I corpi rigidi e il momento d’inerzia

L’espressione del momento angolare è:

$$\vec{J}_O = \vec{r}_{O,CM} \times \vec{P} + \vec{J}_{CM}$$

E rispetto al centro di massa:

$$\vec{J}_{CM} = \sum_i \vec{r}\,'_i \times (m_i \vec{v}\,'_i)$$

$$\vec{v}\,'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) - \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'_i$$

$$\vec{J}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}\,'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_i)$$

Si può dimostrare (ma noi non lo faremo) che

$$\vec{r}\,'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_i) = r\,'^2_i \vec{\omega} - (\vec{r}\,'_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}$$

I corpi rigidi e il momento d'inerzia

Pertanto abbiamo: $$\vec{J}_{CM}=\sum_i m_i \vec{r}\,'_i \times (\vec{\omega}\times \vec{r}\,'_i)=\sum_i m_i r'^2_i \vec{\omega}-\sum_i m_i (\vec{r}\,'_i \cdot \vec{\omega})\vec{r}\,'_i$$

Si può mostrare che esistono sempre tre assi ortogonali rispetto ai quali il secondo termine si annulla; se un corpo rigido è dotato di simmetrie, questi assi sono gli assi di simmetria del corpo. Se la velocità angolare è allineata con uno di questi assi, si ha:

$$\vec{J}_{CM}=\sum_i m_i r'^2_i \vec{\omega}=I_{\hat{\omega}}\vec{\omega}$$

La grandezza I_ω è detta momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione specificato da **ω**. Solo in questi casi, il vettore momento angolare è parallelo ad **ω**. In generale, valgono relazioni più complesse.

Per il momento angolare rispetto ad un polo *O* qualsiasi si ha:

$$\vec{J}_O=\vec{r}_{O,CM}\times\vec{P}+\vec{J}_{CM}=\vec{r}_{O,CM}\times\vec{P}+I_{\hat{\omega}}\vec{\omega}$$

I corpi rigidi e il momento d'inerzia

<u>Sotto l'ipotesi che l'asse di rotazione sia fisso</u> (in generale non è vero) possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt}=\left(\frac{d}{dt}\vec{r}_{O,CM}\right)\times\vec{P}+\vec{r}_{O,CM}\times\frac{d\vec{P}}{dt}+\frac{d}{dt}\vec{J}_{CM}=\vec{r}_{O,CM}\times\frac{d\vec{P}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(I_{\hat{\omega}}\vec{\omega}\right)=\vec{r}_{O,CM}\times\sum_i\left(\vec{F}_{\mathrm{est},i}\right)+\frac{d}{dt}\left(I_{\hat{\omega}}\vec{\omega}\right)$$

(il primo termine si annulla perché la velocità è parallela alla quantità di moto).

Per un sistema isolato, nel centro di massa, abbiamo

$$\vec{0}=\sum_i\vec{M}_{\mathrm{est},i}=\frac{d}{dt}\left(I_{\hat{\omega}}\vec{\omega}\right)=\frac{dI_{\hat{\omega}}}{dt}\vec{\omega}+I_{\hat{\omega}}\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Se una ballerina comincia un giro (piroetta) con le braccia aperte e poi le chiude, la velocità angolare aumenterà perché il momento d'inerzia sta diminuendo e il prodotto deve rimanere costante

I corpi rigidi e il momento d’inerzia

Nel sistema del centro di massa, con momento d’inerzia costante e se l’asse di rotazione non varia, possiamo scrivere:

$$\sum_i \vec{M}_{\mathrm{est},i} = I_{\hat{\omega}} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Questo è uno schema di applicazione piuttosto comune.

