Effetto Venturi

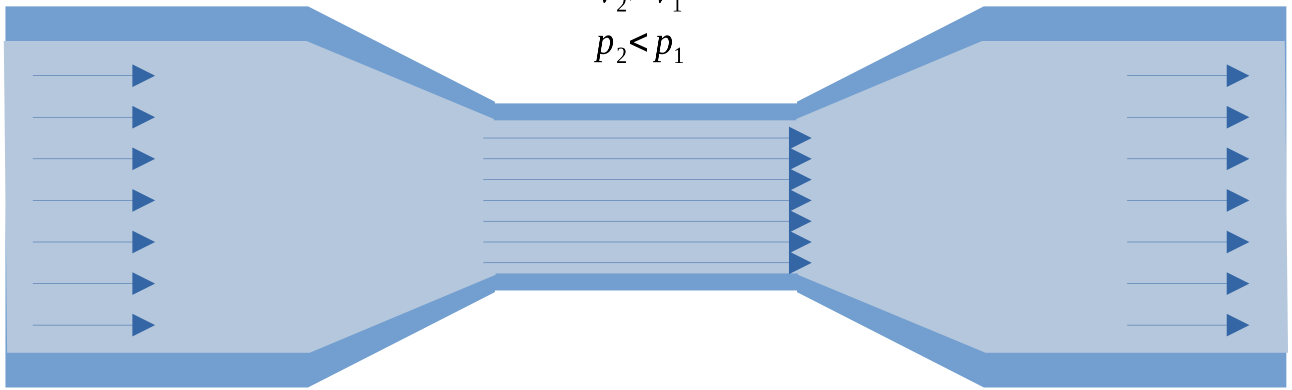
Consideriamo un tubo con una strozzatura e applichiamo il teorema di Bernoulli e l'equazione di continuità:

$$\rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 \quad \text{(eq. continuità)}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 \quad \text{(Teor. Bernoulli)}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$\boxed{p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}$$



Possiamo usarlo per misurare la velocità, e quindi la portata:

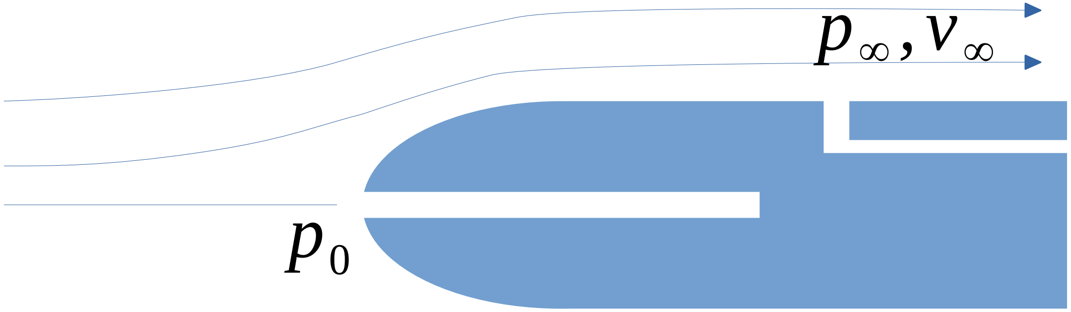
$$\boxed{p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right) \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}}$$

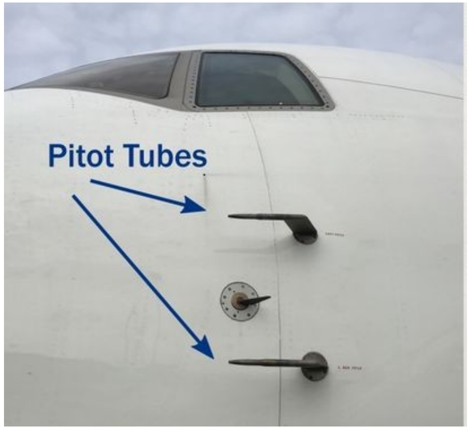
Tubo di Pitot

I tubi di Pitot usano l’effetto Venturi per misurare la velocità di un oggetto mobile (auto, aerei) in un mezzo

