Teorema di Bernoulli

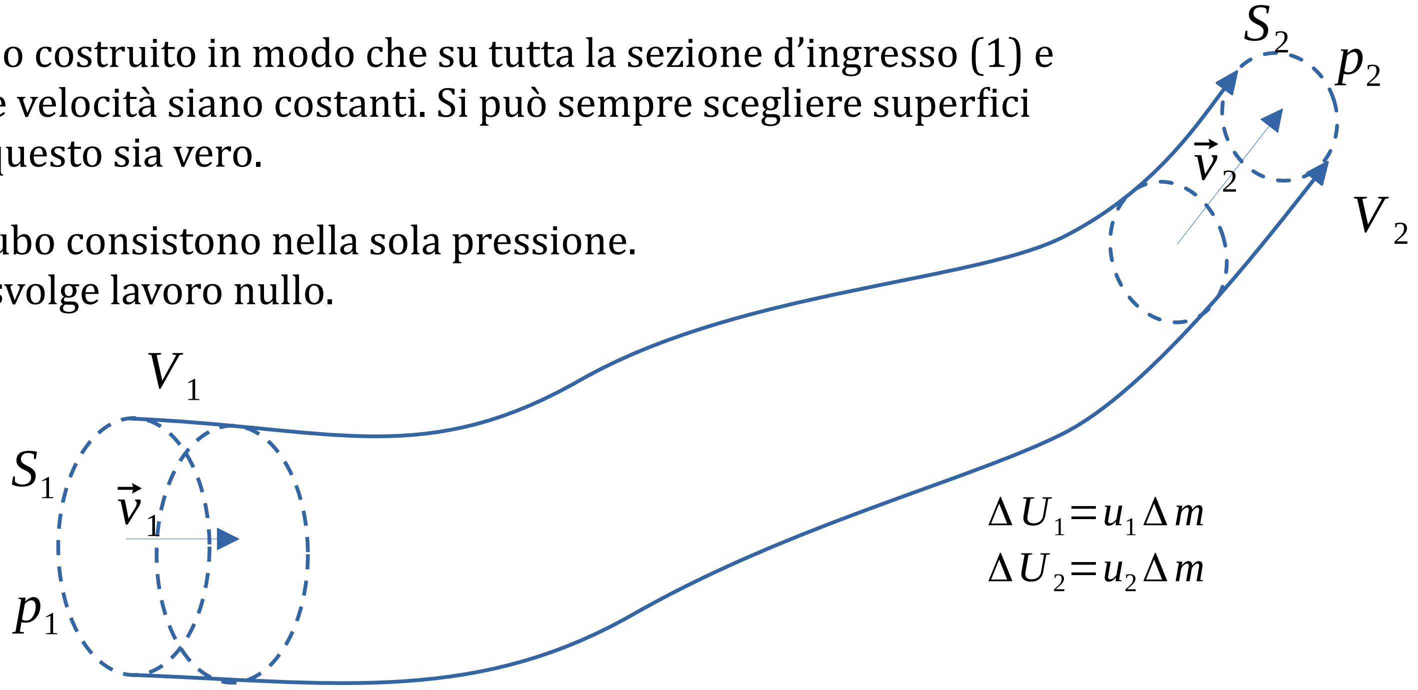
Consideriamo un fluido perfetto (ossia non viscoso).

Focalizziamoci su un tubo di flusso costruito in modo che su tutta la sezione d'ingresso (1) e la sezione d'uscita (2) pressione e velocità siano costanti. Si può sempre scegliere superfici sufficientemente piccole perché questo sia vero.

Le forze di superficie esterne al tubo consistono nella sola pressione.
La pressione sulle pareti laterali svolge lavoro nullo.

Per le pareti S_1 e S_2 possiamo valutare il lavoro svolto.

$$\Delta L_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t$$
$$\Delta L_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t$$
$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$
$$\Delta K_2 = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2$$



$$\Delta U_1 = u_1 \Delta m$$
$$\Delta U_2 = u_2 \Delta m$$

Teorema di Bernoulli

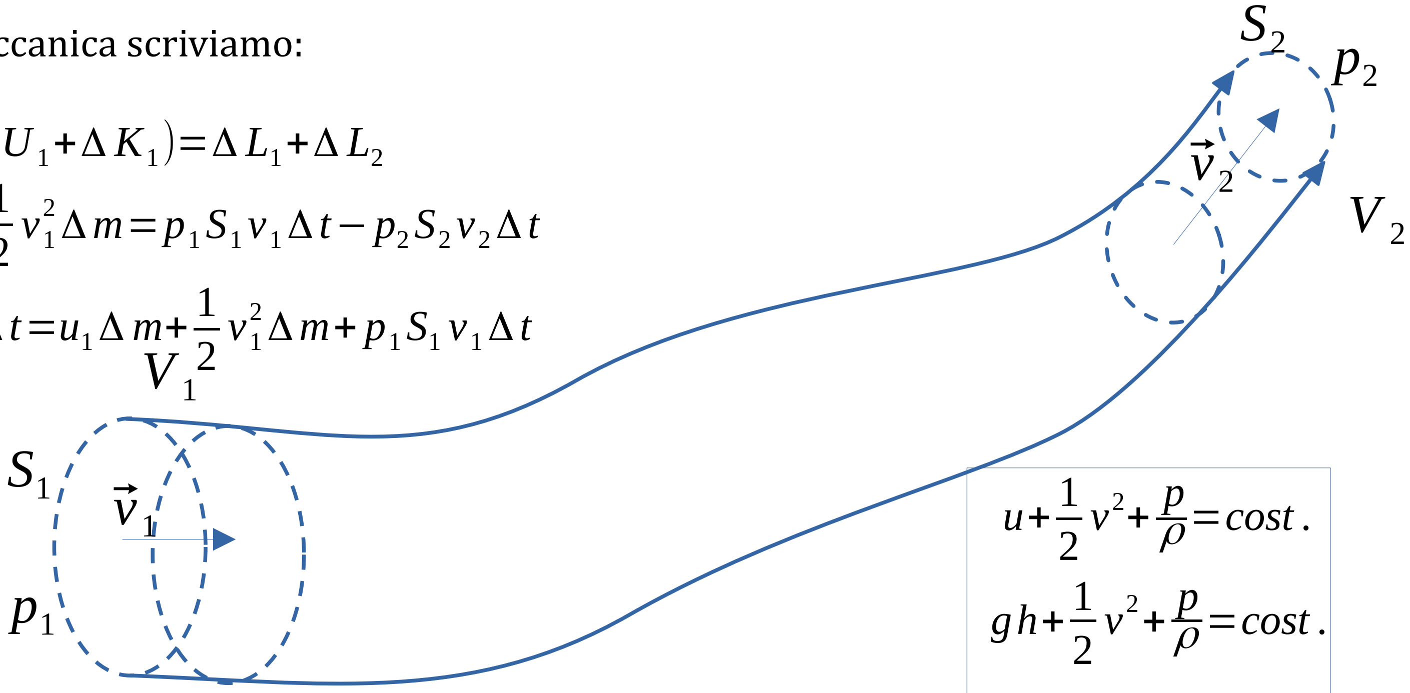
Consideriamo un fluido perfetto (ossia non viscoso).

