Moto circolare uniforme

Moto circolare uniforme

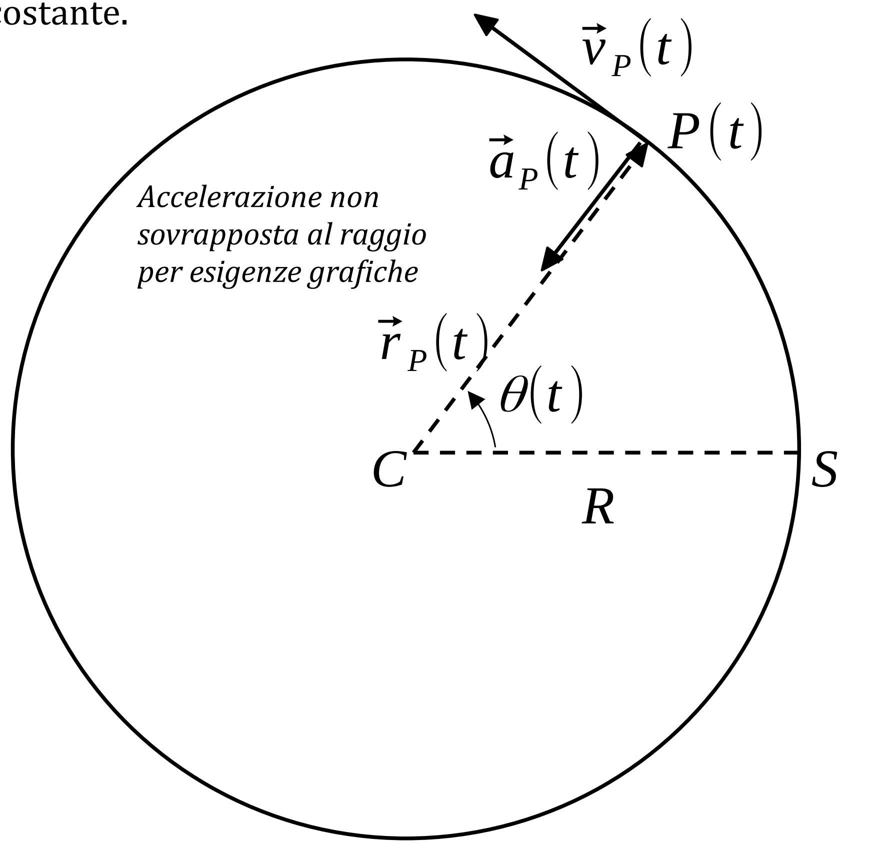
Traiettoria: una circonferenza di raggio *R* fissato. Velocità scalare: costante.

Moto piano vario (= accelerazione variabile)

$$s(t) = s_0 + v\,t$$
$$s(t) = R\,\theta_0 + R\,\theta(t)$$

$$\Rightarrow s_0 = R\,\theta_0; \quad v\,t = R\,\theta(t); \quad \theta(t) = \frac{v}{R}t = \omega t$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \text{velocità angolare}\,(rad/s)$$
$$v = \omega R$$



La velocità angolare è la derivata dell'angolo compreso tra un raggio di riferimento e il raggio attuale del punto materiale.

La velocità vettoriale è ortogonale al raggio sempre, e quindi è tangente alla circonferenza.

