La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo il momento angolare dei punti materiali rispetto ad un polo O e la loro somma

$$\vec{J}_O=\sum_i m_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{v}_i=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times(m_i\vec{v}_i)=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{p}_i$$

Riferiamo il momento angolare rispetto al centro di massa, introducendo la posizione di quest'ultimo rispetto al polo O:

$$\vec{J}_O=\sum_i \vec{r}_{O,i}\times\vec{p}_i=\sum_i (\vec{r}_{O,CM}+\vec{r}_{CM,i})\times\vec{p}_i=\sum_i \vec{r}_{O,CM}\times\vec{p}_i+\sum_i \vec{r}_{CM,i}\times\vec{p}_i=\vec{r}_{O,CM}\times\sum_i \vec{p}_i+\vec{J}_{CM}=$$
$$=\vec{r}_{O,CM}\times\vec{P}+\vec{J}_{CM}$$

Teorema di König per il momento angolare: **Il momento angolare rispetto ad un polo O è pari alla somma del momento angolare calcolato intorno al centro di massa e al momento angolare del sistema considerato concentrato nel sistema del centro di massa con la sua quantità di moto complessiva.**

L'energia cinetica dei sistemi di punti materiali

Definiamo l'energia cinetica di un sistema come la somma delle energie cinetiche dei singoli punti materiali

$$K=\sum_i K_i=\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2=\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i\cdot\vec{v}_i$$

Consideriamo il moto del centro di massa e il moto dei punti materiali intorno al centro di massa:

$$\vec{v}\,'_i=\vec{v}_i-\vec{v}_{CM}$$

$$K=\sum_i \frac{1}{2} m_i\left(\vec{v}\,'_i+\vec{v}_{CM}\right)\cdot\left(\vec{v}\,'_i+\vec{v}_{CM}\right)=\sum_i \frac{1}{2} m_i v\,'^2_i+\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2+2\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}\,'_i\cdot\vec{v}_{CM}=$$

$$=\sum_i \frac{1}{2} m_i v\,'^2_i+\frac{1}{2} M v_{CM}^2+2\sum_i \frac{1}{2}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}-m_i \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}\right)\cdot\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}\Rightarrow 2\sum_i \frac{1}{2}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}-m_i \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}\right)\cdot\vec{v}_{CM}=0$$

L'energia cinetica dei sistemi di punti materiali

Abbiamo quindi dimostrato **il teorema di König dell'energia cinetica di un sistema di punti materiali**:

$$K = K' + K_{CM}$$

$$K' = \sum_i \frac{1}{2} m_i v'^2_i$$

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M v^2_{CM}$$

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è data dalla somma dell'energia cinetica del moto dei punti intorno al centro di massa e dell'energia cinetica del centro di massa, considerato come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema.

Questo teorema ha implicazioni più profonde di quel che sembra. Infatti, quando guardiamo un sistema apparentemente fermo macroscopicamente, dobbiamo tener presente che potrebbero esistere (e in genere ci sono) moti microscopici che contribuiscono in maniera considerevole all'energia totale.

Energia meccanica per un sistema di punti materiali

L'energia meccanica totale per un sistema di punti materiali è la somma delle energie cinetiche e potenziali

$$E = K_{CM} + K' + \sum_i U_{\mathrm{est},i} + \sum_{j>i} U_{\mathrm{int},ij}$$

La sommatoria su *j* è costruita in modo da evitare doppi conteggi

Richiami ed argomenti correlati

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

I sistemi di punti materiali

I sistemi di punti materiali sono insiemi di punti materiali che hanno interazioni mutue più o meno forti. Un corpo esteso si studia come un sistema di punti materiali.

I corpi in vari stati di aggregazione possono essere studiati come sistemi di punti materiali. Tuttavia il punto materiale non corrisponde ad un'entità fisica ben precisa (per esempio l'atomo o la particella). È semplicemente la più piccola unità di materia del corpo che non abbia altro dettaglio rilevante per la descrizione del fenomeno che la propria massa. Così, in un gas monoatomico, gli atomi possono essere trattati come punti materiali per alcuni scopi. In un corpo rigido, potremmo considerare una porzione di materia più grande.

La dinamica dei sistemi di punti materiali non richiede nuovi principi fisici, ma si appoggia sui tre principi della dinamica già esposti.

I sistemi di punti materiali

Cominciamo con il definire il **centro di massa** di un sistema di punti materiali

$$\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i; \qquad M=\sum_i m_i \text{ è la massa del sistema}$$

Vediamo come si muove il centro di massa di un sistema:

$$\vec{v}_{CM}=\frac{d}{dt}\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i; \qquad \vec{P}=M\vec{v}_{CM}=\sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{a}_{CM}=\frac{d}{dt}\vec{v}_{CM}=\frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}; \qquad \frac{d\vec{P}}{dt}=M\vec{a}_{CM}=\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Il centro di massa si muove come un punto materiale che ha la massa del sistema e la sua quantità di moto

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali, soggetti a forze esterne al sistema e a forze interne.

Su ciascun punto *i* avremo:

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$definiamo:$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{ quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} = \vec{F}_{est} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \vec{0} : \text{ infatti } \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = -\vec{F}_{\mathrm{int},j,i}$$

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Sommiamo le equazioni per tutti i punti materiali

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \sum_i \frac{d\,\vec{p}_i}{dt}$$

$$definiamo:$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\mathrm{est},i,h} = \vec{F}_{est} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = \vec{0} : \text{ infatti } \vec{F}_{\mathrm{int},i,j} = -\vec{F}_{\mathrm{int},j,i}$$

Otteniamo:

$$\boxed{\vec{F}_{est} = \frac{d\,\vec{P}}{dt}}$$

La derivata della quantità di moto totale del sistema di punti materiali è uguale alla risultante di tutte le forze esterne al sistema.

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Elaboriamo sulla Prima Equazione Cardinale

$$\vec{F}_{est} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

Osservazioni:

1) Il sistema di punti materiali si muove come un punto materiale con tutta la massa concentrata nel centro di massa e soggetto solo alle forze esterne. Questo spiega perché possiamo modellare sistemi estesi come punti materiali quando non ci interessano i particolari del moto delle singole parti.

2) Le forze interne tra i vari punti del sistema non influenzano direttamente il moto del sistema del centro di massa, ma le forze esterne potrebbero dipendere dalla posizione e/o velocità dei singoli punti materiali.