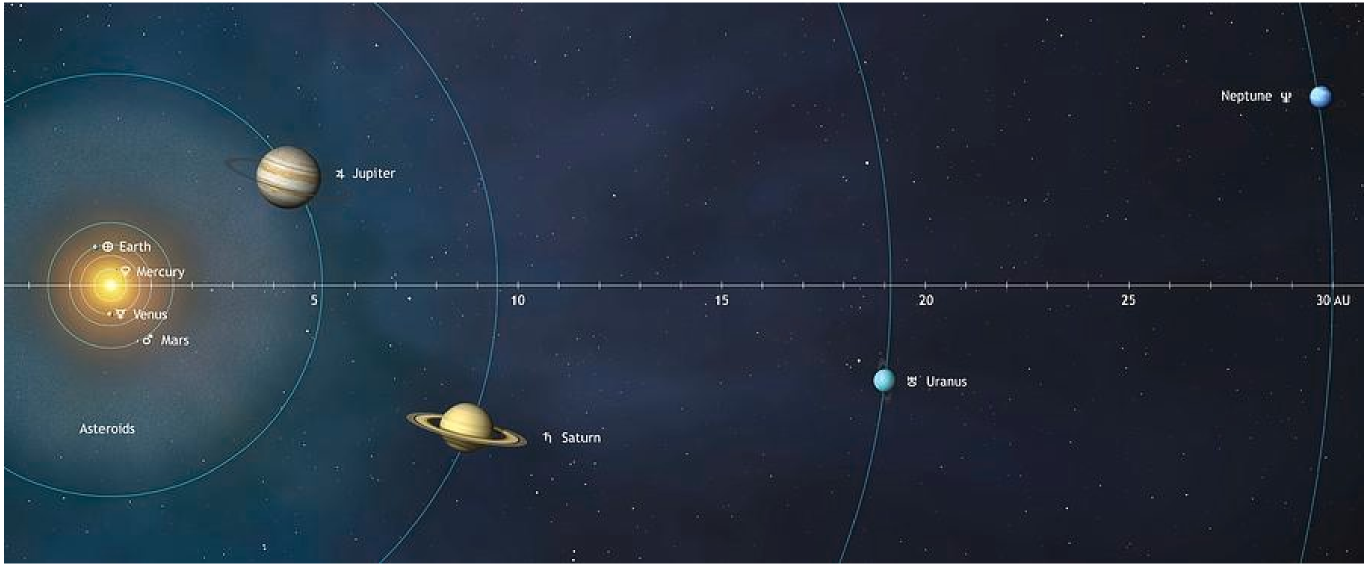
Gravitazione e orbite dei pianeti

Le orbite dei pianeti sono definite dalle Leggi di Keplero, che sono puramente cinematiche.

Possono essere ricavate risolvendo l'equazione del moto con la legge di gravitazione di Newton

Pianeta	Semiasse Maggiore (UA) - "*a*"	Periodo Orbitale (anni) - "*T*"	a^3/T^2 $(UA^3\,y^{-2})$
Mercurio	0,39	0,24	1,03
Venere	0,72	0,62	0,97
Terra	1	1	1,00
Marte	1,52	1,88	0,99
Giove	5,2	11,86	1,00
Saturno	9,58	29,46	1,01
Urano	19,22	84,01	1,01
Nettuno	30,05	164,8	1,00



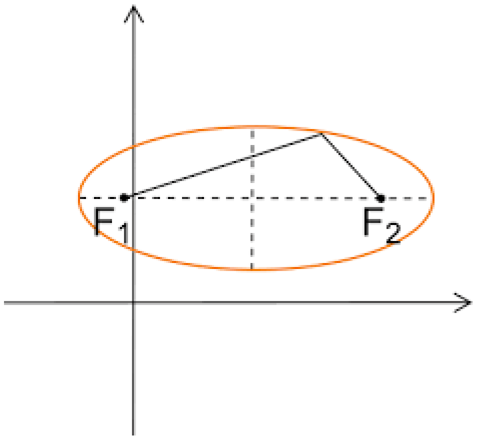
Gravitazione e orbite dei pianeti

Le orbite dei pianeti sono definite dalle Leggi di Keplero, che sono puramente cinematiche.