Moto circolare uniforme

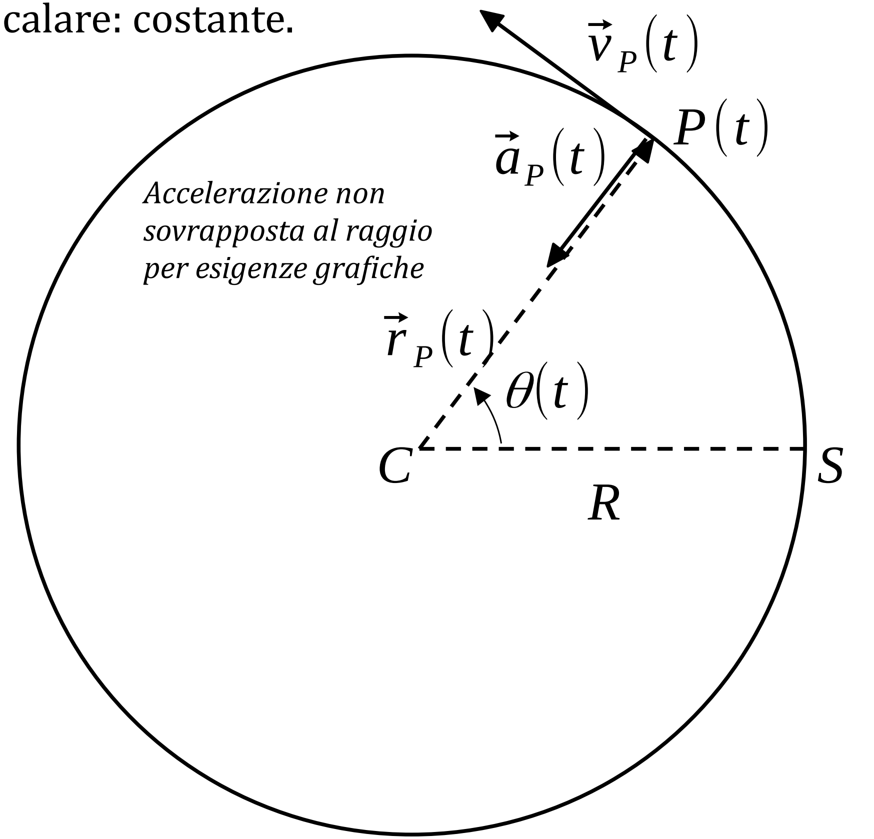
Traiettoria: una circonferenza di raggio *R* fissato. Velocità scalare: costante.

Moto piano.

$$\ddot{s}=0$$

$$\vec{a}_P(t)=\ddot{s}\,\hat{v}(t)+\frac{v^2}{R}\hat{n}=\frac{v^2}{R}\hat{n}=\omega^2 R\,\hat{n}$$

$$\hat{n}=-\hat{r}_P(t)$$

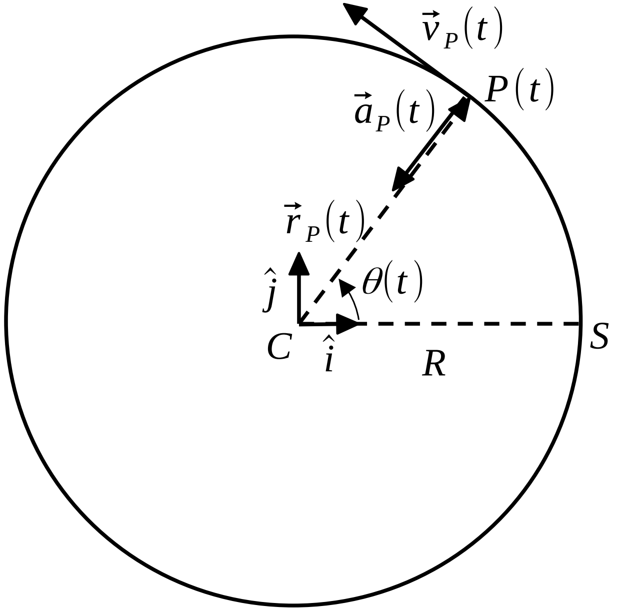


L'accelerazione è tutta centripeta (normale) e parallela al raggio ma con verso opposto

Moto circolare uniforme

Traiettoria: una circonferenza di raggio R fissato. Velocità scalare: costante.

