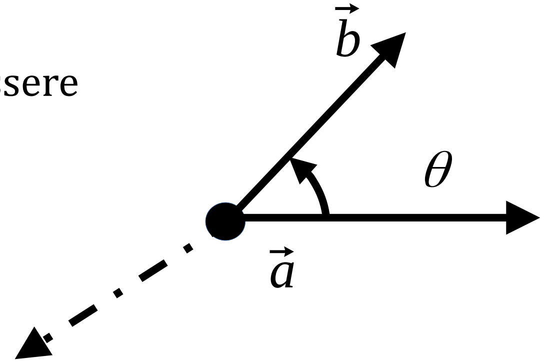
Vettori

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori **liberi** è un **vettore** ortogonale ad entrambi, di modulo pari al prodotto dei moduli per il seno dell'angolo compreso e direzione tale che il prodotto vede il primo vettore ruotare verso il secondo in senso antiorario (regola della mano destra)

Le basi ortonormali possono essere di due tipi:

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \quad \text{levogire}$$
$$\hat{i}\times\hat{j}=-\hat{k} \quad \text{destrogire}$$



$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

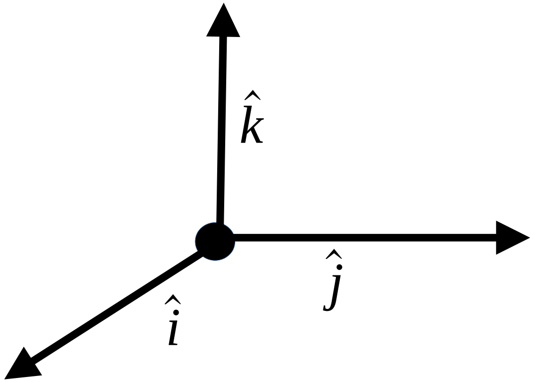
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\ se\ \vec{a}=\vec{0}\ \text{o}\ \vec{b}=\vec{0}\ \text{o}\ \theta=0,\pi$$

È comodo avere sempre terne **levogire**

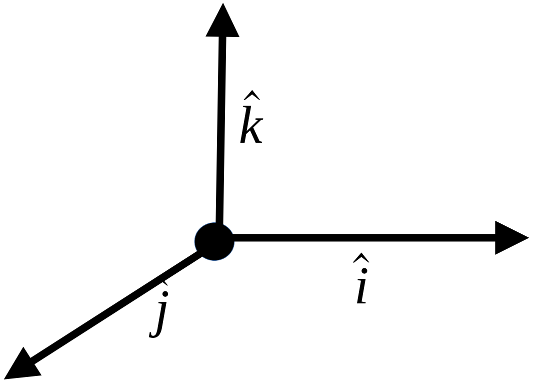
Vettori

Prodotto vettoriale

Base ortonormale levogira



Base ortonormale destrogira



Una terna di vettori è levogira se il terzo vede il primo ruotare sul secondo in senso antiorario

Vale per qualsiasi terna di vettori anche non ortonormali

Vettori

Prodotto vettoriale

D'ora in poi supporremo sempre basi ortonormali levogire

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \quad \text{quindi} \quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \quad \text{e} \quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

Per vettori generici:

$$\begin{gathered}\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})=\\(a_xb_x)\hat{i}\times\hat{i}+(a_xb_y)\hat{i}\times\hat{j}+(a_xb_z)\hat{i}\times\hat{k}+\\(a_yb_x)\hat{j}\times\hat{i}+(a_yb_y)\hat{j}\times\hat{j}+(a_yb_z)\hat{j}\times\hat{k}+\\(a_zb_x)\hat{k}\times\hat{i}+(a_zb_y)\hat{k}\times\hat{j}+(a_zb_z)\hat{k}\times\hat{k}=\\(a_xb_y)\hat{k}-(a_xb_z)\hat{j}-(a_yb_x)\hat{k}+(a_yb_z)\hat{i}+(a_zb_x)\hat{j}-(a_zb_y)\hat{i}=\\(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}\end{gathered}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

regola del determinante

Vettori

Prodotto vettoriale

D'ora in poi supporremo sempre basi ortonormali levogire

$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ quindi $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ e $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

