Oscillatore armonico

Supponiamo di aggiungere una forza costante $F - k\,x = m\,\ddot{x}$

Ridefiniamo la coordinata x intorno ad una nuova condizione di riposo

$$\xi = x - \frac{F}{k}; \qquad x = \xi + \frac{F}{k}; \qquad \dot{\xi} = \dot{x}; \qquad \ddot{\xi} = \ddot{x}$$

Otteniamo:

$$-k\,\xi = m\,\ddot{\xi}; \qquad \ddot{\xi} + \frac{k}{m}\,\xi = 0$$

L'equazione è la stessa, ma la posizione di riposo è spostata di F/k.

Oscillatore armonico

Supponiamo di aggiungere una forza oscillante $F_{osc} - k\,x = m\,\ddot{x}\,; \qquad F_{osc} = F\sin(\omega t)$

Attenzione! In generale, $\omega \neq \omega_0$

Studiamo quindi l'**oscillatore armonico forzato** con una forzante sinusoidale

$$F_{osc} = k\,x + m\,\ddot{x}\,; \qquad \frac{F}{m}\sin(\omega t) = \ddot{x} + \frac{k}{m}x$$

$$a_f = \frac{F}{m}\,; \qquad a_f \sin(\omega t) = \ddot{x} + \omega_0^2 x$$

Questa è un'**equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti,** <u>**non omogenea**</u> (perché *x = 0* non è una soluzione accettabile)

Si dimostra che se conosciamo una soluzione $x_p(t)$ *, detta integrale particolare,* la soluzione generale sarà della forma

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) + x_p(t)$$

Oscillatore armonico

Le costanti A e B vanno fissate con le condizioni iniziali, ma tenendo conto anche di $x_p(t)$.

È molto interessante cercare un integrale particolare. Pertanto, disinteressiamoci completamente di A e B e concentriamoci su questo. Proponiamo:

$$x_P(t) = C\sin(\omega t); \qquad \text{nota: } \omega \neq \omega_0$$

Sostituendo nell'equazione si ha: $$a_f \sin(\omega t) = \ddot{x}_P + \omega_0^2 x_P$$

ossia: $$a_f \sin(\omega t) = -\omega^2 C\sin(\omega t) + C\,\omega_0^2 \sin(\omega t)$$

Questo dev'essere vero per ogni tempo t, quindi possiamo considerare in particolare $t = \pi/(2\omega)$ e avere

$$a_f = C(\omega_0^2 - \omega^2) \Rightarrow C = \frac{a_f}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Oscillatore armonico

Studiamo come varia la funzione $|C/a_f|$, che ha il significato di una risposta del sistema ad una sollecitazione.

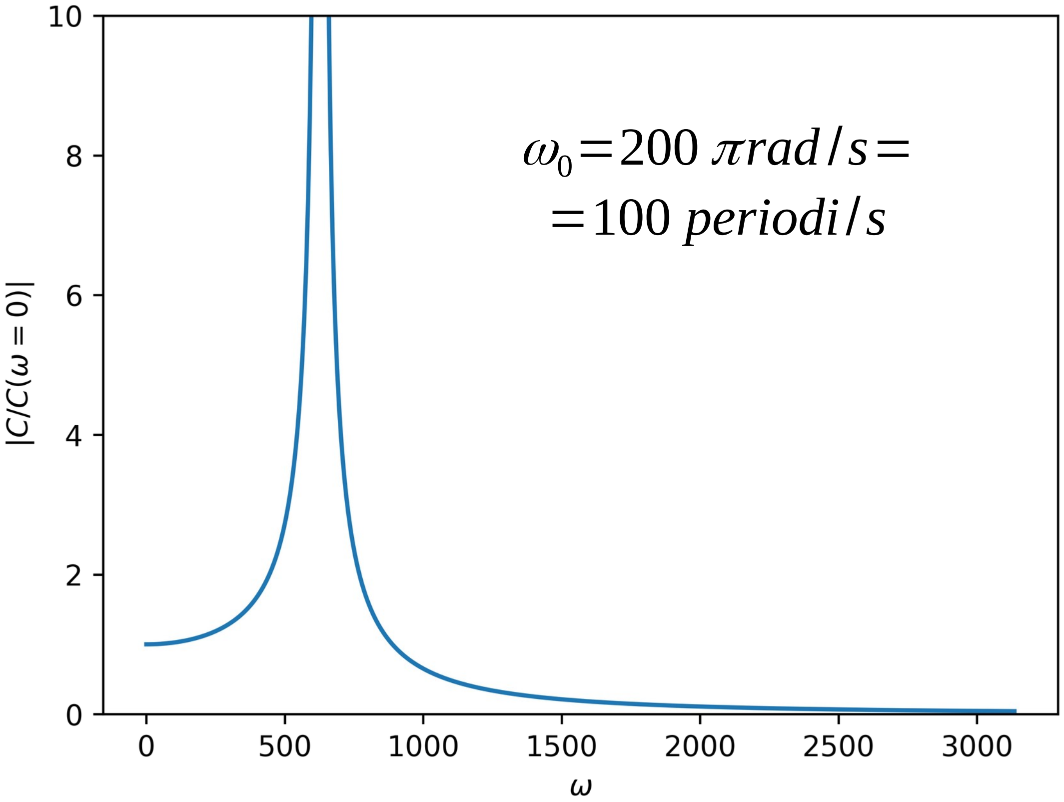
$$\frac{C(\omega)}{a_f}=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2};\qquad \frac{C(\omega)}{C(0)}=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Notiamo anche che