Moto piano



$$\vec{r}_P(t) = R\cos\theta(t)\,\hat{i} + R\sin\theta(t)\,\hat{j} =$$
$$= R\cos(\omega t + \theta_0)\,\hat{i} + R\sin(\omega t + \theta_0)\,\hat{j}$$

Calcoliamo la velocità per derivazione

$$\vec{v}_P(t) = \frac{d}{dt}\left[R\cos(\omega t + \theta_0)\,\hat{i} + R\sin(\omega t + \theta_0)\,\hat{j}\right] =$$
$$= -R\,\omega\sin(\omega t + \theta_0)\,\hat{i} + R\,\omega\cos(\omega t + \theta_0)\,\hat{j}$$
$$\vec{v}_P(t)\cdot\vec{r}_P(t) = R^2\,\omega[-\sin(\omega t + \theta_0)\cos(\omega t + \theta_0) + \sin(\omega t + \theta_0)\cos(\omega t + \theta_0)] = 0$$

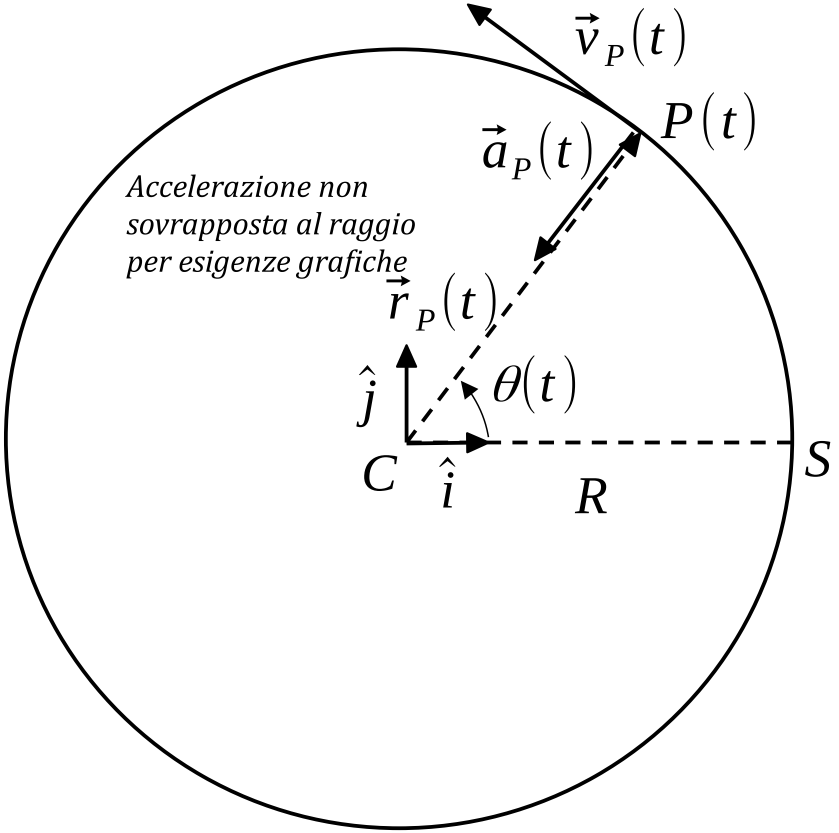
Quindi la velocità è sempre ortogonale al raggio vettore

Moto circolare uniforme

Poniamo $\theta_0 = 0$ senza perdere di generalità

$$\vec{v}_P(t) = \frac{d}{dt}\left[R\cos(\omega t)\hat{i} + R\sin(\omega t)\hat{j}\right] =$$
$$= -R\,\omega\sin(\omega t)\hat{i} + R\,\omega\cos(\omega t)\hat{j}$$

Calcoliamo l'accelerazione



$$\vec{a}_P(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}_P(t) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{-R\,\omega\sin(\omega t)\hat{i} + R\,\omega\cos(\omega t)\hat{j}\right\}$$
$$= -R\,\omega^2\left[\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}\right] = -\omega^2\vec{r}_P(t)$$