Se proiettiamo lungo la direzione di **ω** abbiamo:

$$\sum_i \vec{M}_{\mathrm{est},i} \cdot \hat{\omega} = I_{\hat{\omega}} \frac{d\omega}{dt} = I_{\hat{\omega}} \alpha$$

I corpi rigidi e l'energia

Torniamo al teorema di König sull'energia cinetica

$$K=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2+\sum_i\frac{1}{2}m_i v'^2_i=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2+\sum_i\frac{1}{2}m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_i)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_i)=$$
$$=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2+\sum_i\frac{1}{2}m_i(\omega r'_{i\perp})^2=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2+\frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i r'^2_{i\perp}=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2+\frac{1}{2}I_{\hat{\omega}}\omega^2$$

Per un corpo rigido rotante attorno ad un asse fisso, l'energia cinetica assume la forma

$$\boxed{K=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2+\frac{1}{2}I_{\hat{\omega}}\omega^2}$$

L'energia cinetica di un corpo rigido si compone di un termine traslazionale (del centro di massa) e un termine rotazionale (intorno al centro di massa)

Assi di rotazione non passanti per il centro di massa – Teorema di Huygens-Steiner

Supponiamo che l’asse di rotazione sia fisso, ma non passante per il centro di massa

Il disco in figura potrebbe ruotare intorno all’asse *a’* anziché intorno all’asse *a*

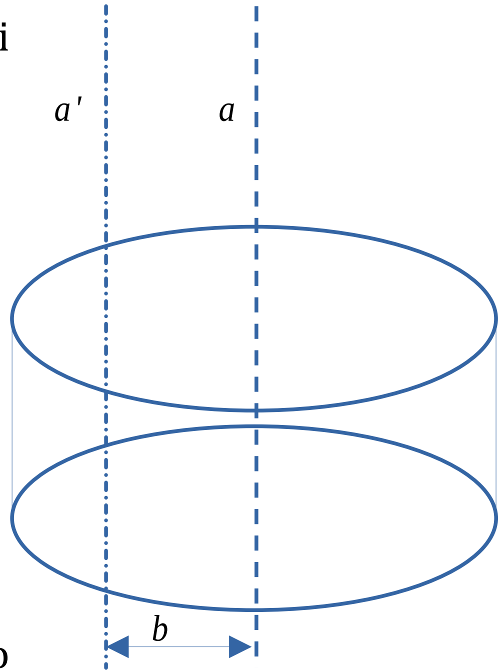
Indichiamo con *b* la distanza tra gli assi

$$K=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2+\frac{1}{2}I_{\hat{\omega}}\omega^2=\frac{1}{2}M(\omega b)^2+\frac{1}{2}I_{\hat{\omega}}\omega^2=$$

$$=\frac{1}{2}Mb^2\omega^2+\frac{1}{2}I_{\hat{\omega}}\omega^2=\frac{1}{2}I'_{\hat{\omega}}\omega^2$$

$$I'_{\hat{\omega}}=I_{\hat{\omega}}+Mb^2$$

Il teorema di Huygens-Steiner, o degli assi paralleli, mostra che il momento d’inerzia rispetto ad un asse non passante per il centro di massa si ottiene aggiungendo al momento d’inerzia centrale il momento d’inerzia del centro di massa rispetto all’asse