$$\frac{C(\omega)}{C(0)}>0\ per\ \omega<\omega_0$$
$$\frac{C(\omega)}{C(0)}<0\ per\ \omega>\omega_0$$

Per $\omega\to\omega_0$ la risposta diverge, e non è definita quando vale l'uguaglianza

Si parla in tal caso di **risonanza = incremento della risposta in prossimità della frequenza caratteristica**



$$\omega_0=200\ \pi rad/s=$$
$$=100\ periodi/s$$

Oscillatore armonico

Nel caso di perfetta risonanza, l'integrale particolare assume una forma diversa

$$x_P(t)=t\,C\cos(\omega_0 t);\,\dot{x}_P(t)=C\cos(\omega_0 t)-\omega_0 C\,t\sin(\omega_0 t);\,\ddot{x}_P(t)=-2\,\omega_0 C\sin(\omega_0 t)-\omega_0^2 C\,t\cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{F}{m}\sin(\omega_0 t)=-2\,\omega_0 C\sin(\omega_0 t)-\omega_0^2 C\,t\cos(\omega_0 t)+\omega_0^2 t\,C\cos(\omega_0 t)=-2\,\omega_0 C\sin(\omega_0 t)$$

$$C=-\frac{F}{2\,m\,\omega_0}$$

$$\begin{gathered}\textit{Quindi per la fase } \phi\text{:}\\ \phi=0\ per\ \omega<\omega_0\\ \phi=\frac{-\pi}{2}\ per\ \omega=\omega_0\\ \phi=-\pi\ per\ \omega>\omega_0\end{gathered}$$

In caso di perfetta risonanza, l'ampiezza dell'oscillazione aumenta col tempo. Qualsiasi sistema finisce per rompersi.

L'oscillatore armonico smorzato

Consideriamo adesso una sollecitazione forzante sinusoidale

$$F_{elast,x}+F_{diss,x}+F_{osc}=m\,a_x; \qquad -k\,x-b\,v_x+F_0\sin(\omega t)=m\,a_x; \qquad k\,x+b\,\dot{x}+m\,\ddot{x}=F_0\sin(\omega t);$$

$$\frac{k}{m}x+\frac{b}{m}\dot{x}+\ddot{x}=\frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$\omega_0^2 x+\gamma\dot{x}+\ddot{x}=F_0\,\omega_0^2\sin(\omega t)$$

$$\omega_0^2 x+\gamma\dot{x}+\ddot{x}=f\sin(\omega t)$$

Proponiamo un integrale particolare della forma

$$x_p(t)=\begin{cases}\omega\neq\omega_0\Rightarrow A\sin(\omega t+\phi)\\ \omega=\omega_0\Rightarrow(A+B\,t)\cos(\omega t) \quad \text{trascureremo questo caso}\end{cases}$$

L'oscillatore armonico smorzato

Sostituiamo ed usiamo la formula di addizione

$$\omega_0^2 A \sin(\omega t+\phi) + \gamma\omega A\cos(\omega t+\phi) - \gamma^2 A \sin(\omega t+\phi) = f\sin(\omega t) \quad \forall t$$

$$\omega_0^2 A \sin(\omega t)\cos\phi + \omega_0^2 A\cos(\omega t)\sin\phi + \gamma\omega A\cos(\omega t)\cos\phi - \gamma\omega A\sin(\omega t)\sin\phi +$$

$$-\omega^2 A\sin(\omega t)\cos\phi - \omega^2 A\cos(\omega t)\sin\phi = f\sin(\omega t)$$

