



## La teoria cinetica dei gas

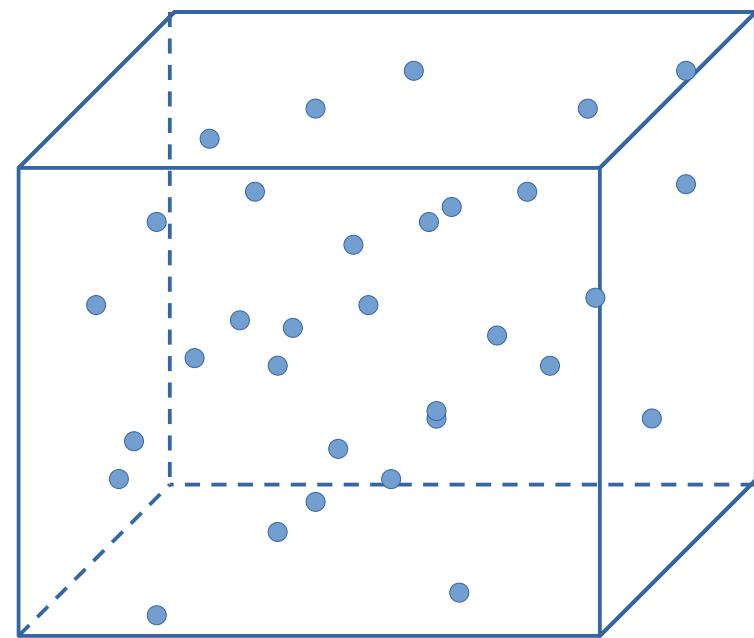
## Teoria cinetica dei gas ideali

Consideriamo un gas monoatomico (per esempio He, Ne, Xe, Ar) contenuto in un recipiente a forma di parallelepipedo e modelliamo ogni atomo come un punto materiale. Trascuriamo l'azione della forza di gravità.

Possiamo concentrarci per cominciare sul caso di gas molto rarefatti, trascurando quindi la possibilità che due atomi si urtino.

Gli atomi viaggiano indisturbati, di moto rettilineo uniforme, fino alla prima parete che incontrano, che ovviamente ha massa molto maggiore delle masse atomiche.

Siamo quindi nel caso di urto di un punto materiale contro una parete di massa infinita. Poiché il punto materiale non ha altre proprietà oltre alla massa, e se la parete non “assorbe” gli atomi, ogni urto deve essere elastico.

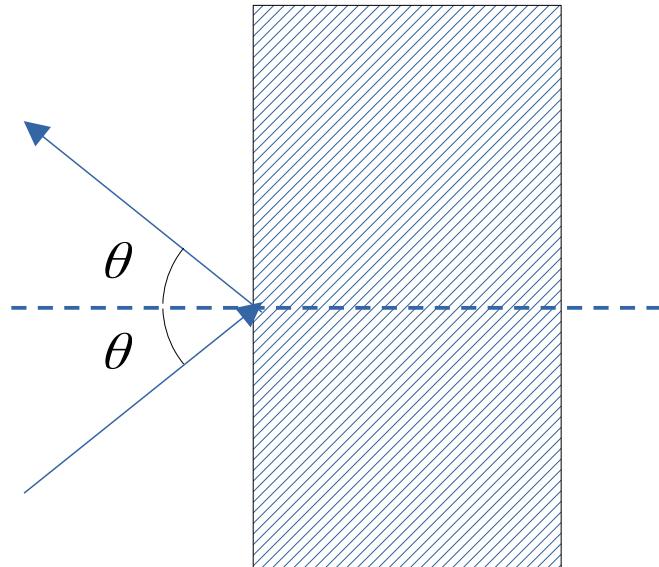


## Teoria cinetica dei gas ideali

Consideriamo quindi un atomo in movimento verso la parete  $yz$ , ortogonale all'asse  $x$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1fx} = -v_{1ix}; \quad v_{1fy} = v_{1iy}; \quad v_{1fz} = v_{1iz} \\ v_{2fx} = 2 \frac{p_{1ix}}{m_2} = 0 \end{array} \right.$$

Ogni atomo che urta contro una parete di massa infinita viene riflesso sullo stesso piano e con angolo di riflessione rispetto alla normale alla superficie uguale all'angolo di incidenza. Le componenti tangenti al piano ( $y$  e  $z$ ) rimangono inalterate.



