Il moto dei razzi

I razzi sono sistemi isolati. Si muovono spingendo indietro parte della propria massa, e ricevono, per il III principio della dinamica, una spinta in verso opposto.

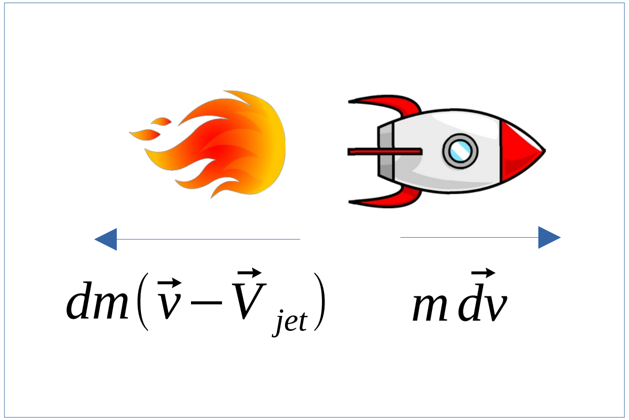
Consideriamo un razzo che espelle una quantità di propellente *dm* con velocità V_{jet}.

$$\vec{P} = m\vec{v}; \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}; \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\left(\vec{v} - \vec{V}_{jet}\right) = \vec{0}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{V}_{jet} = 0 \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm}{dt}\vec{V}_{jet} \qquad \text{proiettiamo su } x$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{dm}{dt}V_{jet} \Rightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{dv_x}{V_{jet}} \Rightarrow \int_{m_i}^{m_f}\frac{dm}{m} = -\int_{v_i}^{v_f}\frac{1}{V_{jet}}dv$$

$$\log\frac{m_f}{m_i} = \frac{(v_i - v_f)}{V_{jet}}; \Rightarrow v_f = v_i + V_{jet}\log\frac{m_i}{m_f}$$



Il termine di massa in logaritmo non sarà mai molto grande

È essenziale che sia grande la velocità del getto

Richiami ed argomenti correlati

I sistemi di punti materiali

I sistemi di punti materiali sono insiemi di punti materiali che hanno interazioni mutue più o meno forti. Un corpo esteso si studia come un sistema di punti materiali.

I corpi in vari stati di aggregazione possono essere studiati come sistemi di punti materiali. Tuttavia il punto materiale non corrisponde ad un'entità fisica ben precisa (per esempio l'atomo o la particella). È semplicemente la più piccola unità di materia del corpo che non abbia altro dettaglio rilevante per la descrizione del fenomeno che la propria massa. Così, in un gas monoatomico, gli atomi possono essere trattati come punti materiali per alcuni scopi. In un corpo rigido, potremmo considerare una porzione di materia più grande.

La dinamica dei sistemi di punti materiali non richiede nuovi principi fisici, ma si appoggia sui tre principi della dinamica già esposti.

I sistemi di punti materiali

Cominciamo con il definire il **centro di massa** di un sistema di punti materiali

$$\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i; \qquad M=\sum_i m_i \text{è la massa del sistema}$$

Vediamo come si muove il centro di massa di un sistema:

$$\vec{v}_{CM}=\frac{d}{dt}\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i; \qquad \vec{P}=M\vec{v}_{CM}=\sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{a}_{CM}=\frac{d}{dt}\vec{v}_{CM}=\frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}; \qquad \frac{d\vec{P}}{dt}=M\vec{a}_{CM}=\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Il centro di massa si muove come un punto materiale che ha la massa del sistema e la sua quantità di moto

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali, soggetti a forze esterne al sistema e a forze interne.

Su ciascun punto *i* avremo:

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$definiamo:$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} = \vec{F}_{est} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \vec{0} : \text{infatti } \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = -\vec{F}_{\mathrm{int},j,i}$$

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Sommiamo le equazioni per tutti i punti materiali

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \sum_i \frac{d\,\vec{p}_i}{dt}$$

$$\textit{definiamo}:$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} = \vec{F}_{est} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \vec{0} : \text{ infatti } \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = -\vec{F}_{\mathrm{int},j,i}$$

Otteniamo:

$$\boxed{\vec{F}_{est} = \frac{d\,\vec{P}}{dt}}$$

La derivata della quantità di moto totale del sistema di punti materiali è uguale alla risultante di tutte le forze esterne al sistema.

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Elaboriamo sulla Prima Equazione Cardinale

$$\vec{F}_{est} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

Osservazioni:

1) Il sistema di punti materiali si muove come un punto materiale con tutta la massa concentrata nel centro di massa e soggetto solo alle forze esterne. Questo spiega perché possiamo modellare sistemi estesi come punti materiali quando non ci interessano i particolari del moto delle singole parti.

2) Le forze interne tra i vari punti del sistema non influenzano direttamente il moto del sistema del centro di massa, ma le forze esterne potrebbero dipendere dalla posizione e/o velocità dei singoli punti materiali.