Conservazione dell’energia meccanica

Consideriamo un punto materiale soggetto solo all’azione di forze conservative.

Dal teorema dell’energia cinetica abbiamo: $$L(\vec{r}_i,\vec{r}_f)=K_f-K_i$$

Inoltre, poiché le forze sono tutte conservative, abbiamo: $$L(\vec{r}_i,\vec{r}_f)=U(\vec{r}_i)-U(\vec{r}_f)$$

Segue che:

$$K_f-K_i=U(\vec{r}_i)-U(\vec{r}_f)$$
$$K_f+U(\vec{r}_f)=K_i+U(\vec{r}_i)$$
$$E_f=E_i$$

avendo definito l’energia meccanica come somma dell’energia cinetica e potenziale ad ogni istante.

$$E=K(v)+U(\vec{r})$$

L’energia meccanica di un punto materiale soggetto solo all’azione di forze conservative rimane costante (*si conserva*).

Non conservazione dell'energia meccanica

Supponiamo di avere in gioco sia forze conservative che dissipative:

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo: $L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = K_f - K_i$

Inoltre, per le forze conservative, abbiamo: $L_{cons}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f)$

Per le forze dissipative: $L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) \leq 0$

Dal teorema delle forze vive:

$$K_f - K_i = L_{cons}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) + L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f) + L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f)$$
$$\left(K_f + U(\vec{r}_f)\right) - \left(K_i + U(\vec{r}_i)\right) = L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) \leq 0$$
$$E_f - E_i = L_{diss} \leq 0$$

L'energia meccanica di un punto materiale soggetto all'azione di forze dissipative non si conserva.

Lavoro ed energia cinetica: il teorema delle “forze vive”

Consideriamo il lavoro della risultante di tutte le forze agenti su un punto materiale, su un cammino parametrizzato con il tempo:

$$L=\int_{s_i}^{s_f}\vec{F}(s)\cdot\vec{ds}=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\cdot\frac{\vec{ds}}{dt}dt=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)\,dt$$

Dal II principio si ha: $$\vec{F}(t)=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

e sostituendo nell’integrale:

$$L=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)\,dt=\int_{t_i}^{t_f}m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\cdot\vec{v}(t)\,dt=\int_{v_i}^{v_f}m\,d\vec{v}\cdot\vec{v}=\int_{v_i^2}^{v_f^2}\frac{m}{2}d\,v^2=\frac{1}{2}m v_2^2-\frac{1}{2}m v_1^2$$

Lavoro ed energia cinetica: il teorema delle “forze vive”

Si può scrivere che

$$L=\Delta K=K_2-K_1$$

$$K_1=\frac{1}{2}m v_1^2$$

$$K_2=\frac{1}{2}m v_2^2$$

Il lavoro della risultante di tutte le forze agenti su un punto materiale è pari alla variazione dell’energia cinetica del punto materiale; l’energia cinetica (o “forza viva”), è definita come $\frac{1}{2} mv^2$, e dipende quindi solo dallo stato cinetico del punto materiale.

In molti problemi è sufficiente valutare la variazione di energia cinetica tra due istanti, oppure il lavoro di una forza si può calcolare soltanto dalla variazione di energia cinetica, *evitando completamente di svolgere l’integrale lungo il cammino*.

La parola energia significa “ενέργεια” ossia “εν-έργον”, “lavoro dentro” o “qualcosa che ha dentro la capacità di compiere lavoro”. L’energia si misura in Joule. A volte si usa anche il kWh = 1000 W × 3600 s = 3,6 MJ

Lavoro ed energia

Il lavoro

Il concetto di lavoro in meccanica classica, nella descrizione Newtoniana, è un concetto accessorio rispetto alla risoluzione dei due problemi della dinamica. Tuttavia, consente di aprire una visione diversa e di introdurre il concetto di energia. In altre branche della fisica o in altre descrizioni, l'energia diventa un concetto fondamentale, molto più di quello di forza.

