Lavoro ed energia

Il lavoro

Il concetto di lavoro in meccanica classica, nella descrizione Newtoniana, è un concetto accessorio rispetto alla risoluzione dei due problemi della dinamica. Tuttavia, consente di aprire una visione diversa e di introdurre il concetto di energia. In altre branche della fisica o in altre descrizioni, l'energia diventa un concetto fondamentale, molto più di quello di forza.

Il lavoro di una forza che agisce su un punto materiale mentre esso si sposta di un vettore **Δs** è: $\boxed{L=\vec{F}\cdot\vec{\Delta s}}$

Il lavoro ha dimensioni ***[M][L²][T⁻²]*** *e si misura in Joule (J). 1 J = 1 N × 1 m.*

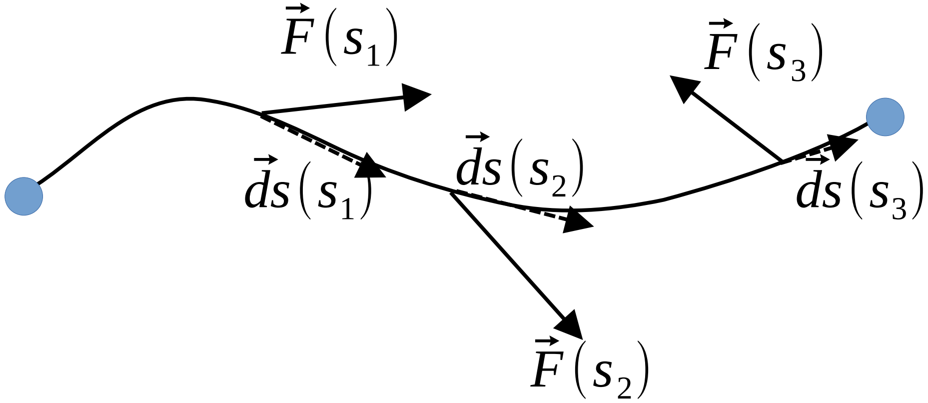
Spesso accade che durante lo spostamento la forza vari in modulo, direzione e/o verso. Se la forza è costante a tratti, si può spezzare il cammino in modo che il il lavoro totale sia la somma dei lavori calcolati in ciascun tratto:

$$L=\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{\Delta s}_i$$

Il lavoro

In generale, la forza può continuamente cambiare in modulo, direzione e verso, e si può considerare costante solo per spostamenti infinitesimi. Si definisce il lavoro elementare e poi quello finito come somma infinita di lavori elementari, ossia un integrale **svolto sul cammino Γ che il punto materiale compie tra un punto iniziale ed uno finale.**

$$\boxed{dL=\vec{F}\cdot d\vec{s}\,; \qquad L=\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{s}}$$



Il lavoro

Come si fa un “integrale su un cammino”?

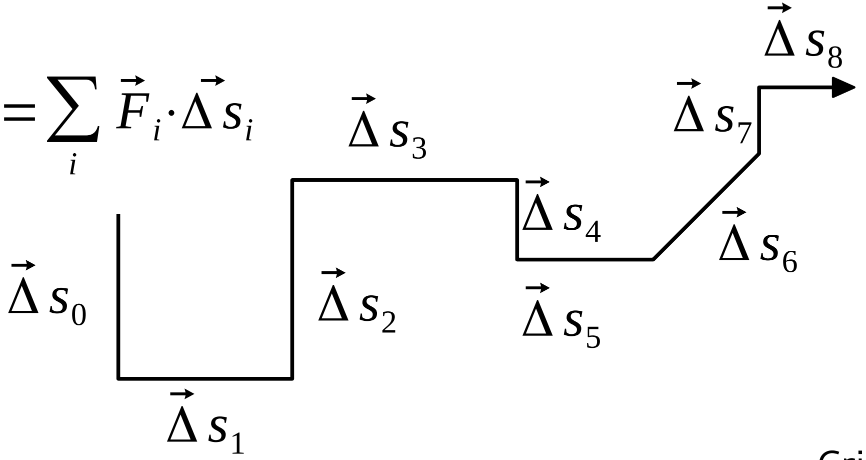
Abbiamo bisogno di descrivere il cammino in funzione di un parametro.

