URTI

Cristia

Urti

Introduciamo il concetto di **impulso di una forza:**

$$I_{\vec{F}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$

Se **F** è la risultante di tutte le forze agenti su un punto materiale, possiamo scrivere:

$$I_{\vec{F}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt = \int_{t_i}^{t_f} m\vec{a}(t)\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Ovvero: *l'impulso della risultante di tutte le forze su un punto materiale in un intervallo di tempo corrisponde alla variazione di quantità di moto di quel punto materiale tra l'istante iniziale e quello finale.*

L'impulso su un sistema di punti materiali è la somma degli impulsi sui singoli punti $\quad I_{\sum \vec{F}} = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i \vec{F}_i(t)\, dt$

Attenzione: <u>Non confondere mai impulso e lavoro!</u> Sono due grandezze diverse, con dimensioni diverse.

Urti

Un processo di interazione tra due (o più) corpi si definisce urto se l'impulso delle forze esterne al sistema dei corpi interagenti è trascurabile per tutta la durata del processo.

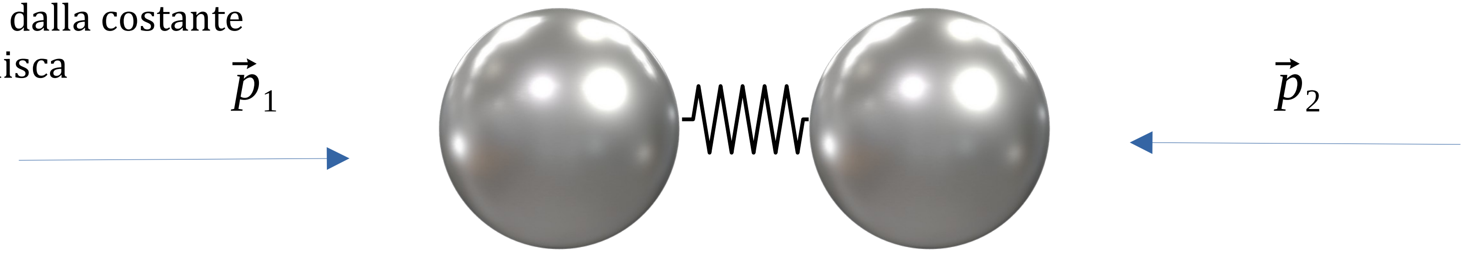
Attenzione: nella definizione di urto non entra in alcun modo il concetto di contatto!

Questa definizione consente di trattare il sistema come se fosse isolato.

$$I_{\vec{F}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \simeq \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{P}_f - \vec{P}_i \simeq \vec{0}$$

$$\vec{P}_f \simeq \vec{P}_i$$

Se due sferette metalliche si urtano, possiamo immaginare che vi sia una molla dalla costante elastica molto grande che impedisca la compenetrazione



L'impulso (ossia la variazione di quantità di moto) della forza elastica supera tutte le forze esterne

Urti

La conservazione della quantità di moto è uno dei capisaldi dello studio degli urti.

Gli urti sono uno strumento di indagine fondamentale: per conoscere un oggetto o un altro individuo, noi lo bombardiamo di fotoni, e indichiamo con il nome di *immagine* dell'oggetto o individuo la distribuzione di quelli che nell'urto vengono riflessi!

Nel sistema del centro di massa dei due corpi (o punti materiali) che collidono, si ha, per definizione di centro di massa (con " **'** " indichiamo le quantità misurate nel sistema del centro di massa)

$$\vec{0}=\vec{P}'_{CM,f}=\vec{P}'_{CM,i}$$

Dette $\mathbf{p}_{1i}$ e $\mathbf{p}_{2i}$ le quantità di moto prima dell'urto, si ha:

$$\vec{0}=\vec{P}'_{CM,f}=\vec{p}'_{1i}+\vec{p}'_{2i} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}'_{2i}=-\vec{p}'_{1i}$$

Urti

Prima dell'urto, l'energia cinetica di un sistema di due punti materiali nel sistema del centro di massa vale:

$$K'_i=\frac{1}{2}m_1 v'^2_1+\frac{1}{2}m_2 v'^2_2=\frac{p'^2_{1i}}{2m_1}+\frac{p'^2_{2i}}{2m_2}=\frac{p'^2_{1i}}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$$