## Teoria cinetica dei gas ideali

Se abbiamo un flusso di atomi continuo, che urtano una parete, e ognuno con componente velocità  $v_x$ , ciascuno eserciterà un impulso pari a:

$$I_x = p_{1fx} - p_{1ix} = 2 p_{1ix} = 2 m v_x$$

Se vi sono  $N_{vx}/V$  atomi per unità di volume con quella velocità, su un'area  $A$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  la quantità di atomi che impattano sulla superficie in quell'area sarà proporzionale al volume  $A v_x \Delta t$  e l'impulso sarà pari alla somma degli impulsi

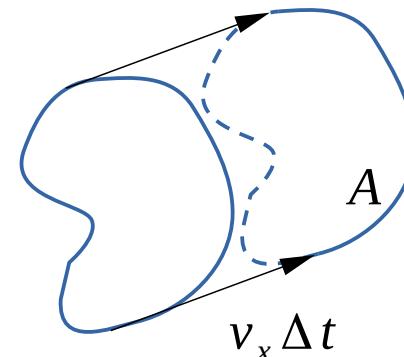
$$I_{tot,x} = \frac{N_{vx}}{V} (A v_x \Delta t) I_x = 2 \frac{N_{vx}}{V} A m v_x^2 \Delta t$$

La forza media esercitata sulla superficie, per definizione, sarà

$$F_x = \frac{I_{tot,x}}{\Delta t} = 2 \frac{N_{vx}}{V} A m v_x^2$$

e la **pressione, ovvero la forza normale per unità di area**, sarà

$$p_{vx} = 2 \frac{N_{vx}}{V} m v_x^2$$



## Teoria cinetica dei gas ideali

Adesso, anziché selezionare una precisa componente della velocità, sommiamo i contributi di pressione considerando tutte le possibili velocità. Naturalmente, gli atomi che vanno da parte opposta non vanno contati, e saranno mediamente la metà:

$$p = \sum_i p_{vx(i)} = \frac{1}{2} \sum_i 2 \frac{N_{vx(i)}}{V} m v_x^2(i) = \frac{m}{V} \sum_i N_{vx(i)} v_x^2(i) = \frac{m}{V} N \langle v_x^2 \rangle$$

Non c'è motivo di credere che la distribuzione delle velocità non sia isotropa. Pertanto:

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle &= \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle; \quad \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \\ \langle v_x^2 \rangle &= \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad \text{velocità quadratica media} \end{aligned}$$

$$p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle = \frac{2N}{3V} \langle K_{cin} \rangle = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \quad \text{se } U = N \langle K_{cin} \rangle \text{ ossia l'energia cinetica totale}$$

## Teoria cinetica dei gas ideali

Abbiamo ottenuto:

