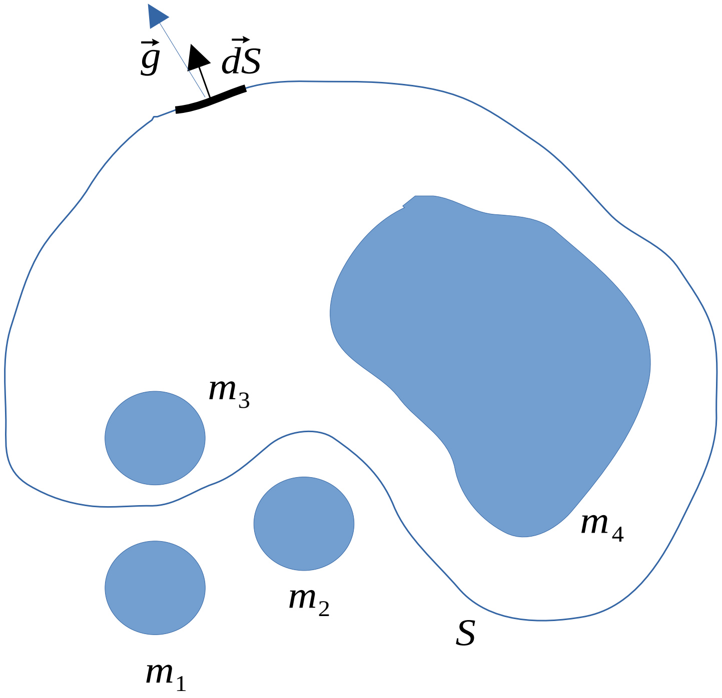
Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Il teorema di Gauss è legato alla proprietà fondamentale del campo gravitazionale di scalare con il quadrato della distanza. Lo stesso teorema vale per tutti i campi centrali con dipendenza $1/r^2$.

Questo teorema consente di calcolare facilmente il campo gravitazionale di distribuzioni di massa particolarmente simmetriche, o comunque riconducibili ad esse.

Consideriamo una qualsiasi distribuzione di masse (possiamo assumerla con simmetria sferica oppure no, questo non è importante). Consideriamo inoltre una superficie chiusa *S*, che può racchiudere tutte le masse, nessuna, o parte di esse.



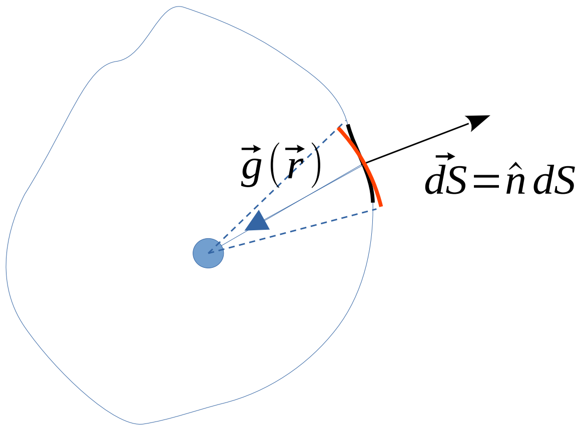
Il *flusso* del campo gravitazionale è così definito:

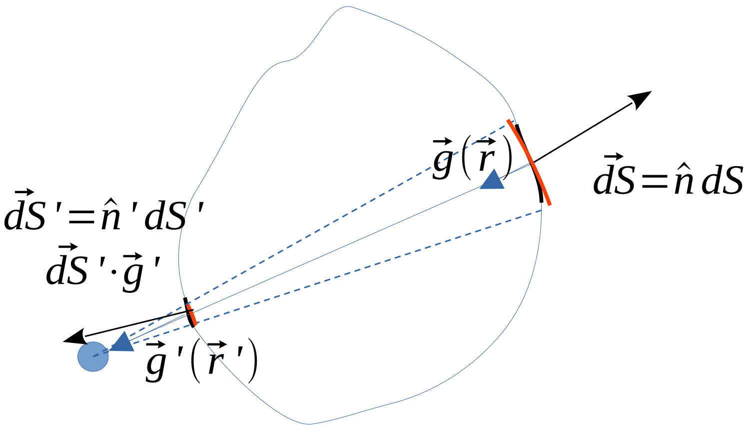
$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n}\, dS$$

Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Consideriamo una superficie chiusa intorno ad un punto materiale dotato di attrazione gravitazionale.