Se i due corpi non possono essere considerati punti materiali, ma devono essere trattati come due sistemi di punti materiali, la formula diventa più complicata:

$$K'_i=\frac{1}{2}m_1 v'^2_1+K''_{i1}+\frac{1}{2}m_2 v'^2_2+K'_{i2}=\frac{p'^2_{1i}}{2m_1}+\frac{p'^2_{2i}}{2m_2}+K''_{i1}+K''_{i2}=\frac{p'^2_{1i}}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+K''_{i1}+K''_{i2}\right)$$

$$K''_{i1}=\text{energia cinetica nel centro di massa del sistema 1 nello stato iniziale}$$

$$K''_{21}=\text{energia cinetica nel centro di massa del sistema 2 nello stato iniziale}$$

Urti

In seguito all'urto, possono accadere varie cose:

- I due corpi rimbalzano inalterati **(urto elastico)**
- I due corpi si fondono in uno solo **(urto totalmente anelastico)**
- I due corpi vengono parzialmente alterati ma non si fondono **(urto parzialmente anelastico)**
- I due corpi si frammentano in altri corpi **(urto anelastico generico)**

Attenzione: spesso i testi omettono di considerare i gradi di libertà rotazionali o intorno al centro di massa nella definizione degli urti elastici. Questo è un errore concettuale grave, che porta confusione!

Un urto si dice elastico se si conserva esattamente l'energia cinetica nel sistema del centro di massa. Questo è vero se e solo se **i corpi dopo l'urto elastico sono nello stesso numero ed esattamente inalterati.**

Urti elastici

Limitando per il momento l'attenzione ai soli punti materiali, possiamo scrivere:

$$K'_i = K'_f \Rightarrow \frac{p'^2_{1i}}{2m_1} + \frac{p'^2_{2i}}{2m_2} = \frac{p'^2_{1f}}{2m_1} + \frac{p'^2_{2f}}{2m_2}$$

In linea di principio, sarebbe possibile rispettare l'uguaglianza anche con masse finali diverse da quelle iniziali, ma in pratica questo è così improbabile che di fatto le due definizioni di urto elastico sono equivalenti.

Poiché $\vec{p}'_{1i} = -\vec{p}'_{2i}$ e $\vec{p}'_{1f} = -\vec{p}'_{2f}$, possiamo riscrivere le energie cinetiche:

$$K'_i = K'_f \quad \Rightarrow \quad \frac{p'^2_{1i}}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p'^2_{1f}}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \|\vec{p}'_{1i}\| = \|\vec{p}'_{1f}\|$$

Urti elastici

In un urto elastico le quantità di moto finali possono cambiare solo in direzione e verso rispetto a quelle iniziali, ma mantengono lo stesso modulo

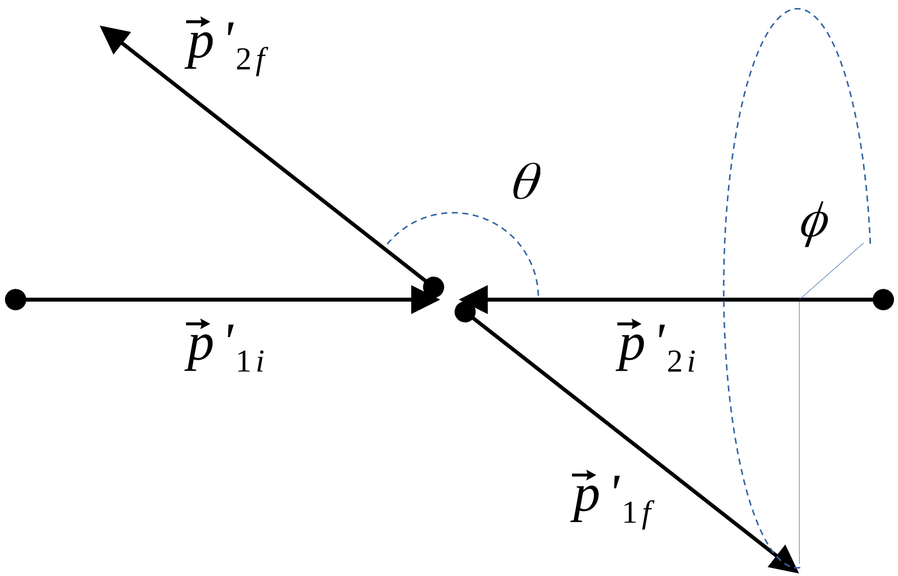
La direzione in cui emergono i punti materiali nello stato finale dipende dalla particolare forma delle forze in gioco.

