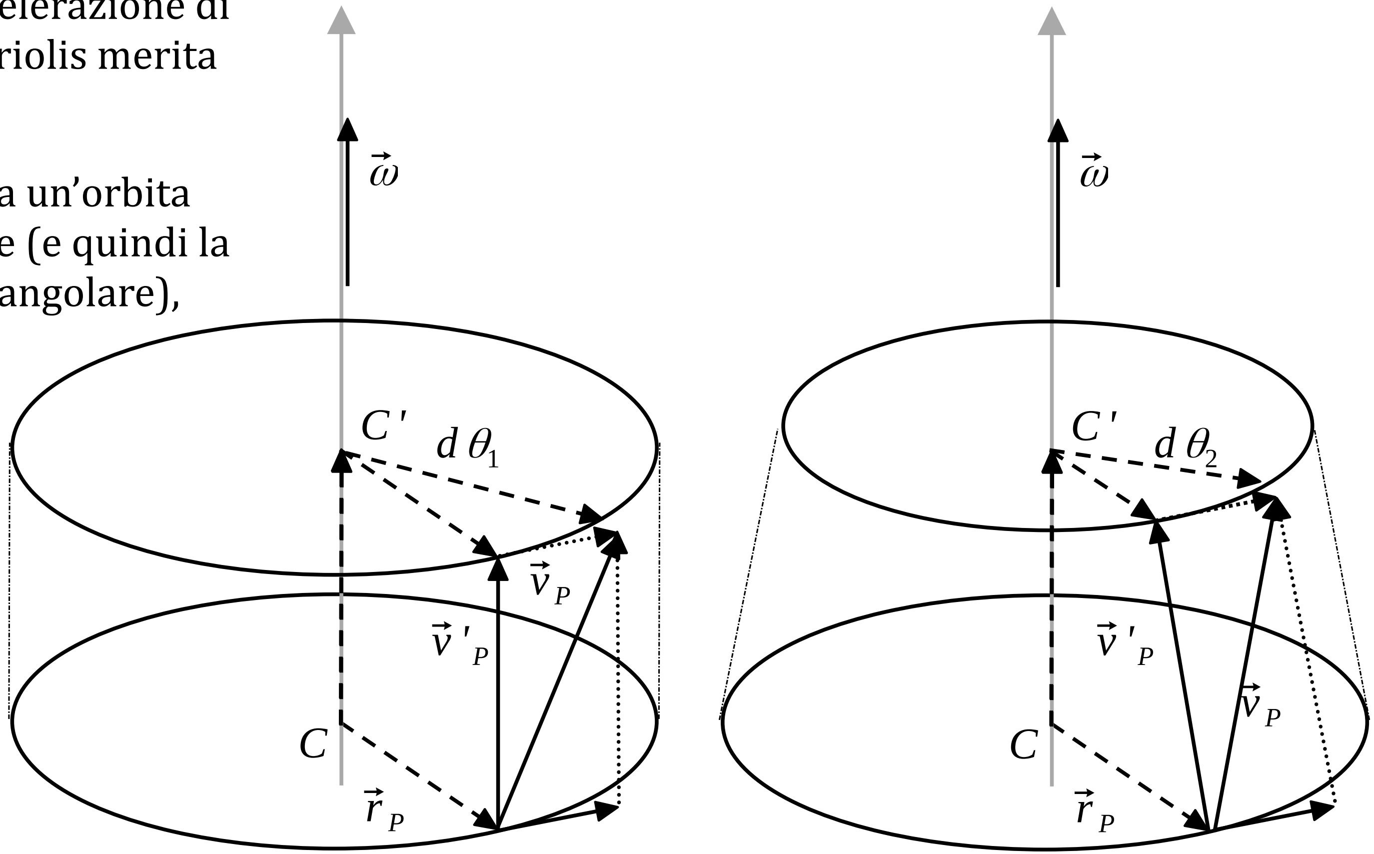
Moti relativi

Mentre è semplice interpretare l'accelerazione di trascinamento, l'accelerazione di Coriolis merita alcune considerazioni aggiuntive

Se il punto materiale sta passando da un'orbita circolare ad un'altra di raggio minore (e quindi la velocità non è parallela alla velocità angolare), la sua velocità fa sì che anticipi la rotazione, e quindi è visto deviare verso destra (figura a destra)

$$d\theta_2 > d\theta_1$$

Passando ad un raggio maggiore, sarebbe visto deviare verso sinistra, ossia in ritardo sulla rotazione