Quindi l'accelerazione è sempre diretta in verso opposto al raggio vettore

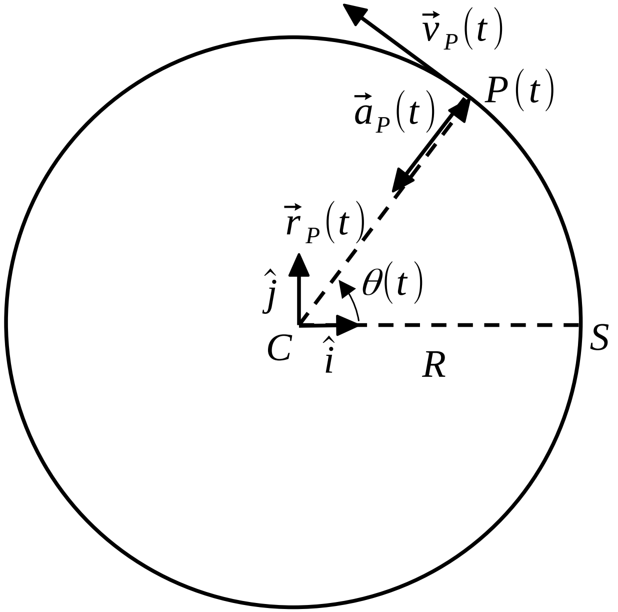
Moto circolare uniforme

Ancòra sull'accelerazione

$$\vec{a}_P(t) = -\omega^2 \vec{r}_P(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{d^2 x}{d t^2} = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = \dfrac{d^2 y}{d t^2} = -\omega^2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \end{cases}$$



Le componenti dell'accelerazione e quelle della posizione sono legate da un'**equazione differenziale ordinaria del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti**.

Moto circolare uniforme

Equazione

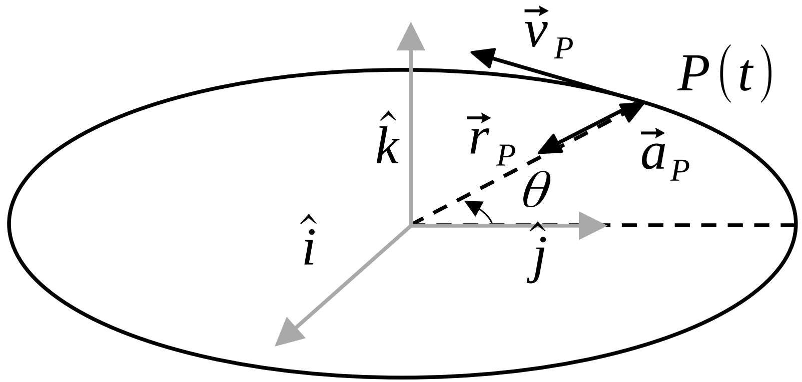
- **Differenziale** = coinvolge una funzione e le sue derivate
- **Lineare** = la funzione e le sue derivate compaiono al più moltiplicate per scalari e poi sommate (combinazione lineare)
- **Ordinaria** = compaiono una funzione e le sue derivate rispetto alla variabile indipendente (il tempo) fino ad un certo ordine
- **Del secondo ordine** = la derivata di ordine più alto è la seconda
- **Omogenea** = se la funzione è identicamente nulla l'equazione è soddisfatta ($x = 0$ *sempre* è soluzione)
- **A coefficienti costanti** = i coefficienti della combinazione lineare non dipendono dal tempo

Questo ci servirà più avanti

Moto circolare uniforme

Vediamo il moto piano nello spazio tridimensionale

Osserviamo che, in ogni punto della traiettoria:



- La velocità vettoriale è sempre nel piano, ed ortogonale al raggio
- La velocità ha modulo costante
- L'accelerazione è sempre nel piano, ed ortogonale alla velocità
- L'accelerazione ha modulo costante