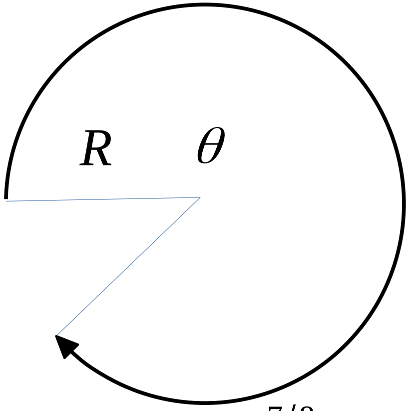
Ci sono sempre almeno un paio di opzioni di facile applicazione:

1) L’ascissa curvilinea

2) Il tempo

$$L=\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta} s_i$$





$$s=R\,\theta$$
$$\vec{r}=-R\cos\theta\,\hat{i}+R\sin\theta\,\hat{j}$$
$$\vec{ds}=\left(R\sin\theta\,\hat{i}+R\cos\theta\,\hat{j}\right)d\theta$$

$$L=\int_0^{7/8\pi}\vec{F}(\theta)\cdot\left(R\sin\theta\,\hat{i}+R\cos\theta\,\hat{j}\right)d\theta$$

Il lavoro

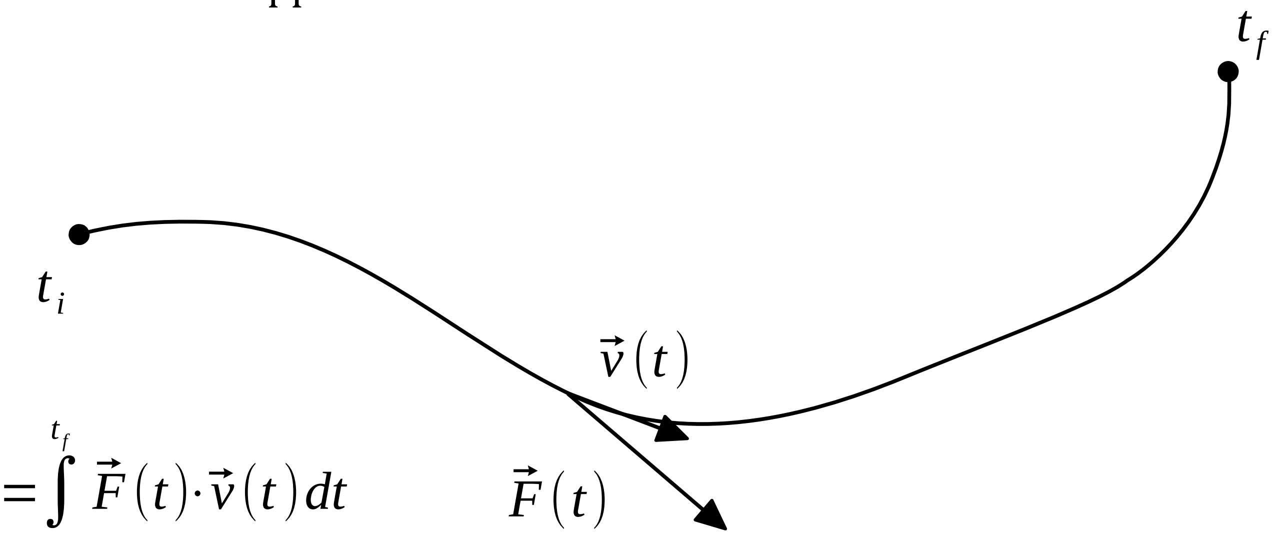
Come si fa un “integrale su un cammino”?

Abbiamo bisogno di descrivere il cammino in funzione di un parametro.