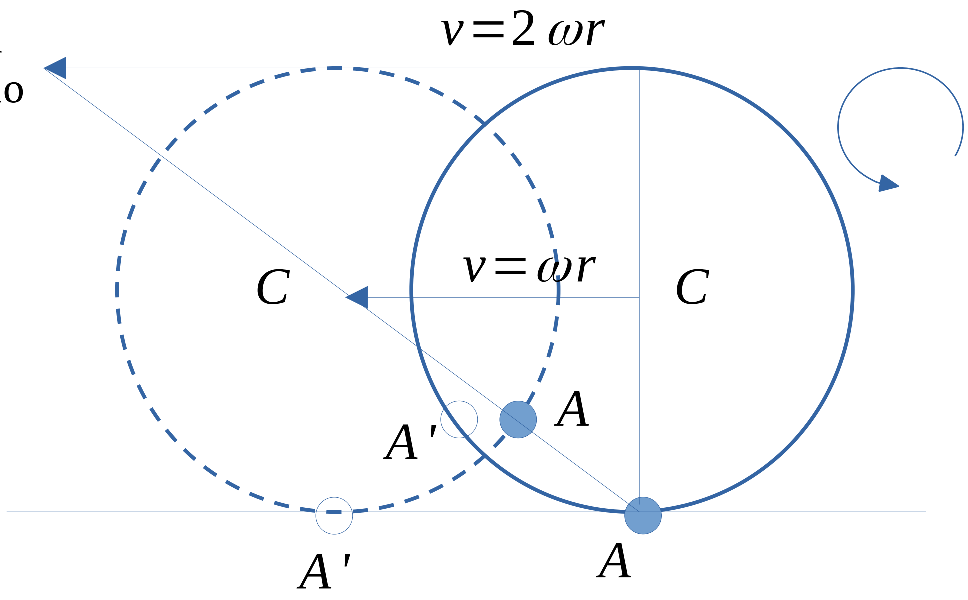


Rotolamento senza strisciamento

Un disco (o ruota) appoggiato su un piano rotola senza strisciare se il punto di contatto è istantaneamente fermo.

Se questo è vero, l'asse di rotazione del corpo rigido passa per il punto di contatto, e quindi tutto il corpo sta ruotando intorno a quel punto

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) + \vec{v}_{CM}$$
$$\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_A)$$
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_A) = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A)$$



Richiami ed argomenti correlati

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

I sistemi di punti materiali

I sistemi di punti materiali sono insiemi di punti materiali che hanno interazioni mutue più o meno forti. Un corpo esteso si studia come un sistema di punti materiali.

I corpi in vari stati di aggregazione possono essere studiati come sistemi di punti materiali. Tuttavia il punto materiale non corrisponde ad un'entità fisica ben precisa (per esempio l'atomo o la particella). È semplicemente la più piccola unità di materia del corpo che non abbia altro dettaglio rilevante per la descrizione del fenomeno che la propria massa. Così, in un gas monoatomico, gli atomi possono essere trattati come punti materiali per alcuni scopi. In un corpo rigido, potremmo considerare una porzione di materia più grande.

La dinamica dei sistemi di punti materiali non richiede nuovi principi fisici, ma si appoggia sui tre principi della dinamica già esposti.

I sistemi di punti materiali

Cominciamo con il definire il **centro di massa** di un sistema di punti materiali

$$\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i ; \qquad M=\sum_i m_i \text{ è la massa del sistema}$$

Vediamo come si muove il centro di massa di un sistema:

$$\vec{v}_{CM}=\frac{d}{dt}\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i ; \qquad \vec{P}=M\vec{v}_{CM}=\sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{a}_{CM}=\frac{d}{dt}\vec{v}_{CM}=\frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} ; \qquad \frac{d\vec{P}}{dt}=M\vec{a}_{CM}=\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Il centro di massa si muove come un punto materiale che ha la massa del sistema e la sua quantità di moto

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali, soggetti a forze esterne al sistema e a forze interne.

Su ciascun punto *i* avremo:

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\text{int},i,j} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$definiamo:$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} = \vec{F}_{est} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\text{int},i,j} = \vec{0} : \text{infatti } \vec{F}_{\text{int},i,j} = -\vec{F}_{\text{int},j,i}$$

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Sommiamo le equazioni per tutti i punti materiali

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \sum_i \frac{d\,\vec{p}_i}{dt}$$

$$definiamo:$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{ quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} = \vec{F}_{est} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \vec{0} : \text{ infatti } \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = -\vec{F}_{\mathrm{int},j,i}$$

Otteniamo:

$$\boxed{\vec{F}_{est} = \frac{d\,\vec{P}}{dt}}$$

La derivata della quantità di moto totale del sistema di punti materiali è uguale alla risultante di tutte le forze esterne al sistema.

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Elaboriamo sulla Prima Equazione Cardinale

$$\vec{F}_{est} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

Osservazioni:

1) Il sistema di punti materiali si muove come un punto materiale con tutta la massa concentrata nel centro di massa e soggetto solo alle forze esterne. Questo spiega perché possiamo modellare sistemi estesi come punti materiali quando non ci interessano i particolari del moto delle singole parti.

2) Le forze interne tra i vari punti del sistema non influenzano direttamente il moto del sistema del centro di massa, ma le forze esterne potrebbero dipendere dalla posizione e/o velocità dei singoli punti materiali.

