

## Misure ed errori

Ogni misura è soggetta a errori, che possono derivare da una varietà di fonti:

- **Errori sistematici:** Questi errori sono costanti o prevedibili e si verificano a causa di difetti nell'apparecchiatura di misurazione, errori di taratura, condizionamenti nell'osservatore o nel processo di misura stesso.
- **Errori casuali o aleatori:** Questi errori sono imprevedibili e variano casualmente da misura a misura. Possono essere dovuti a fluttuazioni casuali nelle condizioni di misura, precisione limitata degli strumenti di misura o variabilità naturale nella grandezza che viene misurata, disturbi ambientali.
- **Errori di lettura o di interpretazione:** Questi errori si verificano quando l'osservatore interpreta erroneamente i risultati della misura o legge in modo errato il valore mostrato dagli strumenti di misura.

Per ottenere misurazioni accurate, sono necessarie diverse strategie:

- **Calibrazione degli strumenti:** Assicurarsi che gli strumenti di misura siano correttamente tarati e calibrati riduce gli errori sistematici.
- **Ripetibilità e riproducibilità:** Ripetere le misurazioni più volte e confrontare i risultati può aiutare a identificare e quantificare gli errori casuali.
- **Utilizzo di tecniche statistiche:** L'analisi statistica dei dati può aiutare a distinguere tra variazioni casuali e tendenze significative nei risultati delle misure.

## Misure ed errori

Inquadriamo il concetto di errore in un contesto più quantitativo e sistematico

**Scarto:** differenza tra il valore vero e quello misurato

Ogni misura è un nuovo campione in una **distribuzione statistica**

**Incertezza o errore o margine d'errore:** un parametro che definisce la dispersione dei valori che possono essere attribuiti al misurando

**Errori casuali:** dovuti a influenze non controllabili e non unidirezionali (quindi a media nulla)

**Errori sistematici:** deviazioni dal valore vero costanti in entità che mantengono sempre lo stesso segno durante la misura

Attenzione: gli errori sistematici possono a loro volta variare col tempo (es. temperatura dell'ambiente in cui si effettua la misura)

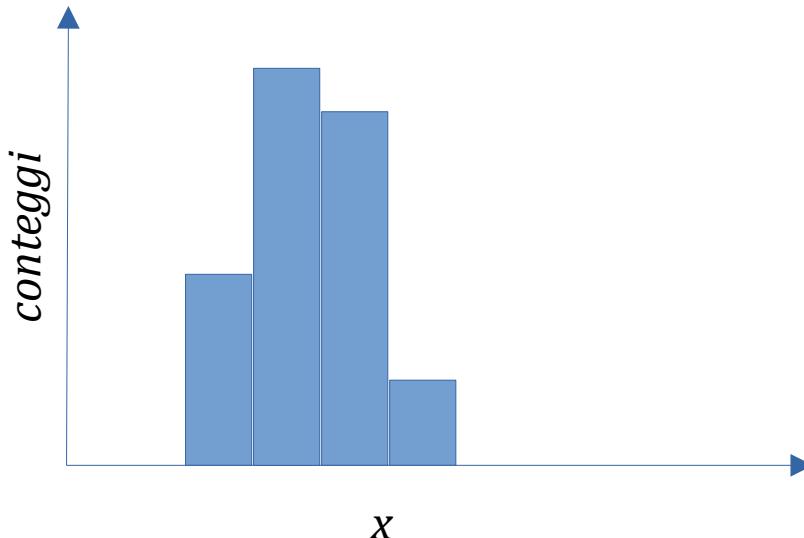
## Misure ed errori

Cause dell'incertezza (“**sbagli**”, **errori sistematici**, **errori statistici/casuali**):

- Incompleta definizione del misurando.
- Campione non rappresentativo, ovvero il campione misurato non rappresenta il misurando definito.
- Errore di lettura di uno strumento.
- Valore inesatto di costanti e altri parametri che intervengono nell'analisi dei dati.
- Imperfetta realizzazione della definizione del misurando.
- Imperfetta conoscenza delle condizioni ambientali di influenza o inadeguata conoscenza degli effetti di tali condizioni
- Valori inesatti dei campioni e dei materiali di riferimento.
- Approssimazioni e assunzioni che intervengono nel metodo e nella procedura di misura.
- Variazioni in osservazioni ripetute del misurando sotto condizioni di misura apparentemente identiche.
- Risoluzione finita o soglia di discriminazione dello strumento.