Ci sono sempre almeno un paio di opzioni di facile applicazione:

1) L’ascissa curvilinea

2) Il tempo



$$L=\int_{s_i}^{s_f}\vec{F}(t)\cdot\vec{ds}(t)=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\cdot\frac{\vec{ds}}{dt}dt=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)dt$$

Il lavoro e la potenza

Il lavoro compiuto nell'unità di tempo si dice potenza

$$<P> = \frac{\Delta L}{\Delta t} \qquad \text{potenza media}$$

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{ds}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad \text{potenza istantanea}$$

La potenza si misura in W (Watt). 1 W = 1 J/s

Sono molto comuni i kW. 1 kW = 1000 W

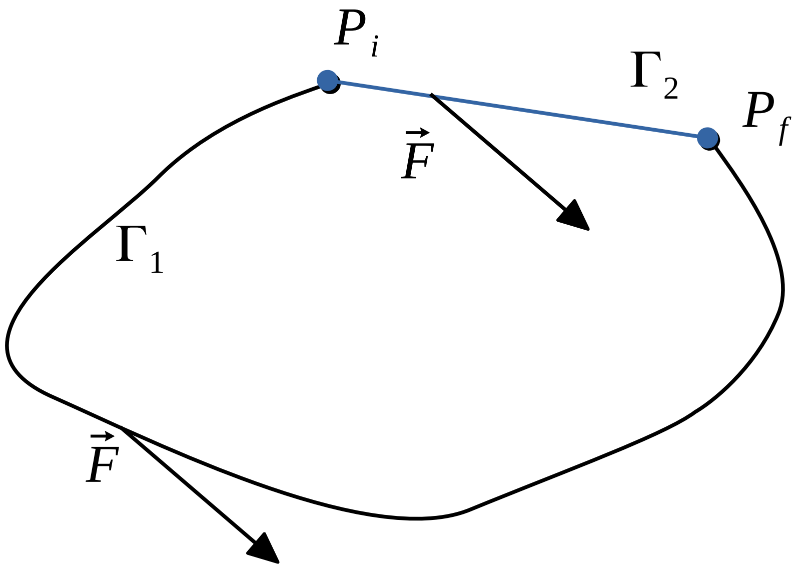
In applicazioni di trasporto si usano anche i CV (cavalli vapore) o HP (horse power).

1 CV = 0,7355 kW

Lavoro di forze conservative

Una forza si dice **conservativa** se il suo lavoro lungo un *qualunque* cammino è funzione solo del punto iniziale e del punto finale.

$$L=\int_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{s}=L(\vec{r}_i,\vec{r}_f)$$



In questo esempio, il lavoro lungo il cammino Γ_1 e quello lungo Γ_2 sono uguali; non si tratta però di un'uguaglianza incidentale: perché una forza sia conservativa, questo deve essere vero per tutti i cammini che iniziano e terminano con la stessa coppia di punti. Solo in questo caso, la forza si dice conservativa.

Ovviamente: $L(\vec{r}_i,\vec{r}_f)=-L(\vec{r}_f,\vec{r}_i)$

perché si cambia il verso di integrazione.

Per ogni cammino chiuso, con una forza conservativa, si ha: $L=\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{s}=0$

Lavoro di forze conservative ed energia potenziale

Se una forza è conservativa, il lavoro che essa compie dipende solo dal punto iniziale e da quello finale.

Fissiamo un punto O, e riferiamo tutti i lavori ad esso.

$$L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = L(\vec{r}_i, \vec{r}_O) + L(\vec{r}_O, \vec{r}_f) = L(\vec{r}_O, \vec{r}_f) - L(\vec{r}_O, \vec{r}_i) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f)$$

Esiste una funzione, detta energia potenziale, tale che il lavoro di una forza conservativa in un cammino tra due punti è uguale alla sua variazione tra il punto iniziale e quello finale.

$$U(\vec{r}_i) = -L(\vec{r}_O, \vec{r}_i)$$
$$U(\vec{r}_f) = -L(\vec{r}_O, \vec{r}_f)$$
$$U(\vec{r}) = -L(\vec{r}_O, \vec{r})\,\text{per un punto qualsiasi}$$

Osserviamo che il punto O è arbitrario. In effetti, tutta la funzione U è definita *a meno di una costante arbitraria.* Possiamo impostare questa costante come ci torna più comodo, ma non si può cambiare nella trattazione di un fenomeno.

