DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

I sistemi di punti materiali

I sistemi di punti materiali sono insiemi di punti materiali che hanno interazioni mutue più o meno forti. Un corpo esteso si studia come un sistema di punti materiali.

I corpi in vari stati di aggregazione possono essere studiati come sistemi di punti materiali. Tuttavia il punto materiale non corrisponde ad un'entità fisica ben precisa (per esempio l'atomo o la particella). È semplicemente la più piccola unità di materia del corpo che non abbia altro dettaglio rilevante per la descrizione del fenomeno che la propria massa. Così, in un gas monoatomico, gli atomi possono essere trattati come punti materiali per alcuni scopi. In un corpo rigido, potremmo considerare una porzione di materia più grande.

La dinamica dei sistemi di punti materiali non richiede nuovi principi fisici, ma si appoggia sui tre principi della dinamica già esposti.

I sistemi di punti materiali

Cominciamo con il definire il **centro di massa** di un sistema di punti materiali

$$\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i;\qquad M=\sum_i m_i \text{è la massa del sistema}$$

Vediamo come si muove il centro di massa di un sistema:

$$\vec{v}_{CM}=\frac{d}{dt}\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i;\qquad \vec{P}=M\vec{v}_{CM}=\sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{a}_{CM}=\frac{d}{dt}\vec{v}_{CM}=\frac{\sum_i m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt};\qquad \frac{d\vec{P}}{dt}=M\vec{a}_{CM}=\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Il centro di massa si muove come un punto materiale che ha la massa del sistema e la sua quantità di moto

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali, soggetti a forze esterne al sistema e a forze interne.

Su ciascun punto *i* avremo:

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\text{int},i,j} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$\textit{definiamo}:$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} = \vec{F}_{est} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\text{int},i,j} = \vec{0} : \text{infatti } \vec{F}_{\text{int},i,j} = -\vec{F}_{\text{int},j,i}$$

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Sommiamo le equazioni per tutti i punti materiali

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{\text{int},i,j} = \sum_i \frac{d\,\vec{p}_i}{dt}$$

$$\textit{definiamo}:$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} = \vec{F}_{est} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\text{int},i,j} = \vec{0}: \text{ infatti } \vec{F}_{\text{int},i,j} = -\vec{F}_{\text{int},j,i}$$

Otteniamo:

$$\boxed{\vec{F}_{est} = \frac{d\,\vec{P}}{dt}}$$

La derivata della quantità di moto totale del sistema di punti materiali è uguale alla risultante di tutte le forze esterne al sistema.

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Elaboriamo sulla Prima Equazione Cardinale

$$\vec{F}_{est} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

Osservazioni:

1) Il sistema di punti materiali si muove come un punto materiale con tutta la massa concentrata nel centro di massa e soggetto solo alle forze esterne. Questo spiega perché possiamo modellare sistemi estesi come punti materiali quando non ci interessano i particolari del moto delle singole parti.

2) Le forze interne tra i vari punti del sistema non influenzano direttamente il moto del sistema del centro di massa, ma le forze esterne potrebbero dipendere dalla posizione e/o velocità dei singoli punti materiali.

La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo il momento angolare dei punti materiali rispetto ad un polo O e la loro somma

$$\vec{J}_O = \sum_i m_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_{O,i} \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{p}_i$$

Riferiamo il momento angolare rispetto al centro di massa, introducendo la posizione di quest'ultimo rispetto al polo O:

$$\vec{J}_O = \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_{O,CM} + \vec{r}_{CM,i}) \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_{O,CM} \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_{CM,i} \times \vec{p}_i = \vec{r}_{O,CM} \times \sum_i \vec{p}_i + \vec{J}_{CM} =$$
$$= \vec{r}_{O,CM} \times \vec{P} + \vec{J}_{CM}$$

Teorema di König per il momento angolare: **Il momento angolare rispetto ad un polo O è pari alla somma del momento angolare calcolato intorno al centro di massa e al momento angolare del sistema considerato concentrato nel sistema del centro di massa con la sua quantità di moto complessiva.**

La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Adesso valutiamo la variazione del momento angolare:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_{O,i}\times\vec{p}_i)=\sum_i \frac{d\vec{r}_{O,i}}{dt}\times\vec{p}_i+\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i \vec{v}_i\times\vec{p}_i+\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Il primo termine è nullo perché la velocità di ciascun punto materiale è parallela alla sua quantità di moto

