Moto del proiettile

Moto del proiettile

Componiamo un moto rettilineo uniforme su un asse con un moto uniformemente accelerato su un altro.

Per comodità useremo gli assi x e y

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}; \qquad x_0 = 0, y_0 = 0; \qquad \begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad v_{0x} = v_0 \cos\theta, v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Troviamo l'equazione della traiettoria, eliminando il tempo

$$t = \frac{x}{v_{0x}}; \qquad y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{v_{0x}^2} \right) \Rightarrow \text{equazione della parabola}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0; \qquad 0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g x_{max}}{v_{0x}^2} \Rightarrow x_{max} = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\theta)$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\theta$$

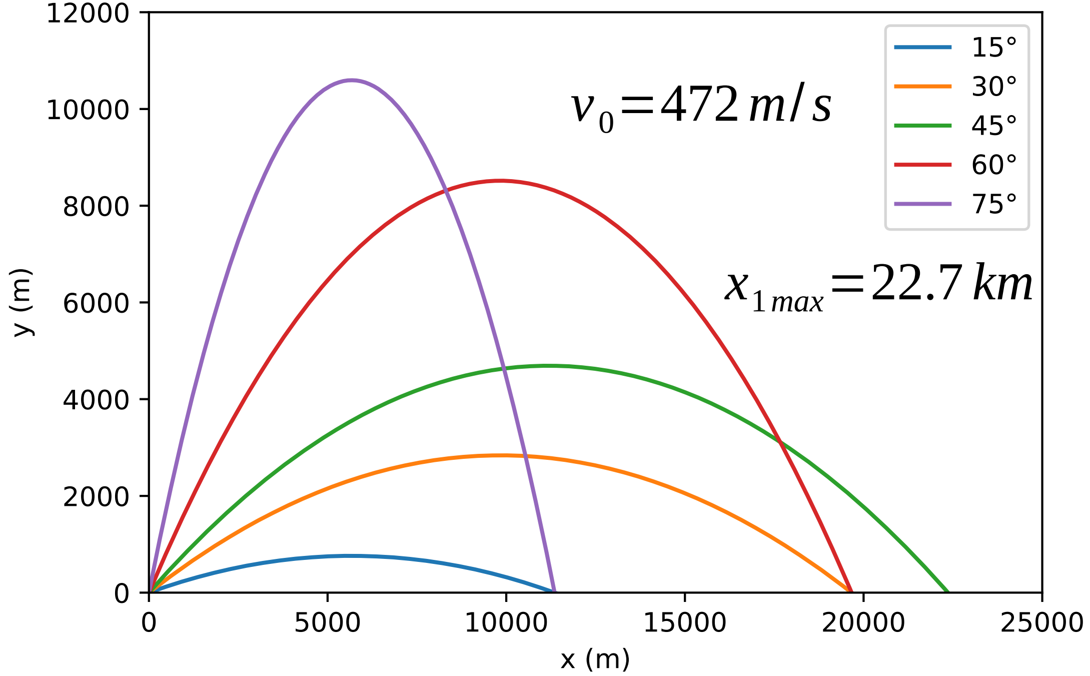
Moto del proiettile

Troviamo la gittata (ossia il punto in cui il proiettile tocca terra) in funzione dell'alzo

$$0 = x\tan\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{v_{0x}^2}\right) \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \frac{g\, x_1}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{2 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$



La massima gittata si ha per alzo = 45°

$$x_{1\,max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Moto rettilineo uniforme

È il moto più semplice dopo la quiete

Traiettoria: una retta. Conseguenza: direzione costante.

Velocità: costante. Conseguenza: verso costante, e quindi anche velocità vettoriale costante.

$$s(t) = s_0 + v(t - t_0); \qquad (o\,anche\; s(t) = s_0 + v\,t)$$
$$quindi\; \dot{s} = v = cost\,.$$

Inoltre:

$$vers\,\vec{v} = \hat{v} = cost\,.$$
$$\vec{v} = v\,\hat{v} = cost\,.$$
$$v_x = cost\,, v_y = cost\,.\,, v_z = cost\,.$$

Moto rettilineo uniforme

In termini vettoriali:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}(t-t_0); \qquad (o\, anche\, \vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}\,t)$$

Verifichiamo che effettivamente sia l'equazione per un moto rettilineo uniforme.