Il lavoro di una forza che agisce su un punto materiale mentre esso si sposta di un vettore **Δs** è: $\boxed{L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}}$

*Il lavoro ha dimensioni **[M][L²][T⁻²]** e si misura in Joule (J). 1 J = 1 N × 1 m.*

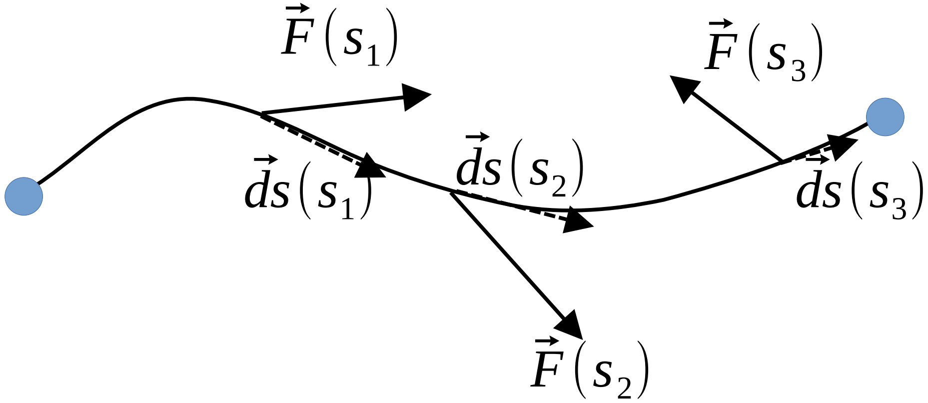
Spesso accade che durante lo spostamento la forza vari in modulo, direzione e/o verso. Se la forza è costante a tratti, si può spezzare il cammino in modo che il il lavoro totale sia la somma dei lavori calcolati in ciascun tratto:

$$L = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$$

Il lavoro

In generale, la forza può continuamente cambiare in modulo, direzione e verso, e si può considerare costante solo per spostamenti infinitesimi. Si definisce il lavoro elementare e poi quello finito come somma infinita di lavori elementari, ossia un integrale **svolto sul cammino Γ che il punto materiale compie tra un punto iniziale ed uno finale.**

$$\boxed{dL=\vec{F}\cdot d\vec{s}\,; \qquad L=\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{s}}$$



Il lavoro

Come si fa un "integrale su un cammino"?

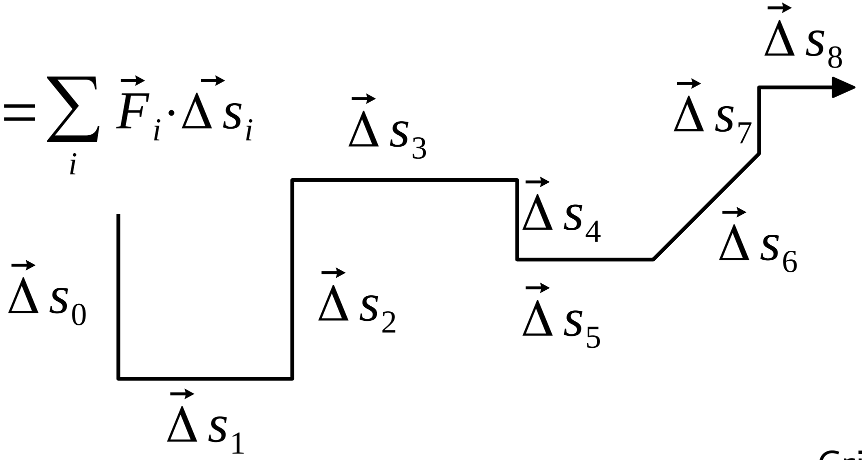
Abbiamo bisogno di descrivere il cammino in funzione di un parametro.