$$p_0 = p_\infty + \frac{\rho}{2} v_\infty^2$$

$$v_\infty = \sqrt{2\frac{p_0 - p_\infty}{\rho}}$$





Richiami ed argomenti correlati

Dinamica dei fluidi

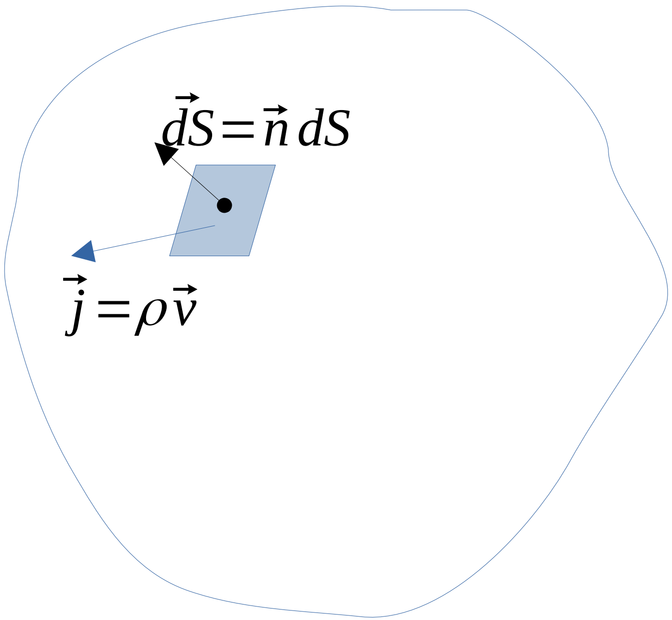
La dinamica dei fluidi richiede strumenti matematici adatti e adeguatamente potenti, anche per descrivere casi semplici.

Questa immagine mostra chiaramente che la schematizzazione di punto materiale, con le sue semplificazioni, non può essere usata per problemi che coinvolgono liquidi.

Dinamica dei fluidi

Innanzitutto, introduciamo il concetto di **equazioni di bilancio**. Nella maggior parte dei casi, i fluidi si muovono in tubi o canalizzazioni che sono solidali all'osservatore. Non seguiamo il movimento di una particella di fluido, ma piuttosto siamo interessati a fare bilanci tra ciò che entra all'interno di un *volume di controllo,* delimitato da una *superficie di controllo*, e ciò che ne esce.

In ogni punto della superficie di controllo, consideriamo la normale **uscente** dal volume.



La densità è tale che la massa totale contenuta nel volume di controllo si ottiene come:

$$m=\int_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Introduciamo la **densità di corrente:**

$$\vec{j}(x,y,z)=\rho(x,y,z)\,\vec{v}(x,y,z)$$

Dinamica dei fluidi

Il flusso di corrente uscente in un elementino *dS* sarà, ovviamente: $d\varphi = \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot \hat{n}\, dS$

Se il flusso è entrante, il prodotto scalare assumerà segno negativo.

E per il flusso complessivo uscente avremo $\Phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n}\, dS$

Possiamo scrivere l'**equazione di continuità in forma integrale**, che esprime la **conservazione della massa**:

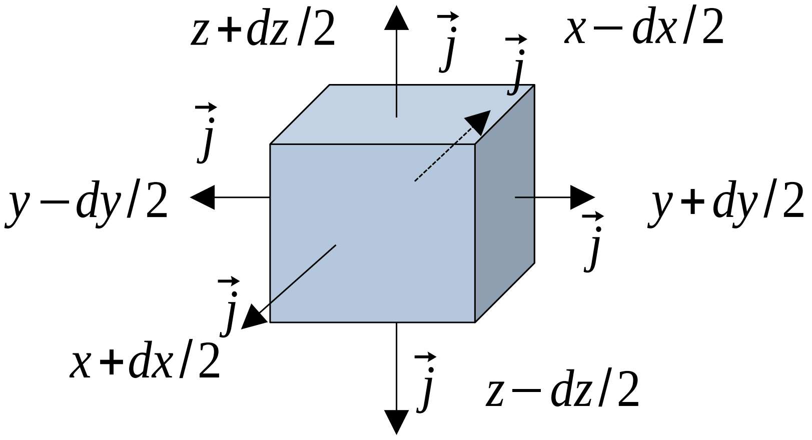
$$\boxed{\begin{gathered} \frac{dm}{dt} = -\Phi \\ \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dx\, dy\, dz + \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz + \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \end{gathered}}$$

Il flusso uscente dalla superficie di controllo è uguale e opposto alla variazione della massa contenuta nel volume di controllo.