L'uguaglianza dei moduli tra le quantità di moto iniziali e finali di due punti materiali che si urtino elasticamente discende dai tre Principi della Dinamica

Osserviamo inoltre che, se le quantità di moto finali non sono sulla stessa retta di quelle iniziali, le quantità di moto iniziali e finali definiscono un piano. Un urto elastico tra due punti materiali può sempre essere studiato su un solo piano

Urti elastici

Cinematica dell'urto elastico tra due punti materiali



I parametri liberi per lo stato finale sono 3, ossia le tre componenti della quantità di moto finale.

Tuttavia la conservazione dell'energia cinetica (condizione di elasticità dell'urto) aggiunge una equazione. I parametri liberi rimanenti sono 2, ossia i due angoli θ e ϕ:

Φ definisce il piano dell'urto.

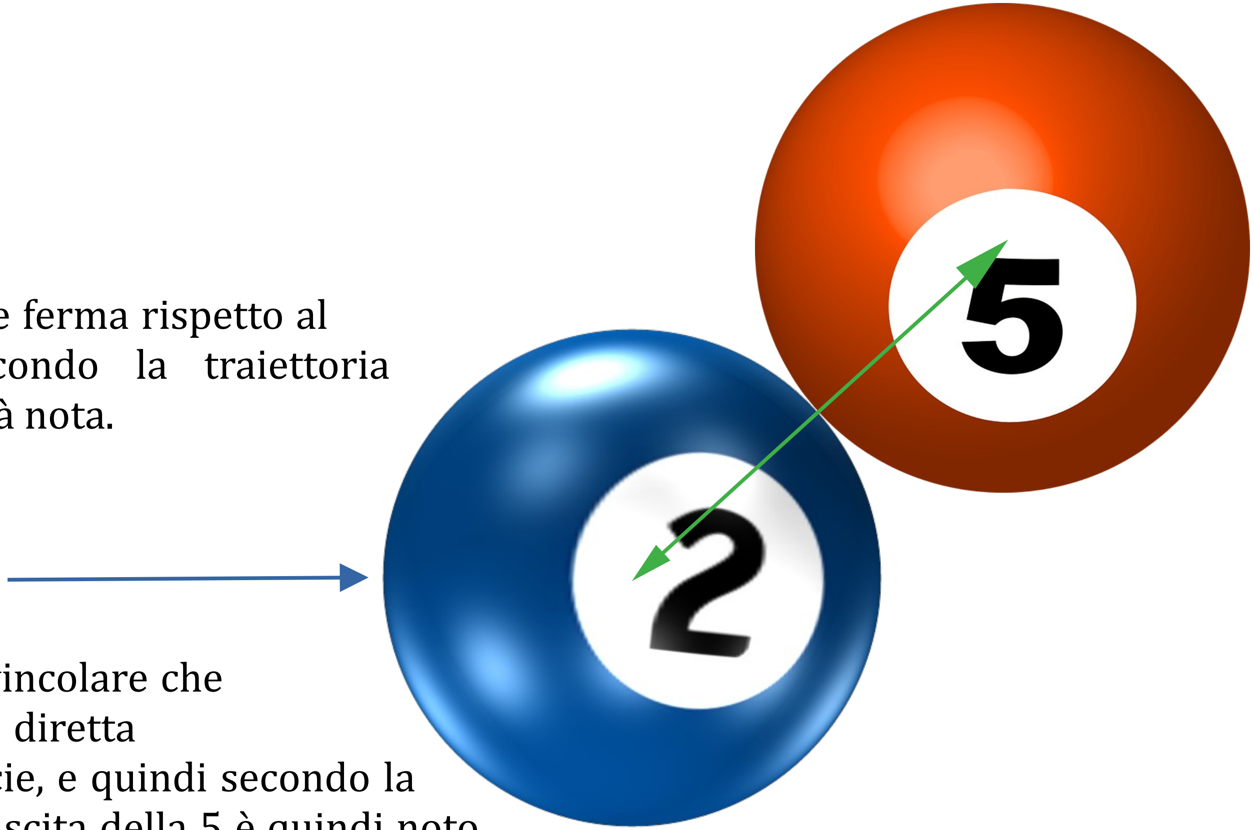
θ definisce l'angolo di deflessione.