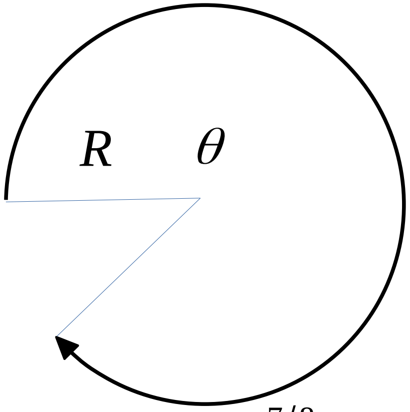
Ci sono sempre almeno un paio di opzioni di facile applicazione:

1) L'ascissa curvilinea

2) Il tempo

$$L=\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta} s_i$$





$$s=R\,\theta$$
$$\vec{r}=-R\cos\theta\,\hat{i}+R\sin\theta\,\hat{j}$$
$$\vec{d}s=(R\sin\theta\,\hat{i}+R\cos\theta\,\hat{j})\,d\,\theta$$

$$L=\int_0^{7/8\pi}\vec{F}(\theta)\cdot(R\sin\theta\,\hat{i}+R\cos\theta\,\hat{j})\,d\,\theta$$

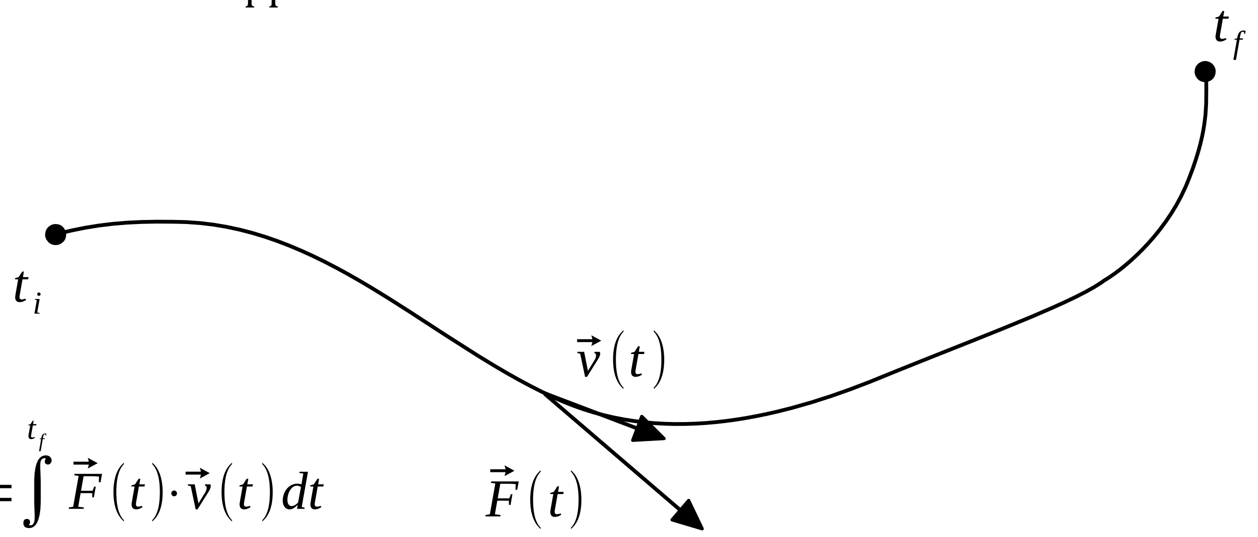
Il lavoro

Come si fa un "integrale su un cammino"?

Abbiamo bisogno di descrivere il cammino in funzione di un parametro.

Ci sono sempre almeno un paio di opzioni di facile applicazione:

1) L'ascissa curvilinea
2) Il tempo



$$L=\int_{s_i}^{s_f}\vec{F}(t)\cdot\vec{ds}(t)=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\cdot\frac{\vec{ds}}{dt}dt=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)dt$$