Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

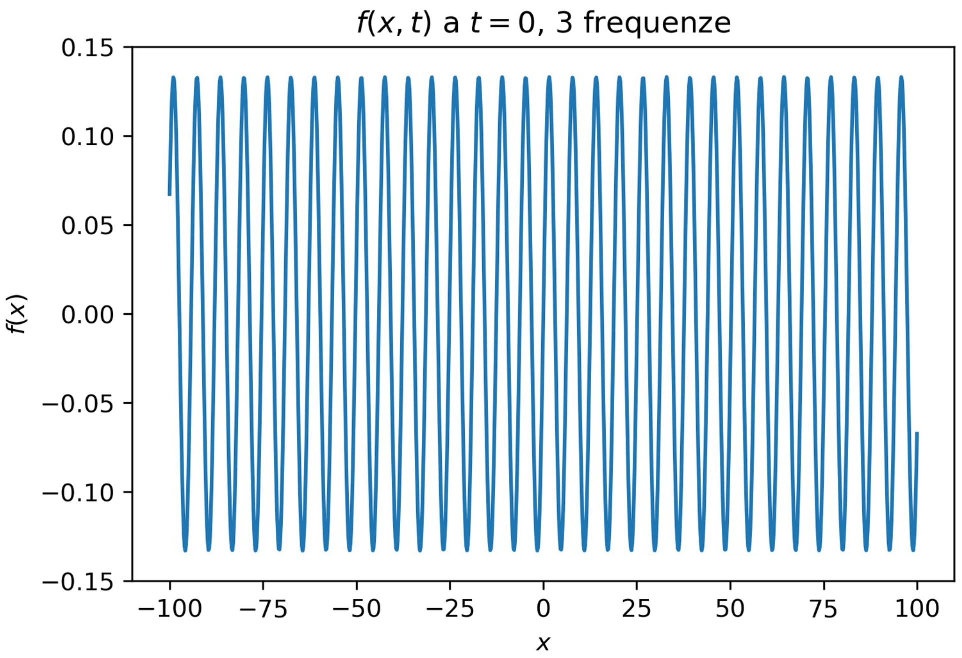
Se, anziché sommare componenti sinusoidali tutte multiple di una frequenza base, sommiamo componenti di frequenze molto simili, possiamo creare quello che si chiama un pacchetto di onde.

$$f(x,t)=\sum_{i}^{N} A_i \sin(k_i x-\omega_i t)$$

per esempio: $\omega_c=10\,Hz\,;$

$$\omega_1=\omega_c-1\,Hz\,,\ \omega_3=\omega_c+1\,Hz\,;\ k_i=\frac{\omega_i}{v}$$

$$A_i=\frac{1}{N\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(\omega_i-\omega_c)^2}{2\sigma^2}}$$



Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

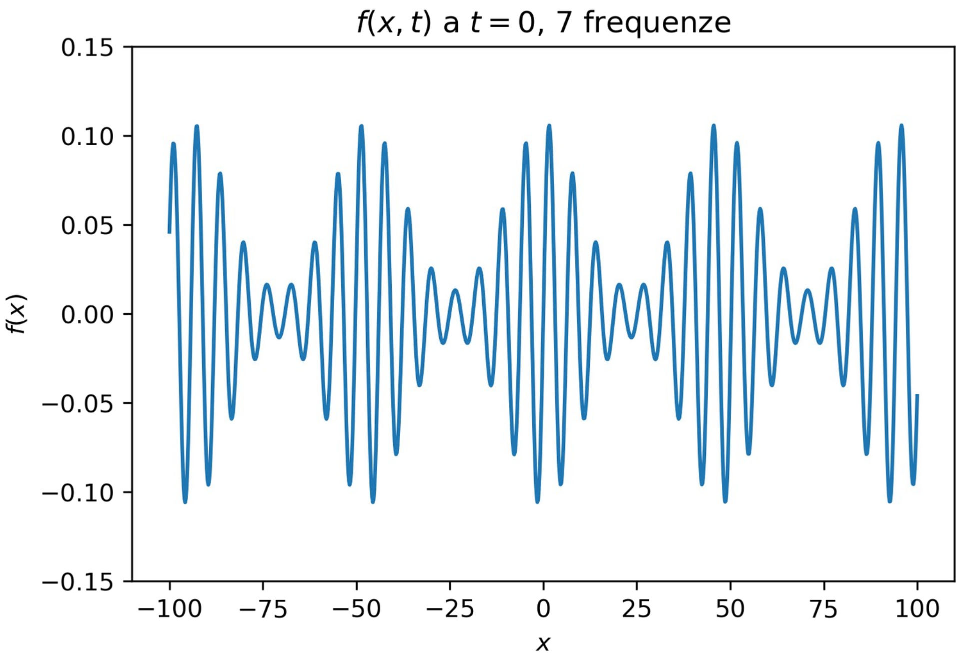
Se, anziché sommare componenti sinusoidali tutte multiple di una frequenza base, sommiamo componenti di frequenze molto simili, possiamo creare quello che si chiama un pacchetto di onde.