La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo il momento angolare dei punti materiali rispetto ad un polo O e la loro somma

$$\vec{J}_O=\sum_i m_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{v}_i=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times(m_i\vec{v}_i)=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{p}_i$$

Riferiamo il momento angolare rispetto al centro di massa, introducendo la posizione di quest'ultimo rispetto al polo O:

$$\vec{J}_O=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{p}_i=\sum_i (\vec{r}_{O,CM}+\vec{r}_{CM,i})\times\vec{p}_i=\sum_i \vec{r}_{O,CM}\times\vec{p}_i+\sum_i \vec{r}_{CM,i}\times\vec{p}_i=\vec{r}_{O,CM}\times\sum_i \vec{p}_i+\vec{J}_{CM}=$$
$$=\vec{r}_{O,CM}\times\vec{P}+\vec{J}_{CM}$$

Teorema di König per il momento angolare: **Il momento angolare rispetto ad un polo O è pari alla somma del momento angolare calcolato intorno al centro di massa e al momento angolare del sistema considerato concentrato nel sistema del centro di massa con la sua quantità di moto complessiva.**

La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Adesso valutiamo la variazione del momento angolare:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_{O,i}\times\vec{p}_i)=\sum_i \frac{d\vec{r}_{O,i}}{dt}\times\vec{p}_i+\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i \vec{v}_i\times\vec{p}_i+\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Il primo termine è nullo perché la velocità di ciascun punto materiale è parallela alla sua quantità di moto

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt}=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\left(\sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h}+\sum_{j\neq i} \vec{F}_{\text{int},i,j}\right)=\sum_i\sum_h \vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\text{est},i,h}+\sum_i\sum_{j\neq i} \vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\text{int},i,j}=$$

$$=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\text{est},i}+\vec{0}$$

Il secondo termine è nullo per il terzo principio della dinamica: $\vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\text{int},i,j}=-\vec{r}_{O,j}\times\vec{F}_{\text{int},j,i}$
I contributi delle forze interne si annullano a coppie, infatti sono coppie di braccio nullo

La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Otteniamo la seconda equazione cardinale:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt}=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{F}_{\text{est},i}=\sum_i \vec{M}_{\text{est},i}$$

La derivata del momento angolare di un sistema di punti materiali è pari alla somma dei momenti delle sole forze esterne, calcolati tenendo conto dei loro effettivi punti di applicazione

Il momento di una forza ha dimensioni **$[M][L^2][T^{-2}]$** e si misura in *Nm*

Il momento angolare di un punto materiale o di un sistema ha dimensioni **$[M][L^2][T^{-1}]$** e si misura in *kg m²/s*

Per un punto materiale in moto circolare intorno ad un asse, il momento angolare intorno al centro di rotazione è:

$$\vec{J}_{O,P}=m\vec{r}_{O,P}\times\vec{v}=m\vec{r}_{O,P}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{O,P})=mr^2_{O,P}\vec{\omega}=I_{O,P}\vec{\omega}$$

$I_{O,P}$ è il momento d'inerzia del punto P rispetto all'asse O

La dinamica dei sistemi di punti materiali

Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali forniscono 6 equazioni scalari

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \sum_i \vec{F}_{\mathrm{est},i} \\ \frac{d\vec{J}_O}{dt} &= \sum_i \vec{M}_{\mathrm{est},i} \end{aligned}}$$

Esse sono linearmente indipendenti se il sistema comprende almeno due punti materiali.

Per sistemi isolati abbiamo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt} = \vec{0}$$

ossia quantità di moto e momento angolare totale di un sistema isolato di punti materiali si conservano

Il moto dei razzi

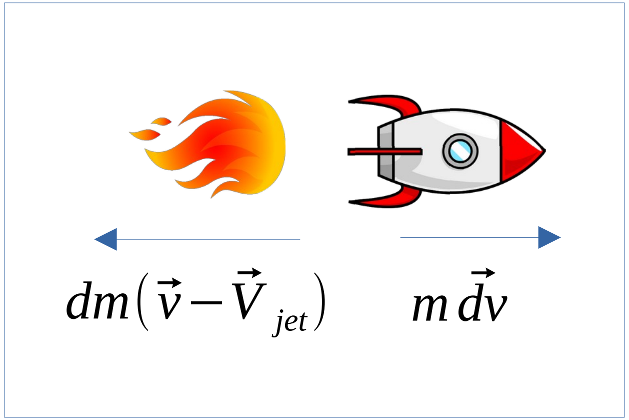
I razzi sono sistemi isolati. Si muovono spingendo indietro parte della propria massa, e ricevono, per il III principio della dinamica, una spinta in verso opposto.