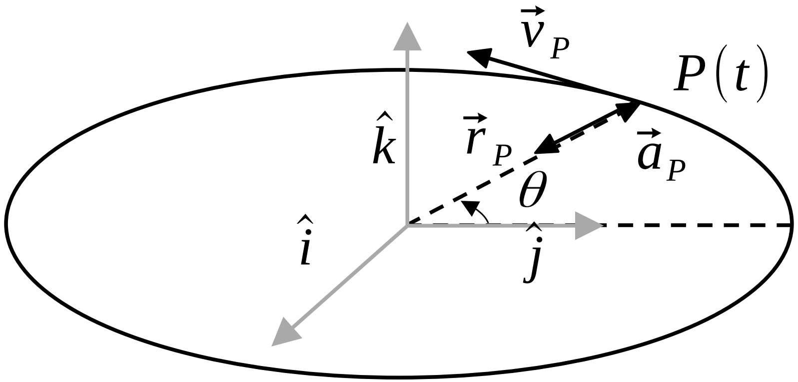
In questo moto, i vettori hanno sempre lo stesso modulo e cambiano solo le loro direzioni (ossia i versori) e tutti hanno delle relazioni di ortogonalità

Possiamo sfruttare questo per legare le derivate temporali al prodotto vettoriale con un ben preciso vettore: **solo nel moto circolare uniforme!**

Moto circolare uniforme

Vediamo il moto piano nello spazio tridimensionale

Introduciamo la **velocità angolare vettoriale**



- È ortogonale al piano del moto
- È diretta in modo da vedere il moto svolgersi in senso antiorario
- Ha modulo pari alla velocità angolare scalare

$$\vec{\omega}=\omega\hat{k} \text{ (con questa scelta degli assi)}$$

$$\vec{v}_P(t)=\vec{\omega}\times\vec{r}_P(t)$$

verifichiamo

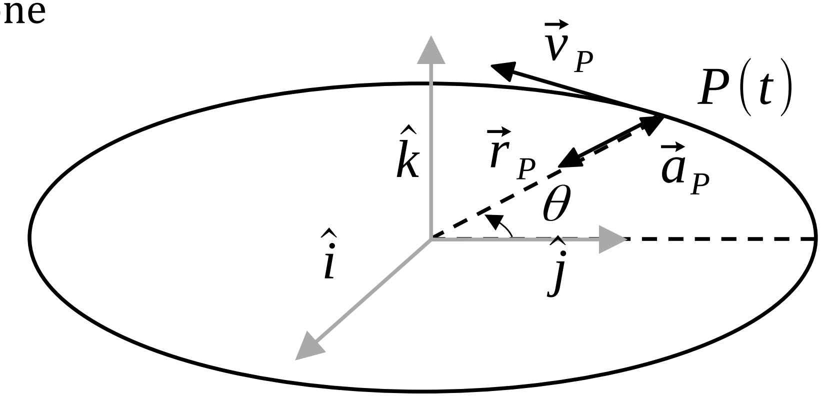
$$\vec{r}_P(t)=R\cos(\omega t)\hat{i}+R\sin(\omega t)\hat{j}; \qquad \vec{v}_P(t)=-R\,\omega\sin(\omega t)\hat{i}+R\,\omega\cos(\omega t)\hat{j}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r}=R\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0\end{vmatrix}=-R\,\omega\sin(\omega t)\hat{i}+R\,\omega\cos(\omega t)\hat{j}=\vec{v}$$

Moto circolare uniforme

Vediamo il moto piano nello spazio tridimensionale

Verifichiamo che un'analoga relazione vale per l'accelerazione



$\vec{\omega}=\omega\hat{k}$ (con questa scelta degli assi)

