MECCANICA DEI FLUIDI

Il concetto di sforzo

La meccanica dei fluidi viene studiata considerando questi ultimi come mezzi continui, ossia infinitamente divisibili in volumi sempre più piccoli, che conservano le proprietà del mezzo.

Questa è un’astrazione: non si può dividere un fluido oltre le molecole, e alla scala delle molecole si deve usare la meccanica quantistica (o sue approssimazioni).

Prima di avviarci allo studio della meccanica dei fluidi, è opportuno introdurre il concetto di sforzo.

Lo sforzo è l’unità di forza agente su una superficie.

$$\vec{\sigma} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$$

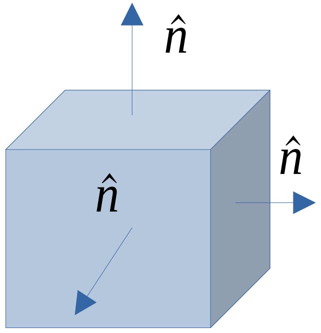
Poiché la forza è un vettore, anche lo sforzo è definito in termini di componenti. Tuttavia, anziché rispetto agli assi coordinati, si considerano le componenti normali e tangenziali rispetto alla superficie.

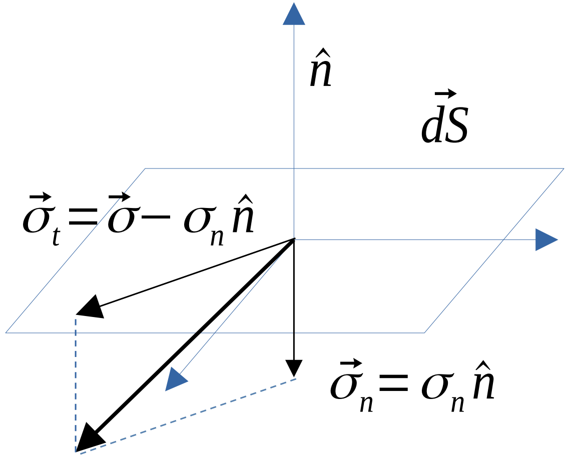
Il concetto di sforzo

La meccanica dei fluidi viene studiata considerando questi ultimi come mezzi continui, ossia infinitamente divisibili in volumi sempre più piccoli, che conservano le proprietà del mezzo.

Sforzo medio: $\vec{\bar{\sigma}} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$

Sforzo locale: $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS}$





Se consideriamo un volumetto di fluido, per ogni superficie possiamo facilmente individuare una normale diretta verso l'esterno e decomporre lo sforzo in una componente normale e una tangenziale

Il concetto di sforzo

Abbastanza intuitivamente, valgono le definizioni:

$$\begin{cases} \sigma_n > 0 \rightarrow \textit{sforzo di } \boldsymbol{\textit{trazione}} \left(\text{traction stress}\right) \\ \sigma_n < 0 \rightarrow \textit{sforzo di } \boldsymbol{\textit{compressione}} \left(\text{compression stress}\right) \\ \sigma_t \rightarrow \textit{sforzo di } \boldsymbol{\textit{taglio}} \left(\text{shear stress}\right) \end{cases}$$

Una definizione solo verbale di fluido è: *uno stato della materia in cui una sua porzione non ha forma propria.*