Se non è possibile ricavarli dalla conoscenza delle forze d'urto, questi due parametri devono essere misurati (ossia dati dalla traccia del problema) per completare la descrizione dello stato finale.

Urti elastici

Esempio: urto da palle da biliardo

La palla 2 urta la palla 5, inizialmente ferma rispetto al tavolo, con un urto elastico secondo la traiettoria indicata dalla freccia blu e con velocità nota.



Sappiamo che la forza è la reazione vincolare che impedisce la compenetrazione, che è diretta ortogonalmente rispetto alla superficie, e quindi secondo la congiungente dei centri. L'angolo di uscita della 5 è quindi noto, e il moto avviene sul piano del tavolo. Le due reazioni vincolari (tra le palle e con il tavolo) ci danno le informazioni dinamiche che bastano per chiudere la cinematica dell'urto.

Urti elastici

Esempio: urto unidimensionale tra due punti materiali, di cui uno fermo. Supponiamo che dopo l'urto entrambi i punti materiali si muovano ancora sulla stessa retta.

$$\vec{p}_{1i} \qquad \vec{p}_{2i}=\vec{0}$$

$$\begin{cases} p_{1ix}=p_{1fx}+p_{2fx} \\ \dfrac{p_{1ix}^2}{2m_1}=\dfrac{p_{1fx}^2}{2m_1}+\dfrac{p_{2fx}^2}{2m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{2fx}=p_{1ix}-p_{1fx} \\ \dfrac{p_{1ix}^2}{2m_1}=\dfrac{p_{1fx}^2}{2m_1}+\dfrac{(p_{1ix}-p_{1fx})^2}{2m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{2fx}=p_{1ix}-p_{1fx} \\ p_{1fx}^2\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}\right)-\dfrac{2p_{1ix}p_{1fx}}{m_2}+p_{1ix}^2\left(\dfrac{1}{m_2}-\dfrac{1}{m_1}\right)=0 \end{cases}$$

$$p_{1fx}=p_{1ix}\frac{\dfrac{1}{m_2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{m_2^2}-\left(\dfrac{1}{m_2}-\dfrac{1}{m_1}\right)\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}\right)}}{\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}}=p_{1ix}\frac{\dfrac{1}{m_2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{m_2^2}-\dfrac{1}{m_2^2}+\dfrac{1}{m_1^2}}}{\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}}=p_{1ix}\frac{\dfrac{1}{m_2}\pm\dfrac{1}{m_1}}{\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}}$$

Urti elastici

La soluzione con il segno positivo seleziona lo stato iniziale; quindi consideriamo direttamente l'altro caso.

$$\begin{cases} p_{1fx} = p_{1ix}\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ p_{2fx} = p_{1ix} - p_{1ix}\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} p_{1fx} = p_{1ix}\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ p_{2fx} = p_{1ix}\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} \end{cases}}$$

Se le masse sono uguali, i due punti materiali semplicemente si scambiano le quantità di moto:

$$\begin{cases} p_{1fx} = 0 \\ p_{2fx} = p_{1ix} \end{cases}$$

Urti elastici

Se $m_2 >> m_1$, otteniamo un caso molto interessante

$$\begin{cases} p_{1fx} = -p_{1ix} \\ p_{2fx} = 2p_{1ix} \end{cases}$$

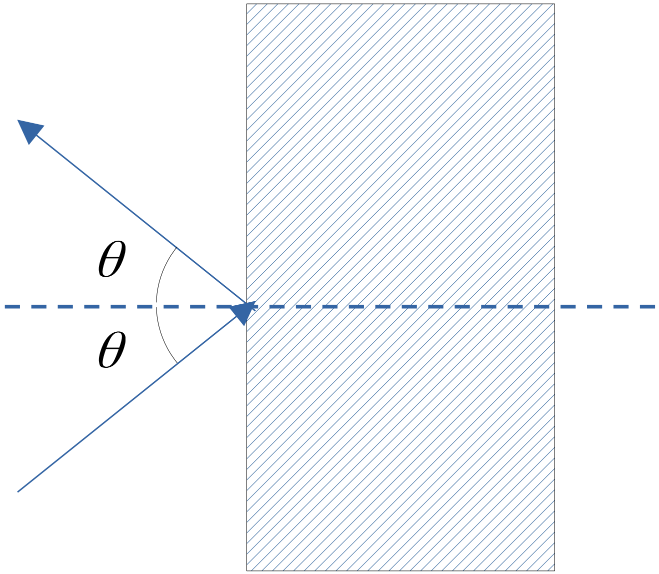
Per esempio, se il corpo 2 è in realtà una parete di "massa infinita", si ha:

$$\begin{cases} v_{1fx} = -v_{1ix} \\ v_{2fx} = 2\dfrac{p_{1ix}}{m_2} = 0 \end{cases}$$