Per un punto interno tutti i contributi al flusso sono positivi. Per uno esterno, si annullano a coppie.





$$\vec{dS}\cdot\hat{r}=r^2\,d\Omega$$

$$\vec{dS}\cdot\vec{g}=\vec{dS}\cdot\hat{g}\,\|\vec{g}\|=-\vec{dS}\cdot\hat{r}\,G\frac{m}{r^2}=-r^2\,d\Omega\,G\frac{m}{r^2}$$

$$\vec{dS}\cdot\hat{g}=-G\,m\,d\Omega$$

$$\vec{dS}\cdot\hat{r}=r^2\,d\Omega$$

$$\vec{dS}\cdot\vec{g}=\vec{dS}\cdot\hat{g}\,\|\vec{g}\|=-\vec{dS}\cdot\hat{r}\,G\frac{m}{r^2}=-r^2\,d\Omega\,G\frac{m}{r^2}=-G\,m\,d\Omega$$

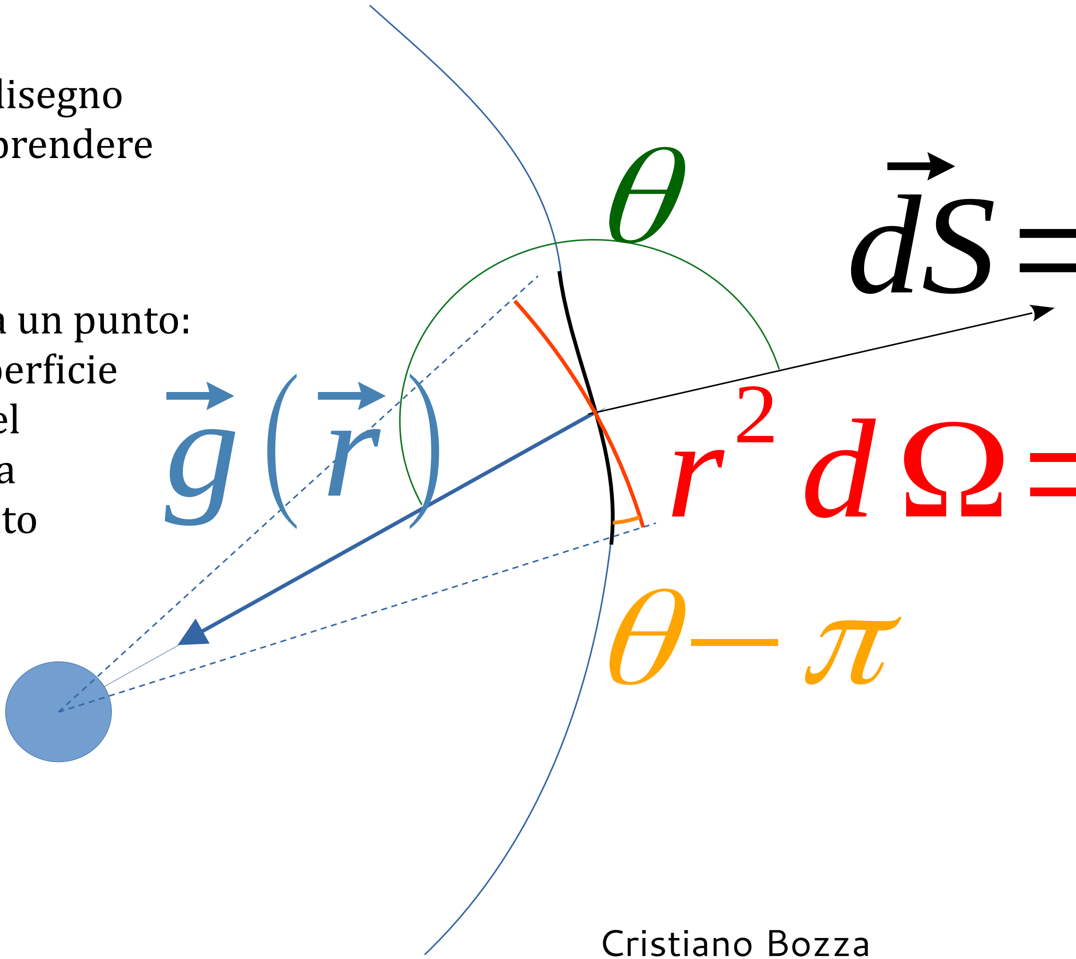
$$\vec{dS}'\cdot\vec{g}'=G\,m\,d\Omega'=G\,m\,d\Omega$$

