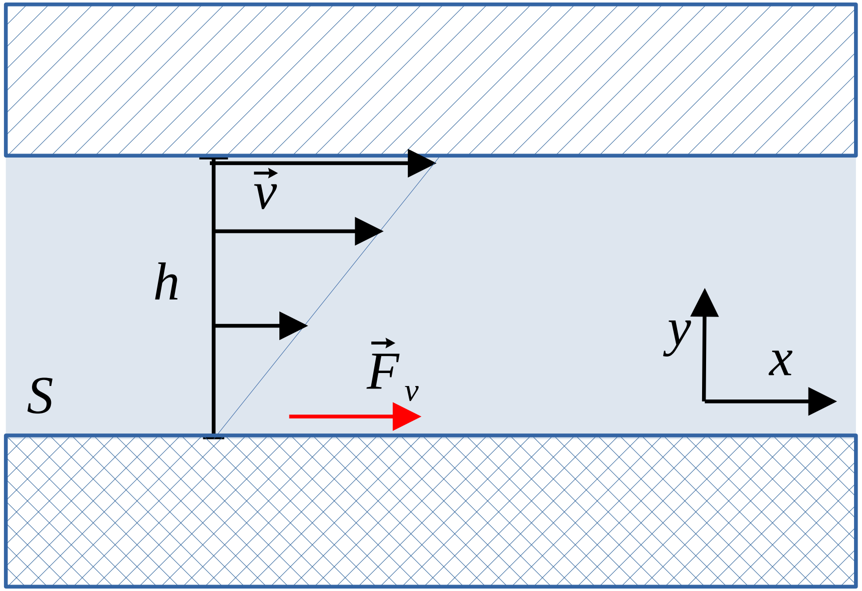
Fluidi Newtoniani e viscosità

I fluidi “newtoniani” presentano il modello più semplice di effetto della viscosità.

Consideriamo due piastre rettangolari, di area *S*, con un fluido newtoniano intrappolato nello spessore *h* tra di esse. Se la velocità relativa è **v**, lo sforzo esercitato su ciascuna tenderà a trascinarla nella stessa direzione e verso dell'altra e avrà modulo:

$$\tau = \sigma_t = \frac{F_v}{S} = \eta \frac{\Delta v}{h}$$



Il coefficiente η è comunemente detto *viscosità* del fluido.