Urti elastici

Se vediamo il tutto in un sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme sull'asse y, abbiamo

$$\begin{cases} v_{1fx} = -v_{1ix}\,; \quad v_{1fy} = v_{1iy} \\ v_{2fx} = 2\dfrac{p_{1ix}}{m_2} = 0 \end{cases}$$



Quindi un punto materiale che urta contro una parete di massa infinita viene riflesso sullo stesso piano e con angolo di riflessione rispetto alla normale alla superficie uguale all'angolo di incidenza.

Urti anelastici

Limitando per il momento l'attenzione ai soli punti materiali, si considera di solito l'urto completamente anelastico se l'energia cinetica finale nel centro di massa si annulla.

$$0 = K'_f \Rightarrow 0 = \frac{p'^2_{1f}}{2m_1} + \frac{p'^2_{2f}}{2m_2} \Rightarrow p'_{1f} = p'_{2f} = 0$$

I due punti materiali procedono attaccati, con velocità uguale a quella del centro di massa.

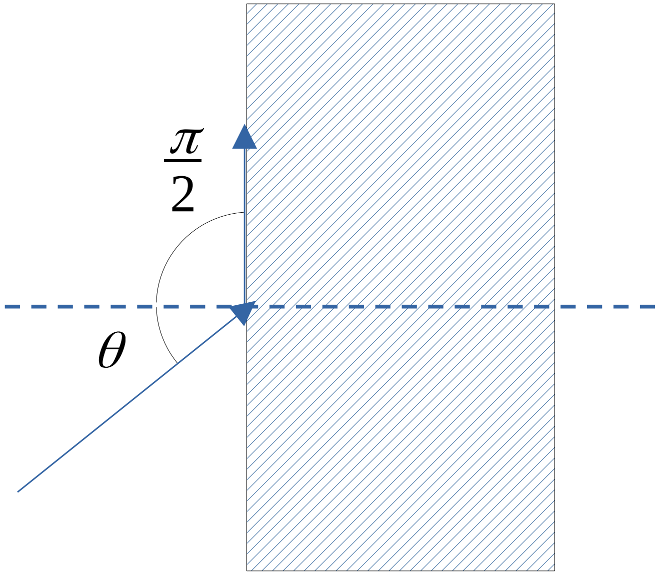
Per veri punti materiali non ha molto senso parlare di urti anelastici, perché un punto materiale non può essere modificato e l'energia non ha modo di "sparire" e convertirsi in altre forme.

Tuttavia, possiamo usare questo comodo schema per problemi altrimenti inutilmente complicati.

Urti anelastici

Urto completamente anelastico di un punto materiale con una parete di massa infinita

$$\begin{cases} v_{1fx}=0; \quad v_{1fy}=v_{1iy} \\ v_{2fx}=\dfrac{p_{1ix}}{m_2}=0 \end{cases}$$



Quindi un punto materiale che urta contro una parete di massa infinita con urto anelastico rimane a strisciare lungo la parete.

Richiami ed argomenti correlati

Urti elastici

Applicazione: moderazione di neutroni

Ci chiediamo se sia più efficiente un assorbitore di ^{208}Pb o di acqua (H_2O) per moderare (rallentare) neutroni

$$m_{Pb} \simeq 208\, m_n$$
$$m_H \simeq m_n$$
$$m_O \simeq 16\, m_n$$

usiamo:

$$\begin{cases} p_{1fx} = p_{1ix} \dfrac{m_n - m_X}{m_n + m_X} \\ p_{2fx} = p_{1ix} \dfrac{2\, m_X}{m_n + m_X} \end{cases} \quad con\, m_X = m_{Pb}, m_H, m_O$$

Sorpresa: grazie ai due atomi di idrogeno, l'acqua è un **eccellente** moderatore, al contrario del massiccio piombo!