Il flusso e gli angoli solidi

Ingrandiamo il disegno
per meglio comprendere

Angolo solido da un punto:
rapporto tra superficie
dS e quadrato del
raggio della sfera
centrata nel punto

Tutta l'area
della superficie
sferica: 4π



$$\vec{dS} = \hat{n}\, dS$$

$$r^2\, d\Omega = -dS\cos\theta$$

Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

In definitiva, per ogni elemento di superficie chiusa intorno alla distribuzione di masse il contributo al flusso è

$$d\Phi = -G\,m\,d\Omega$$

mentre per quelle esterne alla superficie chiusa si ha:

$$d\Phi = 0$$

Per il flusso di campo gravitazionale di una massa abbiamo, **indipendentemente dalla forma della superficie:**

$$\Phi_i = \int_\Omega \frac{d\Phi_i}{d\Omega}\,d\Omega = \begin{cases} m_i\,interna \rightarrow -G\,m_i \int_\Omega d\Omega = -4\pi G\,m_i \\ m_i\,esterna \rightarrow 0 \end{cases}$$

E per una distribuzione:

$$\Phi = \sum_i \int_\Omega \frac{d\Phi_i}{d\Omega}\,d\Omega = -4\pi G \sum_{\text{i interne}} m_i$$

Il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è proporzionale solo alle masse all'interno della superficie. La costante di proporzionalità è 4πG.

Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Se anziché avere un insieme di masse puntiformi abbiamo una distribuzione continua di massa, conviene introdurre il concetto di densità.

Densità media: $$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Densità locale: $$\rho(x,y,z)=\frac{dm}{dV}=\frac{d^3 m}{dx\,dy\,dz}$$

La massa totale è $$M=\int_V \frac{dm}{dV}dV=\int_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Il campo è $$\vec{g}(\vec{r})=\int_V G\frac{\rho(x,y,z)}{\|(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-\vec{r}\|^3}\left((x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-\vec{r}\right)dx\,dy\,dz$$

Il flusso è $$\Phi=\int_S \vec{g}\cdot d\vec{S}=-4\pi G M_{interna}$$

Richiami ed argomenti correlati

Gravitazione

Fino ad ora abbiamo incontrato la forza peso, definita come approssimazione in una regione piccola dell'attrazione di tutti i corpi verso il centro della Terra.

La particolarità della legge di forza associata è che la forza di attrazione è proporzionale alla massa inerziale.

D'altra parte, per il III Principio della Dinamica, dobbiamo ammettere che ciascun corpo esercita sulla Terra una uguale forza di attrazione.

Si deve ancora a Newton l'intuizione, verificata da dati preesistenti e misure successive, che il moto reciproco dei corpi celesti sia accelerato dalla gravità. Newton intuì che la Luna "cade continuamente" verso la Terra, e che lo stesso fa la Terra verso la Luna e verso il Sole. Questa continua accelerazione genera i moti orbitali.

"Costruiamo" l'attrazione gravitazionale a partire da considerazioni di principio. Consideriamo la massa della Terra M e quella m di un corpo di prova.

$$\|\vec{F}_{corpo}\| = \|\vec{F}_{Terra}\| \Rightarrow C_1 m = C_2 M \Rightarrow \|\vec{F}_{Terra}\| = \|\vec{F}_{corpo}\| = C_3 m M$$

Gravitazione

Osserviamo che l'accelerazione della Luna è molto minore di quella che hanno i corpi sulla Terra. Conoscendo la distanza Terra – Luna, dalle osservazioni ricaviamo che:

$$\|\vec{a}_{Luna}\| \simeq \|\vec{a}_{mela}\| \frac{r^2_{Terra}}{d^2_{Terra,\,Luna}} \Rightarrow C_3 = \frac{G}{r^2} \qquad G \text{ è una costante da determinare}$$

Considerazioni:

1) Abbiamo inserito il raggio terrestre per l'accelerazione della mela (o qualche altro corpo): ciò implica che la Terra si possa considerare tutta concentrata nel suo centro;

2) La costante C_3 esprime solo una proporzionalità alle masse in gioco, ma dipende dalla distanza. L'ultima costante che dobbiamo introdurre è G, per rispettare la corretta dimensionalità.

$$\|\vec{F}_{m,M}\| \Rightarrow G \frac{m\,M}{r^2}$$

Gravitazione

In generale, possiamo dire che:

$$[G]=[F\frac{r^2}{mM}]=[M][L][T^{-2}][L^2][M^{-2}]=[M^{-1}][T^{-2}][L^3]$$

Il valore di g, accelerazione gravitazionale terrestre sul livello del mare, è legato a G:

$$\|\vec{F}_{m,M}\|\Rightarrow G\frac{mM}{r^2}=mg\Rightarrow G\frac{M}{r^2}=g$$

Tuttavia non possiamo misurare direttamente la massa terrestre.

