Gravitazione ed energia potenziale

La forza gravitazionale è centrale →

- Il momento angolare si conserva
- Il moto è piano
- La forza è conservativa
- Ammette un'energia potenziale

$$\vec{F}_{mM} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \quad \text{ponendo } \vec{r}_M = \vec{0} \quad (\text{ha senso se } M \gg m)$$

$$U_{mM} = -G\frac{mM}{r} + c \quad \text{di solito } c = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} U(r) \to 0$$

Nel caso in cui si debba considerare il moto di entrambe le masse

$$\vec{F}_{m_2,m_1} = G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{r}_{2\to 1} = G\frac{m_2 m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$U_{m_2,m_1} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}} + c$$

Gravitazione e il problema dei due corpi

Consideriamo un sistema di sole due masse. Introduciamo il vettore:

$$\vec{r}_R = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

La derivata seconda di questo vettore ha un'interessante proprietà:

$$\vec{a}_R = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_1}{m_1} - \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \frac{\vec{F}_1}{m_1} + \frac{\vec{F}_1}{m_2} = \vec{F}_1 \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2}$$

ponendo $\mu_R = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ → massa ridotta

$$\mu_R \vec{a}_R = \vec{F}_1$$

Quindi il vettore differenza di posizione si muove come un corpo avente massa pari alla massa ridotta e soggetto all'azione della forza reciproca tra le due masse. *Questo è vero per ogni interazione a due corpi!*

$$\mu_R < m_1 ; \mu_R < m_2 ; \qquad se\, m_2 \gg m_1 , \mu_R \simeq m_1$$

Gravitazione e il problema dei due corpi

Trattiamo il problema del moto dei due corpi con attrazione gravitazionale in termini di massa ridotta:

$$\mu_R \vec{a}_R = -G\frac{m_1 m_2}{{r_R}^2}\hat{r}_R$$

Nel caso di moto circolare, si ha:

$$\mu_R \omega^2 r_R = \mu_R \frac{v_R^2}{r_R} = G\frac{m_1 m_2}{{r_R}^2} \Rightarrow v_R^2 = G\frac{m_1 m_2}{\mu_R r_R} = G\frac{m_1 + m_2}{r_R} \Rightarrow v_R = \sqrt{G\frac{m_1+m_2}{r_R}}$$

$$\text{se } m_2 \gg m_1, v_1 \simeq v_R \simeq \sqrt{G\frac{m_2}{r_1}}$$

Gravitazione e orbita geostazionaria

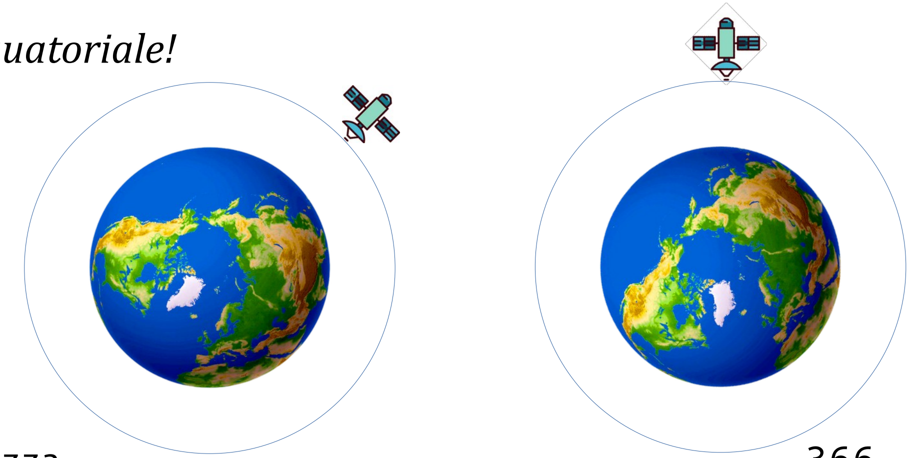
L'orbita geostazionaria è quella il cui periodo coincide con periodo di rotazione della Terra

$$\mu_R \omega^2 r_{geostaz} = \mu_R \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_{geostaz} = G\frac{mM}{r_{geostaz}^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{mM}{\mu_R r_{geostaz}^3} \Rightarrow r_{geostaz}^3 \simeq G\frac{MT^2}{4\pi^2}$$

$$r_{geostaz} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{g r_{Terra}^2 T^2}{4\pi^2}} \simeq 42.2\times10^3\, km \simeq 36000\, km \text{ dalla superficie}$$

Attenzione: l'orbita geostazionaria è solo una, ed è per forza equatoriale!