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt}=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\left(\sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h}+\sum_{j\neq i} \vec{F}_{\text{int},i,j}\right)=\sum_i\sum_h \vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\text{est},i,h}+\sum_i\sum_{j\neq i} \vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\text{int},i,j}=$$
$$=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\text{est},i}+\vec{0}$$

Il secondo termine è nullo per il terzo principio della dinamica: $\vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\text{int},i,j}=-\vec{r}_{O,j}\times\vec{F}_{\text{int},j,i}$

I contributi delle forze interne si annullano a coppie, infatti sono coppie di braccio nullo

La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Otteniamo la seconda equazione cardinale:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt}=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\mathrm{est},i}=\sum_i \vec{M}_{\mathrm{est},i}$$

La derivata del momento angolare di un sistema di punti materiali è pari alla somma dei momenti delle sole forze esterne, calcolati tenendo conto dei loro effettivi punti di applicazione

Il momento di una forza ha dimensioni **[M][L²][T⁻²]** e si misura in *Nm*

Il momento angolare di un punto materiale o di un sistema ha dimensioni **[M][L²][T⁻¹]** e si misura in *kg m²/s*

Per un punto materiale in moto circolare intorno ad un asse, il momento angolare intorno al centro di rotazione è:

$$\vec{J}_{O,P}=m\vec{r}_{O,P}\times\vec{v}=m\vec{r}_{O,P}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{O,P})=mr^2_{O,P}\vec{\omega}=I_{O,P}\vec{\omega}$$

$I_{O,P}$ è il momento d'inerzia del punto P rispetto all'asse O

La dinamica dei sistemi di punti materiali

Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali forniscono 6 equazioni scalari

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{\text{est},i} \\ \dfrac{d\vec{J}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{\text{est},i} \end{array}}$$

Esse sono linearmente indipendenti se il sistema comprende almeno due punti materiali.

Per sistemi isolati abbiamo:

ossia quantità di moto e momento angolare totale di un sistema isolato di punti materiali si conservano

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt} = \vec{0}$$

Il moto dei razzi

I razzi sono sistemi isolati. Si muovono spingendo indietro parte della propria massa, e ricevono, per il III principio della dinamica, una spinta in verso opposto.

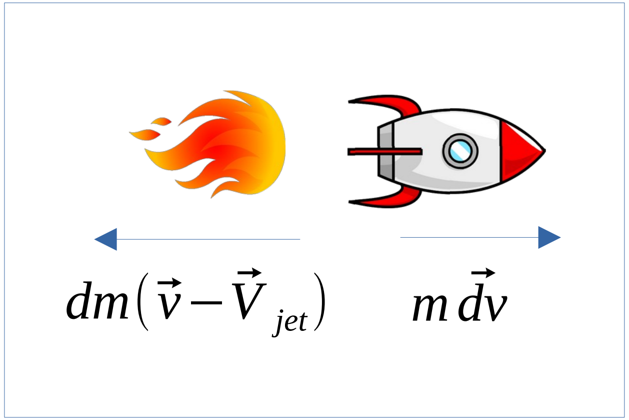
Consideriamo un razzo che espelle una quantità di propellente *dm* con velocità V_{jet}.

$$\vec{P}=m\vec{v}\,;\qquad \frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{0}\,;\qquad \frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{v}+m\frac{d\vec{v}}{dt}-\frac{dm}{dt}\left(\vec{v}-\vec{V}_{jet}\right)=\vec{0}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{dm}{dt}\vec{V}_{jet}=0\;\Rightarrow\; m\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{dm}{dt}\vec{V}_{jet}\qquad \text{proiettiamo su } x$$

$$m\frac{dv_x}{dt}=-\frac{dm}{dt}V_{jet}\;\Rightarrow\;\frac{dm}{m}=-\frac{dv_x}{V_{jet}}\;\Rightarrow\;\int_{m_i}^{m_f}\frac{dm}{m}=-\int_{v_i}^{v_f}\frac{1}{V_{jet}}dv$$

$$\log\frac{m_f}{m_i}=\frac{\left(v_i-v_f\right)}{V_{jet}}\,;\;\Rightarrow\; v_f=v_i+V_{jet}\log\frac{m_i}{m_f}$$



Il termine di massa in logaritmo non sarà mai molto grande
È essenziale che sia grande la velocità del getto

La statica dei sistemi di punti materiali

Le equazioni cardinali della dinamica nel caso statico diventano:

$$\sum_i \vec{F}_{\text{est},i} = \vec{0}$$
$$\sum_i \vec{M}_{\text{est},i} = \vec{0}$$