$\vec{a}_P(t)=\vec{\omega}\times\vec{v}_P(t)$

verifichiamo

$\vec{v}_P(t)=-R\,\omega\sin(\omega t)\hat{i}+R\,\omega\cos(\omega t)\hat{j}\,;\qquad \vec{a}_P(t)=-R\,\omega^2\cos(\omega t)\hat{i}-R\,\omega^2\sin(\omega t)\hat{j}$

$$\vec{\omega}\times\vec{v}=R\,\omega\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0\end{vmatrix}=-R\,\omega^2\cos(\omega t)\hat{i}-R\,\omega^2\sin(\omega t)\hat{j}=\vec{a}$$

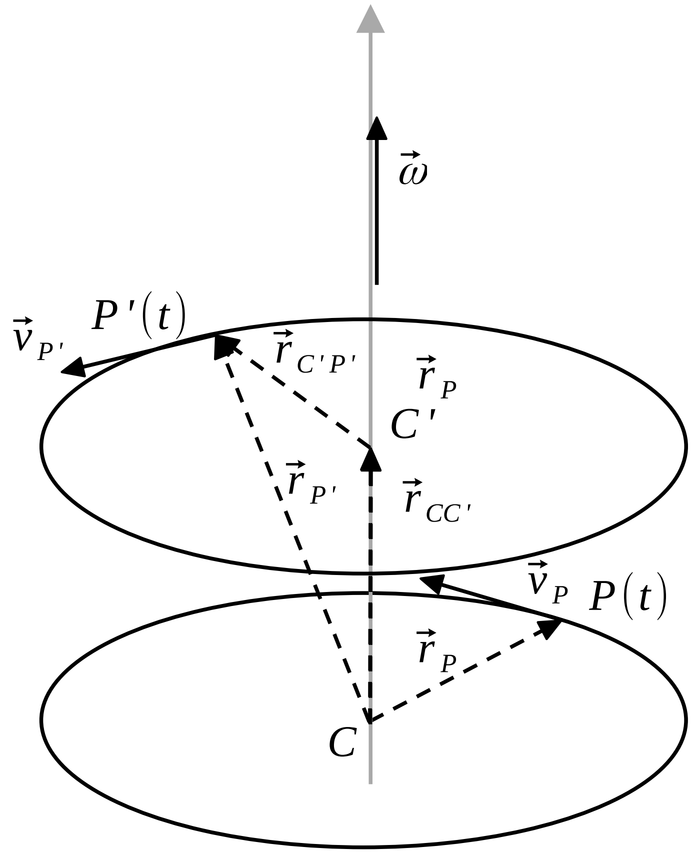
$\vec{a}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

Moto circolare uniforme

Vediamo il moto piano nello spazio tridimensionale

Abbiamo ottenuto **solo nel caso del moto circolare uniforme:**

$$\vec{v}_P(t)=\vec{\omega}\times\vec{r}_P(t)$$
$$\vec{a}_P(t)=\vec{\omega}\times\vec{v}_P(t)$$



E se avessimo due o più punti materiali che **su piani diversi** stanno tutti girando intorno allo stesso asse, anche partendo da angoli diversi?

$$\vec{v}_{P'}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{P'}=\vec{\omega}\times(\vec{r}_{CC'}+\vec{r}_{C'P'})=\vec{\omega}\times\vec{r}_{CC'}+\vec{\omega}\times\vec{r}_{C'P'}=$$
$$=\vec{0}+\vec{\omega}\times\vec{r}_{C'P'}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{C'P'}$$

Poiché la componente del vettore posizione parallela alla velocità angolare non contribuisce, **per tutti i punti che su qualsiasi piano stanno girando intorno allo stesso asse di moto circolare uniforme possiamo scrivere**

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_P(t)&=\vec{\omega}\times\vec{r}_P(t)\\ \vec{a}_P(t)&=\vec{\omega}\times\vec{v}_P(t)\end{aligned}}$$