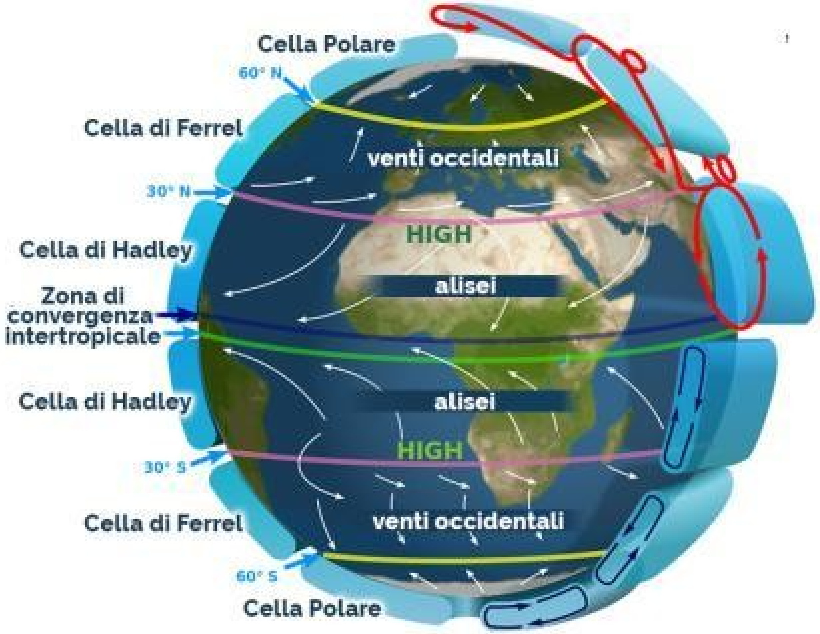


Moti relativi

L'accelerazione di Coriolis va tenuta in conto quando si calcolano le traiettorie di razzi e proiettili, poiché la superficie terrestre è in rotazione intorno all'asse terrestre, e noi tutti siamo osservatori in moto accelerato (rotazione della Terra)

Una conseguenza importante sul clima terrestre: gli **alisei**

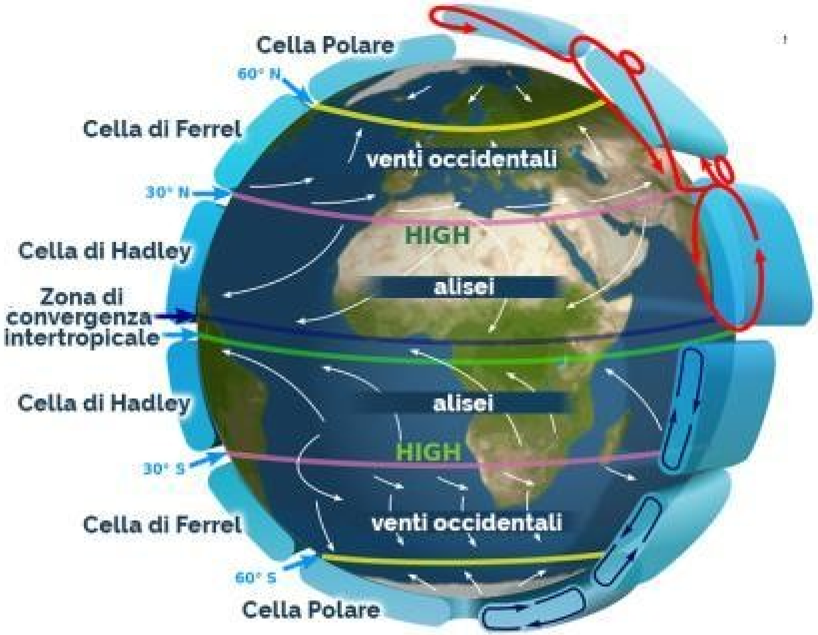
Venti costanti **NE-SW** nell'emisfero boreale,
SE-NW in quello australe



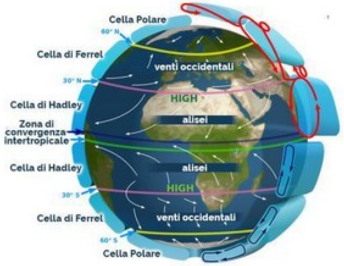
Le masse d'aria dai poli verso l'equatore sono soggette all'accelerazione di Coriolis

Poiché la Terra gira da W verso E (Ovest verso Est), e il raggio aumenta dai poli verso l'equatore, i venti "ritardano" e quindi deviano verso W

