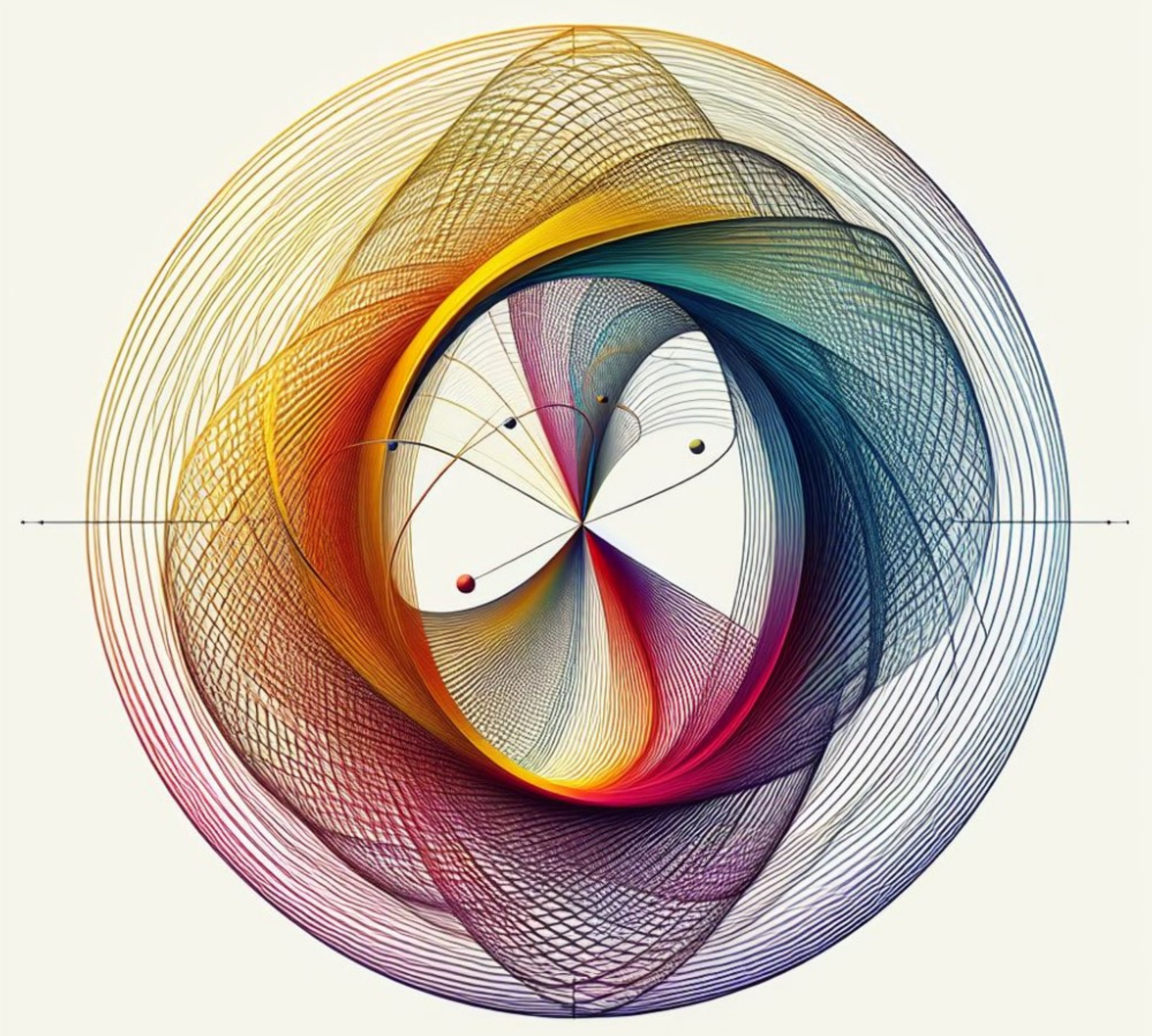
CINEMATICA



La meccanica si divide tradizionalmente in

- Cinematica: è lo studio della **geometria del moto** (κινησις - kinésis vuol dire movimento)
- Statica: è lo studio delle **condizioni dei corpi in equilibrio** (στασις - stasis vuol dire stasi ossia riposo)
- Dinamica: è lo studio delle relazioni tra **le forze e i moti che esse causano** (δυναμις – dinamis ossia forza)

Cominciamo quindi lo studio della Cinematica

Abbiamo bisogno di un ***osservatore***, ossia di:

- un sistema di riferimento per misurare le posizioni
  - un punto detto **origine**
  - una base **ortonormale** (e preferibilmente anche levogira)
- un orologio per misurare i tempi

Un osservatore *misura* il moto di un sistema meccanico

Naturalmente, dobbiamo definire qual è il sistema meccanico da studiare!