Dinamica dei fluidi

Possiamo ottenere l'equazione di continuità anche in forma differenziale, considerando un elementino di volume:

$$
\begin{aligned}
& j_x(x+dx/2, y, z)\,dy\,dz - j_x(x-dx/2, y, z)\,dy\,dz + \\
& + j_y(x, y+dy/2, z)\,dz\,dx - j_y(x, y-dy/2, z)\,dz\,dx + \\
& + j_z(x, y, z+dz/2)\,dx\,dy - j_z(x, y, z-dz/2)\,dx\,dy = \\
& + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = 0
\end{aligned}
$$

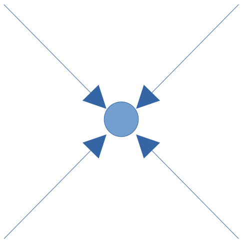


$$\frac{\partial j_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial j_y}{\partial y}\,dz\,dx\,dy + \frac{\partial j_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = 0$$

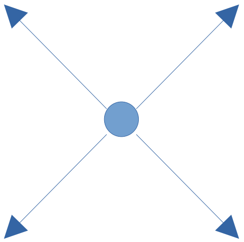
$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{gathered}}$$

Equazione di continuità in forma differenziale

Dinamica dei fluidi



pozzo



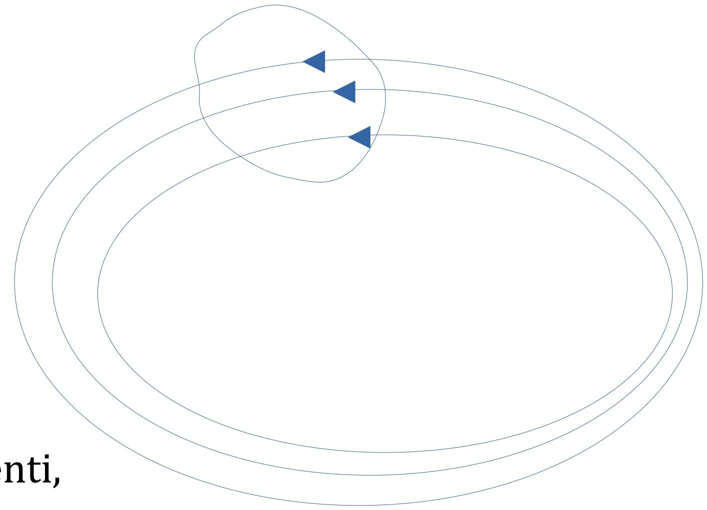
sorgente

Casi particolari dell'equazione di continuità:

1) fluido incomprimibile (~liquido)

$$\rho = cost. \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial j_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial j_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial j_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \mathrm{div}\, \vec{v} = 0$$



Se non vi sono né pozzi né sorgenti, le linee di flusso in un liquido sono chiuse.

Se in un punto c'è un pozzo o una sorgente, alcune linee di flusso possono spuntare da quel punto o terminarvi. In assenza di pozzi e sorgenti, nessuna linea può terminare o iniziare, quindi devono essere tutte chiuse.

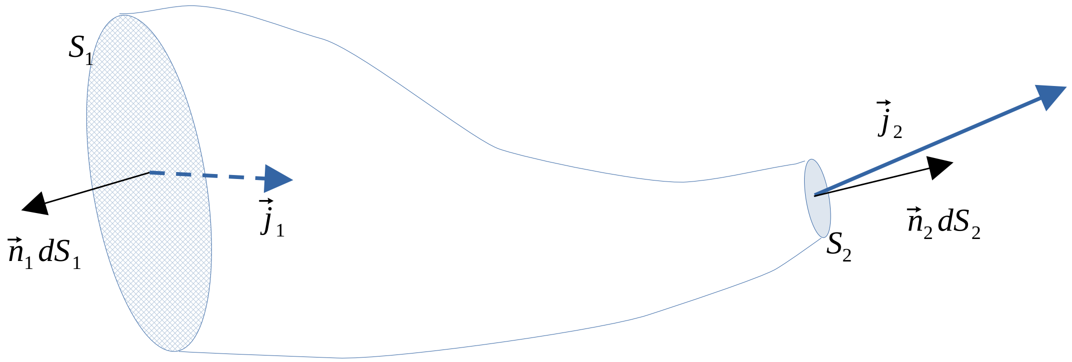
Dinamica dei fluidi

Casi particolari dell'equazione di continuità:

2) fluido in un tubo, con velocità uniformi nella sezione d'ingresso e in quella d'uscita (ossia su tutta la superficie S_1 c'è una velocità, e su tutta la superficie S_2 ce n'è un'altra):

$$\int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \rho S_1 v_1 - \rho S_2 v_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 \\ S_1 v_1 = S_2 v_2 \end{gathered}}$$



La velocità è inversamente proporzionale alla sezione di passaggio del fluido.