Moti relativi



https://www.meteopalestrina.it/glossario-meteo/alisei



Gli alisei sono venti, regolari in direzione e costanti in intensità, appartenenti alla Cella di Hadley cioè alla cella di circolazione atmosferica posta nella fascia intertropicale e che è una delle tre macrocelle di circolazione di cui si compone la circolazione atmosferica. Fanno parte della famiglia dei venti "sinottici" (venti legati alla situazione meteo di vaste aree geografiche). Spirano nell'emisfero boreale da nord-est verso sud-ovest e nell'emisfero australe da sud-est verso nord-ovest. Sono causati dal gradiente barico orizzontale, cioè dalla regolare alternanza delle fasce di alta pressione (ovvero quelle tropicali) e quelle di bassa pressione (zone equatoriali) e vengono deviati verso ovest dalla forza di Coriolis, ovvero per effetto della rotazione terrestre e della scarsa viscosità atmosferica. Lo stesso meccanismo, per compensazione, attiva venti di direzione contraria che soffiano in quota (controalisei).Gli alisei sono stati importantissimi nella navigazione oceanica a vela, come prova il fatto che le circumnavigazioni del Globo venivano normalmente effettuate andando verso ovest. Conosciuti da lungo tempo, furono sfruttati anche da Cristoforo Colombo, per i suoi viaggi verso le Indie, che portarono alla scoperta dell'America. Gli alisei sono importantissimi anche per la pesca, infatti quando spirano da terra (cioè sulle coste occidentali dei continenti) spingono le masse oceaniche superficiali verso ovest, le quali vengono rimpiazzate da acque profonde più ricche di nutrienti alla base della catena alimentare marina. Questo fenomeno è noto come upwelling e crea zone molto ricche di pesce, le aree dove queste correnti di upwelling (corrente delle Canarie, corrente del Benguela, corrente della California, corrente del Peru) si originano dagli alisei sono molto vaste e ampiamente utilizzate per la pesca commerciale. Gli alisei influenzano molto i climi dei tropici, le zone (coste tropicali occidentali) dove spirano gli alisei di terra sono molto aride (es. deserto del Namib) perché contengono aria secca, viceversa nelle zone dove spirano gli alisei di mare (coste tropicali orientali) si hanno climi umidi perché sono ricchi di vapore acqueo. Nella moderna lingua inglese sono chiamati trade winds, cioè venti del commercio, tuttavia l'origine della parola è molto diversa. Deriva dalla forma antica tread che significava sentiero, riferendosi appunto al fatto che questi venti soffiano sempre secondo una direzione ben precisa, quasi a tracciare un sentiero o percorso nel mare che era facile da seguire per le imbarcazioni a vela del tempo.

Moti relativi

Caso particolare: **moto relativo soltanto traslatorio**

$$\vec{v}_P\,'(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{v}_{OO'}(t)$$
$$\vec{a}\,'_P(t)=\vec{a}_P(t)-\vec{a}_{OO'}(t)$$

Esempi:

1) Treni in corsa in moto rettilineo uniforme

Il secondo treno vede solo la differenza di velocità

$$\vec{v}_{rel}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$$
$$\vec{a}_{rel}=\vec{a}_1-\vec{a}_2=\vec{0}$$

Moti relativi

Caso particolare: **moto relativo soltanto traslatorio**

$$\vec{v}_P'(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{v}_{OO'}(t)$$
$$\vec{a}'_P(t)=\vec{a}_P(t)-\vec{a}_{OO'}(t)$$

Esempi:

2) Frenata/Accelerazione in un mezzo

$$\vec{0}=\vec{v}_{abitacolo}=\vec{v}_{auto}-\vec{v}_{auto}$$
$$\vec{a}_{abitacolo}=\vec{a}_{passeggero}-\vec{a}_{auto}=-\vec{a}_{auto}$$