Per vettori generici:

$$
\begin{gathered}
\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})= \\
(a_xb_x)\hat{i}\times\hat{i}+(a_xb_y)\hat{i}\times\hat{j}+(a_xb_z)\hat{i}\times\hat{k}+ \\
(a_yb_x)\hat{j}\times\hat{i}+(a_yb_y)\hat{j}\times\hat{j}+(a_yb_z)\hat{j}\times\hat{k}+ \\
(a_zb_x)\hat{k}\times\hat{i}+(a_zb_y)\hat{k}\times\hat{j}+(a_zb_z)\hat{k}\times\hat{k}= \\
(a_xb_y)\hat{k}-(a_xb_z)\hat{j}-(a_yb_x)\hat{k}+(a_yb_z)\hat{i}+(a_zb_x)\hat{j}-(a_zb_y)\hat{i}= \\
(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}
\end{gathered}
$$

$$
\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}
$$

regola del determinante

Vettori

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale risulta utile per:

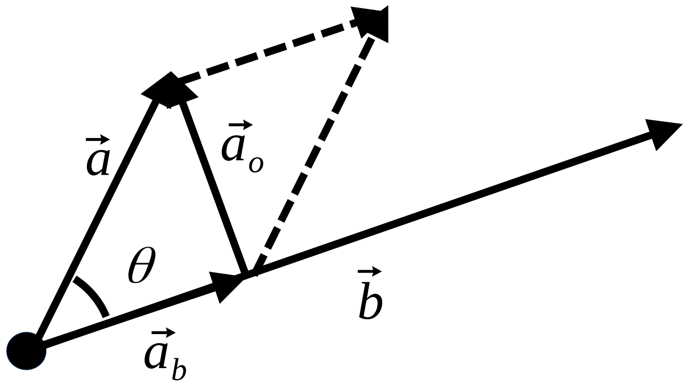
1) calcolare la componente ortogonale di un vettore ad un altro

2) calcolare l'area del parallelogramma che ha per lati i due vettori

Vediamo 1: $\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{a}_b+\vec{a}_o)\times\vec{b}=\vec{a}_b\times\vec{b}+\vec{a}_o\times\vec{b}$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\left|\|\vec{a}\|\sin\theta\|\vec{b}\|\right|$$

Vediamo 2: $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\left|\|\vec{a}\|\sin\theta\|\vec{b}\|\right|=b\times h$



Vettori

Prodotto misto

Il prodotto misto è la combinazione di un prodotto vettoriale ed uno scalare

Il risultato del prodotto misto è uno **scalare**

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=k$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=k$$

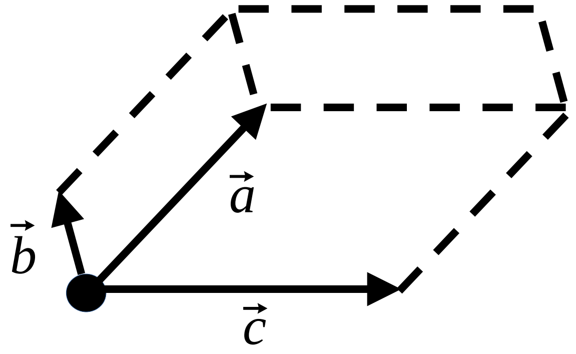
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=$$
$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

regola del determinante

Il prodotto misto è nullo se sono uguali (o collineari) due vettori

Il senso fisico del prodotto misto è quello del volume del prisma definito dai tre vettori

Attenzione: il volume è sempre positivo, ma il prodotto misto è **negativo** se la terna è **destrogira**