Consideriamo un razzo che espelle una quantità di propellente *dm* con velocità V_{jet}.

$$\vec{P} = m\vec{v}\,; \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}\,; \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\left(\vec{v} - \vec{V}_{jet}\right) = \vec{0}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{V}_{jet} = 0 \;\Rightarrow\; m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm}{dt}\vec{V}_{jet} \qquad \text{proiettiamo su } x$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{dm}{dt}V_{jet} \;\Rightarrow\; \frac{dm}{m} = -\frac{dv_x}{V_{jet}} \;\Rightarrow\; \int_{m_i}^{m_f}\frac{dm}{m} = -\int_{v_i}^{v_f}\frac{1}{V_{jet}}\,dv$$



$$\log\frac{m_f}{m_i} = \frac{\left(v_i - v_f\right)}{V_{jet}}\,; \;\Rightarrow\; v_f = v_i + V_{jet}\log\frac{m_i}{m_f}$$

Il termine di massa in logaritmo non sarà mai molto grande
È essenziale che sia grande la velocità del getto

La statica dei sistemi di punti materiali

Le equazioni cardinali della dinamica nel caso statico diventano:

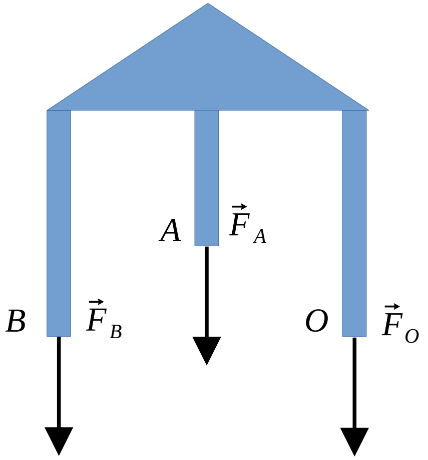
$$\sum_i \vec{F}_{\text{est},i} = \vec{0}$$
$$\sum_i \vec{M}_{\text{est},i} = \vec{0}$$

Esse sono linearmente indipendenti se il sistema comprende almeno due punti materiali.

Se le equazioni sono in numero sufficiente a determinare tutte le forze, si dice che il sistema è *isostatico*.

Se le equazioni sono insufficienti a determinare tutte le forze, si dice che il sistema è *iperstatico*.

La statica dei sistemi di punti materiali



Esempio di problema *isostatico*: determinare le forze agenti su ciascun piede di un tavolino a 3 gambe

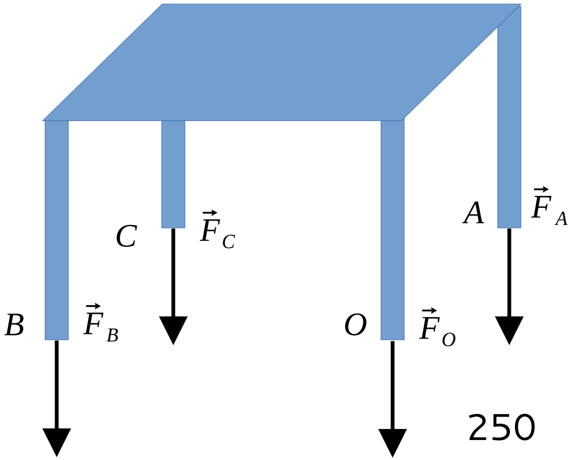
$$F_{zO}+F_{zA}+F_{zB}=-Mg$$
$$(\vec{r}_{O,A}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{O,B}\times\vec{F}_B)\cdot\hat{i}=0$$
$$(\vec{r}_{O,A}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{O,B}\times\vec{F}_B)\cdot\hat{j}=0$$

