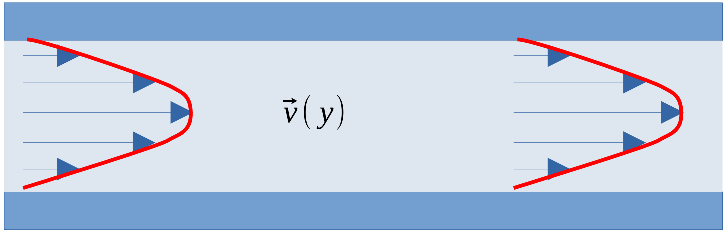
Dinamica dei fluidi

Moto stazionario: si parla di moto stazionario quando in tutti i punti dello spazio occupato da un liquido, le derivate parziali rispetto al tempo della velocità, corrente e densità si annullano.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=\vec{0};\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=\vec{0};\quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}=\vec{0}$$

Questo **non significa affatto** che si sia in quiete!

$\vec{v}(x,y,z,t)=cost.$

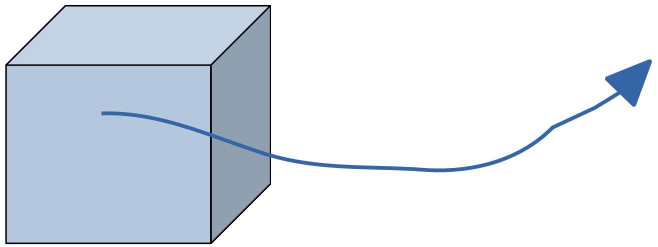


$\vec{v}(x,y,z,t)=\vec{v}(y)$

Dinamica dei fluidi

Ritorniamo alla Prima Equazione Cardinale della Dinamica dei sistemi scritta sul nostro volumetto

$$d\vec{F}_S + d\vec{F}_V = dm\,\vec{a}$$



Qual è il modo corretto di scrivere il secondo termine?

Evidentemente, non può essere semplicemente

$$dm\,\vec{a} \rightarrow dm\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

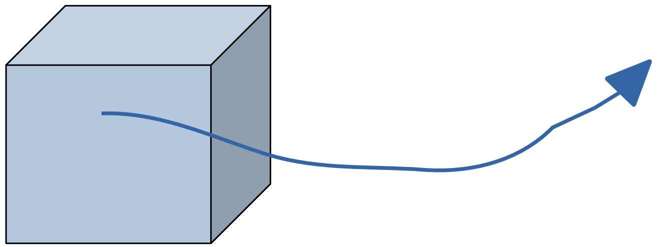
Perché avremmo accelerazioni tutte nulle. Dobbiamo tener presente che la velocità in questo volumetto varia perché arriva altro fluido dalle pareti, con la sua diversa velocità.

Dinamica dei fluidi

Ritorniamo alla Prima Equazione Cardinale della Dinamica dei sistemi scritta sul nostro volumetto

$$d\vec{F}_S + d\vec{F}_V = dm\,\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$
$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z$$



Questa viene detta **derivata materiale** o **derivata sostanziale** o **derivata convettiva**. I termini aggiuntivi sono detti **convettivi** perché sono “trasportati” dalla velocità.

Dinamica dei fluidi

Da $\quad d\vec{F}_S + d\vec{F}_V = dm\,\vec{a}$ $\quad$ otteniamo:

$$dF_{Sx} + dF_{Vx} = \rho\, dx\, dy\, dz \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right)$$

$$dF_{Sy} + dF_{Vy} = \rho\, dx\, dy\, dz \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right)$$

$$dF_{Sz} + dF_{Vy} = \rho\, dx\, dy\, dz \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right)$$