Abbiamo bisogno di esperimenti di misura diretta della costante a partire da masse e distanze note.

Gravitazione

Esperimento di Cavendish con bilancia di torsione

La posizione di equilibrio è quella che bilancia il momento esercitato dal filo di sospensione e quello della forza di attrazione tra le masse. Rispetto alla posizione di riposo, il momento dovuto alla torsione è:

$$\vec{M}_{Torsione} = -K\,\theta\hat{k}$$

La forza tra ciascuna coppia di masse è:

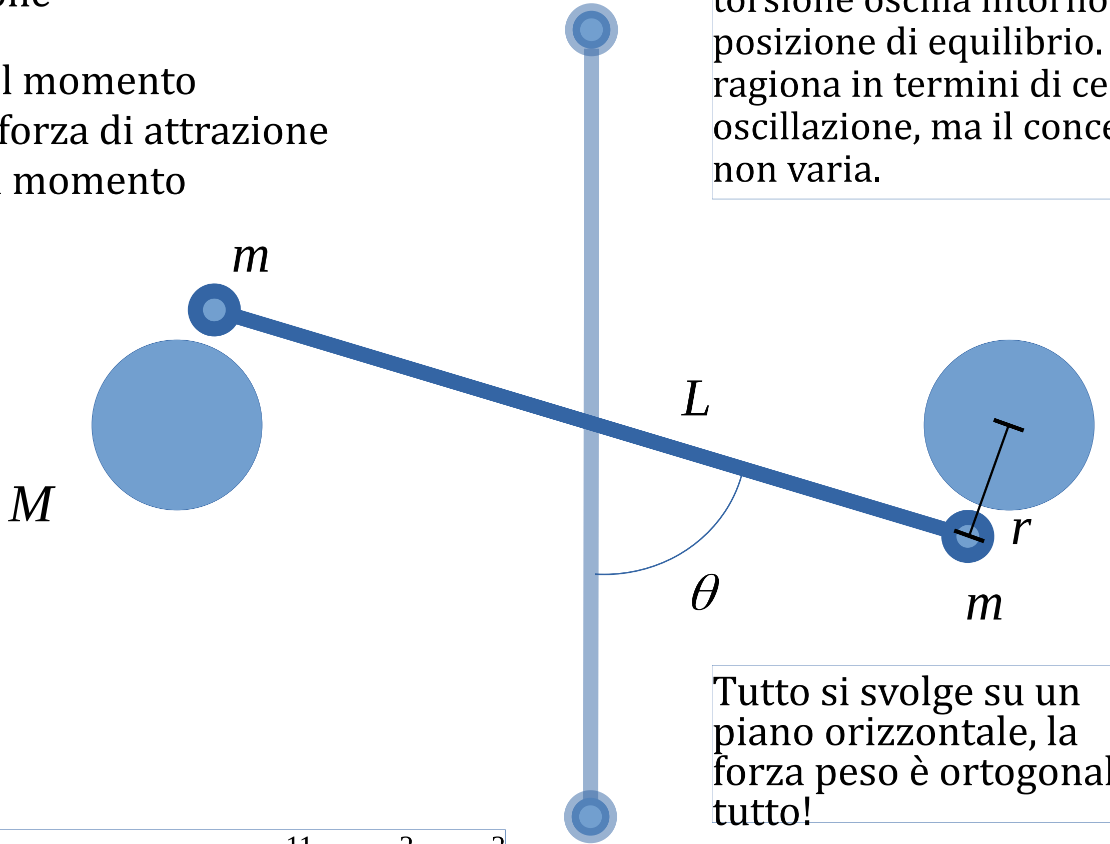
$$\|\vec{F}_{mM}\| = G\frac{mM}{r^2}$$

$$\vec{M}_{mM} = 2G\frac{mML}{r^2}\hat{k}$$

$$\vec{M}_{mM} + \vec{M}_{Torsione} = \vec{0} \Rightarrow 2G\frac{mML}{r^2} = K\,\theta$$

$$G = \frac{K\,\theta r^2}{2\,mML}$$

In realtà il pendolo di torsione oscilla intorno alla posizione di equilibrio. Si ragiona in termini di centri di oscillazione, ma il concetto non varia.