Quindi per il bilancio di energia meccanica scriviamo:

$$(\Delta U_2+\Delta K_2)-(\Delta U_1+\Delta K_1)=\Delta L_1+\Delta L_2$$

$$u_2\Delta m+\frac{1}{2}v_2^2\Delta m-u_1\Delta m-\frac{1}{2}v_1^2\Delta m=p_1 S_1 v_1\Delta t-p_2 S_2 v_2\Delta t$$

$$u_2\Delta m+\frac{1}{2}v_2^2\Delta m+p_2 S_2 v_2\Delta t=u_1\Delta m+\frac{1}{2}v_1^2\Delta m+p_1 S_1 v_1\Delta t$$



$$\Delta m=\rho S_1 v_1\Delta t=\rho S_2 v_2\Delta t$$

$$u_2+\frac{1}{2}v_2^2+\frac{p_2}{\rho}=u_1+\frac{1}{2}v_1^2+\frac{p_1}{\rho}$$

$$u+\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}=cost\,.$$

Se l'energia potenziale dipende solo dalla forza peso, possiamo ottenere il caso particolare:

$$gh+\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}=cost\,.$$

Teorema di Bernoulli

Il teorema di Bernoulli mostra che la somma dell'energia potenziale per unità di massa, dell'energia cinetica e della pressione per unità di densità è costante lungo un tubo di flusso per un liquido perfetto.

In applicazioni idrauliche spesso si considera:

$$\gamma = \rho g$$

$$g h + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} = cost.$$

$$h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = cost.$$

e l'enunciato prende la forma: *la somma dell'altezza geometrica, dell'altezza cinetica e dell'altezza piezometrica è costante in assenza di forze dissipative.*

In un acquedotto o una lunga tubazione, questa somma non è costante e cala lungo il percorso. In prima approssimazione, si può supporre che, per una sezione di acquedotto con tubi tutti identici, essa cada linearmente.

Cadente piezometrica

Se la portata è costante, si ha:

$$v = cost.$$

$$H = h + \frac{p}{\gamma}$$

$$J = -\frac{\partial H}{\partial s} \quad \text{cadente piezometrica}$$

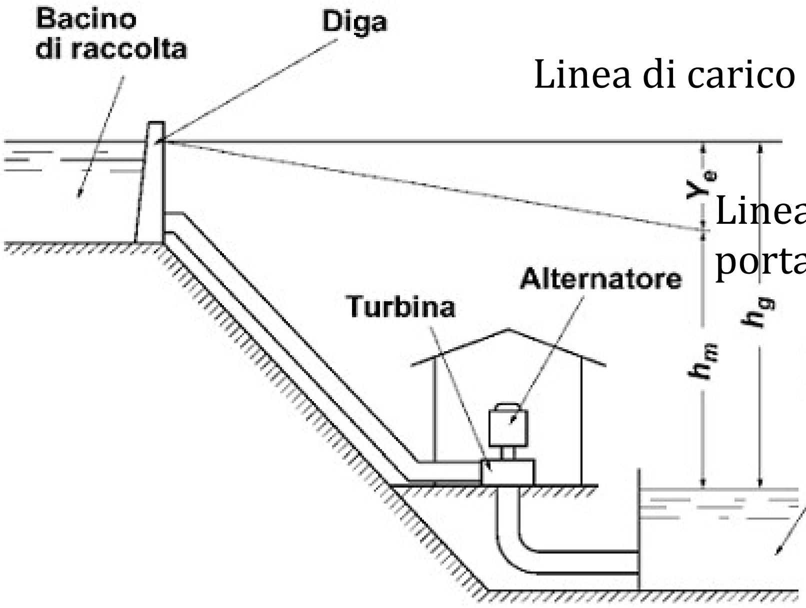
derivata dell'altezza rispetto all'ascissa

Di solito, in regime turbolento e con tubi scabri

$$J = k\frac{Q^2}{D^5}$$

Q = portata
D = diametro tubazione
k = coefficiente di scabrezza del tubo

Schema di un impianto idroelettrico



Non possiamo convertire tutta l'energia potenziale in lavoro alla turbina, ma una parte va dissipata in attrito nei tubi