## Misure ed errori

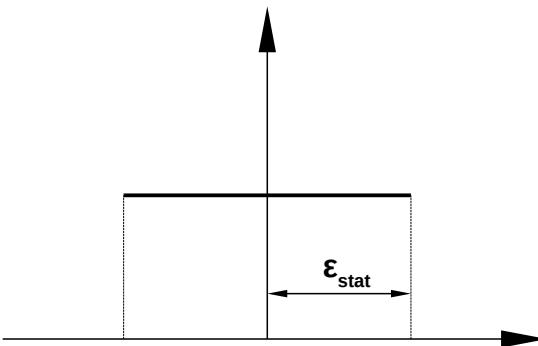
Con misure ripetute possiamo realizzare un **istogramma**:



L'istogramma delle misure può avere un aspetto diverso a seconda della grandezza misurata e dei dettagli del processo di misura

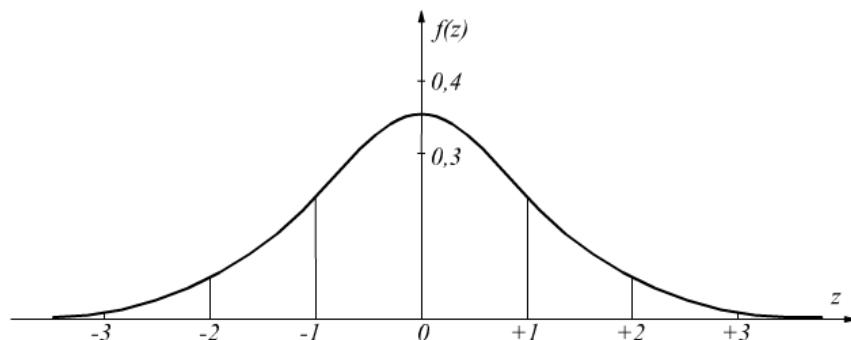
## Misure ed errori

### Distribuzione statistica delle misure



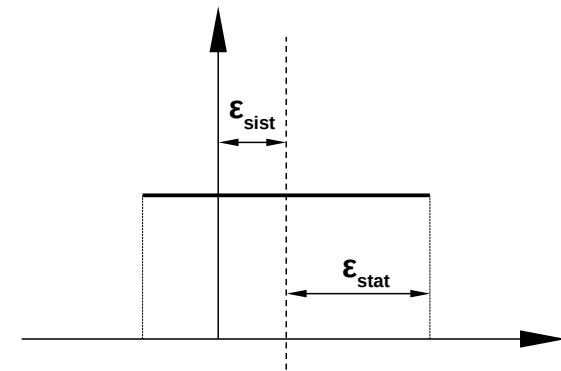
Distribuzione uniforme centrata  
(errore sistematico nullo)

Errori **massimi**



Distribuzione Gaussiana (Normale)  
centrata (errore sistematico nullo)

Errori a 1,2,3  $\sigma$   
Errori al 90% (1.28  $\sigma$ )



Distribuzione uniforme non centrata  
(errore sistematico non nullo)

Errori **massimi**

## Misure ed errori

Ogni misura va accompagnata da un errore

Va chiarito il tipo di errore (massimo, gaussiano, 68%, 90%, 95%, ecc.)

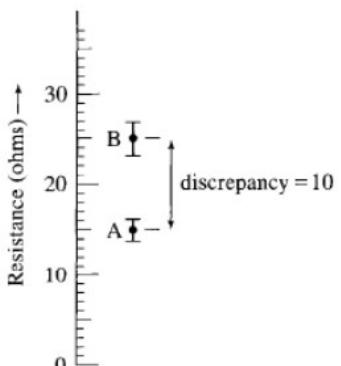
La probabilità non riguarda il valore vero!

**Non ha senso dire “il valore vero sta in quest’intervallo al 90%”!**

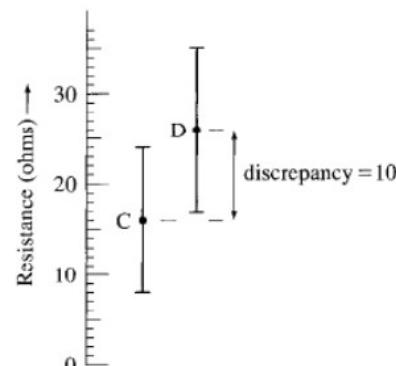
Ha senso dire “con la procedura seguita, nel 90% delle misure la misura non si scosta dal valore vero più dell’errore stimato”

La misura è una variabile casuale, non il misurando!