Alcuni dettagli importanti

- Nella meccanica classica, le distanze sono invarianti per:
  - Traslazioni
  - Rotazioni
  - Accelerazioni (/decelerazioni)
- Nella meccanica classica, i tempi sono uguali ovunque si misurino, e quindi sono invarianti per:
  - Traslazioni
  - Rotazioni
  - Accelerazioni (/decelerazioni)

In altre parole, lo spazio-tempo della meccanica classica è *piatto e popolato da infinite terne ortonormali levogire tutte uguali e di orologi tutti sincronizzati sullo stesso tempo*.

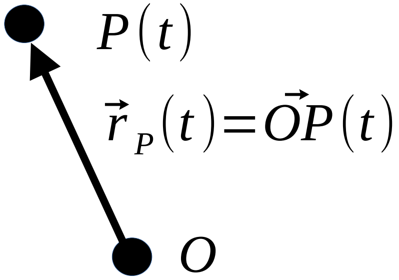
Questo è una buona approssimazione per moti "lenti" e su spazi né troppo grandi né troppo piccoli.

Il sistema meccanico più semplice da studiare è il **punto materiale:**

- ha dimensione nulla
- ha una massa (quantità di materia) propria
- è inalterabile

In particolare, il requisito della massa è fondamentale anche in cinematica: essa si occupa comunque solo di *corpi materiali*, e non di semplici punti geometrici variabili. L'incrocio di due rette che si muovono (per esempio l'incrocio di due laser) non è oggetto della cinematica!

Il punto materiale è una buona approssimazione per molti problemi nei quali l'estensione spaziale del sistema è trascurabile rispetto all'ambiente in cui si muove. Diversamente, possiamo rappresentare oggetti più complessi come **sistemi di punti materiali**.



Un punto mobile si può indicare come $P(t)$

È più comodo usare la sua posizione rispetto all'origine, ossia il vettore **posizione** $\vec{r}_P(t)=\vec{OP}(t)$

Questo ci consente di usare l'algebra dei *vettori liberi* che abbiamo definito in precedenza

Il moto più semplice è **la quiete…**

$$P(t) = cost\,.$$
$$\vec{r}_P(t) = cost\,.$$

… e non è molto interessante!

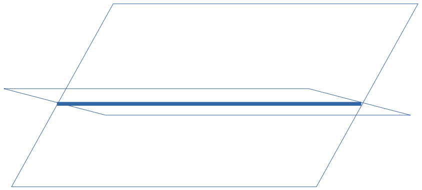
In generale, il moto *di un punto materiale* si svolge su una **traiettoria** = *il luogo geometrico dei punti attraversati dal punto materiale durante il suo moto*

La traiettoria è una linea, e quindi ha *una sola dimensione*

In uno spazio tridimensionale, abbiamo bisogno di **2 (due)** equazioni per definire una linea