Tutti i satelliti geostazionari devono "dividersi" lo "spazio" disponibile su una sola orbita, che passa obbligatoriamente per l'Equatore!



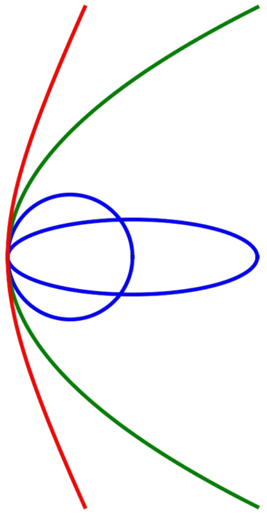
Gravitazione e problema dei due corpi

Energia potenziale e meccanica nel problema dei due corpi

$$K=\frac{1}{2}\mu_R v_R^2; \qquad U=-G\frac{m_1 m_2}{r_R}; \qquad E=K+U=\frac{1}{2}\mu_R v_R^2-G\frac{m_1 m_2}{r_R}=cost.$$

Le due energie possono cambiare, ma la somma è costante per tutto il moto.

$$\begin{cases} E>0 \Rightarrow \lim_{r_R\to\infty} K+U=\frac{1}{2}\mu_R v_\infty^2>0 \Rightarrow \text{traiettoria = iperbole, stato non legato} \\ E=0 \Rightarrow \lim_{r_R\to\infty} K+U=\frac{1}{2}\mu_R v_\infty^2=0 \Rightarrow \text{traiettoria = parabola, stato non legato} \\ E<0 \Rightarrow r_{max}=G\frac{m_1 m_2}{K} \Rightarrow \text{traiettoria = ellisse (o circonferenza), stato legato} \end{cases}$$



Gravitazione e problema dei due corpi

Velocità di fuga: la velocità minima che un corpo deve avere per sfuggire all'attrazione dell'altro

Per un corpo sulla Terra:

$$K=\frac{1}{2}\mu_R v_R^2; \qquad U=-G\frac{m_1 m_2}{r_R}; \qquad E=K+U=\frac{1}{2}\mu_R v_R^2-G\frac{m_1 m_2}{r_R}=0$$

$$v_{fuga}=\sqrt{2G\frac{m_1 m_2}{\mu_R r_{Terra}}}\simeq\sqrt{2G\frac{M}{r_{Terra}}}=\sqrt{2 g r_{Terra}}=11{,}2\,km/s$$

Sulla Luna:

$$v_{fuga}=\sqrt{2G\frac{M_{Luna}}{r_{Luna}}}=2{,}4\,km/s$$

Su Marte:

$$v_{fuga}=\sqrt{2G\frac{M_{Marte}}{r_{Marte}}}=5{,}0\,km/s$$

Richiami ed argomenti correlati

Gravitazione

Fino ad ora abbiamo incontrato la forza peso, definita come approssimazione in una regione piccola dell'attrazione di tutti i corpi verso il centro della Terra.

La particolarità della legge di forza associata è che la forza di attrazione è proporzionale alla massa inerziale.

D'altra parte, per il III Principio della Dinamica, dobbiamo ammettere che ciascun corpo esercita sulla Terra una uguale forza di attrazione.

Si deve ancora a Newton l'intuizione, verificata da dati preesistenti e misure successive, che il moto reciproco dei corpi celesti sia accelerato dalla gravità. Newton intuì che la Luna "cade continuamente" verso la Terra, e che lo stesso fa la Terra verso la Luna e verso il Sole. Questa continua accelerazione genera i moti orbitali.

"Costruiamo" l'attrazione gravitazionale a partire da considerazioni di principio. Consideriamo la massa della Terra M e quella m di un corpo di prova.

$$\|\vec{F}_{corpo}\| = \|\vec{F}_{Terra}\| \Rightarrow C_1 m = C_2 M \Rightarrow \|\vec{F}_{Terra}\| = \|\vec{F}_{corpo}\| = C_3 m M$$

Gravitazione

Osserviamo che l'accelerazione della Luna è molto minore di quella che hanno i corpi sulla Terra. Conoscendo la distanza Terra – Luna, dalle osservazioni ricaviamo che:

$$\|\vec{a}_{Luna}\| \simeq \|\vec{a}_{mela}\| \frac{r^2_{Terra}}{d^2_{Terra,\,Luna}} \Rightarrow C_3 = \frac{G}{r^2} \qquad G \text{ è una costante da determinare}$$

Considerazioni:

1) Abbiamo inserito il raggio terrestre per l'accelerazione della mela (o qualche altro corpo): ciò implica che la Terra si possa considerare tutta concentrata nel suo centro;