In questi casi ha senso usare la **portata volumetrica** $Q = S\,v$

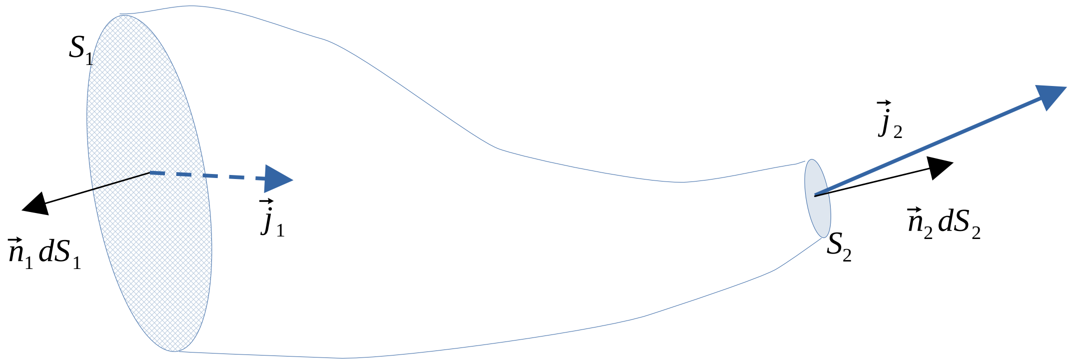
Dinamica dei fluidi

Casi particolari dell'equazione di continuità:

3) fluido in un tubo (densità e velocità generiche)

$$\int_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \int_{S_1} \vec{j}\cdot(-d\vec{S}_1) = \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S}_2$$

$$\boxed{\int_{S} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \dot{m} = cost\,.}$$



La **portata massica**, ossia il flusso di massa per unità di tempo, è sempre invariante **in assenza di pozzi e sorgenti** e indipendente dalla sezione di tubo considerata.

Teorema di Bernoulli

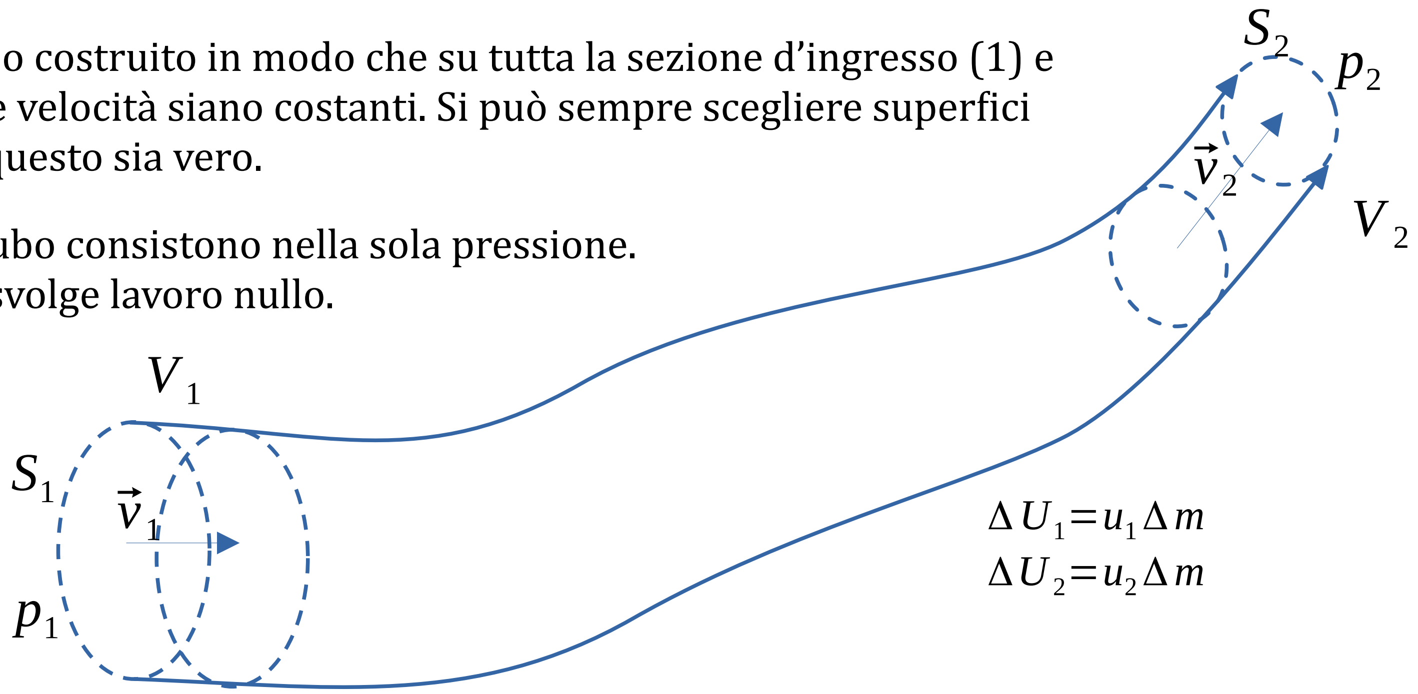
Consideriamo un fluido perfetto (ossia non viscoso).