Moti relativi

Caso particolare: **moto relativo soltanto traslatorio**

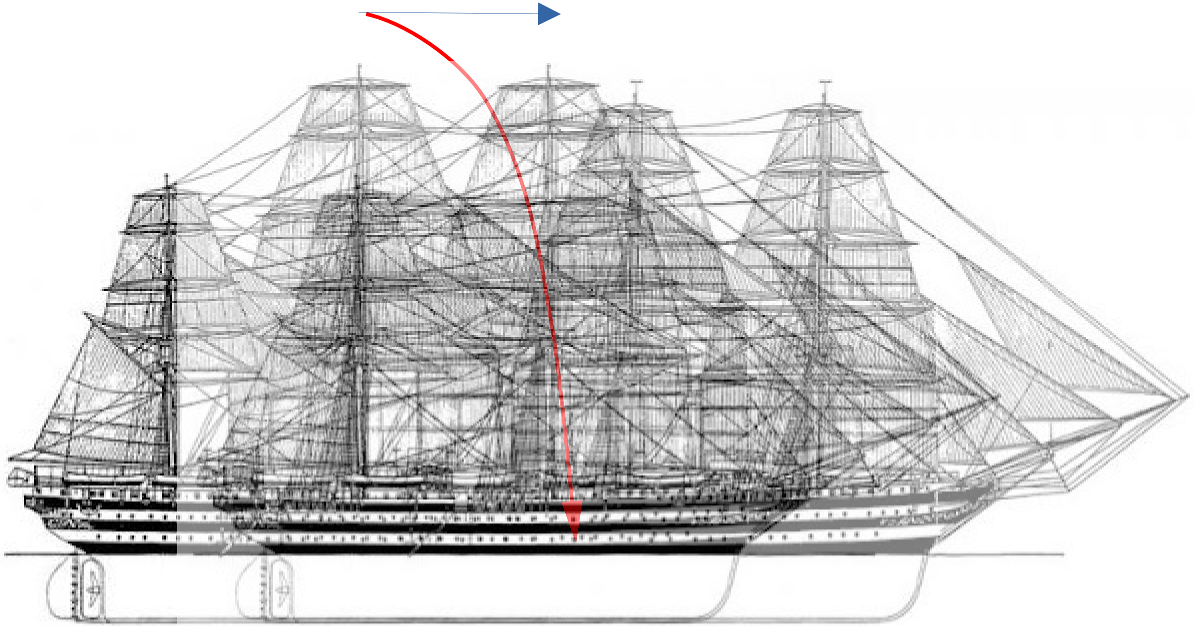
$$\vec{v}_P{}'(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{v}_{OO'}(t)$$
$$\vec{a}'_P(t)=\vec{a}_P(t)-\vec{a}_{OO'}(t)$$

Esempi:

3) La nave di Galileo
Se lascio cadere un grave dall'albero maestro mentre la nave si muove, cadrà verso l'albero di trinchetto (avanti), quello di mezzana (dietro) o alla base del maestro? Quale traiettoria seguirà?

$$\vec{v}'_{\text{grave}}(t)=\vec{v}_{\text{grave}}(t)-\vec{v}_{nave}(t)$$
$$\vec{a}'_{\text{grave}}(t)=\vec{a}_{\text{grave}}(t)-\vec{a}_{nave}(t)=\vec{g}$$
$$\vec{r}'_{\text{grave}}(t)=\left(h-\frac{1}{2}g\,t^2\right)\hat{j}'$$
$$\vec{r}_{\text{grave}}(t)=v_{nave}\,\hat{i}+\left(h-\frac{1}{2}g\,t^2\right)\hat{j}$$

$$\vec{v}_{nave}=v_{nave}\,\hat{i}$$



Moti relativi

Caso particolare: **moto relativo soltanto traslatorio**

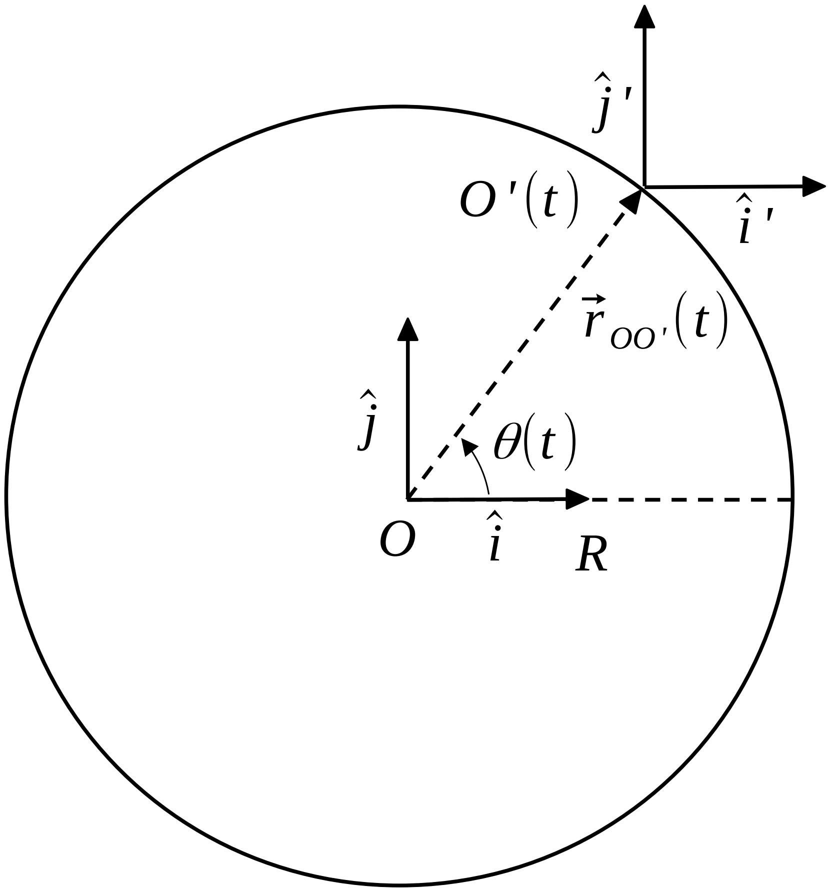
$$\vec{v}_P'(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{v}_{OO'}(t)$$
$$\vec{a}'_P(t)=\vec{a}_P(t)-\vec{a}_{OO'}(t)$$