$$f(x,t)=\sum_{i}^{N} A_i \sin(k_i x-\omega_i t)$$

per esempio: $\omega_c = 10\,Hz$;

$$\omega_1=\omega_c-1\,Hz\,,\ \omega_7=\omega_c+1\,Hz\,;\ k_i=\frac{\omega_i}{v}$$

$$A_i=\frac{1}{N\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(\omega_i-\omega_c)^2}{2\sigma^2}}$$



Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

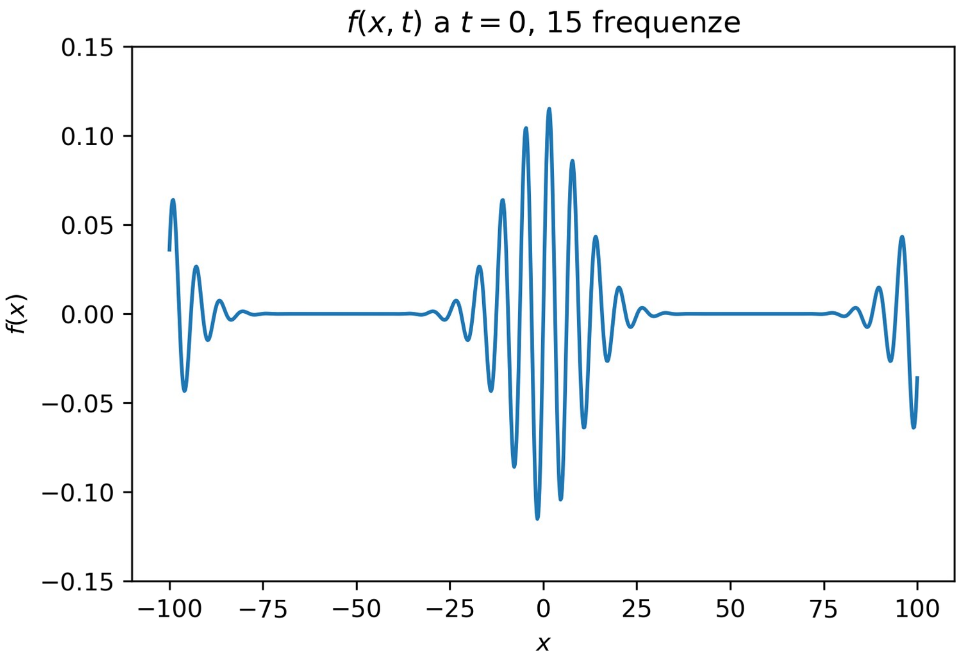
Se, anziché sommare componenti sinusoidali tutte multiple di una frequenza base, sommiamo componenti di frequenze molto simili, possiamo creare quello che si chiama un pacchetto di onde.

$$f(x,t)=\sum_{i}^{N} A_i \sin(k_i x-\omega_i t)$$

per esempio: $\omega_c=10\,Hz$;

$$\omega_1=\omega_c-1\,Hz,\ \omega_{15}=\omega_c+1\,Hz;\ k_i=\frac{\omega_i}{v}$$

$$A_i=\frac{1}{N\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\omega_i-\omega_c)^2}{2\sigma^2}}$$



Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

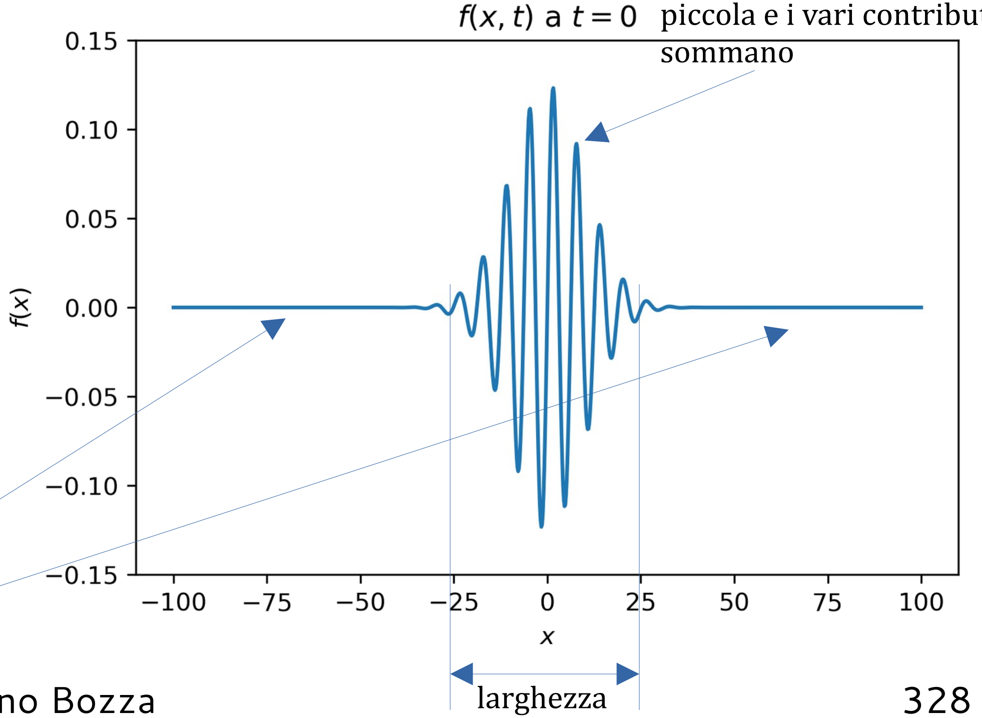
Se, anziché sommare componenti sinusoidali tutte multiple di una frequenza base, sommiamo componenti di frequenze molto simili, possiamo creare quello che si chiama un pacchetto di onde.