$$\begin{cases} m_{Pb} \rightarrow p_{1fx} = -p_{1ix} \dfrac{207}{209} \simeq -0.99\, p_{1ix} \\ m_H \rightarrow p_{1fx} = 0 \\ m_O \rightarrow p_{1fx} = -p_{1ix} \dfrac{15}{17} \simeq -0.88\, p_{1ix} \end{cases}$$

Urti elastici

Applicazione: moderazione di neutroni

Un moderatore per barre di controllo di reattori: B_4C (carburo di boro)

$$m_B \simeq 11\, m_n$$
$$m_C \simeq 12\, m_n$$

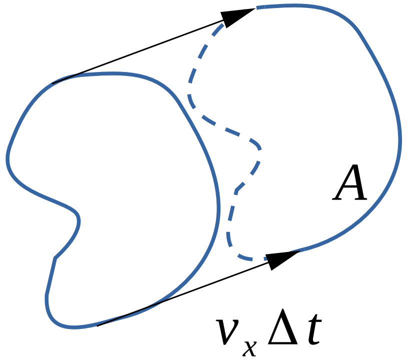
$$\begin{cases} m_B \rightarrow p_{1fx} = -p_{1ix}\dfrac{10}{12} \simeq -0.83\, p_{1ix} \\ m_C \rightarrow p_{1fx} = -p_{1ix}\dfrac{11}{13} \simeq -0.85\, p_{1ix} \end{cases}$$

Se la quantità di moto cala del 17%, l'energia cala del 30%.
Quindi con pochi urti possiamo rallentare i neutroni.

Urti elastici

Se abbiamo un flusso di particelle continuo, che urtano una parete, ciascuna eserciterà un impulso pari a:

$$I_x = p_{1fx} - p_{1ix} = 2\,p_{1ix} = 2\,m\,v_x$$



Se vi sono N/V particelle per unità di volume, su un'area A nell'intervallo di tempo Δt la quantità di particelle che impattano sulla superficie in quell'area sarà proporzionale al volume $A\,v_x\,\Delta t$ e l'impulso sarà pari alla somma degli impulsi

$$I_{tot,x} = \frac{N}{V}\left(A\,v_x\,\Delta t\right) I_x = 2\frac{N}{V} A\,m\,v_x^2\,\Delta t$$

La forza media esercitata sulla superficie, per definizione, sarà $F_x = \dfrac{I_{tot,x}}{\Delta t} = 2\dfrac{N}{V} A\,m\,v_x^2$

e la **pressione, ovvero la forza normale per unità di area**, sarà $p = 2\dfrac{N}{V} m\,v_x^2$

Urti elastici

Esempio: un caso in cui in un urto elastico non possiamo limitarci ai punti materiali

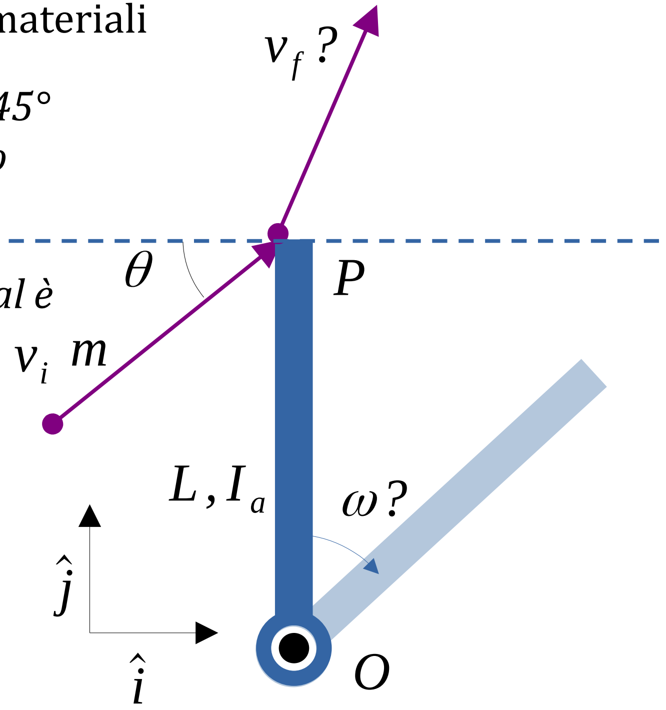
Problema: *Un punto materiale di massa m è lanciato con velocità v e angolo 45° contro un'asta liscia incernierata ad un estremo, di lunghezza L e di momento d'inerzia* I_a *rispetto all'asse della cerniera, ed inizialmente ferma.*

Si vuol sapere con quale angolo il punto materiale prosegue la sua corsa e qual è la velocità angolare dell'asta dopo l'urto elastico.