Attenzione: **se non varia la direzione dei vettori di base, il moto relativo dei due osservatori è solo traslatorio!**

L’osservatore O’ trasla su una traiettoria circolare, ma non sta ruotando su se stesso!

L’osservatore (punto + versori + orologio) è più complesso di un semplice punto materiale e descriverne il moto richiede attenzione

$$\vec{v}_P'(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{\omega}_{OO'}\times\vec{r}_{OO'}(t)$$
$$\vec{a}'_P(t)=\vec{a}_P(t)+\omega^2\vec{r}\,'_{OO'}(t)$$



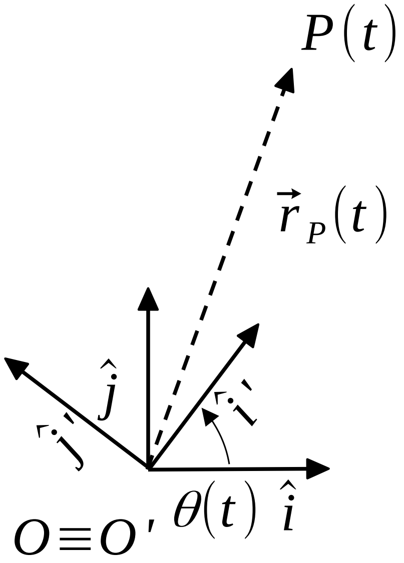
Moti relativi

Caso particolare: **moto relativo soltanto rotatorio**

$$\vec{v}_P'(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{\omega}\times\vec{r}_P'(t)$$
$$\vec{a}'_P(t)=\vec{a}_P(t)-\vec{\alpha}\times\vec{r}_P'(t)+\omega^2\vec{r}'_\perp(t)-2\vec{\omega}\times\vec{v}'_P(t)$$

Se l'accelerazione angolare è nulla, si ha il caso semplificato di osservatore in moto rotatorio uniforme

$$\vec{v}_P'(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{\omega}\times\vec{r}_P'(t)$$
$$\vec{a}'_P(t)=\vec{a}_P(t)+\omega^2\vec{r}'_\perp(t)-2\vec{\omega}\times\vec{v}'_P(t)$$



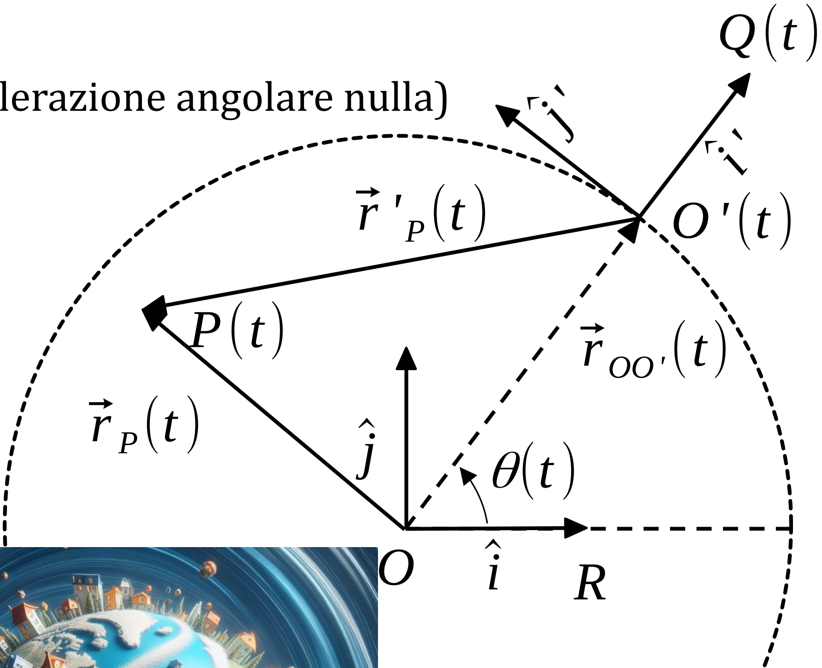
Abbiamo comunque sia l'accelerazione centrifuga che quella di Coriolis (complementare)