Conservazione dell'energia meccanica

Consideriamo un punto materiale soggetto solo all'azione di forze conservative.

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo: $L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = K_f - K_i$

Inoltre, poiché le forze sono tutte conservative, abbiamo: $L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f)$

Segue che:

$$K_f - K_i = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f)$$
$$K_f + U(\vec{r}_f) = K_i + U(\vec{r}_i)$$
$$E_f = E_i$$

avendo definito l'energia meccanica come somma dell'energia cinetica e potenziale ad ogni istante.

$$E = K(v) + U(\vec{r})$$

L'energia meccanica di un punto materiale soggetto solo all'azione di forze conservative rimane costante (*si conserva*).

Non conservazione dell'energia meccanica

Supponiamo di avere in gioco sia forze conservative che dissipative:

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo: $L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = K_f - K_i$

Inoltre, per le forze conservative, abbiamo: $L_{cons}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f)$

Per le forze dissipative: $L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) \leq 0$

Dal teorema delle forze vive:

$$K_f - K_i = L_{cons}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) + L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f) + L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f)$$
$$\left(K_f + U(\vec{r}_f)\right) - \left(K_i + U(\vec{r}_i)\right) = L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) \leq 0$$
$$E_f - E_i = L_{diss} \leq 0$$

L'energia meccanica di un punto materiale soggetto all'azione di forze dissipative non si conserva.

Energia potenziale e forze conservative

Supponiamo di conoscere in ogni punto dello spazio l'energia potenziale *U* di una certa forza conservativa *F*. Consideriamo il lavoro elementare per un piccolo incremento in ciascuna delle direzioni principali, considerando la forza costante per il tratto percorso:

$$U(\vec{r}) = U(x, y, z)$$

$$U(x, y, z) - U(x+\Delta x, y, z) \simeq F_x \Delta x$$
$$U(x, y, z) - U(x, y+\Delta y, z) \simeq F_y \Delta y$$
$$U(x, y, z) - U(x, y, z+\Delta z) \simeq F_z \Delta z$$

ossia:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{U(x,y,z) - U(x+\Delta x, y, z)}{\Delta x} \simeq F_x \\ \dfrac{U(x,y,z) - U(x, y+\Delta y, z)}{\Delta y} \simeq F_y \\ \dfrac{U(x,y,z) - U(x, y, z+\Delta z)}{\Delta z} \simeq F_z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_x = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{U(x, y+\Delta y, z) - U(x,y,z)}{\Delta y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{U(x, y, z+\Delta z) - U(x,y,z)}{\Delta z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{array}\right.$$

Energia potenziale e forze conservative

Abbiamo ottenuto:

$$\left.\begin{array}{l} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F} = -\mathrm{grad}\, U = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Quindi un campo di forza conservativo è pari al **gradiente** dell'energia potenziale, cambiato di segno!

Il gradiente di una funzione scalare di più variabili è il vettore che, in ogni punto, definisce la direzione di massima variazione (o massima pendenza).

Specificata la forma dell'energia potenziale, resta definita la forza esercitata sul punto materiale, e quindi il moto è completamente determinato, a patto che si precisino le condizioni iniziali (che sono comunque libere)

Energia potenziale e forze conservative

Vediamo subito alcune energie potenziali per fissare le idee:

- Energia potenziale della forza peso:

$$U(x,y,z)=m\,g\,z+cost.$$

$$\vec{F}=-grad\,U=-\vec{\nabla}U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)=0\,\hat{i}+0\,\hat{j}-m\,g\,\hat{k}=-m\,g\,\hat{k}$$

- Energia potenziale della forza elastica (1 dimensione)

$$U(x,y,z)=\frac{1}{2}k\,x^2+cost.$$

$$\vec{F}=-grad\,U=-\vec{\nabla}U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)=-k\,x\,\hat{i}+0\,\hat{j}+0\,\hat{k}=-k\,x\,\hat{i}$$