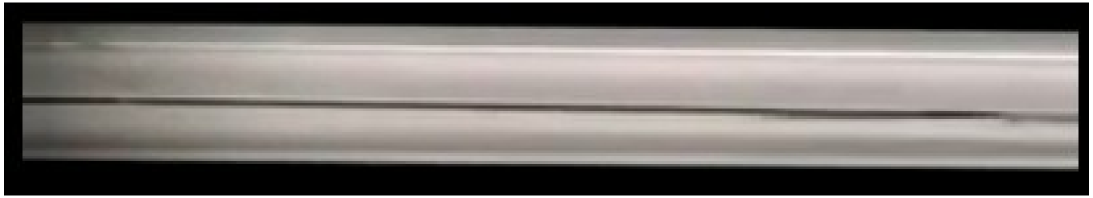
Specificando le forze di superficie e di volume, si ottengono le Equazioni di Navier-Stokes, che vanno risolte insieme all'equazione di continuità. Gli sforzi dovuti a **pressione** e **viscosità** sono inclusi nelle forze di **superficie**. Le forze del tipo "peso" e apparenti sono incluse tra le forze di volume. La pressione compare in un gradiente, come nel caso statico. La viscosità dà diversi contributi, della forma:

$$dF_{viscosità,\,x} \rightarrow \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right);\ \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right);\ \eta \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Dinamica dei fluidi

I termini di pressione e viscosità sono complicati ma comunque lineari e non rappresenterebbero un problema.

Invece, a causa dei termini convettivi, queste equazioni sono altamente non lineari e sono soggette ad instabilità: la soluzione può cambiare molto, nel tempo e nello spazio, per piccole variazioni delle condizioni iniziali e/o al contorno. Inoltre, due volumetti che si susseguono nello stesso punto finiscono per seguire traiettorie diverse.



Quando il moto si svolge per traiettorie ripetibili, che non si incrociano, si parla di *moto laminare*.

Quando le traiettorie sono continuamente mutevoli, si parla di *moto turbolento*. Caratteristica del moto turbolento è la vorticità, ossia presenza di vortici.

Dinamica dei fluidi

Anche nel caso di moto stazionario, le equazioni di Navier-Stokes sono troppo complicate da risolvere tranne in casi semplicissimi.

Per applicazioni pratiche, si fa uso di metodi di simulazione numerica (Computational Fluid Dynamics – CFD)

Tuttavia la nonlinearità e l'instabilità rendono non banale anche l'approccio di calcolo numerico.