$$\tau = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

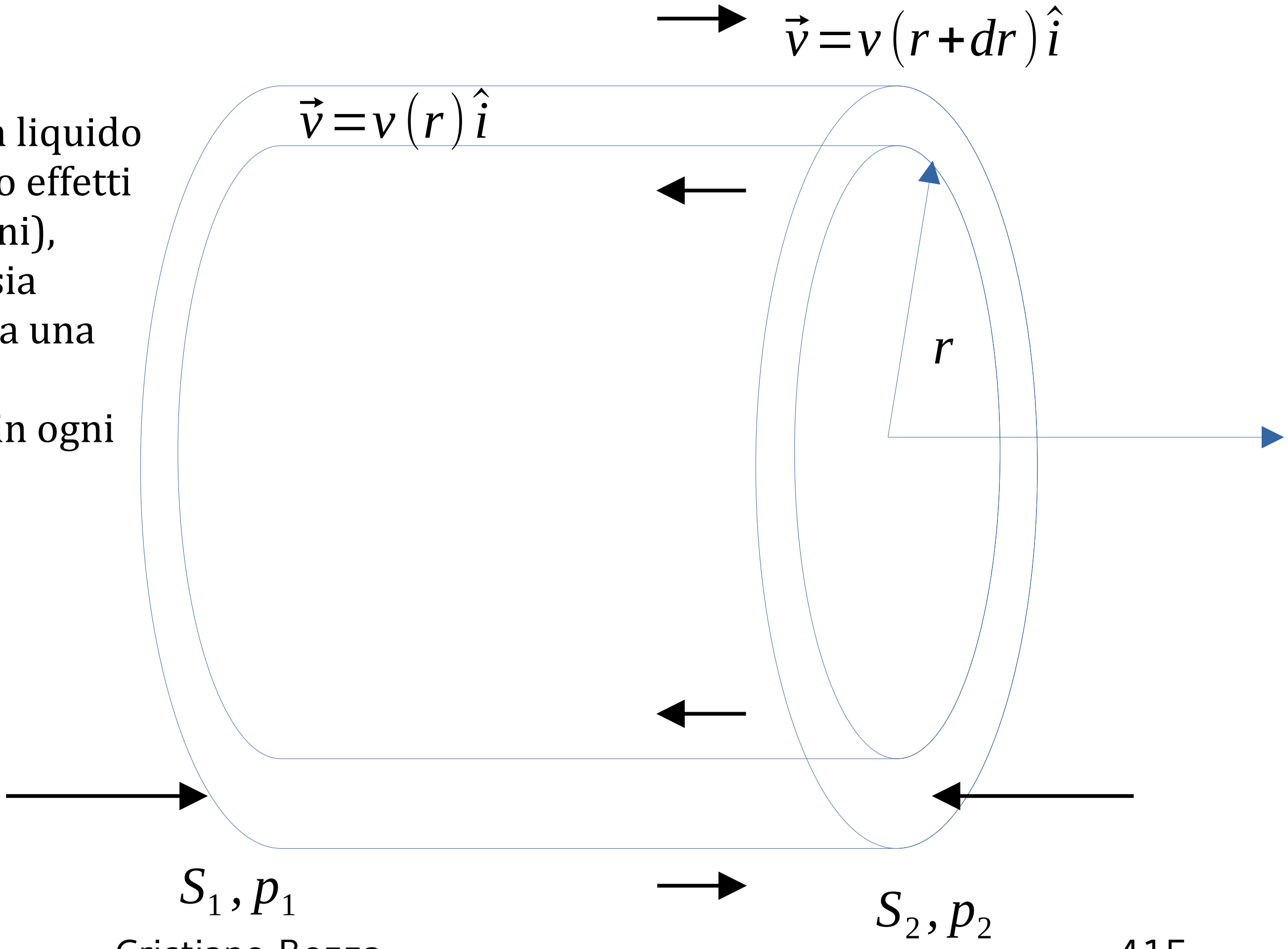
Esistono altri modelli di sforzo più complicati!

Moto di Poiseuille

Consideriamo una tubazione circolare e un liquido newtoniano in moto laminare. Trascurando effetti di gravità (ragionevole per piccole tubazioni), possiamo supporre che il vettore velocità sia diretto sempre lungo l'asse del tubo e abbia una simmetria cilindrica intorno ad esso.
Supponiamo inoltre la pressione costante in ogni sezione, ossia *p* dipendente solo da *x*.

$$\vec{v} = v(r)\,\hat{i}$$

$$F_{p1,x} + F_{p2,x} + F_{vi,x} + F_{ve,x} = 0$$



Moto di Poiseuille

Consideriamo una tubazione circolare e un liquido newtoniano in moto laminare. Trascurando effetti di gravità (ragionevole per piccole tubazioni), possiamo supporre che il vettore velocità sia diretto sempre lungo l’asse del tubo e abbia una simmetria cilindrica intorno ad esso. Supponiamo inoltre la pressione costante in ogni sezione, ossia p dipendente solo da x.

$$\vec{v}=v(r)\hat{i}$$

$$F_{p1,x}+F_{p2,x}+F_{vi,x}+F_{ve,x}=0$$

$$p(x)(2\pi r\,dr)-p(x+dx)(2\pi r\,dr)+\eta\left[-\frac{\partial v}{\partial r}(r)\right](2\pi r\,dx)+\eta\left[\frac{\partial v}{\partial r}(r+dr)\right](2\pi(r+dr)\,dx)=0$$

$$2\pi r\left\{-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dr+dx\,\eta\left[\frac{\partial v}{\partial r}(r)+\frac{\partial v}{\partial r}(r)\frac{dr}{r}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r)dr-\frac{\partial v}{\partial r}(r)\right]\right\}=0$$

$$2\pi r\left\{-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dr+\eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r)+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r)\right]dx\,dr\right\}=0$$