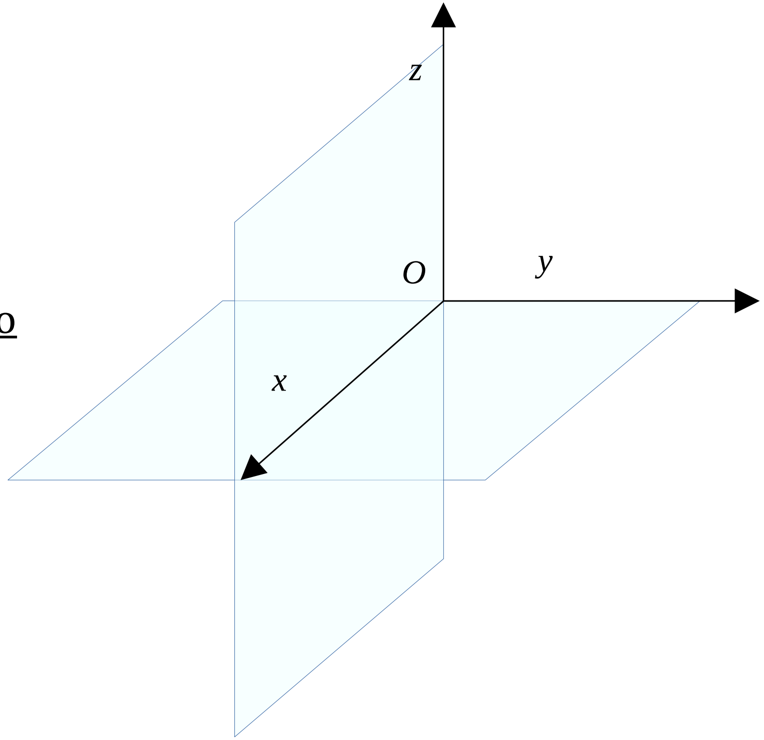
Ogni equazione riduce di 1 la dimensionalità dell'insieme

Una retta si definisce come l'intersezione di due piani



Vediamo ad esempio:

$$r_y = 0 : \text{equazione piano xz}$$
$$r_z = 0 : \text{equazione piano xy}$$



È la traiettoria di un punto che si muove sull'asse *x*

Osserviamo che nelle equazioni della traiettoria <u>non compare il tempo</u>

La traiettoria, infatti, codifica le informazioni geometriche del moto

Sulla traiettoria si scelgono:

- un punto, detto origine
- un verso di percorrenza

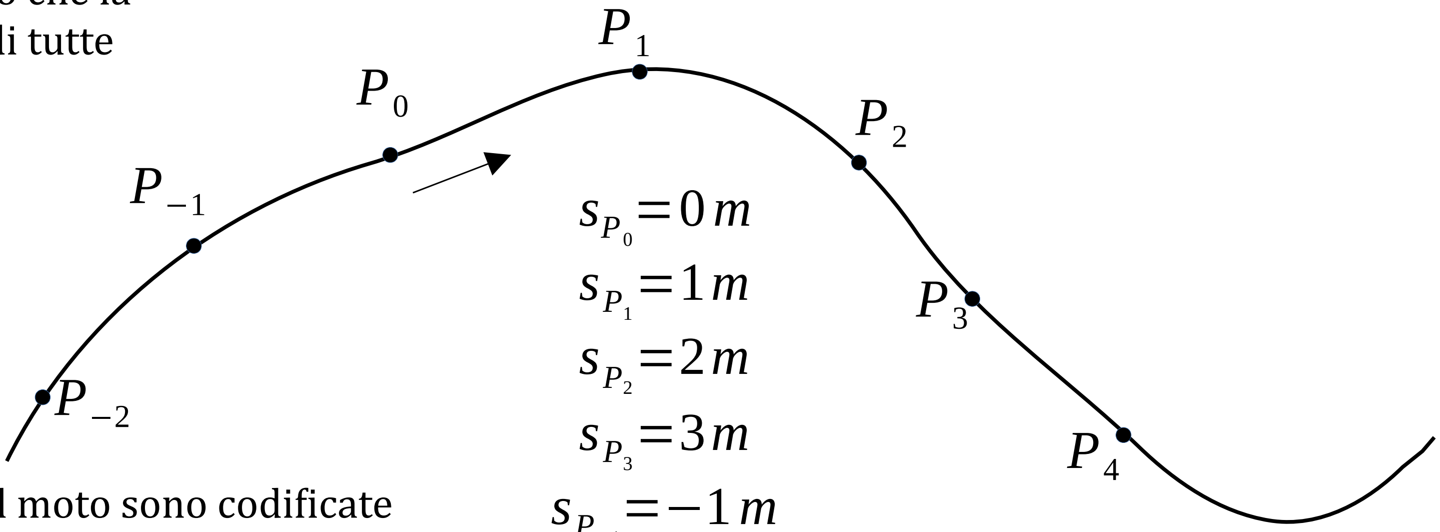
Con questi elementi definiamo l'ascissa curvilinea

L’ascissa curvilinea

Ogni punto sulla traiettoria ha un’**ascissa curvilinea** che è
la **distanza orientata sulla traiettoria misurata a partire dall’origine**

Per un viaggio in auto, è null’altro che la strada percorsa, tenendo conto di tutte le curve!