Esempio: piroetta della ballerina

Moti relativi

Caso particolare: **moto relativo rototraslatorio uniforme** (accelerazione angolare nulla)

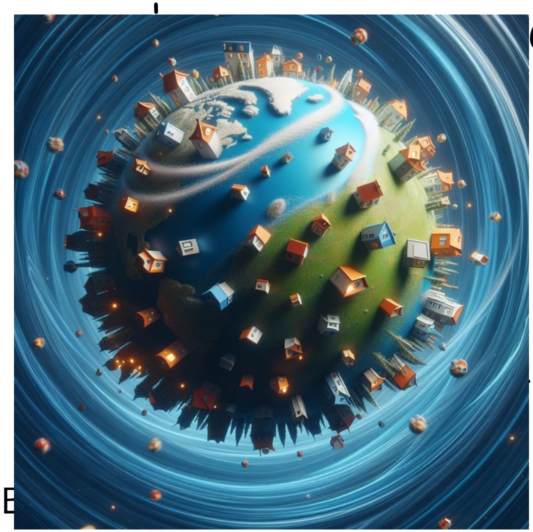
$$\vec{v}\,'_P(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{\omega}\times\left(\vec{r}\,'_P(t)+\vec{r}_{OO'}(t)\right)$$
$$\vec{a}\,'_P(t)=\vec{a}_P(t)+\omega^2\vec{r}_{OO'}(t)+\omega^2\vec{r}\,'_P(t)-2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'_P(t)$$



Questo è il moto di tutti i sistemi di riferimento ancorati al suolo terrestre

Che accade se P = O?
Ossia, dal nostro punto di vista, come si muove il centro della Terra?

$$\vec{r}\,'_P(t)=-\vec{r}_{OO'}(t)$$
$$\vec{v}_P\,'(t)=\vec{0}$$
$$\vec{a}\,'_P(t)=\vec{0}$$



E un punto Q su un palo sulla verticale a distanza *h* dal suolo?

$$\vec{r}\,'_Q(t)=h\,\hat{i}\,'$$
$$\vec{v}_Q\,'(t)=\vec{\omega}\times(h+R)\,\hat{i}\,'-\vec{\omega}\times(h+R)\,\hat{i}\,'=\vec{0}$$
$$\vec{a}\,'_Q(t)=-\omega^2(h+R)\,\hat{i}\,'+\omega^2 R\,\hat{i}\,'+\omega^2 h\,\hat{i}\,'=\vec{0}$$

Moti relativi

Caso particolare: **moto relativo rototraslatorio uniforme** (accelerazione angolare nulla)

$$\vec{v}\,'_P(t)=\vec{v}_P(t)-\vec{\omega}\times\left(\vec{r}\,'_P(t)+\vec{r}_{OO'}(t)\right)$$
$$\vec{a}\,'_P(t)=\vec{a}_P(t)+\omega^2\vec{r}_{OO'}(t)+\omega^2\vec{r}\,'_P(t)-2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'_P(t)$$

Questo è il moto di tutti i sistemi di riferimento ancorati al suolo terrestre

Per un punto Q a distanza *(R+h)* che si muova di moto rettilineo uniforme lungo l'asse z, avremmo:

$$\vec{v}_Q\,'(t)=v\,\hat{k}-\vec{\omega}\times(h+R)\,\hat{i}\,'=v\,\hat{k}-\omega(h+R)\,\hat{j}\,'$$
$$\vec{a}\,'_Q(t)=\omega^2 R\,\hat{i}\,'+\omega^2 h\,\hat{i}\,'=\omega^2(R+h)\,\hat{i}\,'$$