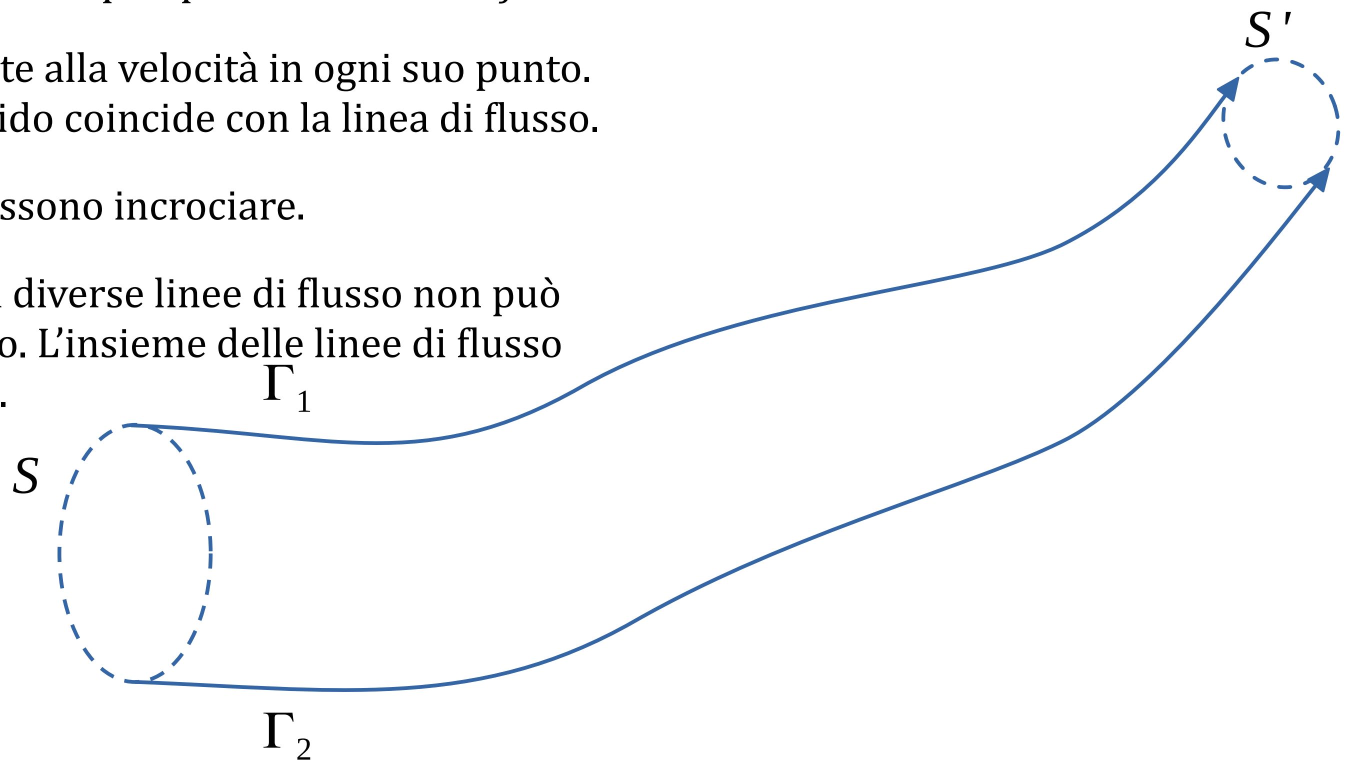
Dinamica dei fluidi

Nel caso di moto stazionario laminare, si può parlare di *linee di flusso*.

Una linea di flusso è sempre tangente alla velocità in ogni suo punto.
La traiettoria di un volumetto di fluido coincide con la linea di flusso.

Due linee di flusso (Γ_1, Γ_2) non si possono incrociare.

Una linea chiusa (S, S') che abbracci diverse linee di flusso non può essere essa stessa una linea di flusso. L'insieme delle linee di flusso toccate da essa si dice *tubo di flusso*.



Richiami ed argomenti correlati

Dinamica dei fluidi

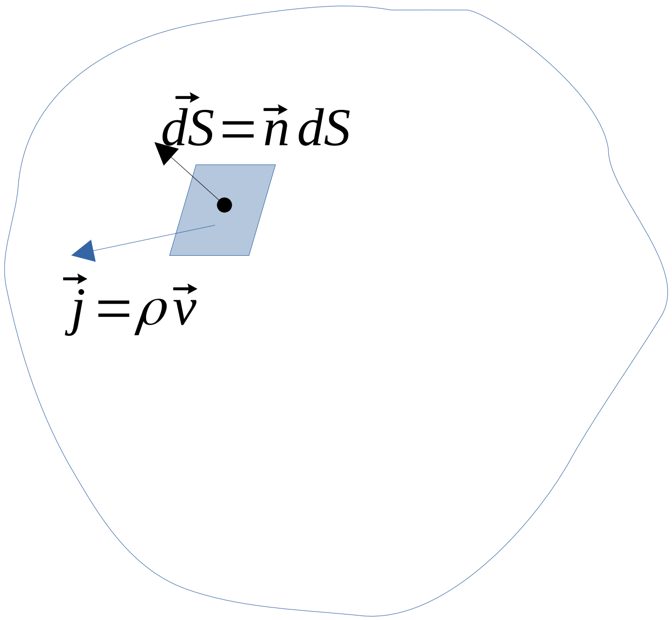
La dinamica dei fluidi richiede strumenti matematici adatti e adeguatamente potenti, anche per descrivere casi semplici.

Questa immagine mostra chiaramente che la schematizzazione di punto materiale, con le sue semplificazioni, non può essere usata per problemi che coinvolgono liquidi.

Dinamica dei fluidi

Innanzitutto, introduciamo il concetto di **equazioni di bilancio**. Nella maggior parte dei casi, i fluidi si muovono in tubi o canalizzazioni che sono solidali all'osservatore. Non seguiamo il movimento di una particella di fluido, ma piuttosto siamo interessati a fare bilanci tra ciò che entra all'interno di un *volume di controllo,* delimitato da una *superficie di controllo*, e ciò che ne esce.

In ogni punto della superficie di controllo, consideriamo la normale **uscente** dal volume.



La densità è tale che la massa totale contenuta nel volume di controllo si ottiene come:

$$m = \int_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Introduciamo la **densità di corrente:**

$$\vec{j}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, \vec{v}(x, y, z)$$

Dinamica dei fluidi

Il flusso di corrente uscente in un elementino *dS* sarà, ovviamente: $d\varphi = \vec{j} \cdot \vec{dS} = \vec{j} \cdot \hat{n}\, dS$

Se il flusso è entrante, il prodotto scalare assumerà segno negativo.