Moto di Poiseuille

Consideriamo una tubazione circolare e un liquido newtoniano in moto laminare. Trascurando effetti di gravità (ragionevole per piccole tubazioni), possiamo supporre che il vettore velocità sia diretto sempre lungo l'asse del tubo e abbia una simmetria cilindrica intorno ad esso. Supponiamo inoltre la pressione costante in ogni sezione, ossia *p* dipendente solo da *x*.

$$\eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r)+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r)\right]=\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{proponiamo} \quad v=c_2 r^2+c_1 r+c_0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r}=2c_2 r+c_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=2c_2$$

$$\eta\left[2c_2+\frac{c_1}{r}+2c_2\right]=\frac{\partial p}{\partial x}\Rightarrow c_1=0, \quad 4c_2=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}$$

La costante c_0 viene fissata in modo che per continuità il fluido a contatto con la parete del tubo sia fermo:

$$v(r=R)=0\Rightarrow c_0=-\frac{1}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial x}R^2 \qquad \boxed{v(r)=-\frac{1}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(R^2-r^2)}$$

Moto di Poiseuille

Consideriamo una tubazione circolare e un liquido newtoniano in moto laminare. Trascurando effetti di gravità (ragionevole per piccole tubazioni), possiamo supporre che il vettore velocità sia diretto sempre lungo l'asse del tubo e abbia una simmetria cilindrica intorno ad esso. Supponiamo inoltre la pressione costante in ogni sezione, ossia *p* dipendente solo da *x*.

$$\boxed{v(r)=-\frac{1}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left(R^2-r^2\right)}$$

Attenzione: perché ci sia una velocità positiva, la pressione deve decrescere al crescere di x!

Calcoliamo la portata:

$$Q=\int_0^R 2\pi r\, v(r)\, dr=\int_0^R -\frac{2\pi r}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left(R^2-r^2\right)=-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\int_0^R\left(R^2 r-r^3\right)dr=-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left[R^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

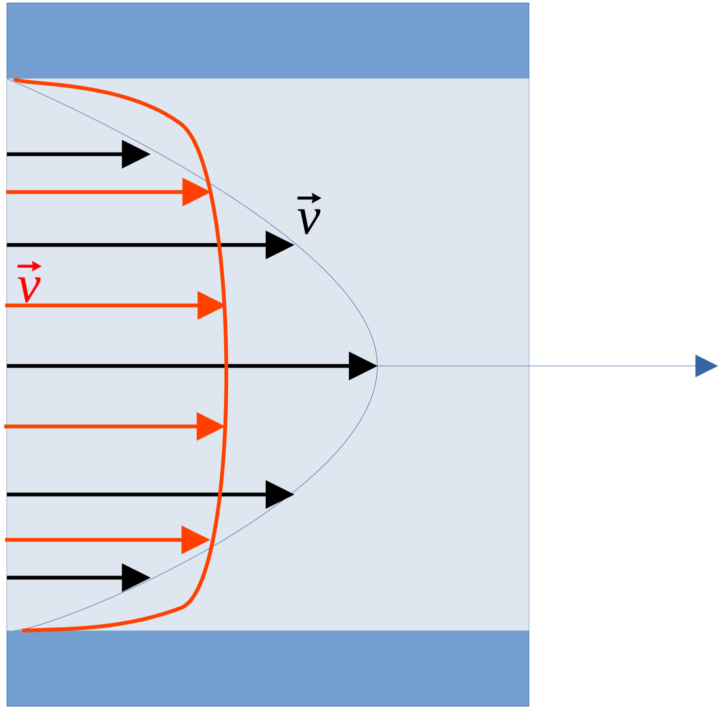
$$\boxed{Q=-\frac{1}{8\eta}\frac{\partial p}{\partial x}R^4}$$

Moto in tubi in regime turbolento

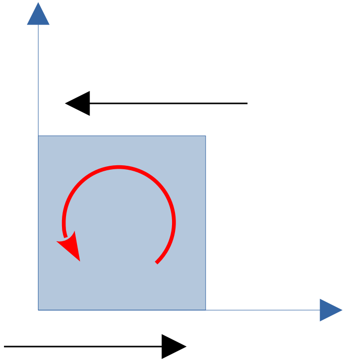
Nel caso di regime turbolento, il profilo radiale di velocità diventa molto più schiacciato.