È ovviamente diversa dalla distanza “in linea d’aria” misurata dalla partenza



$$s_{P_0}=0\,m$$
$$s_{P_1}=1\,m$$
$$s_{P_2}=2\,m$$
$$s_{P_3}=3\,m$$
$$s_{P_{-1}}=-1\,m$$
$$s_{P_{-2}}=-2\,m$$

Le informazioni che mancano sul moto sono codificate dalla **legge oraria** = funzione che esprime l’ascissa curvilinea in funzione del tempo

$$s(t): legge\ oraria$$

Quindi un moto è definito da tre oggetti matematici:

- **Due equazioni per la traiettoria**
- **Una funzione per la legge oraria**

C'è un'altra possibilità: esprimere direttamente il vettore in funzione del tempo $\vec{r}_P(t) = \vec{OP}(t)$

Queste sono le equazioni del moto in forma **parametrica**

Si tratta di scrivere una funzione vettoriale che equivale a **tre funzioni scalari**

Quindi in ogni caso abbiamo tre oggetti matematici

Moti piani

Si dicono **moti piani** quelli che si svolgono su un solo piano. Un'equazione viene omessa, ed è l'equazione del piano. Pertanto rimangono:

- Un'equazione per la traiettoria
- La legge oraria

$$esempio: y = 2x + y_0$$

$$esempio: s(t) = vt + s_0$$

Oppure si possono scrivere in forma parametrica come una coppia di funzioni *(non è lo stesso moto di sopra!)*:

$$esempio: \quad \begin{aligned} r_x(t) &= x_0 + A_x \cos(\omega t) \\ r_y(t) &= y_0 + A_y \cos(\omega t) + b_y t \end{aligned}$$

Per un moto piano, le espressioni matematiche che lo definiscono sono sempre **due**

Moti rettilinei

Si dicono **moti rettilinei** quelli che si svolgono su una retta. Due equazioni vengono omesse, e rimane soltanto la legge oraria

$$esempio: s(t) = v\,t + s_0$$

La forma parametrica in questo caso è praticamente uguale alla legge oraria anche se formalmente si tratta di due oggetti diversi (conviene prendere l'ascissa coincidente con la coordinata dell'asse rimanente, ma non è obbligatorio)

$$esempio: r_x(t) = v_x t + x_0$$

Velocità

Si definisce **velocità media** in un intervallo di tempo il rapporto incrementale:

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si può rendere l'intervallo di tempo molto piccolo. In pratica, in tutti i moti *fisici* (ossia di corpi materiali), è sempre possibile definire il *limite di questo rapporto incrementale*, detto **velocità istantanea**:

$$v(t) = \lim_{t_2 \to t_1} \bar{v}(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

La velocità istantanea è la derivata dell'ascissa curvilinea

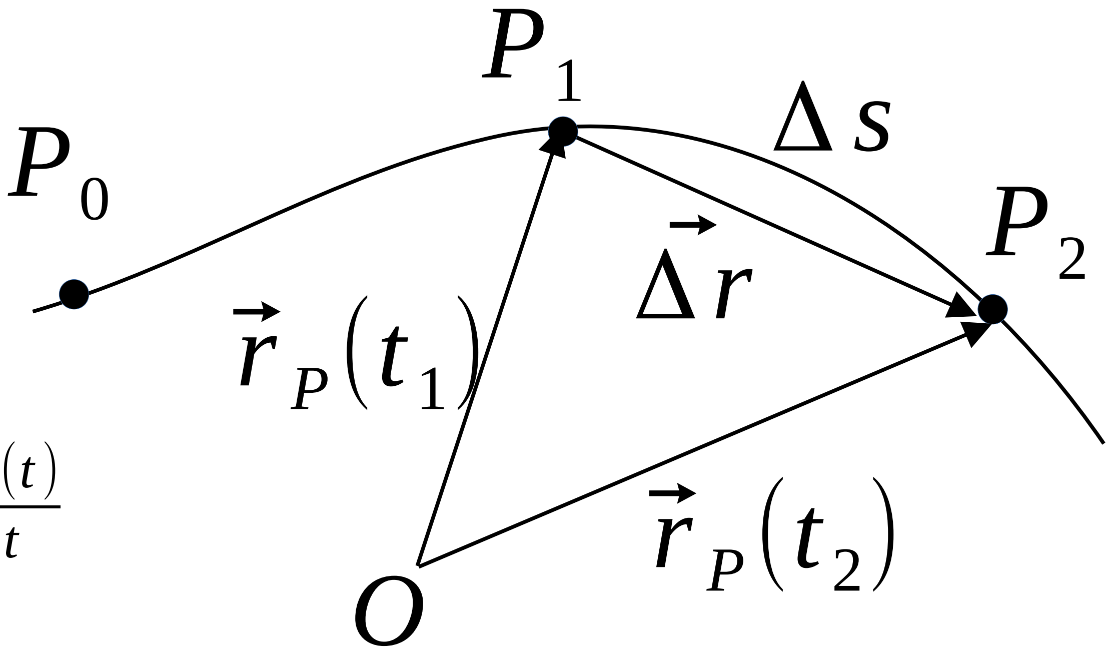
La velocità ha dimensioni $[L][T^{-1}]$e si misura in m/s

