Il Teorema di Carnot – parte 1

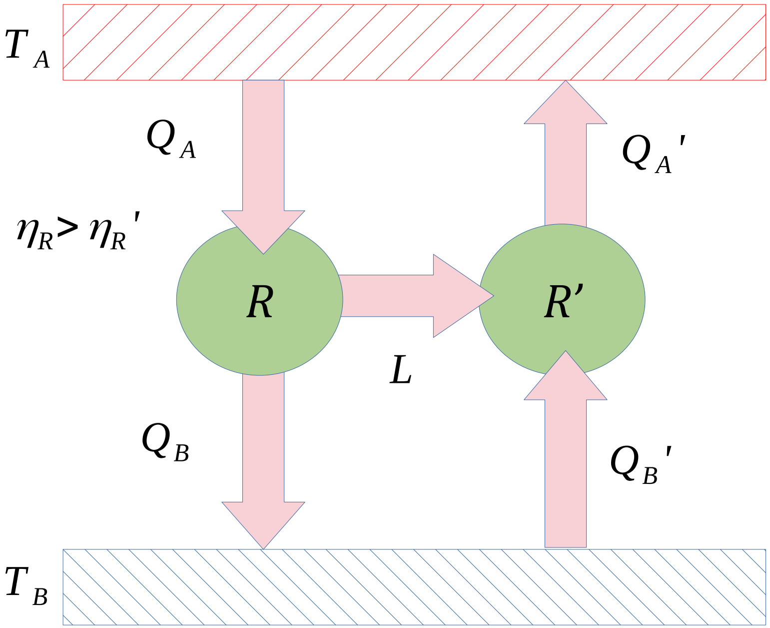
Mostriamo ora che le macchine reversibili che operano tra due sorgenti a temperature fissate devono avere tutte lo stesso rendimento.

Una macchina è reversibile se può invertire il suo ciclo di lavoro mantenendo inalterate tutte le coordinate termodinamiche in ciascun punto del ciclo e invertendo il segno degli scambi di calore e lavoro.

Ipotizziamo che il rendimento di *R* sia maggiore di quello di *R'*. Invertiamo il funzionamento di *R'*. Alimentiamo la macchina *R'* con il lavoro ottenuto da *R*.

$$\eta_R > \eta_R' \Rightarrow \frac{L}{Q_A} > \frac{L}{Q_A'} \Rightarrow Q_A' > Q_A$$

$$Q_B' = Q_A' - L ; Q_B = Q_A - L \Rightarrow Q_B' - Q_B = Q_A' - Q_A > 0$$



Quindi abbiamo un flusso netto di calore dalla sorgente a temperatura più bassa a quella a temperatura più alta, contro l'enunciato di Clausius del II Principio.

Il Teorema di Carnot – parte 2

Mostriamo ora che le macchine irreversibili che operano tra due sorgenti a temperature fissate non possono avere rendimento superiore a quello delle macchine reversibili.

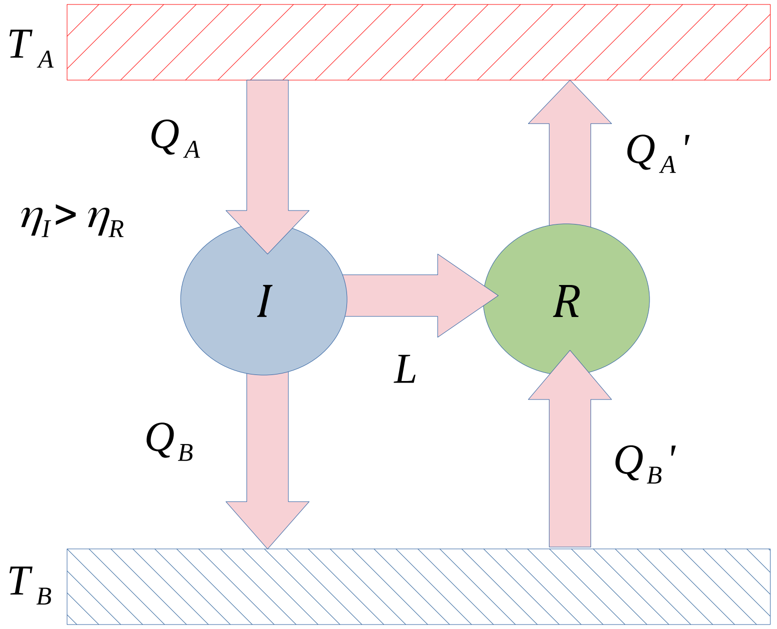
Ipotizziamo che il rendimento di una macchina irreversibile *I* sia maggiore di quello di una macchina reversibile *R* operante tra le stesse temperature. Invertiamo quindi il funzionamento di *R* e alimentiamola con il lavoro ottenuto da *I.*

$$\eta_I > \eta_R \Rightarrow \frac{L}{Q_A} > \frac{L}{Q_A'} \Rightarrow Q_A' > Q_A$$

$$Q_B' = Q_A' - L ; Q_B = Q_A - L \Rightarrow Q_B' - Q_B = Q_A' - Q_A > 0$$

Questo violerebbe il II Principio. Quindi $\eta_I \leq \eta_R$

Per definizione la macchina *I* è irreversibile, quindi non è possibile rovesciare il ragionamento. Si rimane con una *disuguaglianza.*