Focalizziamoci su un tubo di flusso costruito in modo che su tutta la sezione d'ingresso (1) e la sezione d'uscita (2) pressione e velocità siano costanti. Si può sempre scegliere superfici sufficientemente piccole perché questo sia vero.

Le forze di superficie esterne al tubo consistono nella sola pressione.
La pressione sulle pareti laterali svolge lavoro nullo.

Per le pareti S_1 e S_2 possiamo valutare il lavoro svolto.

$$\Delta L_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t$$
$$\Delta L_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t$$
$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$
$$\Delta K_2 = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2$$



$$\Delta U_1 = u_1 \Delta m$$
$$\Delta U_2 = u_2 \Delta m$$

Teorema di Bernoulli

Consideriamo un fluido perfetto (ossia non viscoso).

Quindi per il bilancio di energia meccanica scriviamo:

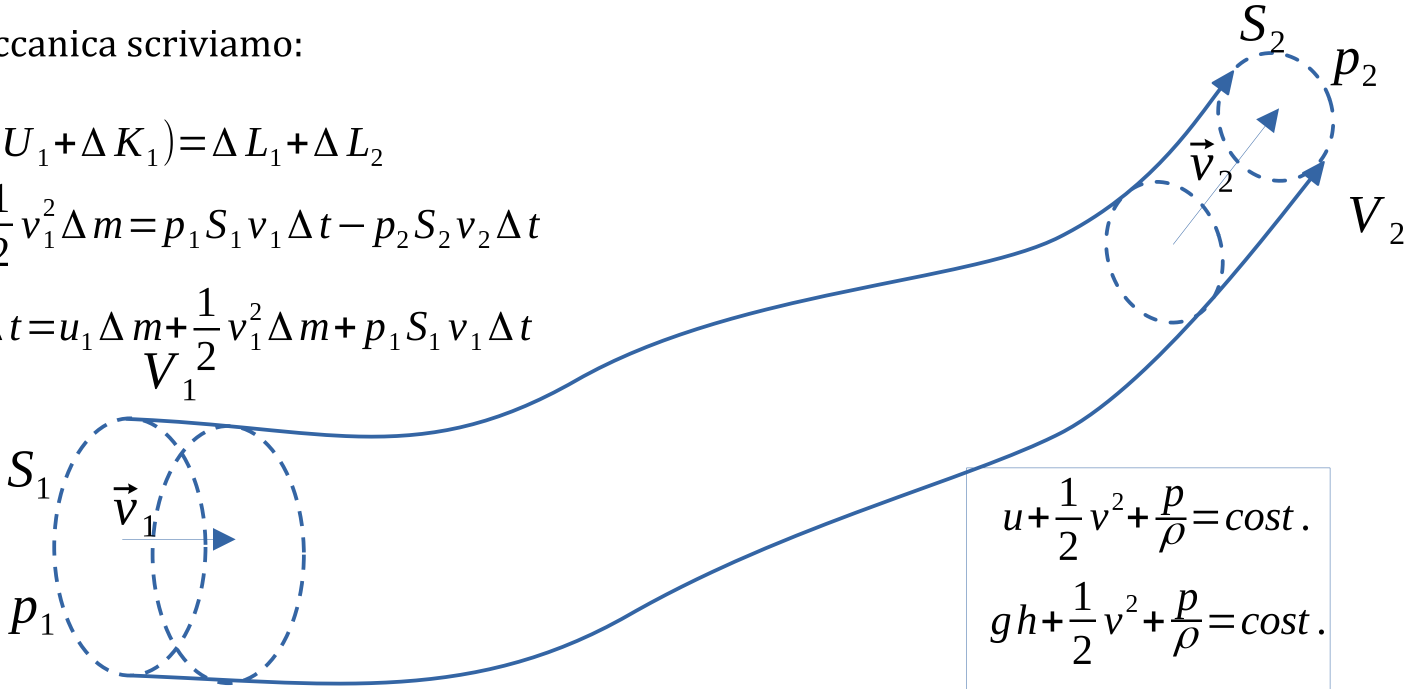
$$(\Delta U_2+\Delta K_2)-(\Delta U_1+\Delta K_1)=\Delta L_1+\Delta L_2$$