$$f(x,t)=\sum_{i}^{N} A_i \sin(k_i x-\omega_i t)$$

per esempio: $\omega_c=10\,Hz$;

$$\omega_1=\omega_c-1\,Hz\,,\ \omega_{1001}=\omega_c+1\,Hz\,;\ k_i=\frac{\omega_i}{v}$$

$$A_i=\frac{1}{N\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(\omega_i-\omega_c)^2}{2\sigma^2}}$$



Qui la differenza di fase è piccola e i vari contributi si sommano

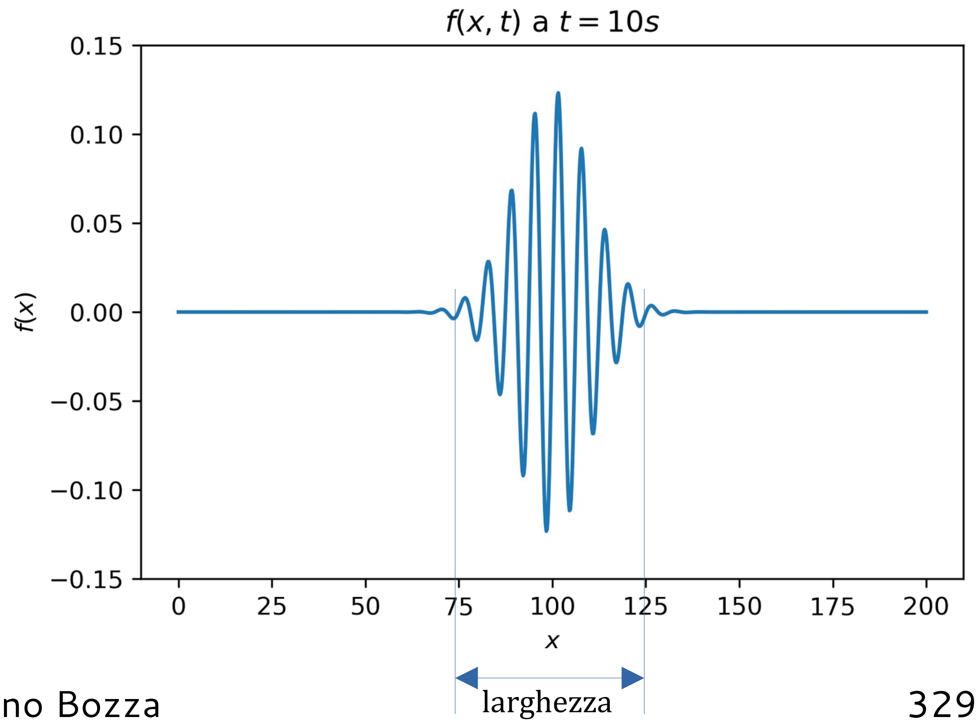
Qui la differenza di fase fa sì che le onde si annullino per interferenza reciproca

Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

Se lasciamo evolvere il pacchetto d'onda per un certo tempo, e per ogni frequenza $k_i = \omega_i / v \quad (v = cost.)$ (il mezzo *non è dispersivo*), esso trasla rimanendo invariato

$$f(x,t) = \sum_i^N A_i \sin(k_i x - \omega_i t)$$



Treni o pacchetti di onde

Per quest'argomento non vanno memorizzati i numeri, ma capiti i concetti.

Consideriamo il caso, abbastanza frequente in realtà, in cui la velocità di propagazione dipenda leggermente dalla frequenza.