Il Teorema di Carnot e i cicli di Carnot

Poiché tutte le macchine reversibili operanti tra due temperature estreme devono avere lo stesso rendimento e la macchina di Carnot a gas ideale è reversibile ed ha rendimento noto, concludiamo che:

1) tutte le macchine di Carnot operanti tra due temperature hanno lo stesso rendimento.

2) **tutte le macchine reversibili operanti tra due temperature hanno il rendimento della macchina di Carnot.**

$$\eta_C = 1 - \frac{T_B}{T_A}$$

L’entropia

L'entropia

Da quello che abbiamo visto, data una macchina termica che operi tra due temperature estreme abbiamo:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 1 - \frac{Q_B}{Q_A}$$

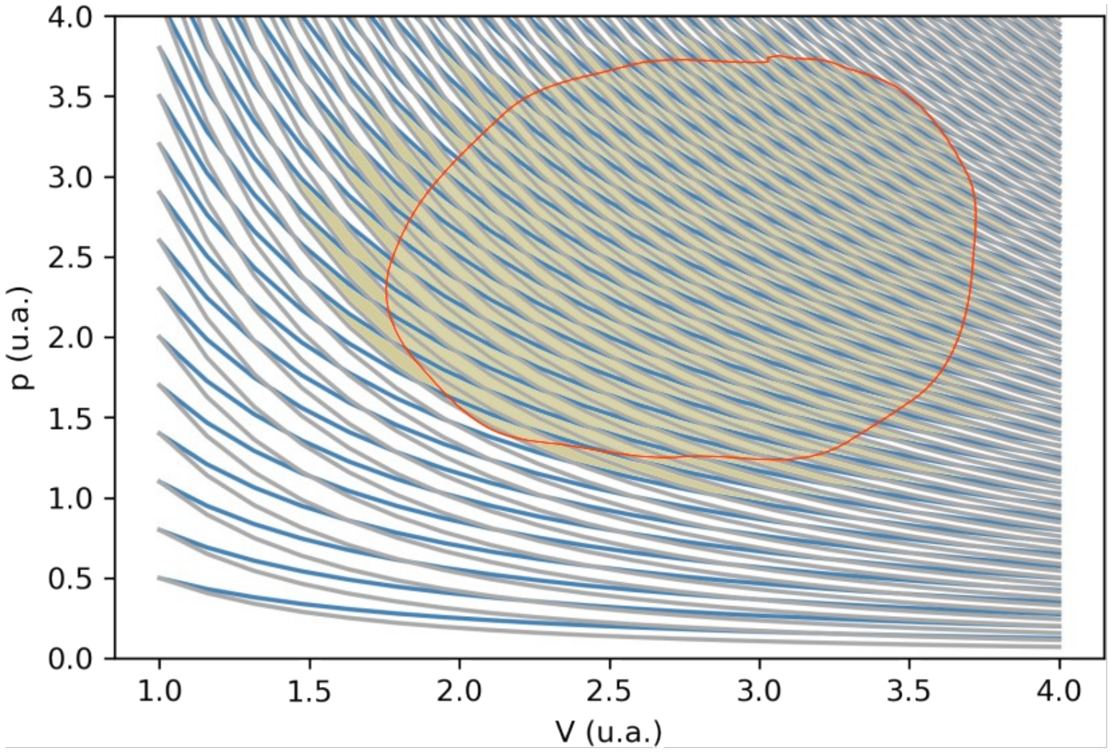
$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{Q_B}{Q_A}$$

$$\frac{Q_A}{T_A} = \frac{Q_B}{T_B} \Rightarrow \frac{Q_A}{T_A} - \frac{Q_B}{T_B} = 0$$

L'entropia

Un ciclo reversibile qualsiasi può essere ottenuto come somma di tanti cicli di Carnot (al limite infiniti se necessario)

$$\sum_i \frac{Q_{A,i}}{T_{A,i}} - \frac{Q_{B,i}}{T_{B,i}} = 0$$



Se abbiamo due cicli che condividono un tratto di isoterma, il calore ceduto in una viene assorbito nell'altra.