Energia potenziale e forze conservative

Vediamo subito alcune energie potenziali per fissare le idee:

- Energia potenziale della forza elastica (2 dimensioni)

$$U(x,y,z)=\frac{1}{2}k\,x^2+\frac{1}{2}k\,y^2+cost\,.$$

$$\vec{F}=-grad\,U=-\vec{\nabla}\,U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)=-k\,x\,\hat{i}-k\,y\,\hat{j}+0\,\hat{k}=-k\,x\,\hat{i}-k\,y\,\hat{j}$$

- Energia potenziale della forza centrifuga (rotazione intorno all’asse *z*)

$$U(x,y,z)=-\frac{1}{2}m\,\omega^2(x^2+y^2)+cost\,.$$

$$\vec{F}=-grad\,U=-\vec{\nabla}\,U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)=m\,\omega^2\,x\,\hat{i}+m\,\omega^2\,y\,\hat{j}+0\,\hat{k}=m\,\omega^2(x\,\hat{i}+y\,\hat{j})=m\,\omega^2\,\vec{r}_\perp$$

Applicazioni dell'energia potenziale

- Caduta di un grave

$$U_i = m g h + cost.; \quad v_i = 0; \quad K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 = 0$$

$$U_f = 0 + cost.; \quad K_f + U_f = K_i + U_i; \quad K_f = K_i + U_i - U_f = m g h; \quad \frac{1}{2} m v_f^2 = m g h$$

$$v_f = \sqrt{2 g h}$$

- Forza costante lungo *x* (diversa dalla forza peso):

$$U = -A x + cost.; \quad F_x = A$$

Applicazioni dell'energia potenziale

- Oscillatore armonico libero

$$U(x)=\frac{1}{2}k\,x^2;\quad F_x=-k\,x$$

- Verifichiamo che l'energia meccanica totale si conserva

$$x(t)=A\sin(\omega_0 t)\qquad (\text{la fase è irrilevante in questo caso, corrisponde solo ad un ritardo temporale})$$

$$U(x)=\frac{1}{2}k\,x^2=\frac{1}{2}k\,A^2\sin^2(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t)=\omega_0 A\cos(\omega_0 t);\qquad K=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}m\,A^2\,\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t)$$

$$U+K=\frac{1}{2}k\,A^2\sin^2(\omega_0 t)+\frac{1}{2}m\,A^2\,\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t)=\frac{1}{2}A^2\left(k\sin^2(\omega_0 t)+m\,\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t)\right)$$

Applicazioni dell'energia potenziale

- Oscillatore armonico libero
  Ricordiamo che $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
  E quindi

$$U + K = \frac{1}{2} A^2 \left(k \sin^2(\omega t) + m\,\omega^2 \cos^2(\omega t)\right) = \frac{1}{2} A^2 \left(k \sin^2(\omega_0 t) + k \cos^2(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2} k A^2$$