$$nRT = pV = \frac{2}{3}U = C_V T$$

$$U = \frac{3}{2}nRT \Rightarrow C_V = \frac{3}{2}nR; c_v = \frac{3}{2}R$$

$$\langle K_{cin} \rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} k T$$

$N_A$  = numero di Avogadro  
 $k$  = costante di Boltzmann

Da queste segue, per gas monoatomici dalla relazione di Mayer

$$c_p = R + c_v \Rightarrow c_p = \frac{5}{2}R$$

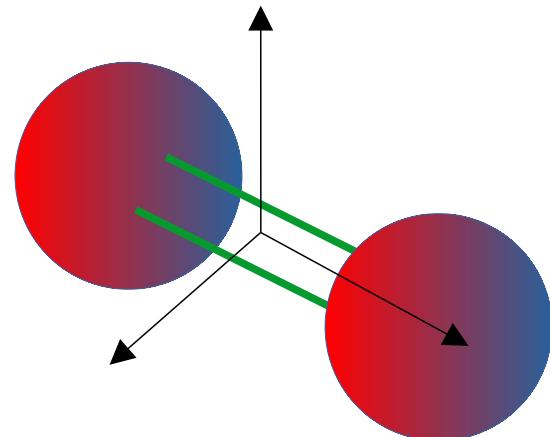
## Teoria cinetica dei gas ideali

Nel caso di gas biatomici ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ) il numero di gradi di libertà delle molecole è più grande.

Gli urti, tanto con le pareti quanto tra molecole, possono innescare rotazioni su due assi. La rotazione intorno all'asse della molecola invece non può variare, perché qualsiasi urto ha braccio nullo rispetto a quell'asse. *Quindi quel grado di libertà è inerte e non entra nel calcolo delle interazioni.*

Un teorema generale di meccanica statistica sancisce l'equipartizione delle energie, ossia l'energia media per ogni grado di libertà è la stessa; del resto, se così non fosse, negli urti tra molecole l'energia rotazionale in eccesso si ridistribuirebbe sui gradi di libertà traslazionali e viceversa.

$$\frac{m}{2} \langle v_x^2 \rangle = \frac{m}{2} \langle v_y^2 \rangle = \frac{m}{2} \langle v_z^2 \rangle = \frac{I}{2} \langle \omega_x^2 \rangle = \frac{I}{2} \langle \omega_y^2 \rangle = \frac{1}{5} \langle K_{cin} \rangle$$



## Teoria cinetica dei gas ideali

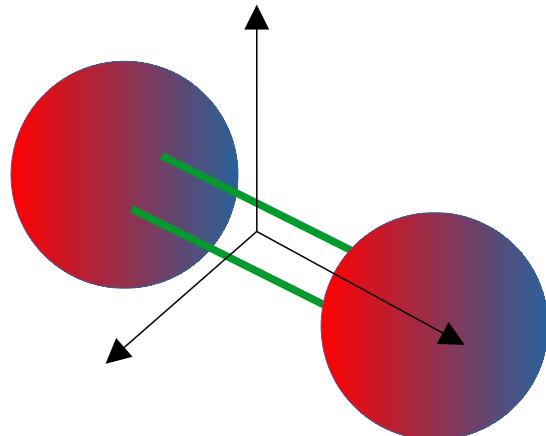
Nel caso di gas biatomici ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ) il numero di gradi di libertà delle molecole è più grande.

$$nRT = pV = \frac{2}{5}U = C_V T$$

$$U = \frac{5}{2}nRT \Rightarrow C_V = \frac{5}{2}nR; c_v = \frac{5}{2}R$$

$$\langle K_{cin} \rangle = \frac{5}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{5}{2} k T$$

$$c_p = R + c_v \Rightarrow c_p = \frac{7}{2}R$$



## Teoria cinetica dei gas ideali

Nel caso di gas monoatomici:

$$c_v = \frac{3}{2} R; c_p = \frac{5}{2} R; \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$$

Nel caso di gas biatomici:

$$c_v = \frac{5}{2} R; c_p = \frac{7}{2} R; \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$$

Come curiosità, notiamo che la velocità del suono dipende dalla temperatura, massa molare e  $\gamma$ . Confrontiamo l'aria e l'elio. Per l'aria: ~79% N<sub>2</sub>, M = 28g; 21% O<sub>2</sub>, M = 32g. Per l'elio: 100% He, M=4g. A T = 0°C = 273°K:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{5}{3} \frac{RT}{M}} = 972 \text{ m/s in elio} \\ \sqrt{\frac{7}{5} \frac{RT}{M}} = 332 \text{ m/s in aria} \end{cases}$$

A questo si deve l'effetto di innalzamento della frequenza della voce in elio.