Velocità vettoriale

Per intervalli di tempo piccoli, il modulo dello spostamento (incremento del vettore posizione) differisce poco dalla variazione dell'ascissa curvilinea

Velocità media vettoriale:

$$\vec{\bar{v}}(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



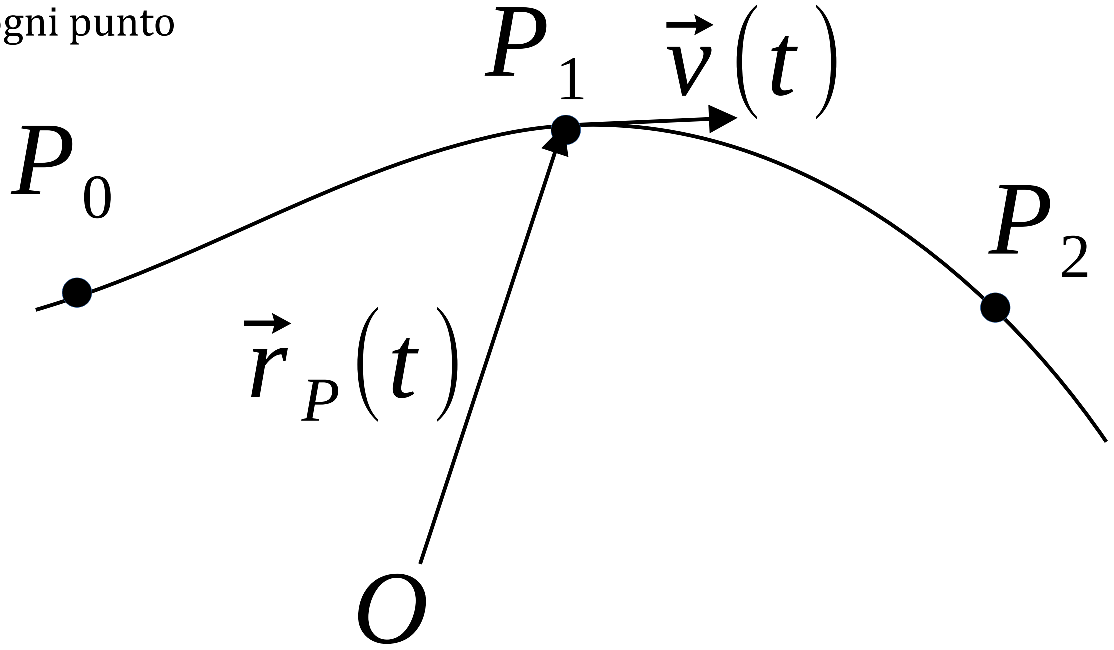
Velocità istantanea vettoriale:

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Velocità vettoriale

La velocità istantanea vettoriale (o più semplicemente **velocità**) è la derivata della posizione

La velocità è **tangente** alla traiettoria in ogni punto



Velocità

Connessione tra velocità vettoriale e ascissa curvilinea

$$|v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta t} =$$

$$= \sqrt{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}} = \sqrt{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}} = \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)} = \|\vec{v}(t)\|$$

La velocità definita in termini dell'ascissa curvilinea è uguale al modulo della velocità vettoriale.