Raccogliamo i termini in seno e coseno

Questi calcoli
non vanno svolti per l'esame
orale. Studiare i concetti.

$$x_p(t) = \begin{cases} \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\phi - \gamma\omega\sin\phi\right) A = f \\ \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\phi + \gamma\omega\cos\phi\right) A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\phi = \dfrac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ A = \dfrac{f}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi - \gamma\omega\sin\phi} \end{cases}$$

L'oscillatore armonico smorzato

Scriviamo seno e coseno in funzione della tangente

$$x_p(t)=\begin{cases}\tan\phi=\dfrac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\\ A=\dfrac{f}{(\omega_0^2-\omega^2)\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}-\gamma\omega\dfrac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}}\end{cases}$$

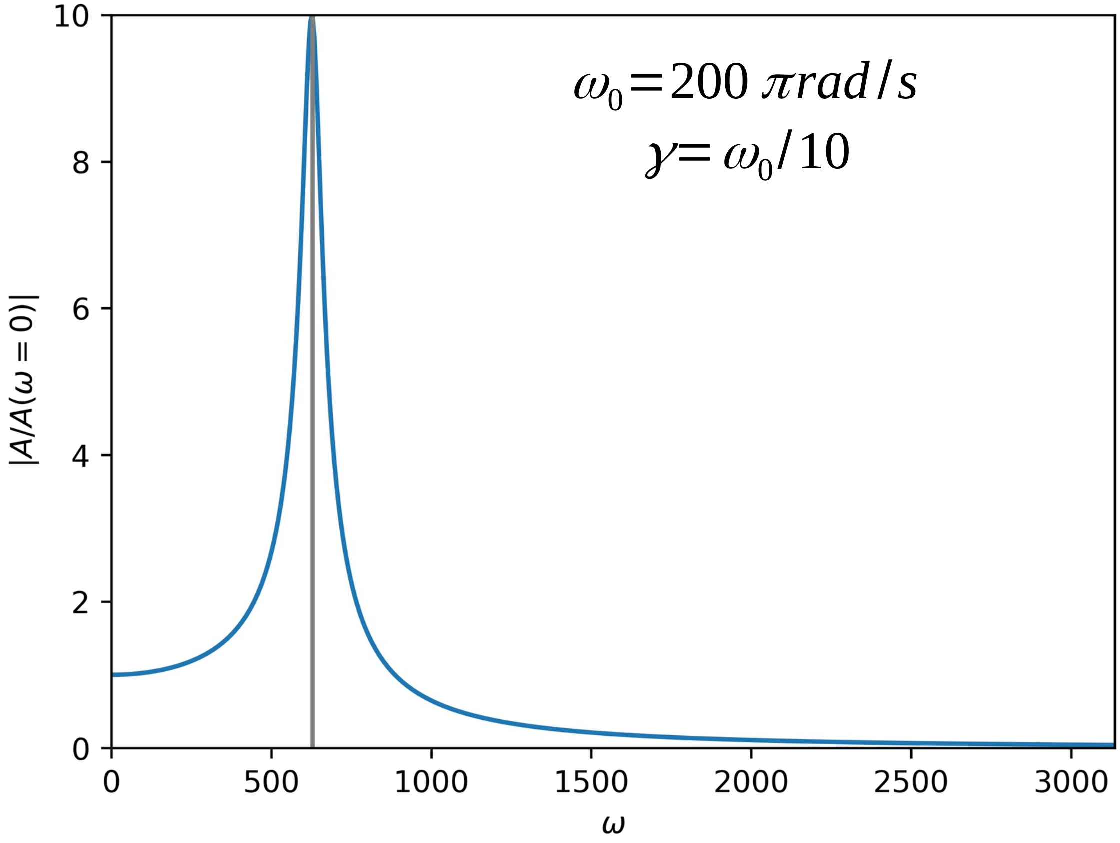
Questi calcoli
non vanno svolti per l'esame
orale. Studiare i concetti.

$$x_p(t)=\begin{cases}\tan\phi=\dfrac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\\ A=\dfrac{f\sqrt{1+\tan^2\phi}}{(\omega_0^2-\omega^2)+\dfrac{(\gamma\omega)^2}{\omega_0^2-\omega^2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan\phi=\dfrac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\\ A=\dfrac{f\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega_0^2}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan\phi=\dfrac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\\ A=\dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}\end{cases}$$