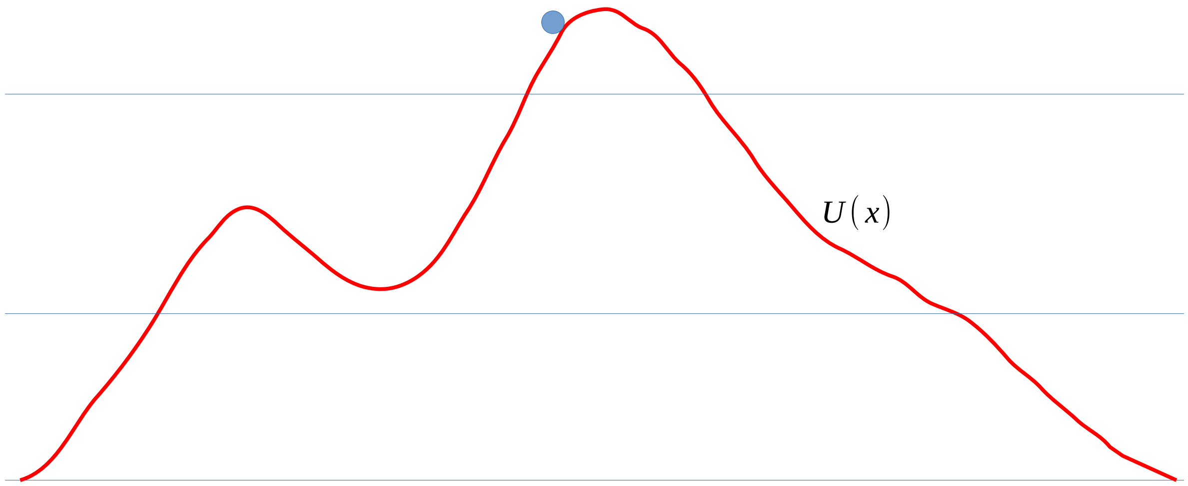
In effetti, durante il moto dell'oscillatore libero, energia potenziale e cinetica si trasformano l'una nell'altra continuamente

Applicazioni dell'energia potenziale

Energia potenziale della forza peso

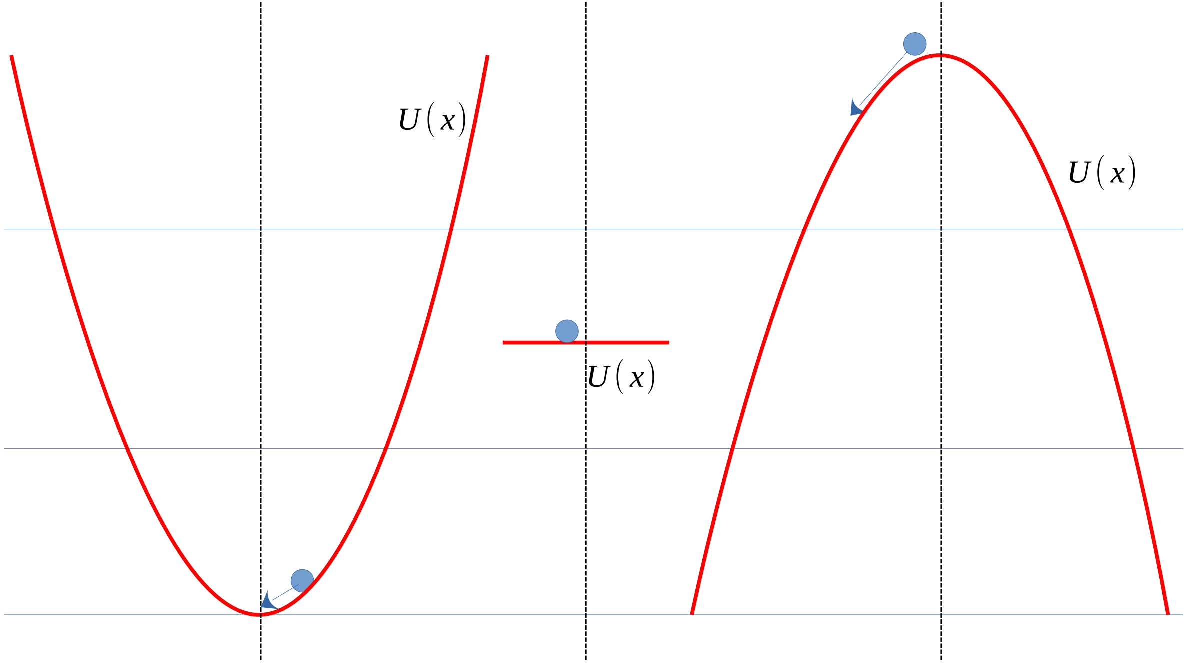
Lo "zero" si può impostare dovunque si voglia, ma una volta fissato non può essere spostato

Il profilo del rilievo è proprio uguale al profilo dell'energia potenziale



Applicazioni dell'energia potenziale

Energia potenziale parabolica
(vicino ad un punto stazionario, ogni energia potenziale assomiglia a quella parabolico)