Le altre equazioni sono identità 0 = 0

Esempio di problema *iperstatico*: determinare le forze agenti su ciascun piede di un tavolino a 4 gambe

$$F_{zO}+F_{zA}+F_{zB}+F_{zC}=-Mg$$
$$(\vec{r}_{O,A}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{O,B}\times\vec{F}_B+\vec{r}_{O,C}\times\vec{F}_C)\cdot\hat{i}=0$$
$$(\vec{r}_{O,A}\times\vec{F}_A+\vec{r}_{O,B}\times\vec{F}_B+\vec{r}_{O,C}\times\vec{F}_C)\cdot\hat{j}=0$$

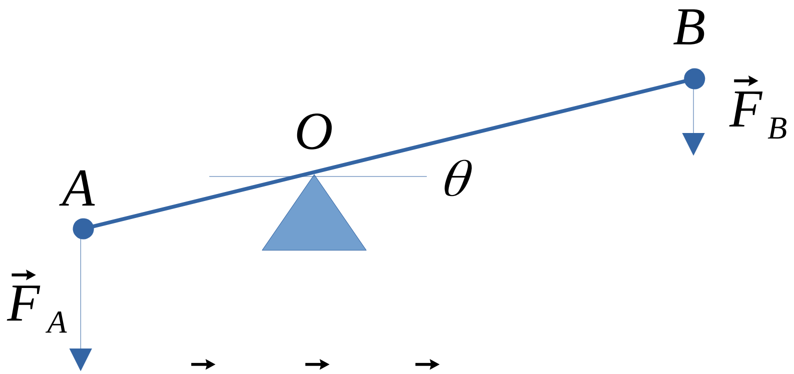
Le altre equazioni sono identità 0 = 0



Vanno specificate altre condizioni, per esempio con deformazioni elastiche

La statica dei sistemi di punti materiali

Esempio di applicazione: le leve



$$\vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{0}$$
$$\vec{M}_A \cdot \hat{k} + \vec{M}_B \cdot \hat{k} = 0$$
$$r_A F_A \cos\theta - r_B F_B \cos\theta = 0$$
$$r_A F_A = r_B F_B$$

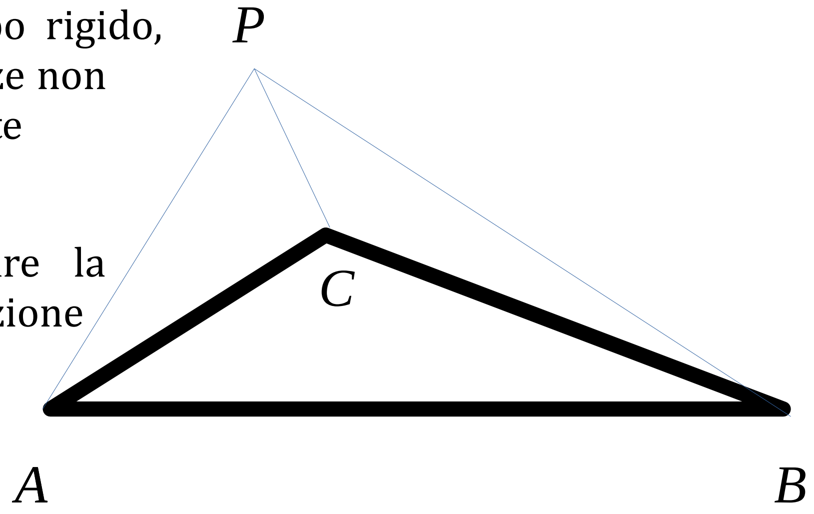
I corpi rigidi

I corpi rigidi

Un sistema di punti materiali si definisce **corpo rigido** se tutti i suoi punti rispettano il **vincolo di rigidità**, ossia l'invarianza delle distanze mutue.

$$\frac{d\left(\|\vec{r}_i-\vec{r}_j\|\right)}{dt}=0 \quad \forall\, i\neq j$$

Se conosciamo le posizioni di tre punti materiali di un corpo rigido, conosciamo le posizioni di tutti i punti. Infatti, poiché le distanze non possono variare, la posizione di ciascun punto P è univocamente determinata dall'indeformabilità dei triangoli ABP, BCP, CAP.