E per il flusso complessivo uscente avremo $\Phi = \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n}\, dS$

Possiamo scrivere l'**equazione di continuità in forma integrale**, che esprime la **conservazione della massa**:

$$\frac{dm}{dt} = -\Phi$$

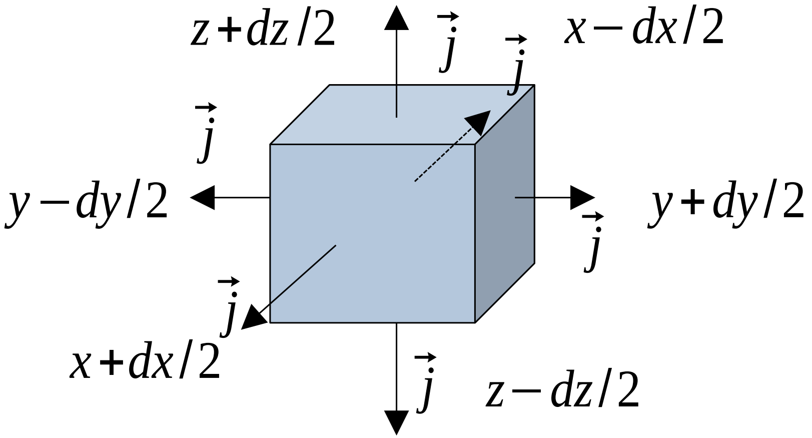
$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\, dx\, dy\, dz + \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0 \Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz + \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$

Il flusso uscente dalla superficie di controllo è uguale e opposto alla variazione della massa contenuta nel volume di controllo.

Dinamica dei fluidi

Possiamo ottenere l'equazione di continuità anche in forma differenziale, considerando un elementino di volume:

$$j_x(x+dx/2,y,z)\,dy\,dz - j_x(x-dx/2,y,z)\,dy\,dz +$$
$$+ j_y(x,y+dy/2,z)\,dz\,dx - j_y(x,y-dy/2,z)\,dz\,dx +$$
$$+ j_z(x,y,z+dz/2)\,dx\,dy - j_z(x,y,z-dz/2)\,dx\,dy =$$
$$+\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = 0$$

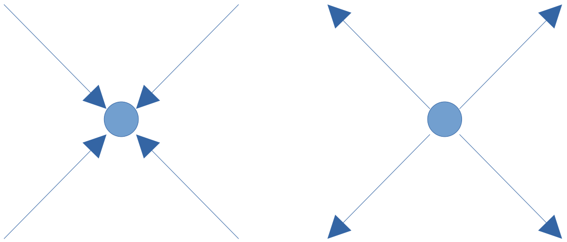


$$\frac{\partial j_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial j_y}{\partial y}\,dz\,dx\,dy + \frac{\partial j_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\end{gathered}}$$

Equazione di continuità in forma differenziale

Dinamica dei fluidi



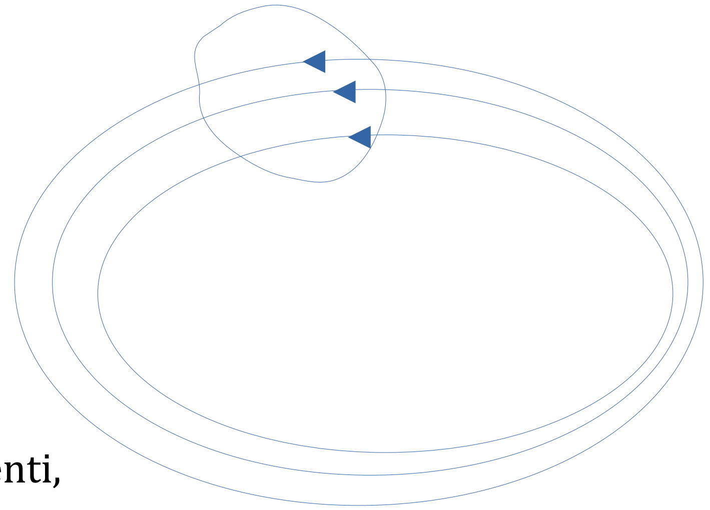
pozzo *sorgente*

Casi particolari dell'equazione di continuità:

1) fluido incomprimibile (~liquido)

$$\rho = cost. \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial j_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial j_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial j_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \mathrm{div}\, \vec{v} = 0$$



Se non vi sono né pozzi né sorgenti, le linee di flusso in un liquido sono chiuse.