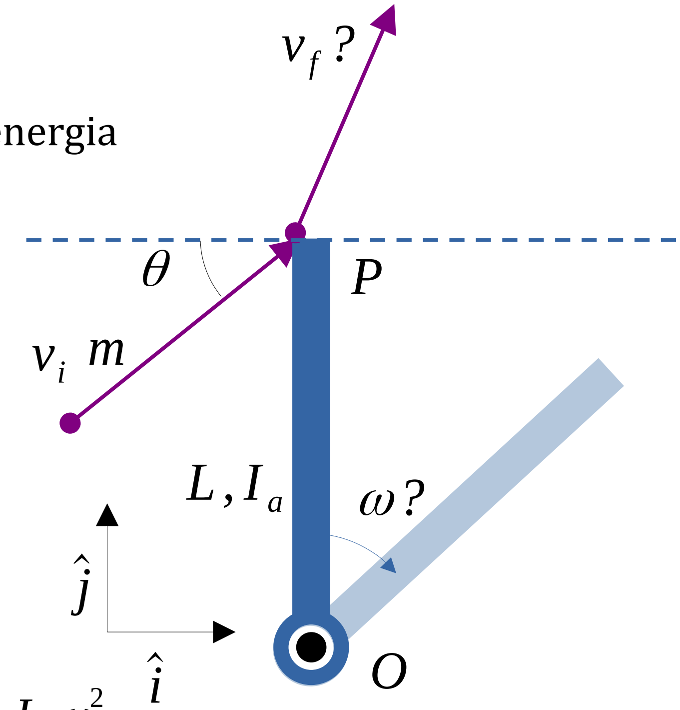
Chiaramente, in questo caso non possiamo trattare il problema con le formule per i punti materiali, perché l'asta decisamente non lo è.

Poiché l'asta è liscia, le forze tra il punto e l'asta si ridurranno alla reazione vincolare alla penetrazione, ortogonale all'asta.

Conviene ragionare in termini di momento angolare



Urti elastici



Useremo la II Equazione Cardinale della Dinamica e la conservazione dell'energia

$$\vec{J}_{Oi}=\vec{J}_{Of};K_i=K_f$$

II Eq. Card. Din: $\vec{J}_{Oi}=\vec{r}_{OP}\times\vec{v}_i$; $\vec{J}_{Of}=\vec{r}_{OP}\times\vec{v}_f+I_a\vec{\omega}$

Conservazione energia: $\frac{1}{2}m(v_{ix}^2+v_{iy}^2)=\frac{1}{2}m(v_{fx}^2+v_{fy}^2)+\frac{1}{2}I_a\omega^2$

asta liscia: $v_{fy}=v_{iy}$

$$\begin{cases}-mLv_{ix}=-mLv_{fx}+I_a\omega\\ \frac{1}{2}m(v_{ix}^2+v_{iy}^2)=\frac{1}{2}m(v_{fx}^2+v_{fy}^2)+\frac{1}{2}I_a\omega^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-mLv_{ix}=-mLv_{fx}+I_a\omega\\ \frac{1}{2}m(v_{ix}^2+v_{iy}^2)=\frac{1}{2}m(v_{fx}^2+v_{iy}^2)+\frac{1}{2}I_a\omega^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega=mL(v_{fx}-v_{ix})/I_a\\ m(v_{ix}^2+v_{iy}^2)=m(v_{fx}^2+v_{fi}^2)+\frac{m^2}{2}I_aL^2\frac{(v_{fx}-v_{ix})^2}{I_a^2}\end{cases}$$