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}=cost.$$

Quindi sono costanti direzione e verso, e modulo della velocità. Verifichiamo che la traiettoria sia una retta.
Dobbiamo eliminare il tempo. Supponiamo che:

$$v_x \neq 0$$

Naturalmente, possiamo scegliere una coordinata diversa se necessario.

Moto rettilineo uniforme

Otteniamo
$$x=x_0+v_x(t-t_0)\Rightarrow t-t_0=\frac{x-x_0}{v_x}\Rightarrow t\,;$$

$$y=y_0+v_y(t-t_0)=y_0+\frac{v_y}{v_x}(x-x_0)$$

$$z=z_0+v_z(t-t_0)=z_0+\frac{v_z}{v_x}(x-x_0)$$

Le ultime due sono ben note equazioni della retta nei piani *xy* e *xz*. In particolare, se scegliamo l'asse *x* lungo la traiettoria, otteniamo $x(t)=x_0+v(t-t_0)$ *oppure* $x(t)=x_0+v\,t$

Per l'accelerazione, poiché
$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}=cost\,.$$

Otteniamo
$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{0}\,m/s^2$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Traiettoria: ancora una retta. Conseguenza: direzione della velocità costante.

Accelerazione tangenziale (è l'unica non nulla) costante: $\ddot{s}=\frac{d^2 s}{d t^2}=a=cost\,.$

Quindi $$\frac{d v}{d t}=a \Rightarrow v(t)=a(t-t_0)+v_0; \qquad (o\, anche\, v(t)=a t+v_0)$$

Osserviamo che $$\frac{d}{d t}(c_2 t^2)=2 c_2 t; \frac{d}{d t}(c_1 t)=c_1; \frac{d}{d t} c_0=0$$

Se pongo

$$s(t)=c_2 t^2+c_1 t+c_0$$

posso ottenere i valori dei coefficienti per confronto.

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Se pongo

$$s(t)=c_2 t^2+c_1 t+c_0$$

$$\frac{ds}{dt}=2c_2 t+c_1$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2}=2c_2=a \Rightarrow c_2=\frac{a}{2}$$

$$\frac{ds}{dt}=at+c_1 \Rightarrow c_1=v_0$$

$$s(t)=\frac{a}{2}t^2+v_0 t+c_0 \Rightarrow s(0)=c_0$$

$$s(t)=\frac{a}{2}t^2+v_0 t+s_0$$

oppure

$$s(t)=\frac{a}{2}(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

L'accelerazione (vettoriale) è costante:

$$\vec{v}(t)=(a\,t+v_0)\,\hat{v}$$
$$\vec{a}(t)=a\,\hat{v}$$

Per le equazioni vettoriali si ha:

$$\vec{r}(t)=\left(\frac{a}{2}t^2+v_0 t\right)\hat{v}+\vec{r}_0$$

La traiettoria è ancora una retta perché l'unico vettore variabile ha sempre la stessa direzione (volendo si può essere più formali, ma non è utile in questo caso)

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Caso particolare: moto dei gravi

Sulla Terra, al livello del mare, tutti i corpi sono accelerati verso il centro della Terra (ossia verso il basso) con un'accelerazione di modulo $g = 9.81\ m/s^2$.

Un corpo che viene lasciato cadere da fermo da un'altezza h si muove in linea retta verso il basso.

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

Se poniamo $z = 0\ m$ al suolo, abbiamo

$$0 = -\frac{1}{2} g t_{suolo}^2 + h \Rightarrow t_{suolo} = \sqrt{2h/g}$$

e per la velocità

$$v_z(t) = -g t$$

nel momento del contatto al suolo $v_{suolo} = \sqrt{2gh}$ Profondità di un pozzo: $h = \frac{1}{2} g t_{fondo}^2$