Quindi:

$$\vec{v}(t) = |v(t)| \hat{v}(t) = \frac{ds}{dt} \hat{v}(t)$$

Questa decomposizione ci servirà più avanti.

Accelerazione

L'**accelerazione media** di un punto materiale in un intervallo di tempo è definita come il rapporto incrementale della velocità vettoriale

$$\vec{\bar{a}}_P(t_1,t_2)=\frac{\vec{v}_P(t_2)-\vec{v}_P(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{v}_P}{\Delta t}$$

Per punti materiali, è sempre possibile rendere piccolo l'intervallo temporale fino a passare al limite e definire **accelerazione istantanea:**

$$\vec{a}_P(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_P(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}_P(t)}{dt}$$

Ma ricordiamo che

$$\vec{v}_P(t)=\frac{d\vec{r}_P(t)}{dt}$$

$$\vec{a}_P(t)=\frac{d}{dt}\frac{d\vec{r}_P(t)}{dt}=\frac{d^2\vec{r}_P(t)}{dt^2}$$

$$\vec{v}_P(t)=\dot{\vec{r}}_P(t)$$
$$\vec{a}_P(t)=\dot{\vec{v}}_P(t)$$
$$\vec{a}_P(t)=\ddot{\vec{r}}_P(t)$$

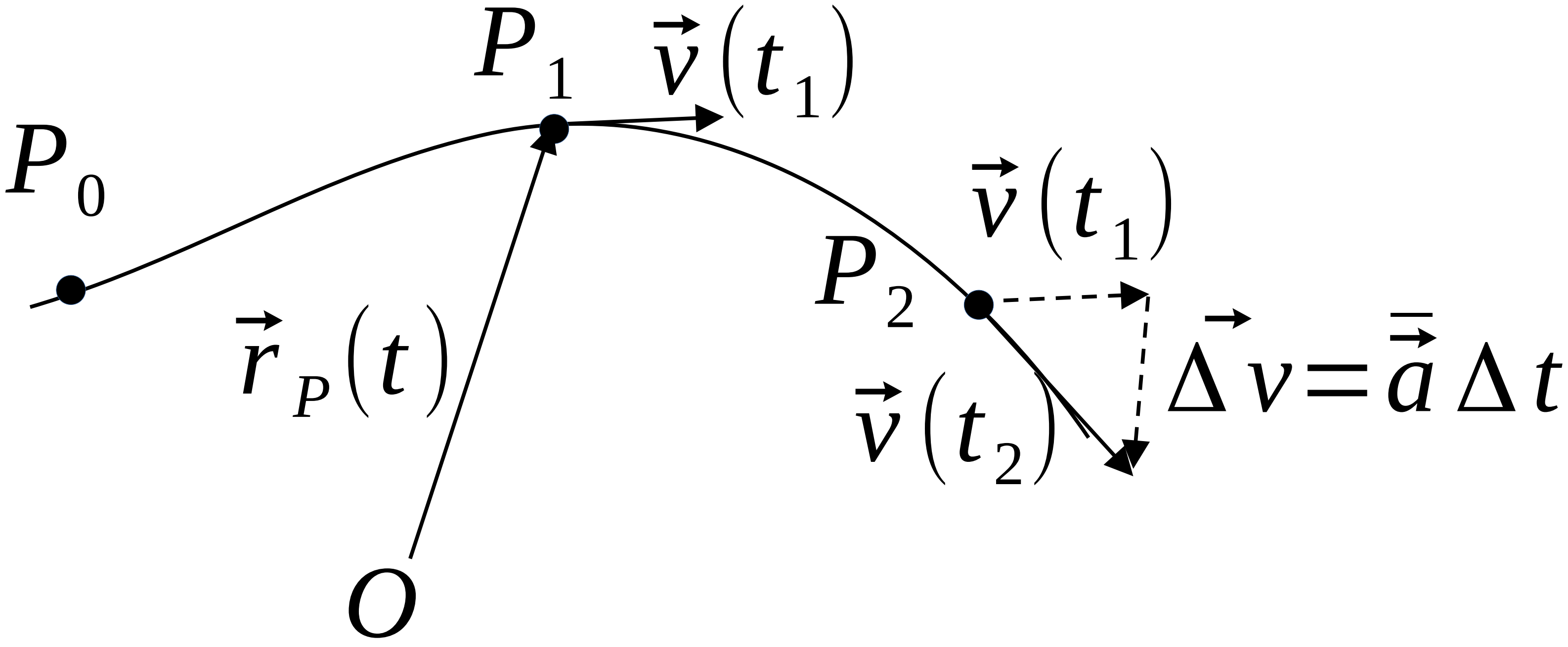
notazione compatta

Quindi l'accelerazione istantanea è la *derivata seconda* della posizione (o dello spostamento)