Due misure diverse possono essere compatibili o incompatibili:



Incompatibili



Compatibili

## Misure ed errori

**Precisione:** legata agli errori casuali - quantifica la ripetibilità di una serie di misure intorno alla media

**Accuratezza:** legata agli errori sistematici - una misura è tanto più accurata quanto più la media delle misure si approssima al valore vero della grandezza

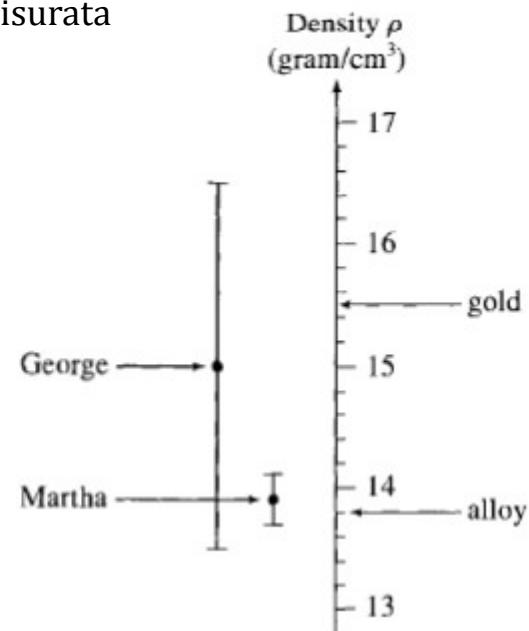
**Stabilità:** misura la variabilità di una serie di misure ripetute

**Risoluzione:** capacità di distinguere valori veramente diversi della grandezza misurata

L'importanza della stima dell'errore: distinguere oro da una lega

$$\rho_{\text{gold}} = 15.5 \text{ gram/cm}^3$$

$$\rho_{\text{alloy}} = 13.8 \text{ gram/cm}^3.$$



## Misure ed errori

Riportare correttamente misure con errore (implicito o esplicito)

**Non c'è misura senza incertezza – non c'è scienza senza stima dell'errore**

Esempio di una misura:  $2.4 \pm 0.3$  s

Regole per scrivere misure ed errori:

- Arrotondamento errore: 1 cifra significativa (due se la cifra significativa è 1, precisione almeno del 10%)
- Se l'ultima cifra è 5, si arrotonda per difetto se la precedente è pari, per eccesso se dispari (equilibrio statistico)
- Arrotondamento misura: cifre significative fino alla cifra dell'errore

*Se manca la stima dell'errore, si assume un'unità sull'ultima cifra*

La notazione scientifica aiuta!

## Misure ed errori

Esempi di scrittura di misure ed errori

$$\mathbf{237.02 \pm 2.43} \rightarrow 237 \pm 2$$

$$\mathbf{2370.2 \pm 24.3} \rightarrow 2370 \pm 20$$

$$\mathbf{2.3702 \pm 0.0243} \rightarrow 2.37 \pm 0.02$$

$$\mathbf{237.02 \pm 1.22} \rightarrow 237.0 \pm 1.2$$

$$\mathbf{2370000 \pm 35200} \rightarrow 2370000 \pm 40000 = (237 \pm 4) \times 10^4$$

Misure ed errori

Quelli visti fin qui sono errori assoluti

Spesso sono interessanti gli errori relativi:

$$\delta_r(x) = \frac{\delta_x}{|x|}$$

Esprimono in maniera sintetica e quantitativa la qualità di una misura

Spesso enunciati in forma percentuale

## Misure ed errori

Errori di variabili definite positive superiori alle misure

Per es. dimensioni: misuriamo  $2 \times 10^{-5} \pm 6 \times 10^{-4} m$

Seguiamo la regola di arrotondamento:

$$2 \times 10^{-5} \pm 6 \times 10^{-4} m =$$

$$(0.2 \pm 6) \times 10^{-4} m =$$

$$0 \pm 6 \times 10^{-4} m$$

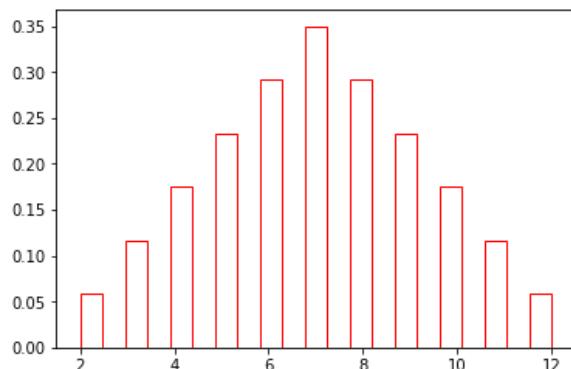
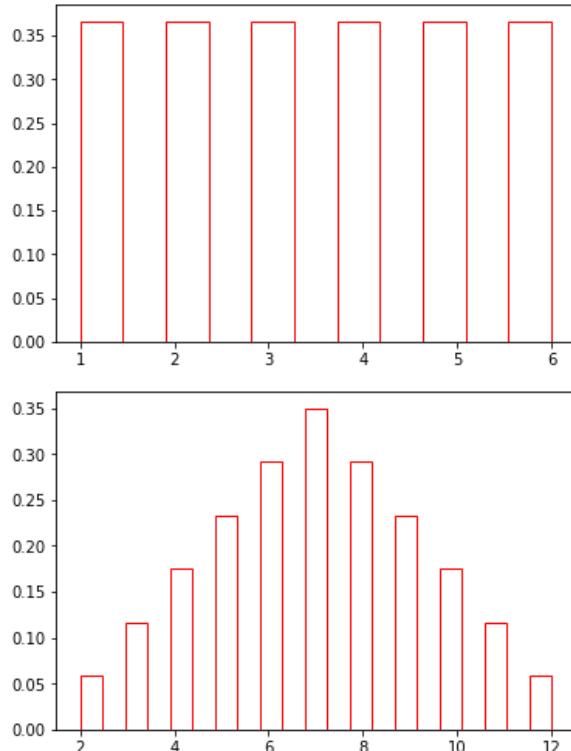
Ma il segno “–“ non ha senso se la variabile è definita positiva: possiamo solo dire che