2) La costante C_3 esprime solo una proporzionalità alle masse in gioco, ma dipende dalla distanza. L'ultima costante che dobbiamo introdurre è G, per rispettare la corretta dimensionalità.

$$\|\vec{F}_{m,M}\| \Rightarrow G\frac{m\,M}{r^2}$$

Gravitazione

In generale, possiamo dire che:

$$[G]=[F\frac{r^2}{mM}]=[M][L][T^{-2}][L^2][M^{-2}]=[M^{-1}][T^{-2}][L^3]$$

Il valore di *g*, accelerazione gravitazionale terrestre sul livello del mare, è legato a *G*:

$$\|\vec{F}_{m,M}\|\Rightarrow G\frac{mM}{r^2}=mg\Rightarrow G\frac{M}{r^2}=g$$

Tuttavia non possiamo misurare direttamente la massa terrestre.

Abbiamo bisogno di esperimenti di misura diretta della costante a partire da masse e distanze note.

Gravitazione

Esperimento di Cavendish con bilancia di torsione

La posizione di equilibrio è quella che bilancia il momento esercitato dal filo di sospensione e quello della forza di attrazione tra le masse. Rispetto alla posizione di riposo, il momento dovuto alla torsione è:

$$\vec{M}_{Torsione} = -K\,\theta\hat{k}$$

La forza tra ciascuna coppia di masse è:

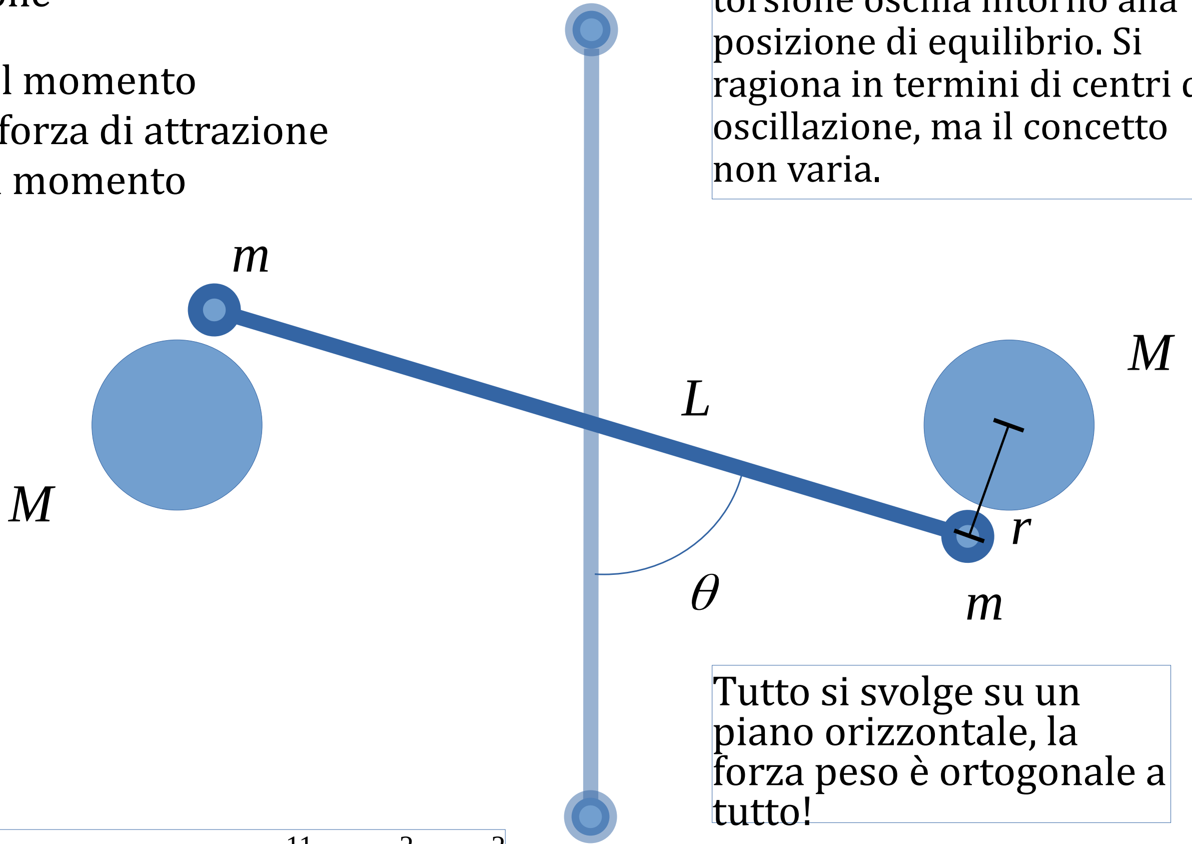
$$\|\vec{F}_{mM}\| = G\frac{mM}{r^2}$$

$$\vec{M}_{mM} = 2G\frac{mML}{r^2}\hat{k}$$

$$\vec{M}_{mM} + \vec{M}_{Torsione} = \vec{0} \Rightarrow 2G\frac{mML}{r^2} = K\,\theta$$

$$G = \frac{K\,\theta r^2}{2\,mML}$$

In realtà il pendolo di torsione oscilla intorno alla posizione di equilibrio. Si ragiona in termini di centri di oscillazione, ma il concetto non varia.