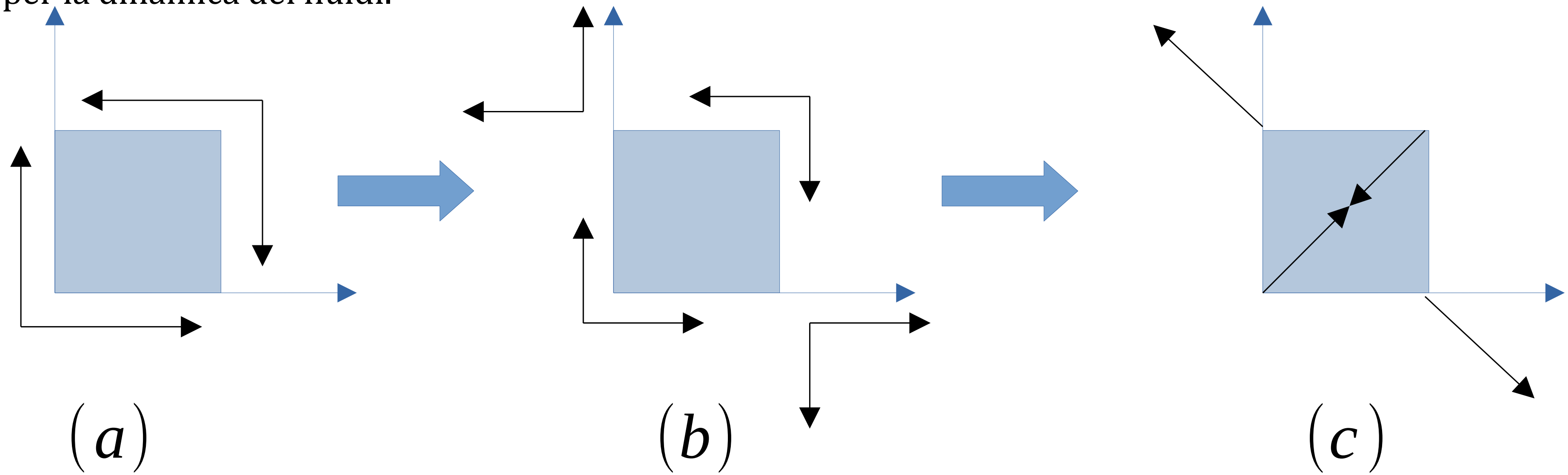
Una definizione più matematicamente operativa è la seguente: *un fluido non resiste a sforzi di trazione, e a causa di sforzi di taglio si deforma indefinitamente.* In particolare la seconda parte esprime il fatto che i vari strati del fluido possono scorrere gli uni sugli altri, eventualmente opponendo solo resistenza per es. viscosa.

Un fluido perfetto non resiste a sforzi di taglio.

Tra i fluidi comprendiamo sia i liquidi che i gas (che sono due stati di aggregazione diversi).

Il concetto di sforzo

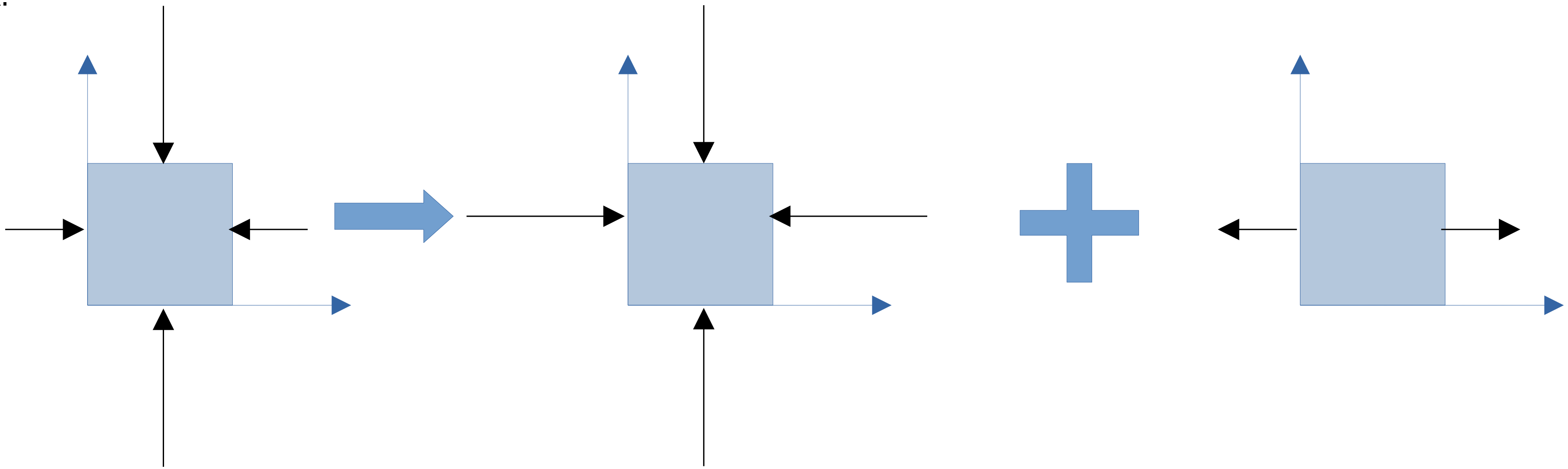
Le definizioni appena date conducono all'individuazione della **pressione** come grandezza importante sia per la statica che per la dinamica dei fluidi.