Quindi possiamo limitarci a sommare sui tratti periferici, con la convenzione di prendere positivi i calori assorbiti e negativi quelli ceduti

$$\sum_{j,periferia} \frac{Q_j}{T_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \oint_\Gamma \frac{\delta Q}{T} = 0$$

L'entropia

In un ciclo reversibile qualsiasi abbiamo $$\oint_{\Gamma} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Quindi deve esistere una funzione **delle sole coordinate termodinamiche**, che chiamiamo **entropia**, che indichiamo con *S*, tale che, **nelle trasformazioni reversibili**:

$$\boxed{\begin{gathered} S(B) = S(A) + \int_{\Gamma_{AB}} \frac{\delta Q}{T} \\ dS = \frac{\delta Q}{T} \\ \delta Q = T\,dS \end{gathered}}$$

L'entropia

Tornando ai cicli irreversibili abbiamo $$\eta_I \leq \eta_C \Rightarrow 1 - \frac{Q_B}{Q_A} \leq 1 - \frac{T_B}{T_A}$$

$$\frac{T_B}{T_A} \leq \frac{Q_B}{Q_A}$$

$$\frac{Q_A}{T_A} \leq \frac{Q_B}{T_B} \Rightarrow \frac{Q_A}{T_A} - \frac{Q_B}{T_B} \leq 0$$

Sviluppando lo stesso ragionamento, otteniamo la **disuguaglianza di Clausius per un ciclo qualsiasi:**

$$\boxed{\oint_\Gamma \frac{\delta Q}{T} \leq 0}$$

L'uguaglianza vale per cicli reversibili.

L’entropia

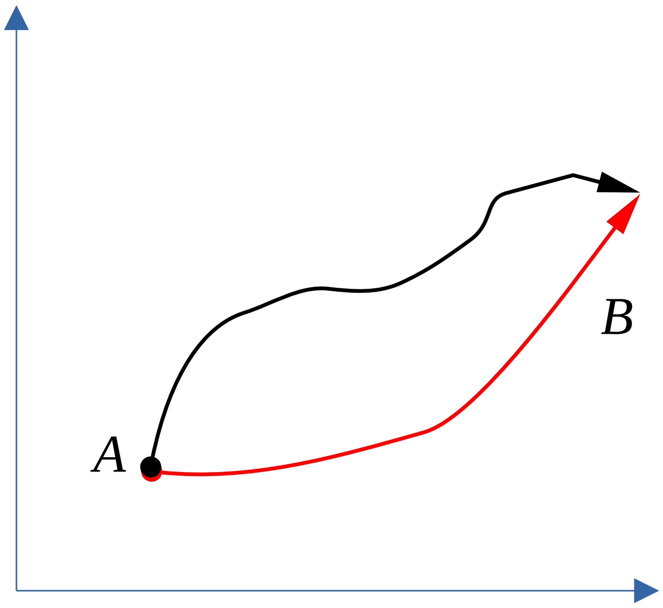
Consideriamo due trasformazioni, una reversibile e l’altra irreversibile, che partano da un punto A e arrivino ad un punto B.

Posso invertire la trasformazione reversibile e ottenere un ciclo chiuso, al quale applicare la disuguaglianza di Clausius.

$$0 \geq \oint_{\Gamma} \frac{\delta Q}{T} = \int_{BA,rev} \frac{\delta Q}{T} + \int_{AB,irr} \frac{\delta Q}{T} =$$

$$= -\int_{AB,rev} \frac{\delta Q}{T} + \int_{AB,irr} \frac{\delta Q}{T} = S(A) - S(B) + \int_{AB,irr} \frac{\delta Q}{T}$$

$$\Delta S = S(B) - S(A) \geq \int_{AB,irr} \frac{\delta Q}{T}$$



Richiami ed argomenti correlati

Macchine termiche e cicli termodinamici

Il ciclo di Carnot

È il ciclo con il massimo rendimento possibile operante tra due temperature estreme T_A e T_B.