$$k_i = \omega_i / v(\omega_i)$$

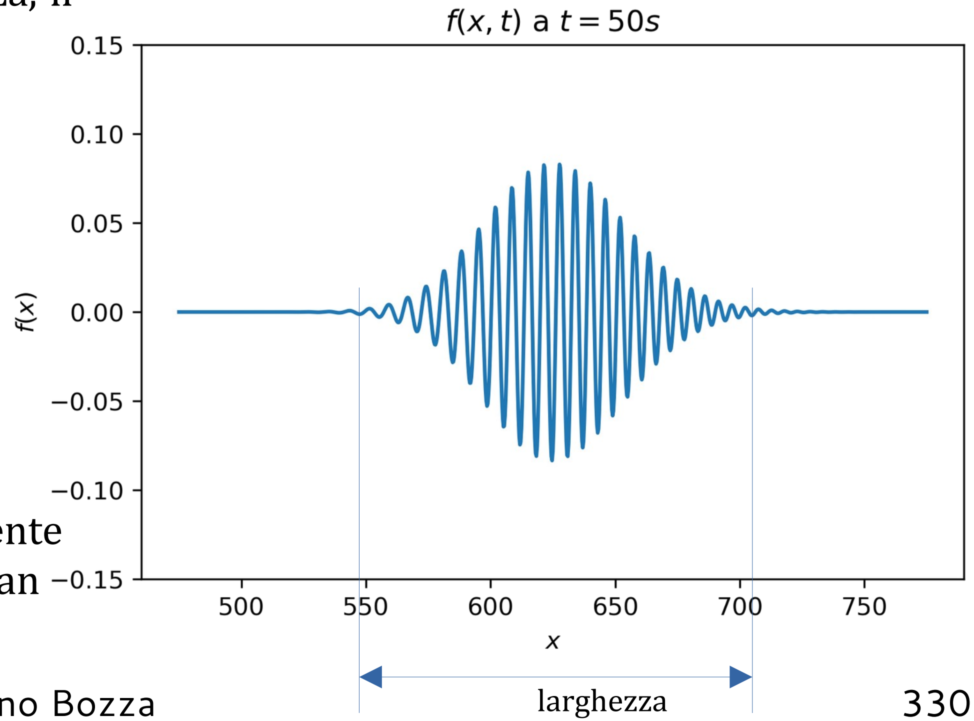
Se la velocità di propagazione dipende dalla frequenza, il mezzo si dice **dispersivo**

Esempio (esagerato!)

$$k = \frac{\omega}{v(\omega_c)\left(1+0.1(\omega-\omega_c)/\omega_c\right)}$$

Dopo $t = 50\ s$, il pacchetto d'onda è circa 3 volte più largo che $t = 0\ s$; inoltre si è ridotto di intensità

In pratica, tutti i mezzi hanno caratteristiche lievemente dispersive, e quindi i pacchetti d'onda si allargano man mano che si allontanano dal punto di produzione



Energia di un'onda

Per ricavare un'espressione dell'energia associata ad un'onda, ritorniamo ad una delle equazioni della corda vibrante, prima del passaggio al limite continuo:

$$m\,\ddot{y}(x)=T\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

L'energia cinetica associata a ciascun punto materiale si ottiene facilmente:

$$K_i=\frac{1}{2}m(\dot{y}(x))^2; \qquad \frac{dK_i}{dx}=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

Per quella potenziale, ricordiamo che si tratta di termini di interazione tra punti materiali, e bisogna evitare i doppi conteggi: quindi includeremo solo l'interazione con $x+\Delta x$ e non con $x-\Delta x$.

$$U(x)=\sum_i \frac{1}{2}T\frac{(y(x_i+\Delta x)-y(x_i))^2}{\Delta x}$$

Energia di un'onda

Verifichiamo l'espressione della forza

$$F(x_i)=-\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{T(y(x_i+\Delta x)-y(x_i))-T(y(x_i)-y(x_i+\Delta x))}{\Delta x}$$

L'energia potenziale associata a ciascun punto materiale si ottiene facilmente:

$$U(x)=\frac{1}{2}T\frac{(y(x_i+\Delta x)-y(x_i))^2}{\Delta x}; \qquad \frac{\Delta U(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2}T\frac{(y(x_i+\Delta x)-y(x_i))^2}{\Delta x^2}$$

E per tratti molto piccoli:

$$\frac{dU}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2}T\frac{(y(x_i+\Delta x)-y(x_i))^2}{\Delta x^2}=\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Energia di un'onda

L'energia meccanica totale di un tratto infinitesimo di corda è $\frac{dE}{dx} = \frac{dK}{dx} + \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

Per un tratto finito abbiamo $\Delta E = \int_{x_i}^{x_f}\left(\frac{dK}{dx} + \frac{dU}{dx}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_f}\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx$

Per un'onda sinusoidale

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dK}{dx} + \frac{dU}{dx} = \left(\frac{1}{2}\mu\,\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) + \frac{1}{2}T\,k^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)\right) =$$
$$= \mu\,\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Ricordiamo che $k = \omega / v$ e $v^2 = T/\mu$

Energia di un'onda

Una **lunghezza d'onda è la distanza coperta dall'onda in un periodo** $L = T\,v = \frac{T\,\omega}{k}$

L'energia contenuta in un tratto corrispondente ad una lunghezza d'onda è:

$$E_L = \int_{x_i}^{x_i+L} \mu\,\omega^2 A^2 \cos^2(k\,x - \omega t)\,dx = \mu\,\omega^2 A^2 \int_{x_i}^{x_i+L} \cos^2(k\,x - \omega t)\,dx =$$

$$= \mu\,\omega^2 A^2 \int_{x_i}^{x_i+L} \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2k\,x - 2\,\omega t)\right]dx = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 A^2 L$$

L'energia è sempre la stessa in qualsiasi tratto di lunghezza pari ad una lunghezza d'onda. L'energia media è:

$$\frac{\Delta \bar{E}}{\Delta x} = \frac{E_L}{L} = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 A^2$$

Quindi non c'è un reale trasporto di energia e informazione.