I legge di Keplero: *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*

II legge di Keplero: *Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta spazza (o descrive) aree uguali in tempi uguali.*

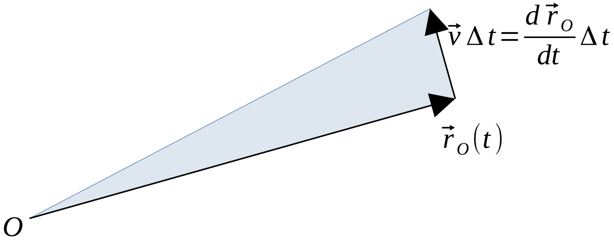
III legge di Keplero: *I quadrati dei periodi orbitali dei pianeti sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore.*



Ellisse: luogo geometrico dei punti la cui somma delle distanze da due punti detti fuochi è costante

Osserviamo che, poiché la forza gravitazionale è centrale, si ottiene immediatamente che il moto è piano e che il momento angolare è costante:

$$\vec{J}_O = cost. \Rightarrow m\,\vec{r}_O \times \vec{v} = m\frac{\vec{r}_O \times d\vec{r}}{dt} = cost.$$



Questo dimostra la seconda legge.

Gravitazione e orbite dei pianeti

Riguardo alla prima legge, osserviamo che si tratta di moti piani; non ricaveremo la traiettoria in generale, ma abbiamo già visto che le soluzioni del problema dei due corpi sono sezioni coniche (ossia iperboli, parabole, ellissi) e in particolare abbiamo già visto che la traiettoria circolare è ammessa.

Riguardo alla terza legge, possiamo ricavarla facilmente nel caso di orbita circolare:

$$\mu_R \, \omega_{orbita}^2 r_{orbita} = \mu_R \left(\frac{2\pi}{T_{pianeta}} \right)^2 r_{orbita} = G \frac{m_{pianeta} M_{sole}}{r_{orbita}^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T_{orbita}^2} = G \frac{m_{pianeta} M_{sole}}{\mu_R \, r_{orbita}^3}$$

Poiché la massa di ciascun pianeta è molto minore della massa del Sole, abbiamo:

$$r_{orbita}^3 \simeq G \frac{M_{sole} T_{orbita}^2}{4\pi^2}$$

Richiami ed argomenti correlati

Gravitazione ed energia potenziale

La forza gravitazionale è centrale →

- Il momento angolare si conserva
- Il moto è piano
- La forza è conservativa
- Ammette un’energia potenziale

$$\vec{F}_{mM} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \quad \text{ponendo } \vec{r}_M = \vec{0} \quad (\text{ha senso se } M \gg m)$$

$$U_{mM} = -G\frac{mM}{r} + c \quad \text{di solito } c = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} U(r) \to 0$$

Nel caso in cui si debba considerare il moto di entrambe le masse

$$\vec{F}_{m_2,m_1} = G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{r}_{2\to 1} = G\frac{m_2 m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$U_{m_2,m_1} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}} + c$$

Gravitazione e il problema dei due corpi

Consideriamo un sistema di sole due masse. Introduciamo il vettore:

$$\vec{r}_R = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

La derivata seconda di questo vettore ha un'interessante proprietà:

$$\vec{a}_R = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_1}{m_1} - \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \frac{\vec{F}_1}{m_1} + \frac{\vec{F}_1}{m_2} = \vec{F}_1 \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2}$$

ponendo $\mu_R = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ → massa ridotta

$$\mu_R \vec{a}_R = \vec{F}_1$$

Quindi il vettore differenza di posizione si muove come un corpo avente massa pari alla massa ridotta e soggetto all'azione della forza reciproca tra le due masse. *Questo è vero per ogni interazione a due corpi!*

$$\mu_R < m_1 ; \mu_R < m_2 ; \qquad se\, m_2 \gg m_1 , \mu_R \simeq m_1$$

Gravitazione e il problema dei due corpi

Trattiamo il problema del moto dei due corpi con attrazione gravitazionale in termini di massa ridotta:

$$\mu_R \vec{a}_R = -G \frac{m_1 m_2}{r_R^2} \hat{r}_R$$

Nel caso di moto circolare, si ha:

$$\mu_R \omega^2 r_R = \mu_R \frac{v_R^2}{r_R} = G \frac{m_1 m_2}{r_R^2} \Rightarrow v_R^2 = G \frac{m_1 m_2}{\mu_R r_R} = G \frac{m_1 + m_2}{r_R} \Rightarrow v_R = \sqrt{G \frac{m_1 + m_2}{r_R}}$$