## Teoria cinetica dei gas ideali

Oltre a prevedere valori medi della pressione e dell'energia cinetica, e a dare un significato microscopico al concetto di temperatura, la teoria cinetica dei gas può fornire un modello della distribuzione di velocità degli atomi. La probabilità che un atomo abbia una velocità di modulo compresa tra  $v$  e  $v+dv$  è:

$$f(v) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^3} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

La velocità media è

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

## Teoria cinetica dei gas reali

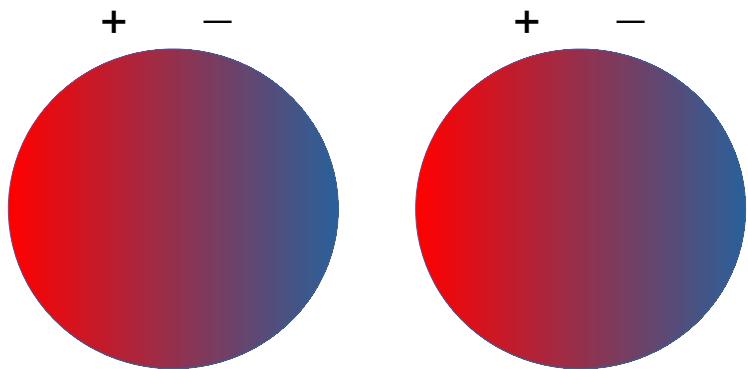
In realtà il volume degli atomi non può annullarsi. In prima approssimazione possiamo considerarli come sferette dure.

Inoltre sia gli atomi che le molecole scambiano forze attrattive, dovute all'induzione eletrostatica, e dette *forze di van der Waals*.

Fluttuazioni di carica in oggetti neutri possono indurre distribuzioni asimmetriche sugli oggetti vicini.

Quindi anche atomi neutri hanno una debole forza di attrazione.

$$(p + a \frac{n^2}{V^2})(V - nb) = nRT$$



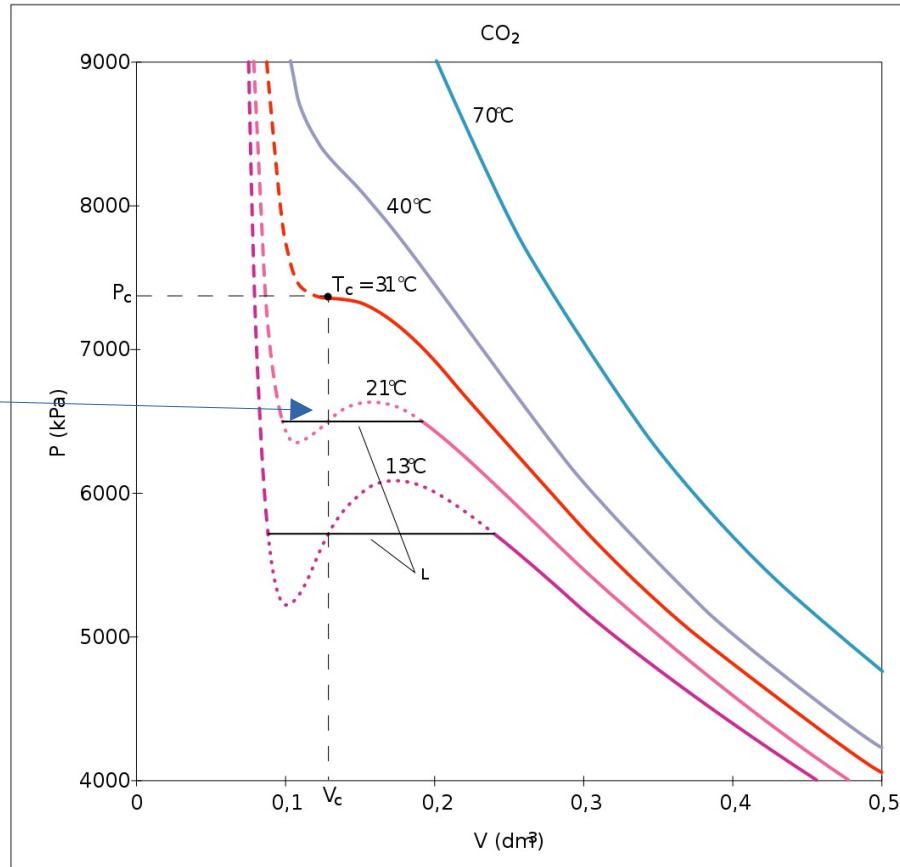
Equazione di stato dei gas reali di van der Waals: tiene conto del volume proprio degli atomi ( $nb$ ) e delle interazioni attrattive tra coppie  $(n/V)^2$  che riducono la pressione.