L'accelerazione ha dimensioni [L][T^{-2}]e si misura in m/s^2

Accelerazione

L'accelerazione non è sempre diretta lungo la traiettoria!



Se la direzione della velocità varia, l'accelerazione deve contenere componenti che non sono tangenti alla traiettoria

Accelerazione

L'accelerazione non è sempre diretta lungo la traiettoria!

Quindi abbiamo un'**accelerazione tangenziale** e
un'**accelerazione normale** (ossia ortogonale alla tangente)

$$\vec{a}_P(t) = \frac{d\vec{v}_P(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\hat{v}(t)\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{v}(t) + \frac{ds}{dt}\frac{d}{dt}\hat{v}(t)$$

Studiamo in dettaglio il secondo pezzo: la derivata di un versore

Accelerazione

Un versore ha modulo unitario **per definizione**

$$\hat{v}(t)\cdot\hat{v}(t)=1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{v}(t)\cdot\hat{v}(t)\right)=0$$

$$2\frac{d\hat{v}(t)}{dt}\cdot\hat{v}(t)=0$$

Quindi il vettore che si ottiene derivando un versore è sempre **ortogonale** al versore

“motore e freni”

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_T(t)+\vec{a}_N(t)$$

$$\vec{a}_T(t)=\frac{dv}{dt}\hat{v}(t):\text{accelerazione tangenziale}$$

“sterzo”

$$\vec{a}_N(t)=v(t)\frac{d}{dt}\hat{v}(t):\text{accelerazione normale}$$

Accelerazione

Lavoriamo sull'accelerazione normale

Poiché è legata alla variazione della direzione della velocità lungo la traiettoria, esplicitiamo la variazione lungo l'ascissa curvilinea:

$$\vec{a}_N(t)=\frac{ds}{dt}\frac{d}{dt}\hat{v}(t)=\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\hat{v}(s)=v^2(t)\frac{d}{ds}\hat{v}(s)$$

In un piccolo tratto, la traiettoria è indistinguibile da una circonferenza (*cerchio osculatore*) di raggio R

$$\frac{d}{ds}\hat{v}(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\hat{v}(s+\Delta s)-\hat{v}(s)}{\Delta s}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\hat{v}(\theta+\Delta\theta)-\hat{v}(\theta)}{R\Delta\theta}=\frac{1}{R}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\hat{v}(\theta+\Delta\theta)-\hat{v}(\theta)}{\Delta\theta}$$