Lo "zero" si può impostare dovunque si voglia, ma una volta fissato non può essere spostato

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0 \Rightarrow \text{equilibrio stabile - oscillazioni}$$

$$k = \frac{d^2U}{dx^2}$$

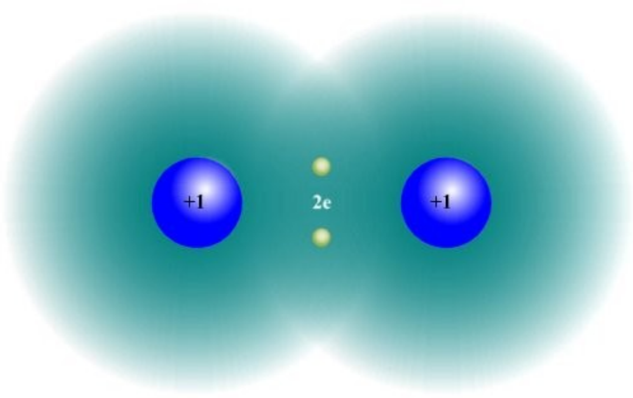
$$\frac{d^2U}{dx^2} = 0 \Rightarrow \text{equilibrio indifferente}$$

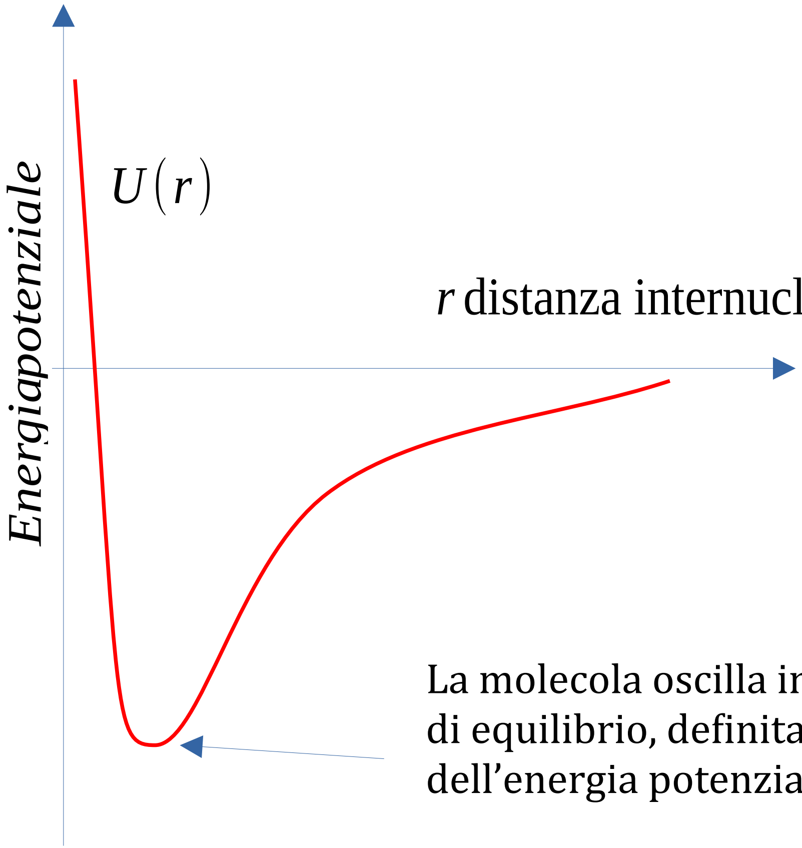
$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0 \Rightarrow \text{equilibrio instabile - catastrofe}$$

Qualsiasi sistema abbia un'energia potenziale con un minimo esibisce fenomeni oscillatori come l'oscillatore armonico libero!

Applicazioni dell'energia potenziale

Una molecola biatomica





La molecola oscilla intorno alla posizione di equilibrio, definita dal minimo dell'energia potenziale.

Oscillatore armonico molecolare!