$\delta(x) > x \Rightarrow x \text{ è compatibile con } 0 \text{ e ha un limite superiore di } \delta$

Misure ed errori

Composizione di errori

Le distribuzioni statistiche contano! Vediamo con un esempio preso dai dadi:



La distribuzione dei risultati di una coppia di dadi è molto diversa dalla distribuzione dei risultati di un solo dado!

## Misure ed errori

Composizione di errori per gli **errori massimi**

Somma e differenza di grandezze: si sommano gli errori

$$\delta(a \pm b) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$(a \pm \delta(a)) + (b \pm \delta(b)) = (a + b) \pm (\delta(a) + \delta(b))$$

$$(a \pm \delta(a)) - (b \pm \delta(b)) = (a - b) \pm (\delta(a) + \delta(b))$$

## Misure ed errori

Composizione di errori per gli **errori massimi**

Prodotto e quoziente di grandezze: **si sommano gli errori relativi**

$$\delta_r(ab) = \delta_r(a) + \delta_r(b)$$

$$\delta_r(a/b) = \delta_r(a) + \delta_r(b)$$

$$\delta_r(ab) = \frac{\delta(ab)}{|ab|} = \frac{\delta(a)}{|a|} + \frac{\delta(b)}{|b|}$$

$$\delta_r(a/b) = \frac{\delta(a/b)}{|a/b|} = \frac{\delta(a)}{|a|} + \frac{\delta(b)}{|b|}$$

$$\delta(ab) = |ab| \delta_r(ab)$$

$$\delta(a/b) = |a/b| \delta_r(a/b)$$

## Misure ed errori

Composizione di errori per gli **errori gaussiani**

Somma e differenza di grandezze: si **sommano gli errori in quadratura**

$$\delta(a \pm b) = \sqrt{\delta^2(a) + \delta^2(b)}$$

$$(a \pm \delta(a)) + (b \pm \delta(b)) = (a + b) \pm \sqrt{\delta^2(a) + \delta^2(b)} = (a + b) \pm (\delta(a) \oplus \delta(b))$$

$$(a \pm \delta(a)) - (b \pm \delta(b)) = (a - b) \pm \sqrt{\delta^2(a) + \delta^2(b)} = (a - b) \pm (\delta(a) \oplus \delta(b))$$

## Misure ed errori

Composizione di errori per gli **errori gaussiani**

Somma e differenza di grandezze: si sommano gli errori in quadratura

$$\delta(a \pm b) = \sqrt{\delta^2(a) + \delta^2(b)}$$

$$(a \pm \delta(a)) + (b \pm \delta(b)) = (a + b) \pm \sqrt{\delta^2(a) + \delta^2(b)} = (a + b) \pm (\delta(a) \oplus \delta(b))$$

$$(a \pm \delta(a)) - (b \pm \delta(b)) = (a - b) \pm \sqrt{\delta^2(a) + \delta^2(b)} = (a - b) \pm (\delta(a) \oplus \delta(b))$$

## Misure ed errori

Composizione di errori (sia per gli **errori massimi** che per **errori gaussiani**)

Valutiamo l'errore sulla media (ossia quanto la media devia dal valore vero)

$x_i, i \in [1, \dots, N]$  con errori  $\delta(x)$  (tutti uguali)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i$$

$$\delta(\bar{x}) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_1^N \delta^2(x)} = \frac{1}{N} \sqrt{N \delta^2(x)} = \frac{\delta(x)}{\sqrt{N}}$$

**Usando la media di misure ripetute l'errore si riduce con la radice quadrata del numero di misure**

Con 100 misure otteniamo un errore sulla media 10 volte più piccolo a parità di strumentazione

## Misure ed errori

### Media di misure con **errori gaussiani**

- Prodotto per scalari       $\delta(kx) = |k| \delta(x)$
- Errore di funzione di una grandezza

$$\delta(f(x)) \Big|_{x=x_0} = \left| \frac{df}{dx}(x_0) \right| \delta(x_0)$$

*...ci torneremo più avanti!*