I vortici tendono ad omogeneizzare la velocità.

In nero: profilo di velocità in moto laminare
In rosso: profilo di velocità in moto turbolento.



La turbolenza insorge inevitabilmente: se consideriamo un volumetto tra due strati a diversa velocità nel moto laminare, osserviamo che gli sforzi di taglio dovuti alla viscosità tendono a farlo ruotare.
La pressione può stabilizzare il moto per un po', ma alla fine il moto laminare si frammenterà in vortici, i quali avranno l'effetto di mescolare molto rapidamente i vari strati, e di rendere più omogeneo il campo di moto **medio** (ma con forti fluttuazioni locali e temporali)



Richiami ed argomenti correlati

Dinamica dei fluidi

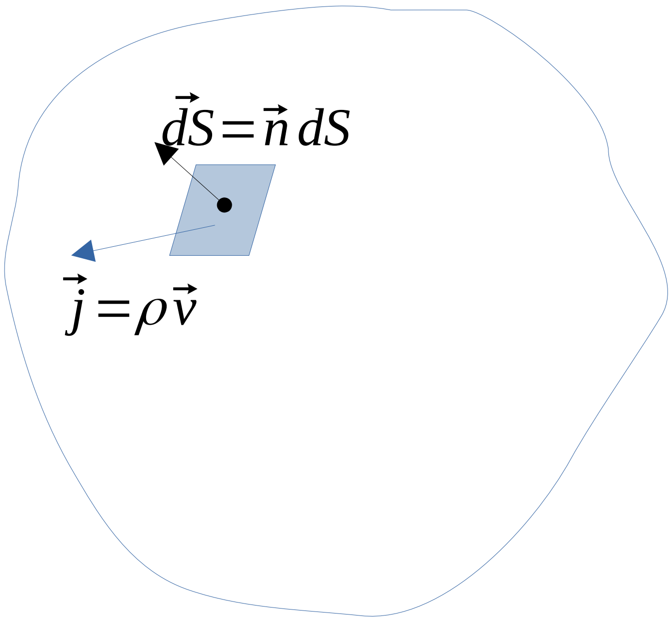
La dinamica dei fluidi richiede strumenti matematici adatti e adeguatamente potenti, anche per descrivere casi semplici.

Questa immagine mostra chiaramente che la schematizzazione di punto materiale, con le sue semplificazioni, non può essere usata per problemi che coinvolgono liquidi.

Dinamica dei fluidi

Innanzitutto, introduciamo il concetto di **equazioni di bilancio**. Nella maggior parte dei casi, i fluidi si muovono in tubi o canalizzazioni che sono solidali all'osservatore. Non seguiamo il movimento di una particella di fluido, ma piuttosto siamo interessati a fare bilanci tra ciò che entra all'interno di un *volume di controllo,* delimitato da una *superficie di controllo*, e ciò che ne esce.

In ogni punto della superficie di controllo, consideriamo la normale **uscente** dal volume.



La densità è tale che la massa totale contenuta nel volume di controllo si ottiene come:

$$m = \int_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Introduciamo la **densità di corrente:**

$$\vec{j}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, \vec{v}(x, y, z)$$

Dinamica dei fluidi

Il flusso di corrente uscente in un elementino dS sarà, ovviamente: $d\varphi = \vec{j} \cdot \vec{dS} = \vec{j} \cdot \hat{n}\, dS$
Se il flusso è entrante, il prodotto scalare assumerà segno negativo.