Urti elastici

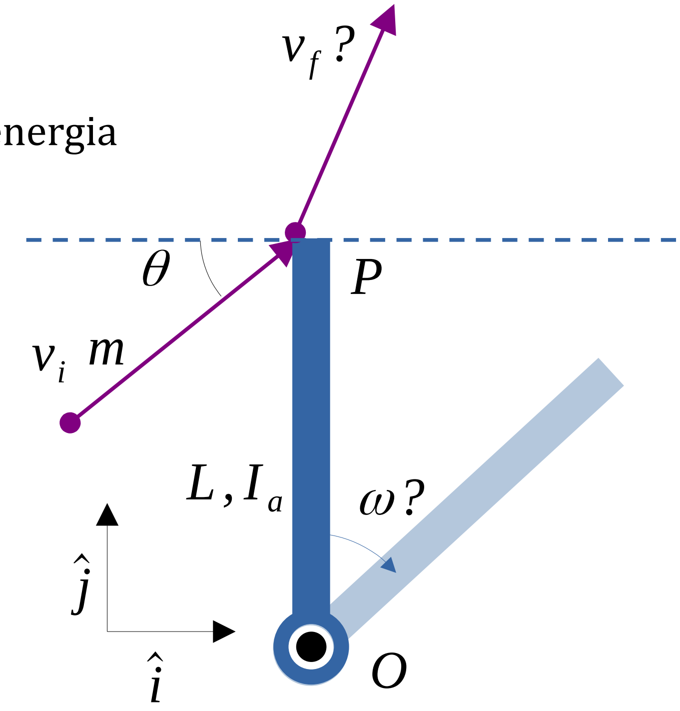
Useremo la II Equazione Cardinale della Dinamica e la conservazione dell'energia

$$\begin{cases} \omega = mL(v_{fx}-v_{ix})/I_a \\ v_{ix}^2 = v_{fx}^2 + m\dfrac{L^2}{I_a}(v_{ix}-v_{fx})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = mL(v_{fx}-v_{ix})/I_a \\ v_{ix}^2 - v_{fx}^2 = m\dfrac{L^2}{I_a}(v_{ix}-v_{fx})^2 \end{cases}$$

$$v_{ix}+v_{fx} = m\frac{L^2}{I_a}(v_{ix}-v_{fx})$$

$$v_{fx}\left(1+m\frac{L^2}{I_a}\right) = v_{ix}\left(m\frac{L^2}{I_a}-1\right)$$

$$\boxed{\begin{cases} v_{fx} = v_{ix}\dfrac{\left(m\dfrac{L^2}{I_a}-1\right)}{\left(m\dfrac{L^2}{I_a}+1\right)} \\ \omega = -2L\dfrac{v_{ix}}{I_a}\dfrac{1}{1+m\dfrac{L^2}{I_a}} = \dfrac{-2Lv_{ix}}{I_a+mL^2} \end{cases}}$$



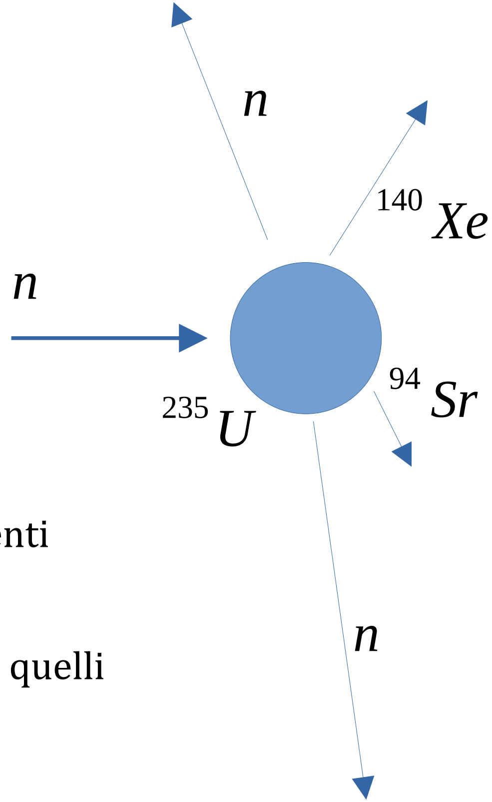
Urti anelastici

Un altro tipo di urto completamente anelastico: **urto con energia cinetica nel centro di massa nello stato finale superiore a quella in ingresso (urto esplosivo)**

Un neutrone che urta un nucleo di ^{235}U può produrre fissione nucleare.

$$n + {}^{235}U \rightarrow {}^{140}Xe + {}^{94}Sr + 2n$$

$$K'_f = K'_i + Q$$



Q rappresenta il guadagno energetico dalla reazione di fissione, e viene dalla conversione dell'energia potenziale di legame dei nuclei e frammenti generati in energia cinetica

Evidentemente, il numero e tipo dei corpi nello stato finale è diverso da quelli nello stato iniziale: l'urto è anelastico!