$$u_2\Delta m+\frac{1}{2}v_2^2\Delta m-u_1\Delta m-\frac{1}{2}v_1^2\Delta m=p_1 S_1 v_1\Delta t-p_2 S_2 v_2\Delta t$$

$$u_2\Delta m+\frac{1}{2}v_2^2\Delta m+p_2 S_2 v_2\Delta t=u_1\Delta m+\frac{1}{2}v_1^2\Delta m+p_1 S_1 v_1\Delta t$$

$$\Delta m=\rho S_1 v_1\Delta t=\rho S_2 v_2\Delta t$$

$$u_2+\frac{1}{2}v_2^2+\frac{p_2}{\rho}=u_1+\frac{1}{2}v_1^2+\frac{p_1}{\rho}$$



$$u+\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}=cost\,.$$

$$gh+\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}=cost\,.$$

Se l'energia potenziale dipende solo dalla forza peso, possiamo ottenere il caso particolare:

Teorema di Bernoulli

Il teorema di Bernoulli mostra che la somma dell'energia potenziale per unità di massa, dell'energia cinetica e della pressione per unità di densità è costante lungo un tubo di flusso per un liquido perfetto.

In applicazioni idrauliche spesso si considera:

$$\gamma = \rho g$$

$$g h + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} = cost.$$

$$h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = cost.$$

e l'enunciato prende la forma: *la somma dell'altezza geometrica, dell'altezza cinetica e dell'altezza piezometrica è costante in assenza di forze dissipative.*

In un acquedotto o una lunga tubazione, questa somma non è costante e cala lungo il percorso. In prima approssimazione, si può supporre che, per una sezione di acquedotto con tubi tutti identici, essa cada linearmente.

Cadente piezometrica

Se la portata è costante, si ha:

$$v = cost.$$

$$H = h + \frac{p}{\gamma}$$

$$J = -\frac{\partial H}{\partial s}$$ cadente piezometrica

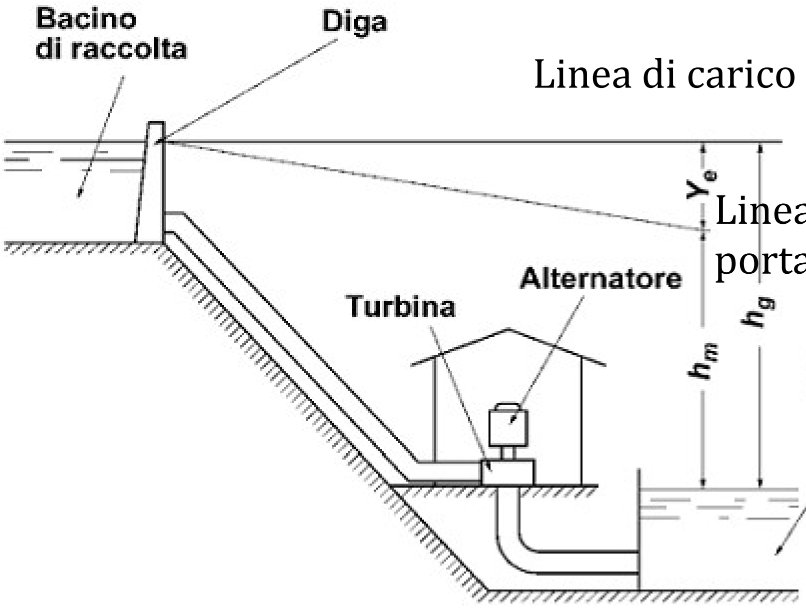
derivata dell'altezza rispetto all'ascissa

Di solito, in regime turbolento e con tubi scabri

$$J = k\frac{Q^2}{D^5}$$

Q = portata
D = diametro tubazione
k = coefficiente di scabrezza del tubo

Schema di un impianto idroelettrico



Linea di carico idrostatico

Linea di carico con portata costante

Non possiamo convertire tutta l'energia potenziale in lavoro alla turbina, ma una parte va dissipata in attrito nei tubi