$1: Q_1 = Q_A ; L = L_1$

$2: Q_2 = 0 ; L = L_2$

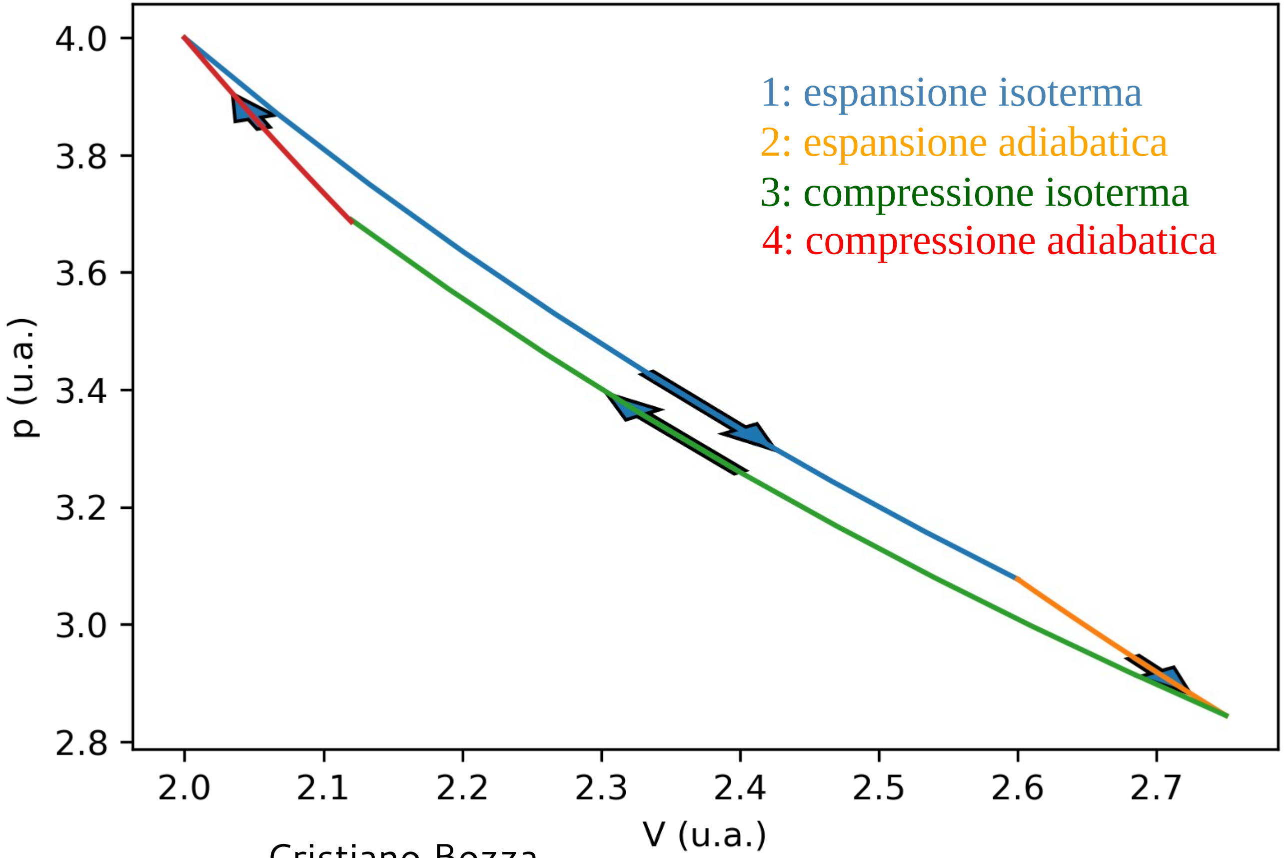
$3: Q_3 = -Q_B ; L = L_3$

$4: Q_4 = 0 ; L = L_4$

$Q = Q_A - Q_B$

$0 = \Delta U = Q - L ; \Rightarrow L = Q$

$$\eta = \frac{L}{Q_A} = \frac{Q_A - Q_B}{Q_A} = 1 - \frac{Q_B}{Q_A}$$



Macchine termiche e cicli termodinamici

Calcoliamo il rendimento con un ciclo di Carnot a gas

$$1: Q_1 = Q_A ; L = L_1 ; dU = \delta Q - p\,dV \Rightarrow c_v\,dT = \delta Q - p\,dV = 0 ; \delta Q = p\,dV ; Q_A = \int_{V_1}^{V_2} R\,T_A \frac{dV}{V} = R\,T_A \log\frac{V_2}{V_1}$$

$$2: T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_3^{\gamma-1}$$

$$3: Q_3 = -Q_B ; L = L_3 ; dU = \delta Q - p\,dV \Rightarrow c_v\,dT = \delta Q - p\,dV = 0 ; \delta Q = p\,dV ; Q_B = \int_{V_3}^{V_4} R\,T_B \frac{dV}{V} = R\,T_B \log\frac{V_4}{V_3}$$

$$4: T_A V_1^{\gamma-1} = T_B V_4^{\gamma-1}$$

$$Q_3 = R\,T_B \log\frac{(T_A/T_B)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1}{(T_A/T_B)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_2} = R\,T_B \log\frac{V_1}{V_2} = Q_A \frac{T_B}{T_A}$$

$$L = Q = R\,T_A \log\frac{V_2}{V_1}\left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right)$$

$$\eta = \left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right)$$ dipende solo dalle temperature estreme!