Nota: l'energia in un'onda dipende sempre dal quadrato dell'ampiezza.

Energia di un'onda

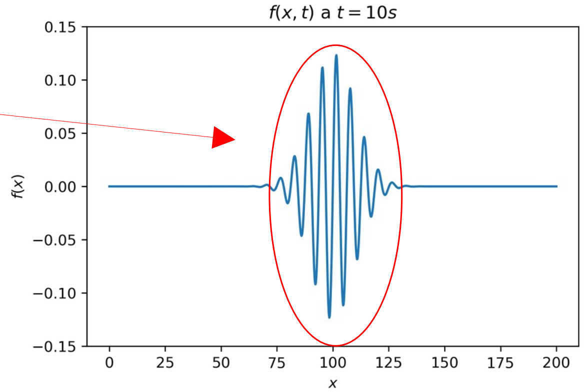
La densità di energia in ciascun tratto tra due nodi (passaggio per 0) è sempre la stessa.

Quindi non c'è trasporto di energia!

Un'onda sinusoidale infinita non trasporta energia!

$$\Delta E=\int_{x_i}^{x_f}\left(\frac{dK}{dx}+\frac{dU}{dx}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_f}\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

Consideriamo l'integrando per un pacchetto d'onda: è diverso da 0 solo in questa regione



Ma le componenti dell'onda si estendono all'infinito!

Un treno d'onda o pacchetto d'onda è fatto di componenti estese all'infinito, ma la sua energia è concentrata in una regione finita, ed effettivamente viaggia!

Energia e potenza di un'onda

Ritorniamo a considerare un pacchetto in un mezzo dispersivo

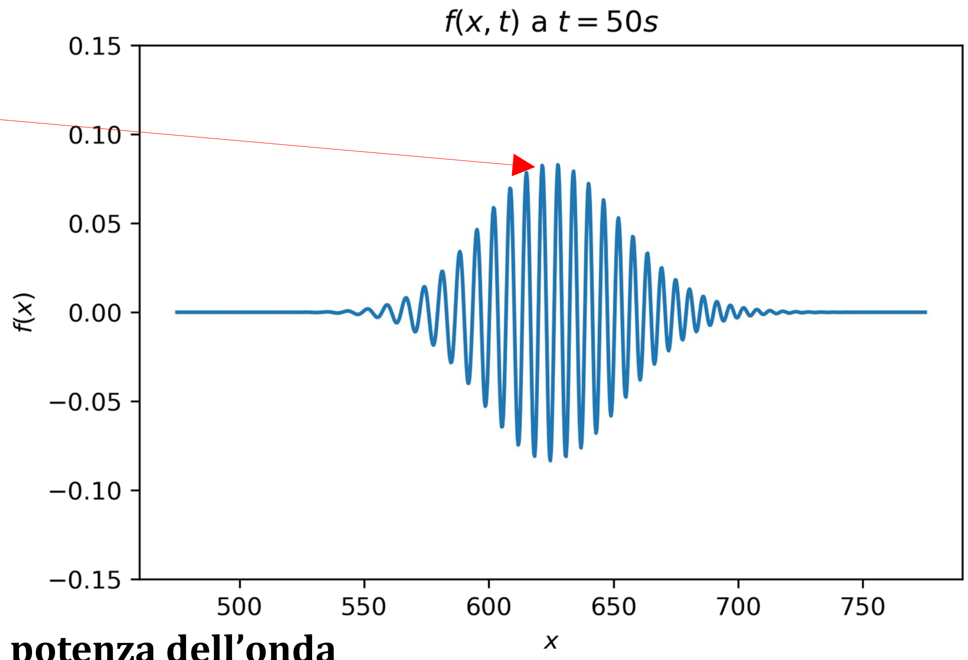
La velocità con cui viaggia l'energia del pacchetto è la velocità con cui si sposta il punto di massima ampiezza.

Questo non coincide necessariamente con nessuna delle velocità di propagazione di ciascuna delle componenti

Velocità di fase: velocità di propagazione di una sola componente dell'onda.

Velocità di gruppo: velocità di propagazione dell'energia del treno di onde

Le due velocità sono in generale diverse!



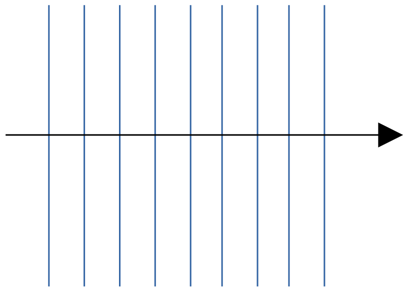
L'energia trasportata da un'onda per unità di tempo si dice potenza dell'onda

Tutte queste considerazioni svolte per la corda vibrante valgono per qualsiasi onda meccanica (e non solo).