## Teoria cinetica dei gas reali

Gas di van der Waals

Queste parti di curva non sono realistiche

In realtà si ha liquefazione e quindi passaggio di stato.



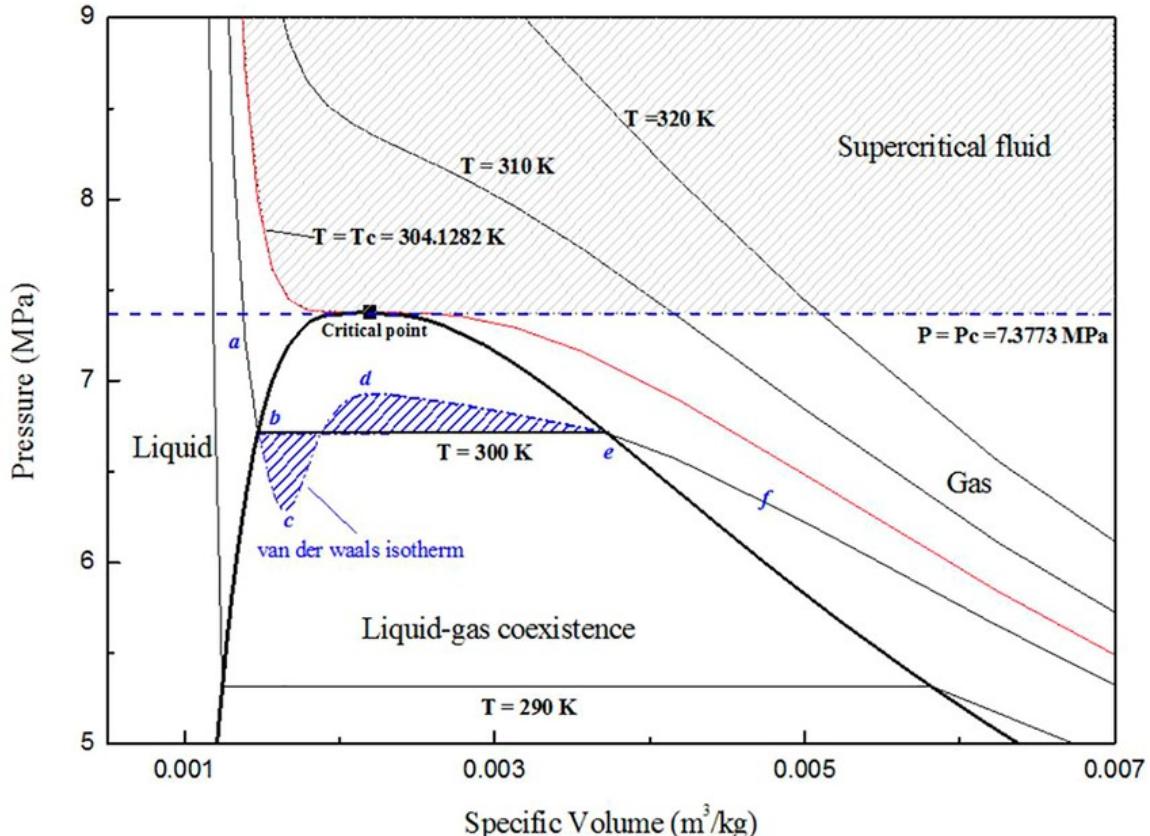
## Teoria cinetica dei gas reali

### Gas reali

In applicazioni pratiche su gas specifici non si usa la formula di van der Waals ma diagrammi e dati che tengono conto anche dei passaggi di stato