Consideriamo un volumetto sottoposto solo a sforzo di taglio (a). Possiamo spezzare le forze su ciascun lato e trasportarle lungo la loro retta d'azione (b). Ricomponendole, scopriamo che, guardando a 45°, ci sono uno sforzo di compressione ed uno di trazione.

Il concetto di sforzo

Le definizioni appena date conducono all'individuazione della **pressione** come grandezza importante sia per la statica che per la dinamica dei fluidi.



(a) (b) (c)

Una differenza di compressione (a) si traduce in una compressione isotropa (b) e un termine di trazione (c), al quale il fluido non offre resistenza.

La pressione

Uno sforzo di **compressione isotropa** si chiama **pressione** del fluido e non dipende dalla direzione.

La pressione si indica con *p* e si misura in Pa(scal) = 1 N/1m^2

1 bar = 10^5 Pa
1 atm = 1,0135 bar
1 mmHg (Torr) = 0,00133322 bar (~ 1/750 bar ~ 1/760 atm)

Per fluidi perfetti e/o a bassa viscosità, di fatto questo è l'unico sforzo a cui il fluido può resistere.

Nei fluidi comprimibili, la pressione è associata alla variazione del volume (specifico) e quindi della densità.

$$K_{vol} = \rho \frac{d\,p}{d\,\rho}$$

I liquidi sono spesso considerati incomprimibili (densità costante) o con modulo di comprimibilità infinito. In realtà è semplicemente molto grande. Le perturbazioni si propagano con la velocità del suono nel liquido, che cresce al crescere del modulo di comprimibilità.

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Statica dei *liquidi*

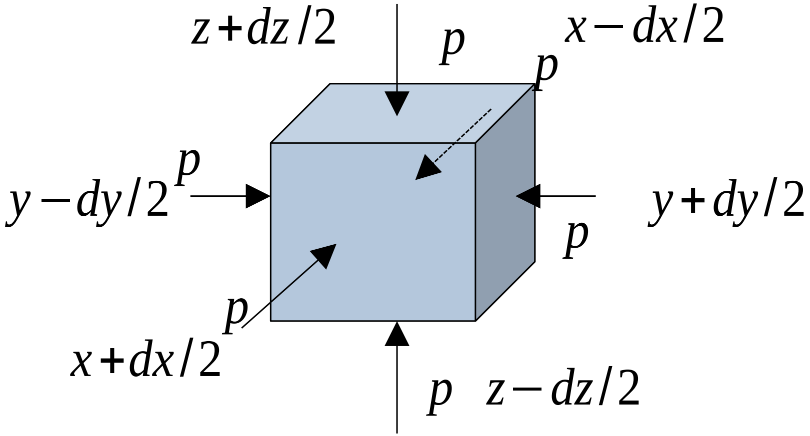
Partiamo anche in questo caso dal bilancio delle forze su un volumetto di fluido, centrato in *x,y,z*.

Distinguiamo le forze di superficie (ridotte alla sola pressione) e le forze di volume.

In molte applicazioni le forze di volume consistono nella sola forza peso.

Però in un riferimento accelerato comparirebbero anche forze apparenti!