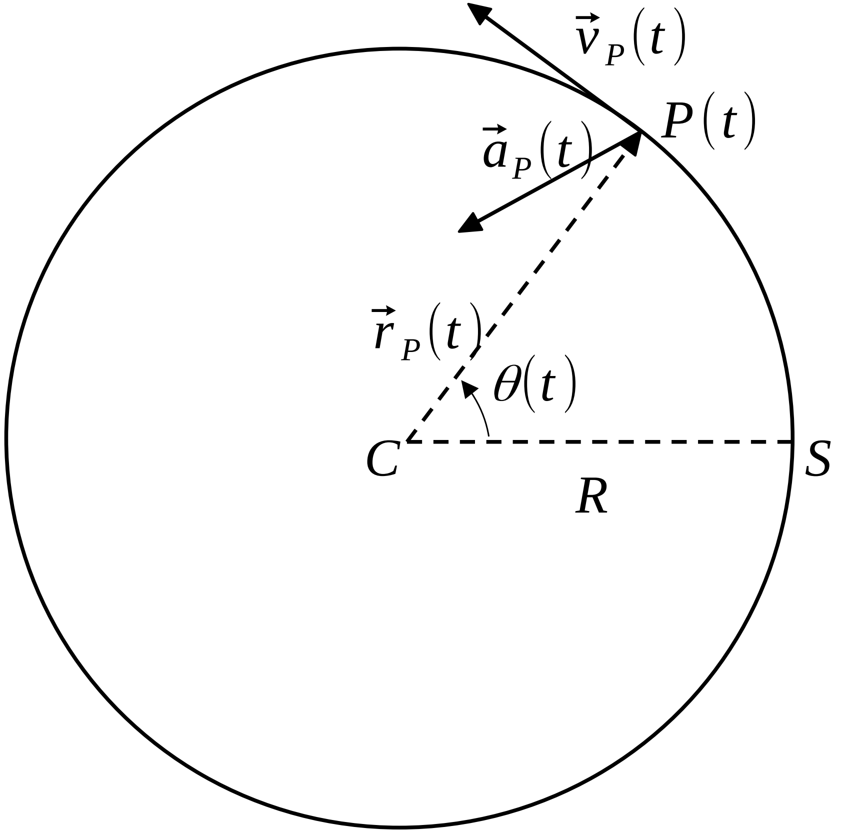
Moto circolare uniformemente accelerato

Moto circolare uniformemente accelerato

Traiettoria: una circonferenza di raggio *R* fissato. Moto vario (= con accelerazione variabile)

Moto piano

$$\dot{s}(t)=v(t)=at+v_0$$
$$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$$
$$\ddot{s}(t)=a$$
$$\omega=\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{R}(at+v_0)=\alpha t+\omega_0$$
$$\alpha=\text{accelerazione angolare}\left(rad/s^2\right)$$
$$s(t)=R\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0t+\theta_0\right)$$



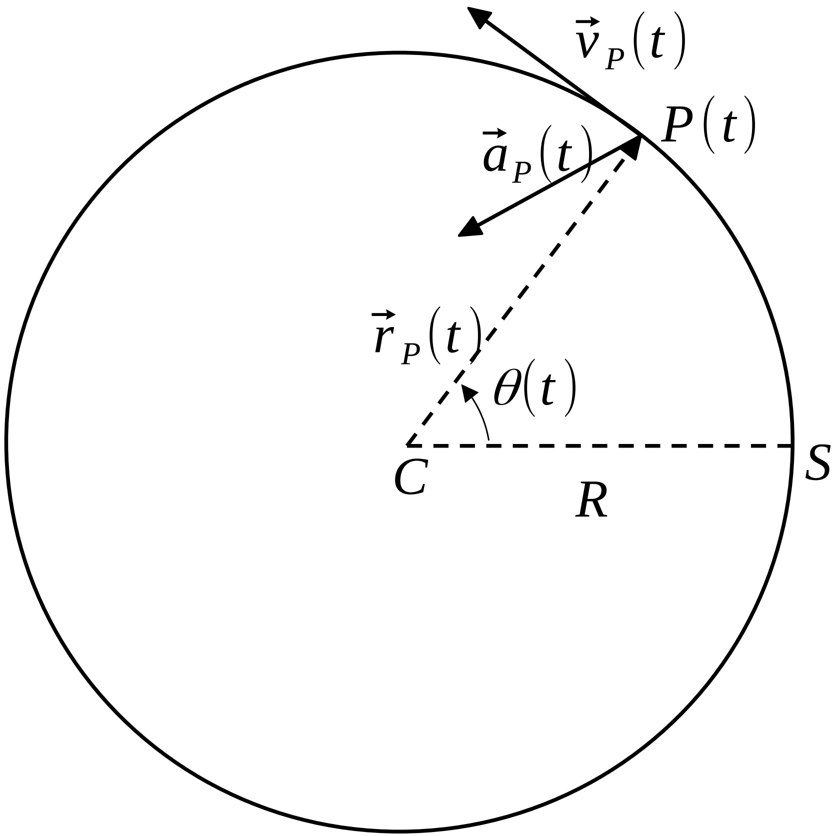
La velocità angolare **non è più costante**