Due punti soltanto (AB) non basterebbero ad individuare la posizione di tutti gli altri perché rimarrebbe libera la rotazione attorno alla retta dei due punti.

I corpi rigidi

Le coordinate dei tre punti corrispondono a 9 parametri in tutto.

Abbiamo però tre equazioni di vincolo:

$$\|\vec{r}_A-\vec{r}_B\|=cost_{AB}$$
$$\|\vec{r}_B-\vec{r}_C\|=cost_{BC}$$
$$\|\vec{r}_C-\vec{r}_A\|=cost_{CA}$$

Quindi il numero dei parametri liberi è 9-3=**6**.

Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali sono 2 equazioni vettoriali, ossia **6** equazioni scalari.

Il moto di un corpo rigido è completamente determinato a partire dalle equazioni cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali.

I corpi rigidi

Consideriamo la condizione di vincolo di rigidità: $$\frac{d\left(\|\vec{r}_i-\vec{r}_j\|\right)}{dt}=0 \quad \forall\, i\neq j$$

Equivalentemente possiamo scrivere

$$\frac{d\|\vec{r}_i-\vec{r}_j\|^2}{dt}=0 \quad \forall\, i\neq j$$

$$\frac{d\|\vec{r}_i-\vec{r}_j\|^2}{dt}=\frac{d\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)}{dt}=2\frac{d\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)}{dt}\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)=2\left(\vec{v}_i-\vec{v}_j\right)\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)=0$$

La differenza delle velocità di due punti è sempre ortogonale al vettore della loro posizione relativa. Pertanto deve esistere un vettore $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ che consenta di scrivere:

$$\left(\vec{v}_i-\vec{v}_j\right)=\vec{\omega}_{ij}\times\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)=0$$

I corpi rigidi

Possono esistere diverse velocità angolari in uno stesso istante?

Supponiamo di avere tre punti materiali e diverse velocità angolari

$$(\vec{v}_a-\vec{v}_b)=\vec{\omega}_{ab}\times(\vec{r}_a-\vec{r}_b)=0$$
$$(\vec{v}_a-\vec{v}_c)=\vec{\omega}_{ac}\times(\vec{r}_a-\vec{r}_c)=0$$
$$\Rightarrow$$
$$(\vec{v}_b-\vec{v}_c)=\vec{\omega}_{ac}\times(\vec{r}_a-\vec{r}_c)-\vec{\omega}_{ab}\times(\vec{r}_a-\vec{r}_b)=\vec{\omega}_{bc}\times(\vec{r}_b-\vec{r}_c)$$

dalla regola del prodotto misto:

$$\vec{\omega}_{bc}\times(\vec{r}_b-\vec{r}_c)\cdot(\vec{r}_b-\vec{r}_c)=0$$
$$\vec{\omega}_{ac}\times(\vec{r}_a-\vec{r}_c)\cdot(\vec{r}_b-\vec{r}_c)=\vec{\omega}_{ab}\times(\vec{r}_a-\vec{r}_b)\cdot(\vec{r}_b-\vec{r}_c)$$

I corpi rigidi

Osserviamo che, facendo variare a piacere i tre punti scelti, possiamo sondare tutte le componenti dei due vettori velocità angolare; l'unica possibilità è che siano sempre uguali.

Per esempio: $\vec{r}_c=\vec{0};\vec{r}_a=\hat{i};\vec{r}_b=\hat{j} \Rightarrow \omega_{ac,z}=\vec{\omega}_{ac}\times\hat{i}\cdot\hat{j}=\vec{\omega}_{ab}\times\hat{i}\cdot\hat{j}=\omega_{ab,z}$

In definitiva, la velocità di un qualsiasi punto materiale di un corpo rigido si può scrivere

$$\vec{v}_i=\vec{v}_j+\vec{\omega}\times(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$$

In particolare, rispetto al centro di massa, possiamo scrivere:

$$\vec{v}_i=\vec{v}_{CM}+\vec{\omega}\times(\vec{r}_i-\vec{r}_{CM})$$

L'**atto di moto di un corpo rigido è sempre rototraslatorio**