Onde nello spazio

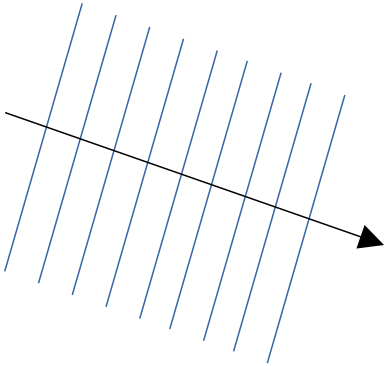
Fronte d'onda = luogo geometrico dei punti dello spazio in cui l'onda ha la stessa fase

Onde piane: fronte d'onda piano



$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$$

Equazione delle onde nello spazio



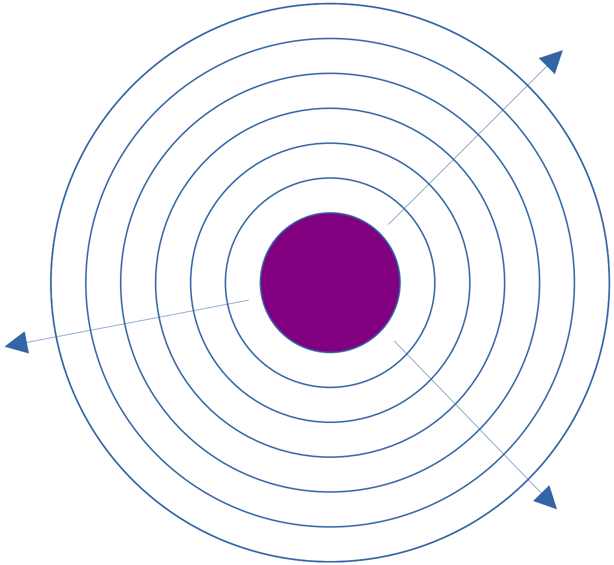
$$f(x,y,z,t)=A\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi\right)$$

$$\vec{k}=k_x\hat{e}_x+k_y\hat{e}_y+k_z\hat{e}_z : \text{vettore d'onda}$$

Onde nello spazio

Fronte d'onda = luogo geometrico dei punti dello spazio in cui l'onda ha la stessa fase

Onde sferiche: fronte d'onda sferico



Equazione delle onde nello spazio

$$f(x,y,z,t)=\frac{A}{\|\vec{r}\|}\sin\left(k\|\vec{r}\|-\omega t+\phi\right)$$

Area di un fronte d'onda: $4\pi\|\vec{r}\|^2$

$$4\pi\|\vec{r}\|^2|f|^2=4\pi A^2$$

il flusso di energia è costante da un fronte all'altro

Richiami ed argomenti correlati

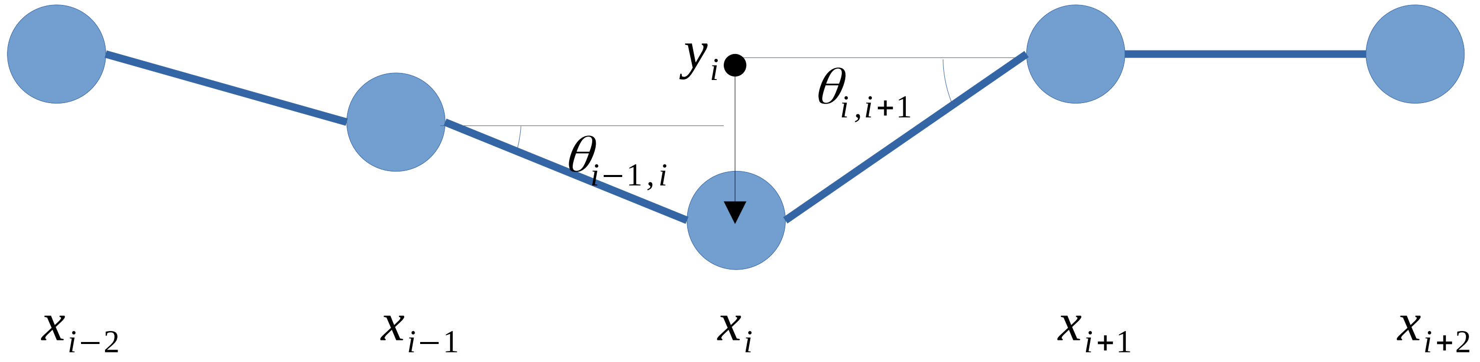
ONDE

Onde meccaniche

Il concetto di onda è legato alla propagazione di una perturbazione in un mezzo. Si parla di onda se la perturbazione ha una velocità e modalità di propagazione ben definite e tali da poter veicolare l'informazione in maniera fedele, ossia con distorsioni minime o prevedibili.