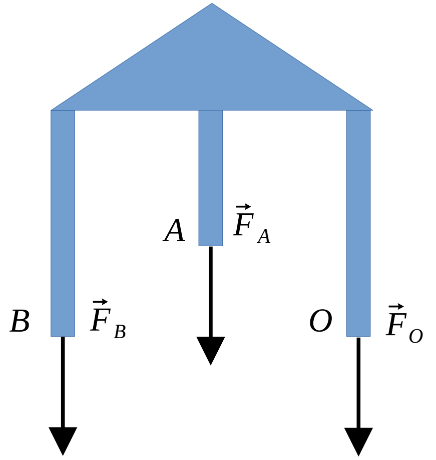
Esse sono linearmente indipendenti se il sistema comprende almeno due punti materiali.

Se le equazioni sono in numero sufficiente a determinare tutte le forze, si dice che il sistema è *isostatico*.

Se le equazioni sono insufficienti a determinare tutte le forze, si dice che il sistema è *iperstatico*.

La statica dei sistemi di punti materiali

Esempio di problema *isostatico*: determinare le forze agenti su ciascun piede di un tavolino a 3 gambe



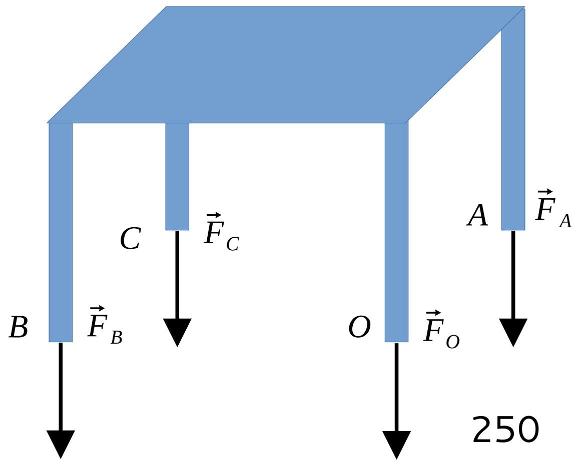
$$F_{zO}+F_{zA}+F_{zB}=-Mg$$
$$(\vec{r}_{O,A}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{O,B}\times\vec{F}_B)\cdot\hat{i}=0$$
$$(\vec{r}_{O,A}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{O,B}\times\vec{F}_B)\cdot\hat{j}=0$$

Le altre equazioni sono identità 0 = 0

Esempio di problema *iperstatico*: determinare le forze agenti su ciascun piede di un tavolino a 4 gambe

$$F_{zO}+F_{zA}+F_{zB}+F_{zC}=-Mg$$
$$(\vec{r}_{O,A}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{O,B}\times\vec{F}_B+\vec{r}_{O,C}\times\vec{F}_C)\cdot\hat{i}=0$$
$$(\vec{r}_{O,A}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{O,B}\times\vec{F}_B+\vec{r}_{O,C}\times\vec{F}_C)\cdot\hat{j}=0$$

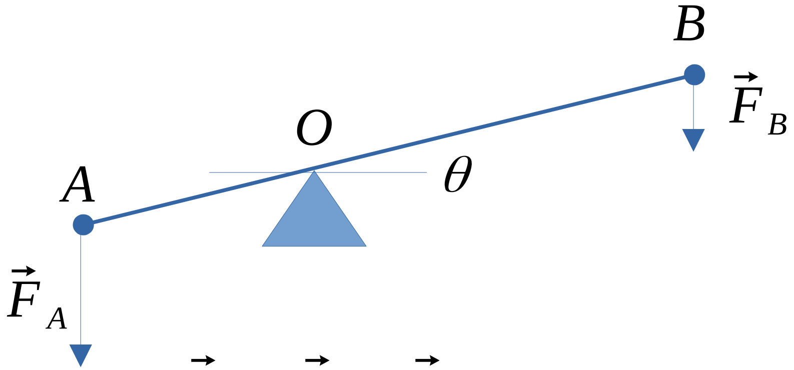
Le altre equazioni sono identità 0 = 0



Vanno specificate altre condizioni, per esempio con deformazioni elastiche

La statica dei sistemi di punti materiali

Esempio di applicazione: le leve



$$\vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{0}$$
$$\vec{M}_A \cdot \hat{k} + \vec{M}_B \cdot \hat{k} = 0$$
$$r_A F_A \cos\theta - r_B F_B \cos\theta = 0$$
$$r_A F_A = r_B F_B$$