L'oscillatore armonico smorzato

Risposta in funzione della pulsazione

$$\begin{cases} \tan\phi = \dfrac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \\ A = \dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}} \end{cases}$$



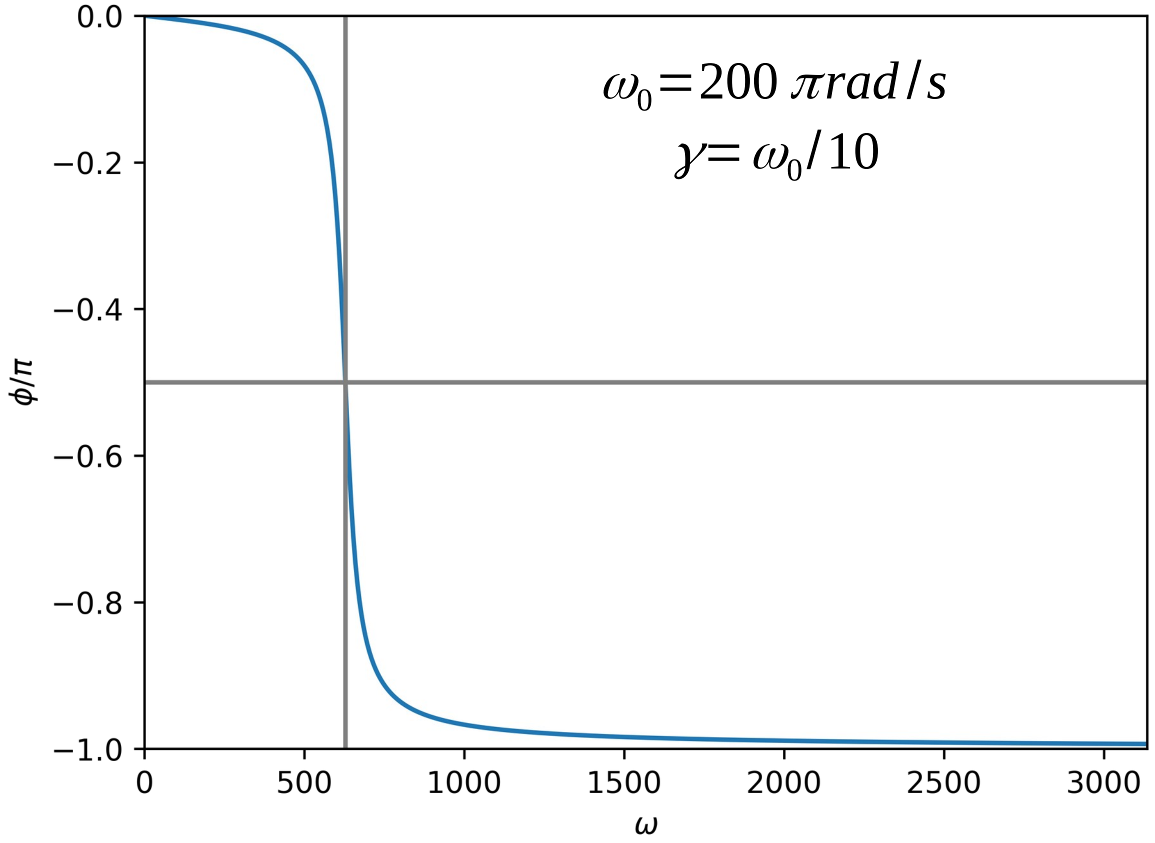
Anche l'oscillatore armonico smorzato esibisce il fenomeno della **risonanza**

L'oscillatore armonico smorzato

Sfasamento in funzione della pulsazione

$$\begin{cases} \tan\phi = \dfrac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \\ A = \dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}} \end{cases}$$

Alla risonanza, lo sfasamento tra forzante e risposta è di π/2 (90°)



Ricordiamo l'oscillatore armonico

Si può ottenere mettendo lo smorzamento a 0

$$\frac{C(\omega)}{a_f} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}; \qquad \frac{C(\omega)}{C(0)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Notiamo anche che

$$\frac{C(\omega)}{C(0)} > 0 \; per \; \omega < \omega_0$$

$$\frac{C(\omega)}{C(0)} < 0 \; per \; \omega > \omega_0$$

Per $\omega \rightarrow \omega_0$ la risposta diverge, e non è definita quando vale l'uguaglianza