$$\vec{F}=m\vec{a}=\vec{0} \text{ (problema statico)}$$

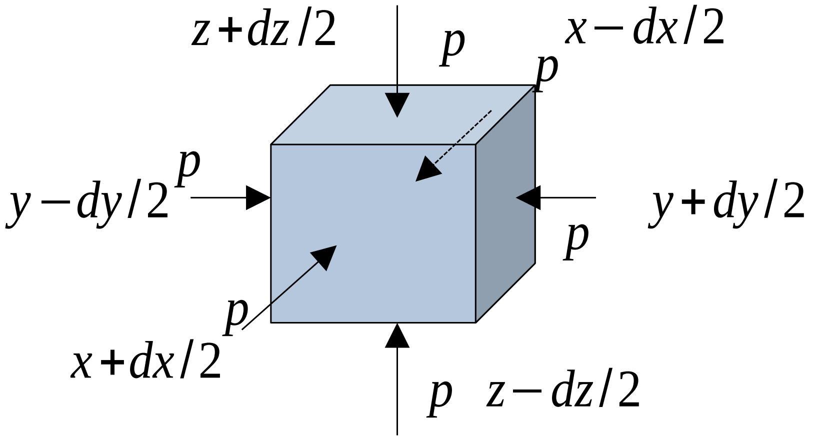


$$d\vec{F}_S+d\vec{F}_V=\vec{0}$$
$$\sum d\vec{F}_{i,\,pressione}+dm\,\vec{g}=\vec{0}$$
$$\sum d\vec{F}_{i,\,pressione}+\rho dV\,\vec{g}=\vec{0}$$
$$\sum d\vec{F}_{i,\,pressione}+\rho dx\,dy\,dz\,\vec{g}=\vec{0}$$

Statica dei *liquidi*

Le forze di superficie sono 6, dovute alla pressione su ciascuna superficie. Le aree corrispondenti valgono *dx dy*, *dy dz*, *dz dx* .

Proiettiamo su ciascun asse:



$$\sum d\vec{F}_{i,\,pressione} + \rho dx\, dy\, dz\, \vec{g} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} -p(x+dx/2, y, z)\, dy\, dz + p(x-dx/2, y, z)\, dy\, dz = 0 \\ -p(x, y+dy/2, z)\, dz\, dx + p(x, y-dy/2, z)\, dz\, dx = 0 \\ -p(x, y, z+dz/2)\, dx\, dy + p(x, y, z-dz/2)\, dx\, dy - \rho g\, dx\, dy\, dz = 0 \end{cases}$$

Osserviamo il termine su *x*, gli altri si comportano similmente:

$$-p(x+dx/2, y, z)\, dy\, dz + p(x-dx/2, y, z)\, dy\, dz =$$

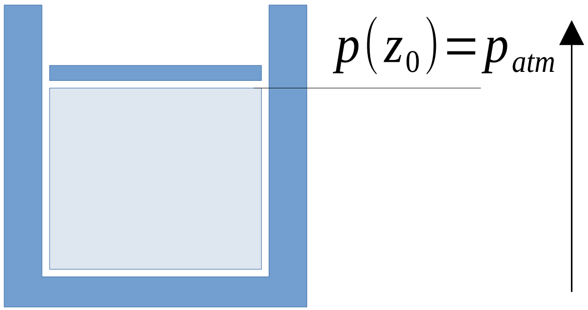
$$= -\left(p(x-dx/2, y, z) + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy\, dz + p(x-dx/2, y, z)\, dy\, dz =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

Statica dei *liquidi*

Le equazioni diventano:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z}-\rho g=0 \end{cases}$$



Dalle prime due otteniamo l'informazione che la pressione non varia né lungo *x* né lungo *y*.

Legge di Stevin:

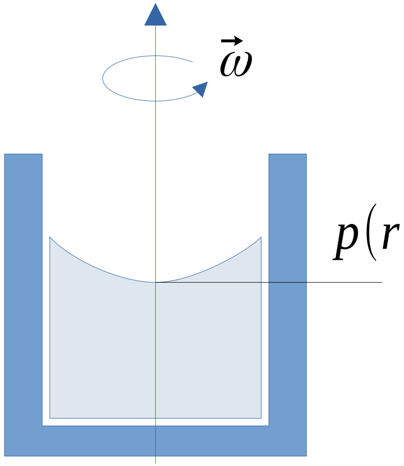
$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \Rightarrow p=-\rho g\, z+cost\,.}$$

La costante si fissa conoscendo la pressione in un punto. Ad esempio, se il fluido è in contatto meccanico con l'atmosfera (perché ha una superficie libera o con un pistone privo di massa), la pressione in quel punto deve essere uguale alla pressione atmosferica (*1 atm ~ 1 bar*). Spesso l'equazione viene scritta con il prodotto $\gamma = \rho g$ (peso specifico).