[α] = [T^{-2}]

Moto circolare uniformemente accelerato

Calcoliamo l'accelerazione vettoriale

$$\vec{a}(t)=\frac{d}{dt}\vec{v}=\frac{dv}{dt}\hat{v}+\frac{v^2}{R}\hat{n}=R\alpha\hat{v}+\frac{v^2}{R}\hat{n}$$



Possiamo definire il **vettore accelerazione angolare**

$$\vec{\alpha}(t)=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Che **in questo caso** è parallelo al vettore velocità angolare, e scrivere :

$$\vec{a}(t)=\vec{\alpha}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}$$
$$\vec{a}(t)=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Moto circolare uniformemente accelerato: Verifichiamo per componenti. Senza perdere di generalità poniamo

$$\theta_0=0$$

$$\omega=\alpha t+\omega_0;\ \theta=\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t+\theta_0=\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t$$

$$\begin{cases} x(t)=R\cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right) \\ y(t)=R\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right) \end{cases};\quad \begin{cases} v_x(t)=\dot{x}(t)=-R(\alpha t+\omega_0)\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right) \\ v_y(t)=\dot{y}(t)=R(\alpha t+\omega_0)\cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right) \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_x(t)=\ddot{x}(t)=-R\,\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right)-R(\alpha t+\omega_0)^2\cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right) \\ a_y(t)=\ddot{y}(t)=\ \ R\,\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right)-R(\alpha t+\omega_0)^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right) \end{cases};$$

tangenziale

$$\begin{cases} a_x(t)=\ddot{x}(t)=\boxed{-R\,\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right)}\boxed{-R\,\omega^2\cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right)} \\ a_y(t)=\ddot{y}(t)=\boxed{\ \ R\,\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right)}\boxed{-R\,\omega^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2+\omega_0 t\right)} \end{cases}$$

normale o
centripeta

Moto circolare uniformemente accelerato

Consideriamo il modulo dell'accelerazione

$$\vec{a}(t)=R\alpha\hat{v}+\frac{v^2}{R}\hat{n}=R\alpha\hat{v}+R(\alpha t+\omega_0)^2\hat{n}$$

$$\|\vec{a}(t)\|=\sqrt{R^2\alpha^2+R^2(\alpha t+\omega_0)^4}=R\sqrt{\alpha^2+(\alpha t+\omega_0)^4}$$

Con il passare del tempo, il secondo termine (centripeto) diventa sempre più grande e finisce per essere preponderante; anche la velocità angolare iniziale diventerà trascurabile. Quindi per tempi grandi:

$$\|\vec{a}(t)\|\simeq R\alpha^2t^2$$

Per qualunque sistema queste accelerazioni diventano prima o poi insostenibili. In pratica per un sistema fisico reale l'accelerazione s'interromperà.