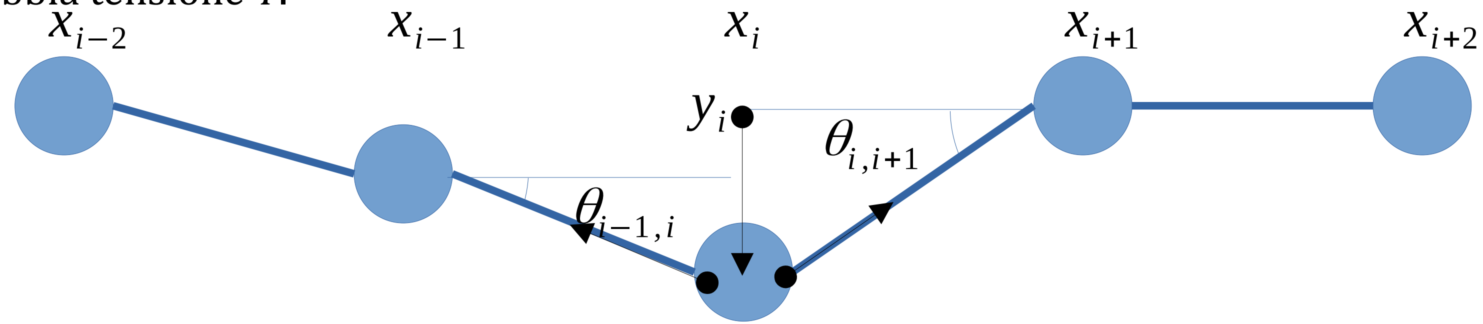
In Fisica si incontrano diversi tipi di onde: vedremo le onde meccaniche e le onde di pressione (acustiche) in questo corso, ma vi sono anche altri tipi di onde, come le onde elettromagnetiche.

Partiamo da una semplice catena di punti materiali che possono muoversi solo lungo *y*, connessi da corde tese.



Onde meccaniche

Supponiamo che i punti materiali abbiano tutti la stessa massa e siano equispaziati a distanza Δx e che ogni tratto di corda abbia tensione T.



L'equazione della dinamica del singolo punto materiale su y si scrive: $m_i \ddot{y}_i = T \sin\theta_{i,i+1} + T \sin\theta_{i-1,i}$

Supponiamo le deviazioni piccole, quindi $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$

$$\sin\theta_{i,i+1} \simeq \frac{[y_{i+1} - y_i]}{\Delta x} = \frac{[y(x+\Delta x) - y(x)]}{\Delta x} \qquad \sin\theta_{i-1,i} \simeq \frac{[y_{i-1} - y_i]}{\Delta x} = \frac{[y(x-\Delta x) - y(x)]}{\Delta x}$$

Onde meccaniche

Supponiamo i punti materiali siano equispaziati, a distanza *Δx* e che la corda abbia tensione *T*.

$$m\ddot{y}_i = T\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}+\frac{y(x-\Delta x)-y(x)}{\Delta x}\right] = T\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

Possiamo introdurre la densità lineare di massa: $m=\mu\Delta x$

$$\mu\Delta x\,\ddot{y}(x,t) = T\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]\Rightarrow$$

$$\mu\ddot{y}(x,t) = T\frac{\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$$

Onde meccaniche

Adesso rendiamo l'intervallo tra i punti materiali sempre più piccolo, fino ad avere infiniti punti

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mu \ddot{y}(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} T \frac{\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x} \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 ; \quad poniamo\, v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

Otteniamo l'**equazione delle onde.** La soluzione generale di quest'equazione è

$$y(x,t) = Y_p(x - vt) + Y_r(x + vt)$$

Onde meccaniche

Le funzioni Y_p e Y_r sono rispettivamente una soluzione **progressiva** e una **regressiva**, corrispondentemente al verso di propagazione.

Le due soluzioni sono *funzioni completamente libere*, con la sola condizione che abbiano derivate seconde spaziali e temporali. In pratica qualsiasi soluzione fisicamente accettabile è possibile.

La corda fatta di infiniti punti materiali e con una certa tensione è in grado di propagare qualunque pacchetto di informazione.

La velocità di propagazione dipende dalla tensione e dalla densità lineare di massa della corda.

In particolare, possiamo considerare le soluzioni:

$$Y_p(x-vt)=A\sin\omega(x/v-t)=A\sin(kx-\omega t);\quad Y_r(x+vt)=A\sin\omega(x/v+t)=A\sin(kx+\omega t)$$

$$k=\frac{2\pi}{L}\text{ vettore d'onda };L=\text{lunghezza d'onda}$$

Onde meccaniche

Tutte le combinazioni lineari di onde progressive e regressive sono soluzioni ammissibili.