E per il flusso complessivo uscente avremo $\Phi = \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n}\, dS$

Possiamo scrivere l'**equazione di continuità in forma integrale**, che esprime la **conservazione della massa**:

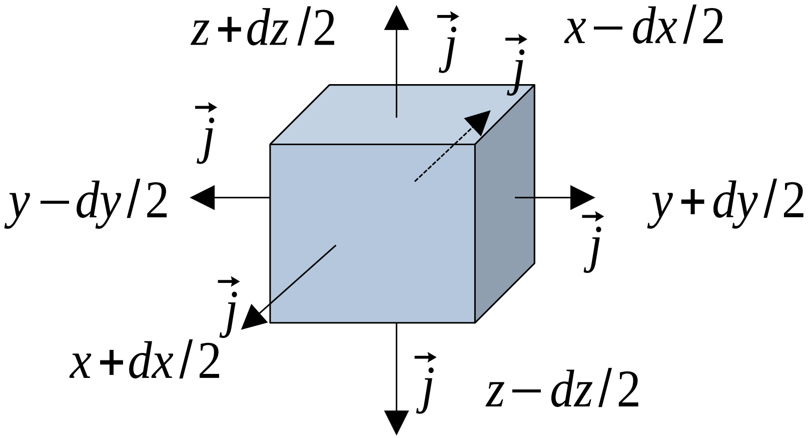
$$\boxed{\begin{gathered} \frac{dm}{dt} = -\Phi \\ \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dx\, dy\, dz + \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0 \Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz + \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0 \end{gathered}}$$

Il flusso uscente dalla superficie di controllo è uguale e opposto alla variazione della massa contenuta nel volume di controllo.

Dinamica dei fluidi

Possiamo ottenere l'equazione di continuità anche in forma differenziale, considerando un elementino di volume:

$$j_x(x+dx/2,y,z)\,dy\,dz - j_x(x-dx/2,y,z)\,dy\,dz +$$
$$+ j_y(x,y+dy/2,z)\,dz\,dx - j_y(x,y-dy/2,z)\,dz\,dx +$$
$$+ j_z(x,y,z+dz/2)\,dx\,dy - j_z(x,y,z-dz/2)\,dx\,dy =$$
$$+\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = 0$$



$$\frac{\partial j_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial j_y}{\partial y}\,dz\,dx\,dy + \frac{\partial j_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = 0$$

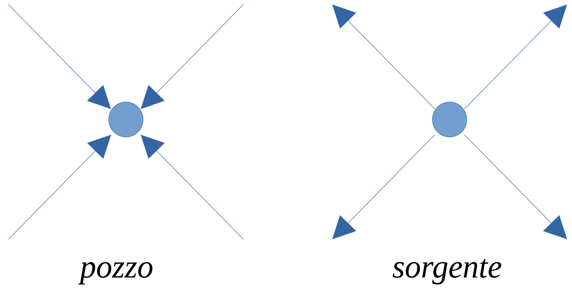
$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Equazione di continuità in forma differenziale

Dinamica dei fluidi

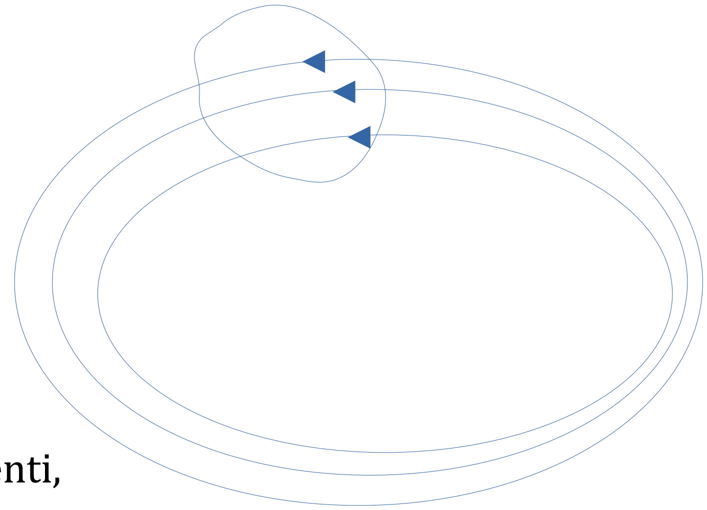
Casi particolari dell'equazione di continuità:

1) fluido incomprimibile (~liquido)



$$\rho = cost. \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial j_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial j_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial j_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \mathrm{div}\, \vec{v} = 0$$



Se non vi sono né pozzi né sorgenti, le linee di flusso in un liquido sono chiuse.