$$p=-\rho g(z-z_0)+p_{atm}$$

Statica dei *liquidi*

Consideriamo un recipiente in rotazione intorno al proprio asse



Alle forze di volume si aggiunge ora

$$d\vec{F}_{centrifuga} = dm\,\omega^2\,\vec{r} = dm\,\omega^2\,(x\,\hat{i} + y\,\hat{j}) = \rho dx\,dy\,dz\,\omega^2\,(x\,\hat{i} + y\,\hat{j})$$

Le nostre equazioni di equilibrio diventano:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho\,\omega^2\,x = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho\,\omega^2\,y = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho\,\omega^2\,x \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho\,\omega^2\,y \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \Rightarrow p = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\,(x^2 + y^2) - \rho g\,z + cost.$$

fissando la costante sull'asse $p_{atm} = -\rho g\,z_0 + cost.$
$cost. = p_{atm} + \rho g\,z_0$

$$p = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\,(x^2 + y^2) - \rho g\,(z - z_0) + p_{atm}$$

La pressione è uguale a quella atmosferica su una superficie di equazione che rappresenta un paraboloide di rotazione intorno all'asse *z*.

$$0 = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\,(x^2 + y^2) - \rho g\,(z - z_0)$$

Statica dei *liquidi*

Generalizziamo quanto visto fino ad ora. Se indichiamo con $\boldsymbol{f_{vol}}$ la risultante delle forze di volume su un volumetto, per unità di densità, abbiamo

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_{vol,x}=0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y}+\rho f_{vol,y}=0 \Rightarrow grad\, p=\vec{\nabla}\, p=\rho \vec{f}_{vol} \\ -\frac{\partial p}{\partial z}+\rho f_{vol,z}=0 \end{cases}$$

Se le forze di volume sono conservative, allora derivano da un'energia potenziale per unità di massa: $\vec{f}_{vol}=-\vec{\nabla}\, u$

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\, p=-\vec{\nabla}\, u \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}+u\right)=0 \Rightarrow \frac{p}{\rho}+u=cost.$$

Esempio della forza peso: $u=g\,z \Rightarrow \frac{p}{\rho}+gz=cost. \Rightarrow p=-\rho g\,z+cost.$

Le superfici *isobare* (pressione costante) sono anche *equipotenziali* (energia potenziale costante).

I "princìpi" della statica dei *fluidi*

Abbiamo derivato facilmente dall'equazione della statica l'andamento della pressione in tutta la massa fluida.

Per la statica dei fluidi valgono leggi, o princìpi, che in realtà si ottengono proprio da quelle formule.

1) Legge di Pascal: *quando si applica una determinata pressione a un corpo immerso in un fluido, essa si trasmette con lo stesso valore su tutte le sue superfici.*

   – Consideriamo l'equazione

$$grad\ p = \vec{\nabla}\ p = \rho \vec{f}_{vol}$$

   Poiché è un'equazione differenziale, riguarda solo le derivate della pressione. Se sommiamo una costante alla pressione, rimane valida. Questo basta a verificare la legge di Pascal.

I "princìpi" della statica dei *fluidi*

Abbiamo derivato facilmente dall'equazione della statica l'andamento della pressione in tutta la massa fluida.

Per la statica dei fluidi valgono leggi, o princìpi, che in realtà si ottengono proprio da quelle formule.

2) Principio di Archimede: *Un corpo immerso (totalmente o parzialmente) in un fluido riceve una spinta (detta forza di galleggiamento) verticale (dal basso verso l'alto) di intensità pari al peso di una massa di fluido di volume uguale a quella della parte immersa del corpo. Il punto di applicazione della forza suddetta si trova sulla stessa linea su cui si troverebbe il centro di massa della porzione di fluido, detto centro di spinta, che occuperebbe lo spazio in realtà occupato dalla parte immersa del corpo.*

   – Consideriamo una massa fluida in equilibrio: dalle due Equazioni Cardinali della dinamica dei sistemi sappiamo che se sostituiamo il corpo con un uguale volume di fluido quest'ultimo sarà in equilibrio con la restante parte. Il sistema delle forze agenti sul corpo sarà uguale a quello agente sul volume di fluido, e quindi avrà la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo scelto. Questo dimostra il "principio" di Archimede.