Se in un punto c'è un pozzo o una sorgente, alcune linee di flusso possono spuntare da quel punto o terminarvi. In assenza di pozzi e sorgenti, nessuna linea può terminare o iniziare, quindi devono essere tutte chiuse.

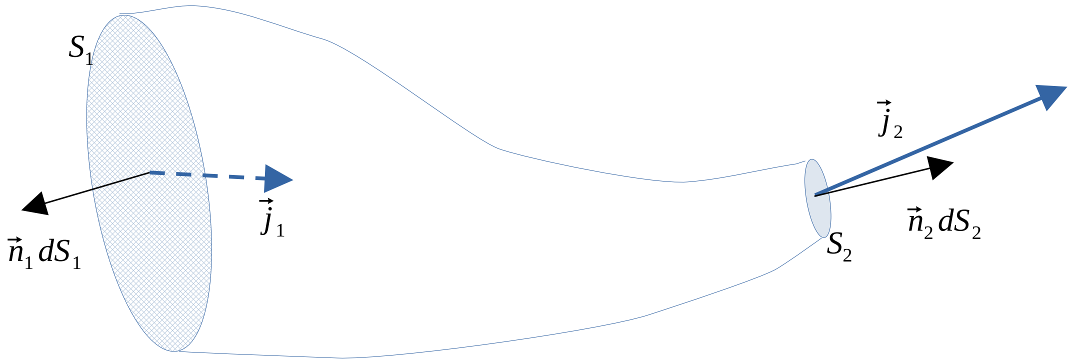
Dinamica dei fluidi

Casi particolari dell'equazione di continuità:

2) fluido in un tubo, con velocità uniformi nella sezione d'ingresso e in quella d'uscita (ossia su tutta la superficie S_1 c'è una velocità, e su tutta la superficie S_2 ce n'è un'altra):

$$\int_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \rho S_1 v_1 - \rho S_2 v_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 \\ S_1 v_1 = S_2 v_2\end{array}}$$



La velocità è inversamente proporzionale alla sezione di passaggio del fluido.

In questi casi ha senso usare la **portata volumetrica** $Q = S\,v$

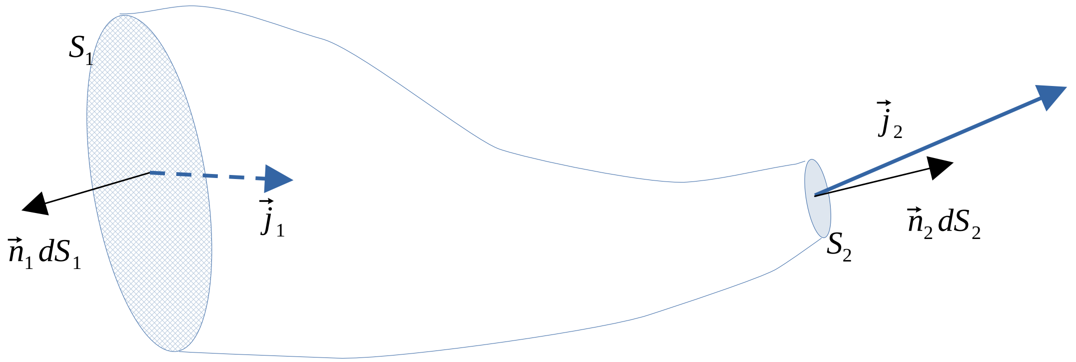
Dinamica dei fluidi

Casi particolari dell'equazione di continuità:

3) fluido in un tubo (densità e velocità generiche)

$$\int_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \int_{S_1} \vec{j}\cdot(-d\vec{S}_1) = \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S}_2$$

$$\boxed{\int_{S} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \dot{m} = cost\,.}$$



La **portata massica**, ossia il flusso di massa per unità di tempo, è sempre invariante **in assenza di pozzi e sorgenti** e indipendente dalla sezione di tubo considerata.