Se in un punto c'è un pozzo o una sorgente, alcune linee di flusso possono spuntare da quel punto o terminarvi. In assenza di pozzi e sorgenti, nessuna linea può terminare o iniziare, quindi devono essere tutte chiuse.

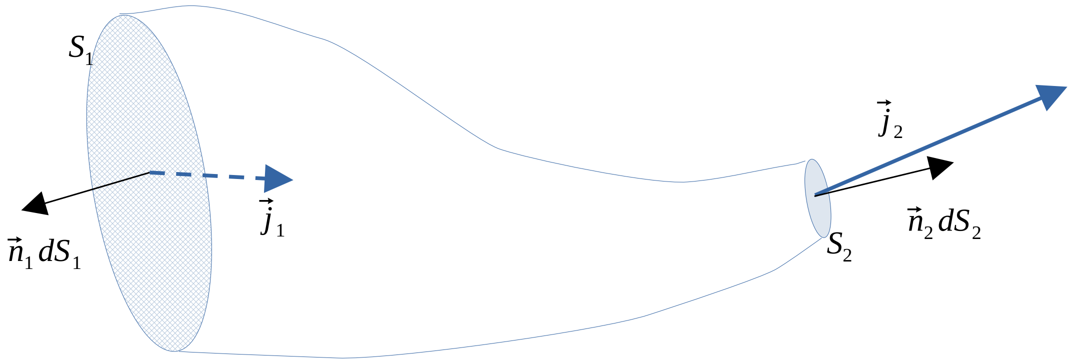
Dinamica dei fluidi

Casi particolari dell'equazione di continuità:

2) fluido in un tubo, con velocità uniformi nella sezione d'ingresso e in quella d'uscita (ossia su tutta la superficie S_1 c'è una velocità, e su tutta la superficie S_2 ce n'è un'altra):

$$\int_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \rho S_1 v_1 - \rho S_2 v_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 \\ S_1 v_1 = S_2 v_2\end{array}}$$



La velocità è inversamente proporzionale alla sezione di passaggio del fluido.

In questi casi ha senso usare la **portata volumetrica** $Q = S\,v$

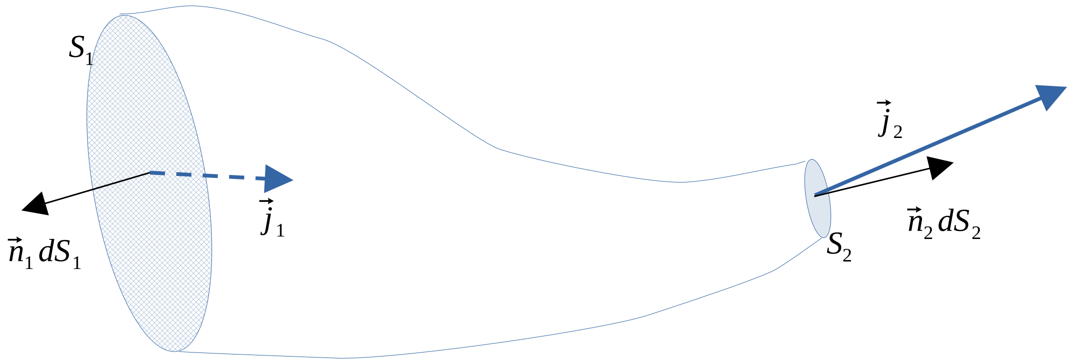
Dinamica dei fluidi

Casi particolari dell'equazione di continuità:

3) fluido in un tubo (densità e velocità generiche)

$$\int_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \int_{S_1} \vec{j}\cdot(-d\vec{S}_1) = \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S}_2$$

$$\boxed{\int_{S} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \dot{m} = cost\,.}$$



La **portata massica**, ossia il flusso di massa per unità di tempo, è sempre invariante **in assenza di pozzi e sorgenti** e indipendente dalla sezione di tubo considerata.