In particolare consideriamo:

$$y(x,t)=A[\sin(kx-\omega t)+\sin(kx+\omega t)]=$$
$$=A[\sin(kx)\cos(\omega t)-\sin(\omega t)\cos(kx)+\sin(kx)\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\cos(kx)]$$

Si ottiene la soluzione di **onde stazionarie**, ossia quelle la cui posizione di nodi (zeri), creste e ventri non varia.

$$\boxed{Y_s(x,t)=2A\sin(kx)\cos(\omega t)}$$

Onde meccaniche

In sintesi:

$$\text{Onda progressiva: } Y_p(x,t) = A \sin \omega(x/v - t)$$

$$\text{Onda regressiva: } Y_r(x,t) = A \sin \omega(x/v + t)$$

$$\text{Onda stazionaria: } Y_s(x,t) = 2A \sin \omega x/v \cos(\omega t)$$

Le onde meccaniche dovute alla tensione di una corda vibrante sono **trasversali**: il vettore spostamento è *ortogonale* all'asse di propagazione.

Se questa fune è ancorata agli estremi, sono ammissibili solo le funzioni che si annullano agli estremi. Quindi il numero d'onda deve essere del tipo :

$$k L = \omega L / v = n\pi, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; k = \frac{n\pi}{L}$$

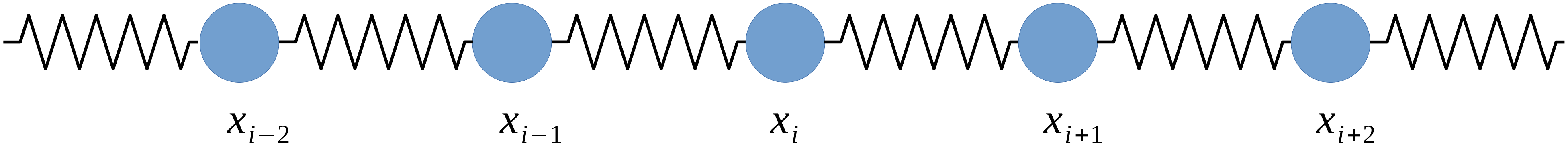
Questi sono i **modi normali di vibrazione**, ossia moti in cui tutte le parti del sistema si muovono di moto oscillatorio con la stessa frequenza.

Onde meccaniche

Consideriamo un altro sistema meccanico: una serie di punti materiali tutti di massa *m*, connessi da molle tutte uguali di costante elastica *k*, e che possono spostarsi solo sull'asse *x*.

x_i: coordinata x dell'i-esimo punto in condizione di riposo
ξ_i: spostamento x dell'i-esimo punto dalla condizione di riposo

$$m\ddot{\xi}_i = k(\xi_{i-1} - \xi_i) + k(\xi_{i+1} - \xi_i) = k[(\xi_{i+1} - \xi_i) - (\xi_i - \xi_{i-1})]$$



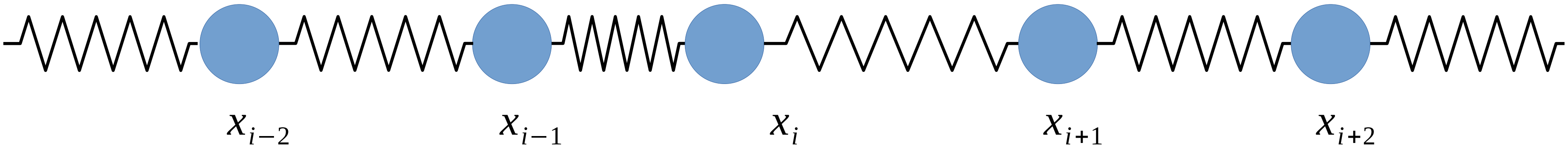
Onde meccaniche

Elaboriamo l'equazione ragionando in termini di densità di massa e di modulo elastico

$$m\,\ddot{\xi}_i = k[(\xi_{i+1}-\xi_i)-(\xi_i-\xi_{i-1})] \Rightarrow \mu\,\Delta x\,\xi_i = k[(\xi_{i+1}-\xi_i)-(\xi_i-\xi_{i-1})]$$

$$\mu\,\ddot{\xi}_i = k\left[\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{\Delta x}-\frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{\Delta x}\right]$$

Ricordiamo che la costante elastica k è legata al modulo di Young: $$k=\frac{E\,A}{L_0}=\frac{E\,A}{\Delta x}$$



Onde meccaniche

Elaboriamo l'equazione ragionando in termini di densità di massa e di modulo elastico

$$\mu\,\ddot{\xi}_i = k\left[\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{\Delta x}-\frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{\Delta x}\right] = E\,A\,\frac{\left[\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{\Delta x}-\frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$$

Anche in questo caso possiamo aumentare indefinitamente il numero dei punti materiali accorciando le molle:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\mu\,\ddot{\xi}_i = E\,A\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{\Delta x}-\frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{\Delta x}\right]}{\Delta x} = E\,A\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = E\,A\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,;\quad v=\sqrt{\frac{E\,A}{\mu}}\,;\quad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0}$$

Onde meccaniche

Otteniamo ancora un'equazione delle onde

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=0$$

La forma matematica delle soluzioni è sempre la stessa.

In questo caso si tratta di onde **longitudinali** poiché lo spostamento è parallelo alla direzione di propagazione dell'onda.