Tutto si svolge su un piano orizzontale, la forza peso è ortogonale a tutto!

$$G = 6.674\times10^{-11}\,N\,m^2\,kg^{-2}$$

Gravitazione

Quindi la forma completa della forza gravitazionale che agisce *dal corpo 2 sul corpo 1* deve essere:

$$\vec{F}_{m_1,m_2}=G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{1\to 2}=G\frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2-\vec{r}_1\|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

e simmetricamente, per la forza *dal corpo 1 sul corpo 2* :

$$\vec{F}_{m_2,m_1}=G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{r}_{2\to 1}=G\frac{m_2 m_1}{\|\vec{r}_1-\vec{r}_2\|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

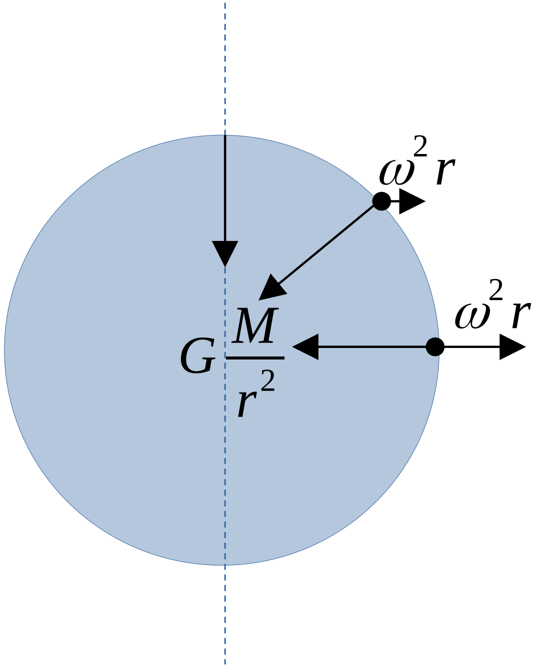
Questa forza è **sempre attrattiva**. La costante G è la **costante gravitazionale universale** e vale per qualunque coppia di corpi nell'Universo.

Possiamo quindi determinare la massa della Terra con un oggetto posto sulla sua superficie:

$$G\frac{M}{r^2}=g\Rightarrow M=g\frac{r^2}{G}\simeq 5{,}97\times 10^{24}\,kg$$

Gravitazione

Attenzione! Non dobbiamo dimenticare di tener conto del fatto che la Terra gira, quindi l'accelerazione gravitazionale si compone con la forza centrifuga. Ai poli non c'è contributo centrifugo, all'Equatore è massimo.



$$\omega = 2\pi rad/86400\, s = 7{,}3\times 10^{-5}\, rad/s$$
$$r = 6371\, km = 6{,}4\times 10^{6}\, m$$
$$\omega^2 r = 0{,}034\, m/s^2 \text{ all'Equatore}$$

$$g = 9{,}81\, m/s^2 \text{ ai poli; } 9{,}78\, m/s^2 \text{ all'Equatore}$$

piccole deviazioni dalla verticale tra Equatore e poli

Il campo gravitazionale

Tutti i corpi (punti materiali) che si trovano in presenza di una massa M sperimentano una forza proporzionale ad essa.

$$\vec{F}_i = G\,M\,\frac{m_i}{\|\vec{r}_M - \vec{r}_i\|^2}\,vers(\vec{r}_M - \vec{r}_i)$$

Questa ha la forma di un'azione a distanza. Se aggiungiamo altre masse, gli effetti si sommeranno. È concettualmente comodo introdurre il concetto di **campo gravitazionale**, in modo che ogni massa interagisca con il campo e non con la massa generatrice.

$$\vec{F}_i = m_i \vec{g}_M ; \qquad \vec{g}_M(\vec{r}) = G\,\frac{M}{\|\vec{r}_M - \vec{r}\|^2}\,vers(\vec{r}_M - \vec{r})$$

Quindi il campo risulta definito solo dalla massa generatrice, e la forza dall'accoppiamento della massa del punto materiale i-esimo con il campo nel punto occupato dal punto materiale i-esimo.