*Durante il passaggio di stato un'isoterma è anche un'isobara!*

Questo ha una notevole applicazione sia nella generazione di potenza che nei cicli frigoriferi come vedremo più avanti.



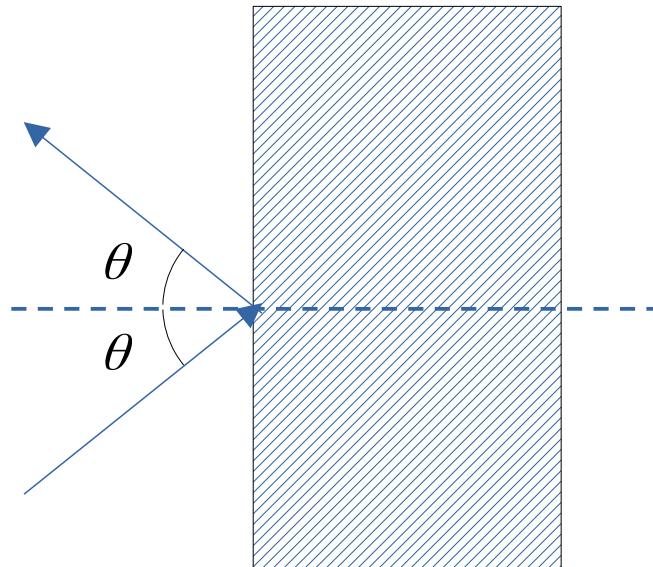
Richiami ed argomenti correlati

## Urti elastici

Se vediamo il tutto in un sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme sull'asse y, abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1fx} = -v_{1ix}; \quad v_{1fy} = v_{1iy} \\ v_{2fx} = 2 \frac{p_{1ix}}{m_2} = 0 \end{array} \right.$$

Quindi un punto materiale che urta contro una parete di massa infinita viene riflesso sullo stesso piano e con angolo di riflessione rispetto alla normale alla superficie uguale all'angolo di incidenza.



## Urti elastici

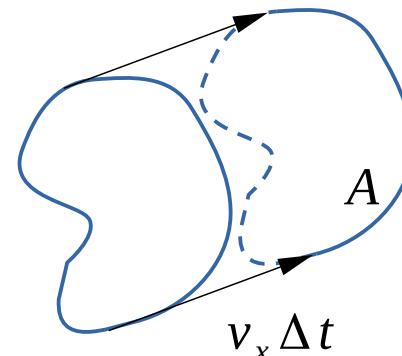
Se abbiamo un flusso di particelle continuo, che urtano una parete, ciascuna eserciterà un impulso pari a:

$$I_x = p_{1fx} - p_{1ix} = 2p_{1ix} = 2mv_x$$

Se vi sono  $N/V$  particelle per unità di volume, su un'area  $A$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  la quantità di particelle che impattano sulla superficie in quell'area sarà proporzionale al volume  $A v_x \Delta t$  e l'impulso sarà pari alla somma degli impulsi

$$I_{tot,x} = \frac{N}{V} (A v_x \Delta t) I_x = 2 \frac{N}{V} A m v_x^2 \Delta t$$

La forza media esercitata sulla superficie, per definizione, sarà  $F_x = \frac{I_{tot,x}}{\Delta t} = 2 \frac{N}{V} A m v_x^2$



e la **pressione, ovvero la forza normale per unità di area**, sarà  $p = 2 \frac{N}{V} m v_x^2$