Tutto si svolge su un piano orizzontale, la forza peso è ortogonale a tutto!

$$G = 6.674\times10^{-11}\,N\,m^2\,kg^{-2}$$

Gravitazione

Quindi la forma completa della forza gravitazionale che agisce *dal corpo 2 sul corpo 1* deve essere:

$$\vec{F}_{m_1,m_2} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{1\to 2} = G\frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

e simmetricamente, per la forza *dal corpo 1 sul corpo 2* :

$$\vec{F}_{m_2,m_1} = G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{r}_{2\to 1} = G\frac{m_2 m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

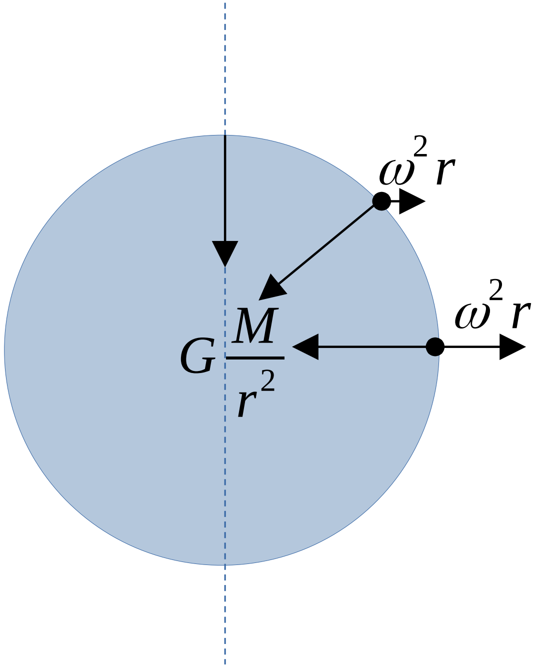
Questa forza è **sempre attrattiva**. La costante G è la **costante gravitazionale universale** e vale per qualunque coppia di corpi nell'Universo.

Possiamo quindi determinare la massa della Terra con un oggetto posto sulla sua superficie:

$$G\frac{M}{r^2} = g \Rightarrow M = g\frac{r^2}{G} \simeq 5{,}97\times 10^{24}\, kg$$

Gravitazione

Attenzione! Non dobbiamo dimenticare di tener conto del fatto che la Terra gira, quindi l'accelerazione gravitazionale si compone con la forza centrifuga. Ai poli non c'è contributo centrifugo, all'Equatore è massimo.



$$\omega = 2\pi rad / 86400\,s = 7{,}3 \times 10^{-5}\, rad/s$$
$$r = 6371\,km = 6{,}4 \times 10^{6}\, m$$
$$\omega^2 r = 0{,}034\, m/s^2 \text{ all'Equatore}$$

$$g = 9{,}81\, m/s^2 \text{ ai poli; } 9{,}78\, m/s^2 \text{ all'Equatore}$$

piccole deviazioni dalla verticale tra Equatore e poli

Il campo gravitazionale

Tutti i corpi (punti materiali) che si trovano in presenza di una massa M sperimentano una forza proporzionale ad essa.

$$\vec{F}_i = G\,M\,\frac{m_i}{\|\vec{r}_M - \vec{r}_i\|^2}\,vers(\vec{r}_M - \vec{r}_i)$$

Questa ha la forma di un'azione a distanza. Se aggiungiamo altre masse, gli effetti si sommeranno. È concettualmente comodo introdurre il concetto di **campo gravitazionale**, in modo che ogni massa interagisca con il campo e non con la massa generatrice.

$$\vec{F}_i = m_i\,\vec{g}_M\,; \qquad \vec{g}_M(\vec{r}) = G\,\frac{M}{\|\vec{r}_M - \vec{r}\|^2}\,vers(\vec{r}_M - \vec{r})$$

Quindi il campo risulta definito solo dalla massa generatrice, e la forza dall'accoppiamento della massa del punto materiale i-esimo con il campo nel punto occupato dal punto materiale i-esimo.