$$\text{se } m_2 \gg m_1 , v_1 \simeq v_R \simeq \sqrt{G \frac{m_2}{r_1}}$$

Gravitazione e orbita geostazionaria

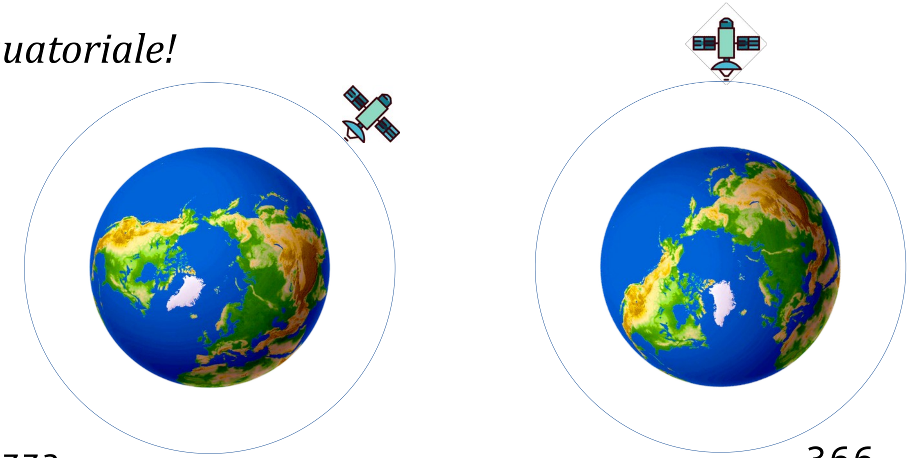
L'orbita geostazionaria è quella il cui periodo coincide con periodo di rotazione della Terra

$$\mu_R \omega^2 r_{geostaz} = \mu_R \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_{geostaz} = G \frac{mM}{r_{geostaz}^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = G \frac{mM}{\mu_R r_{geostaz}^3} \Rightarrow r_{geostaz}^3 \simeq G \frac{M T^2}{4\pi^2}$$

$$r_{geostaz} = \sqrt[3]{\frac{G M T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{g r_{Terra}^2 T^2}{4\pi^2}} \simeq 42.2 \times 10^3\, km \simeq 36000\, km \text{ dalla superficie}$$

Attenzione: l'orbita geostazionaria è solo una, ed è per forza equatoriale!

Tutti i satelliti geostazionari devono "dividersi" lo "spazio" disponibile su una sola orbita, che passa obbligatoriamente per l'Equatore!



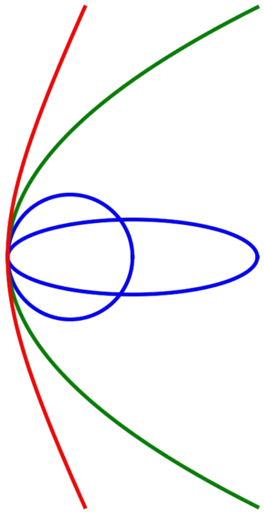
Gravitazione e problema dei due corpi

Energia potenziale e meccanica nel problema dei due corpi

$$K=\frac{1}{2}\mu_R v_R^2; \qquad U=-G\frac{m_1 m_2}{r_R}; \qquad E=K+U=\frac{1}{2}\mu_R v_R^2-G\frac{m_1 m_2}{r_R}=cost.$$

Le due energie possono cambiare, ma la somma è costante per tutto il moto.

$$\begin{cases} E>0\Rightarrow \lim_{r_R\to\infty} K+U=\frac{1}{2}\mu_R v_\infty^2>0\Rightarrow \text{traiettoria = iperbole, stato non legato} \\ E=0\Rightarrow \lim_{r_R\to\infty} K+U=\frac{1}{2}\mu_R v_\infty^2=0\Rightarrow \text{traiettoria = parabola, stato non legato} \\ E<0\Rightarrow r_{max}=G\frac{m_1 m_2}{K}\Rightarrow \text{traiettoria = ellisse (o circonferenza), stato legato} \end{cases}$$



Gravitazione e problema dei due corpi

Velocità di fuga: la velocità minima che un corpo deve avere per sfuggire all'attrazione dell'altro

Per un corpo sulla Terra:

$$K=\frac{1}{2}\mu_R v_R^2; \qquad U=-G\frac{m_1 m_2}{r_R}; \qquad E=K+U=\frac{1}{2}\mu_R v_R^2-G\frac{m_1 m_2}{r_R}=0$$

$$v_{fuga}=\sqrt{2G\frac{m_1 m_2}{\mu_R r_{Terra}}}\simeq\sqrt{2G\frac{M}{r_{Terra}}}=\sqrt{2g\,r_{Terra}}=11{,}2\,km/s$$

Sulla Luna:

$$v_{fuga}=\sqrt{2G\frac{M_{Luna}}{r_{Luna}}}=2{,}4\,km/s$$

Su Marte:

$$v_{fuga}=\sqrt{2G\frac{M_{Marte}}{r_{Marte}}}=5{,}0\,km/s$$