Accelerazione

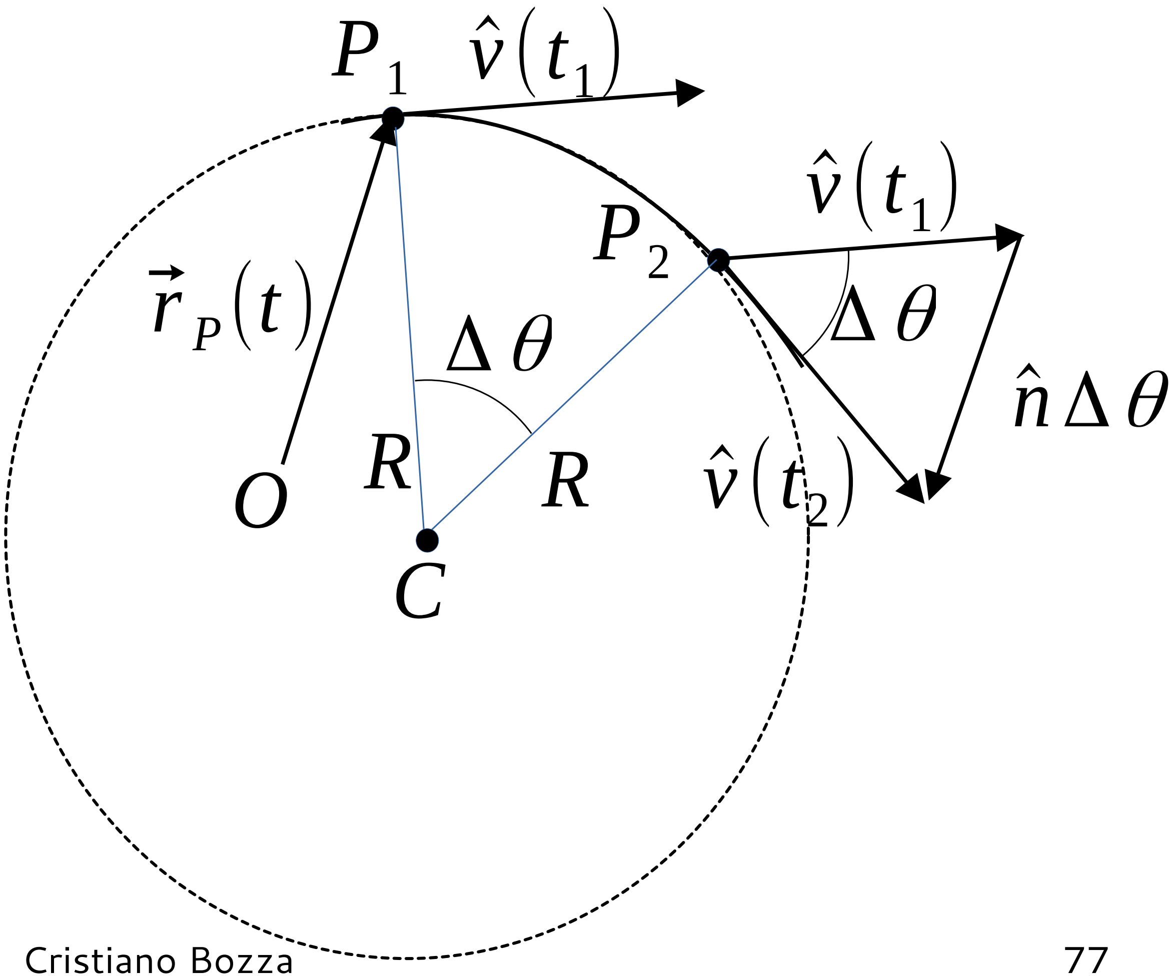
Lavoriamo sull'accelerazione normale

Poiché è legata alla variazione della direzione della velocità lungo la traiettoria, esplicitiamo la variazione lungo l'ascissa curvilinea:

$$\frac{d}{ds}\hat{v}(s)=\frac{1}{R}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\hat{v}(\theta+\Delta\theta)-\hat{v}(\theta)}{\Delta\theta}=$$

$$=\frac{1}{R}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta}\hat{n}(\theta)=\frac{1}{R}\hat{n}$$

$$\vec{a}_N(t)=\frac{v^2(t)}{R(t)}\hat{n}(t)$$



Accelerazione

Ricapitolando:

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\hat{v}(t)\right)=\frac{d^2s}{dt^2}\hat{v}(t)+\frac{ds}{dt}\frac{d}{dt}\hat{v}(t)=\frac{dv}{dt}\hat{v}(t)+\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\hat{v}(s)=$$

$$=\frac{dv}{dt}\hat{v}(t)+\frac{v^2(t)}{R(t)}\hat{n}(t)$$

R è il **raggio di curvatura.** $1/R$ **è la curvatura.**

E in definitiva:

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_T(t)+\vec{a}_N(t)$$

$$\vec{a}_T(t)=\frac{dv}{dt}\hat{v}(t):\text{accelerazione tangenziale}$$

$$\vec{a}_N(t)=\frac{v^2(t)}{R(t)}\hat{n}(t):\text{accelerazione normale o centripeta}$$

Centripeta = verso il centro di curvatura ***locale*** *della traiettoria* (il centro può variare lungo la traiettoria)

Velocità e Accelerazione

Pensiamo ad un circuito da corsa

Ad ogni giro si torna al punto di partenza

L'ascissa curvilinea è la distanza sul giro

La velocità varia di continuo

L'accelerazione ha tutte le componenti