Vettori

Momento di un vettore **applicato**

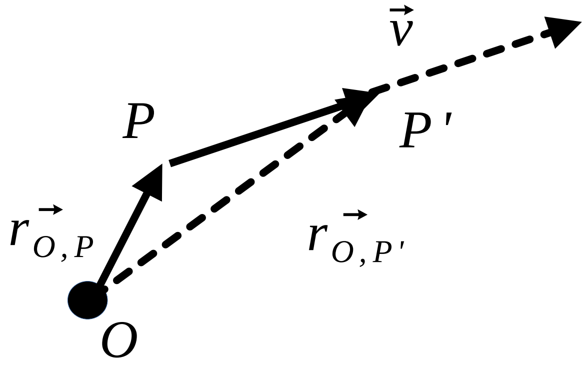
Nel caso di un vettore applicato, è possibile definire il **momento del vettore applicato rispetto ad un polo**, come:

$$\vec{M}_{\vec{v},O} = \vec{r_{O,P}} \times \vec{v_P}$$

ossia *il prodotto vettoriale del vettore posizione dal polo prescelto al punto di applicazione per il vettore considerato libero.*

Il momento di un vettore dipende dal polo prescelto, e non ha senso senza che sia definito il polo. Il momento di un sistema di vettori è la somma dei momenti calcolati rispetto allo stesso polo.

Il momento di un vettore applicato non varia se il vettore viene spostato lungo la sua direzione.



$$\vec{M}'_{\vec{v},O} = \vec{r}_{O,P'} \times \vec{v} = (\vec{r}_{O,P} + \vec{r}_{P,P'}) \times \vec{v} = \vec{r}_{O,P} \times \vec{v} + \vec{r}_{P,P'} \times \vec{v} = \vec{r}_{O,P} \times \vec{v}$$

poiché $vers\,\vec{r}_{P,P'} = vers\,\vec{v}\,, \qquad \vec{r}_{P,P'} \times \vec{v} = \vec{0}$

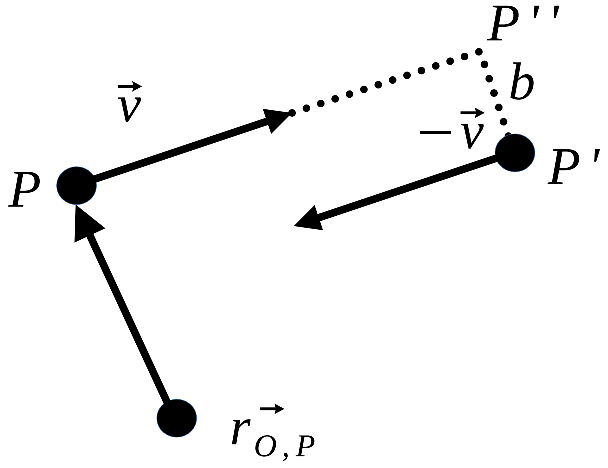
Vettori

Coppie di vettori applicati e loro momento

Due vettori applicati con lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto si dicono **coppia** di vettori.

La distanza delle due rette di applicazione è detta **braccio della coppia**.

Il momento di una coppia di vettori è indipendente dal polo.



$$\vec{M}_{\vec{v},\vec{v}'}=\vec{r}_{O,P}\times\vec{v}_P+\vec{r}_{O,P'}\times\vec{v}_{P'}=\vec{r}_{O,P}\times\vec{v}-\vec{r}_{O,P'}\times\vec{v}=$$
$$=\vec{r}_{O,P}\times\vec{v}-\left(\vec{r}_{O,P}+\vec{r}_{P,P''}+\vec{r}_{P'',P'}\right)\times\vec{v}=$$
$$=\vec{r}_{O,P}\times\vec{v}-\vec{r}_{O,P}\times\vec{v}-\vec{r}_{P,P''}\times\vec{v}+\vec{r}_{P'',P'}\times\vec{v}=$$
$$=-\vec{r}_{P,P''}\times\vec{v}+\vec{r}_{P'',P'}\times\vec{v}=\vec{r}_{P'',P'}\times\vec{v}$$
$$\|\vec{M}_{\vec{v},\vec{v}'}\|=b\|\vec{v}\|$$

Il momento è perpendicolare al piano della coppia e diretto in modo da vedere la coppia ruotare in senso antiorario.