Campi di forza centrali

Se una forza è diretta sempre verso un punto C, detto centro, e la sua intensità dipende solo dalla distanza dal centro, è detta **forza centrale**

$$\vec{F}(\vec{r})=F(\|\vec{r}_C-\vec{r}\|)\,vers(\vec{r}_C-\vec{r})=F(\|\vec{r}_C-\vec{r}\|)\frac{\vec{r}_C-\vec{r}}{\|\vec{r}_C-\vec{r}\|}$$

Una forza centrale è sempre conservativa:

$$\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{ds}=F(\|\vec{r}_C-\vec{r}\|)\,vers(\vec{r}_C-\vec{r})\cdot\vec{ds}=F(\|\vec{r}_C-\vec{r}\|)\,d(\|\vec{r}_C-\vec{r}\|)$$

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{ds}=\int_{\Delta_i}^{\Delta_f} F(\|\vec{r}_C-\vec{r}\|)\,d(\|\vec{r}_C-\vec{r}\|)=L(\Delta_i,\Delta_f)$$

$$\Delta_i=distanza\ iniziale\,\|\vec{r}_C-\vec{r}_i\|$$

$$\Delta_f=distanza\ finale\,\|\vec{r}_C-\vec{r}_f\|$$

Il lavoro dipende solo dalle distanze iniziale e finale dal centro, e non dal cammino seguito

Campi di forza centrali

Anche l'espressione del gradiente si semplifica per una forza centrale

$$\vec{F}(\vec{r}) = grad\, U(\vec{r}) = \frac{d\, U(\|\vec{r}_C - \vec{r}\|)}{d\|\vec{r}_C - \vec{r}\|} vers(\vec{r}_C - \vec{r})$$

Una forza centrale conserva il momento angolare del punto materiale rispetto al centro. Per semplicità, consideriamo il centro della forza come origine del sistema di riferimento e polo del momento.

$$\vec{r}_C = \vec{0}$$

$$\vec{J}_C = \vec{r} \times \vec{p}\,; \qquad \frac{d\vec{J}_C}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{r} \times \frac{dU}{dr} vers(-\vec{r}) = \vec{0} + \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{J}_C}{dt} = \vec{0}$$

Campi di forza centrali

Se una forza centrale è l'unica che agisce su un punto materiale, poiché il momento angolare è costante, il moto prodotto da una forza centrale deve anche essere piano.

$$\vec{J}_C = \vec{r} \times \vec{p} \;\Rightarrow\; \vec{J}_C \cdot \vec{r} = 0 ; \;\; \vec{J}_C \cdot \vec{p} = 0$$

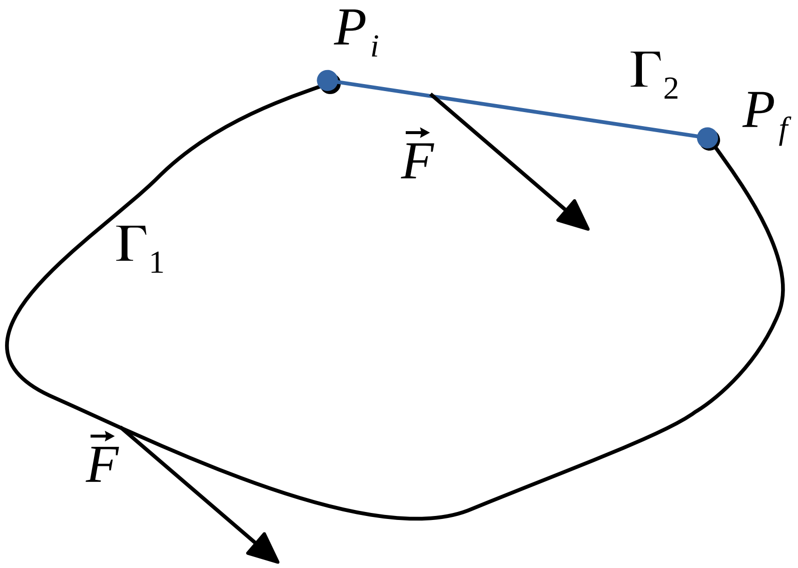
I due vettori posizione e velocità/quantità di moto sono sempre ortogonali al vettore momento angolare, che è a sua volta costante: come abbiamo visto, quelle sono equazioni del piano, quindi sia la posizione che la velocità/quantità di moto si mantengono sempre sul piano ortogonale ad un vettore costante.

Richiami ed argomenti correlati

Lavoro di forze conservative

Una forza si dice **conservativa** se il suo lavoro lungo un *qualunque* cammino è funzione solo del punto iniziale e del punto finale.

$$L=\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{s}=L(\vec{r}_i,\vec{r}_f)$$



In questo esempio, il lavoro lungo il cammino Γ_1 e quello lungo Γ_2 sono uguali; non si tratta però di un'uguaglianza incidentale: perché una forza sia conservativa, questo deve essere vero per tutti i cammini che iniziano e terminano con la stessa coppia di punti. Solo in questo caso, la forza si dice conservativa.

Ovviamente: $$L(\vec{r}_i,\vec{r}_f)=-L(\vec{r}_f,\vec{r}_i)$$

perché si cambia il verso di integrazione.

Per ogni cammino chiuso, con una forza conservativa, si ha: $$L=\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{s}=0$$

Lavoro di forze conservative ed energia potenziale

Se una forza è conservativa, il lavoro che essa compie dipende solo dal punto iniziale e da quello finale.

Fissiamo un punto O, e riferiamo tutti i lavori ad esso.

$$L(\vec{r}_i,\vec{r}_f)=L(\vec{r}_i,\vec{r}_O)+L(\vec{r}_O,\vec{r}_f)=L(\vec{r}_O,\vec{r}_f)-L(\vec{r}_O,\vec{r}_i)=U(\vec{r}_i)-U(\vec{r}_f)$$

Esiste una funzione, detta energia potenziale, tale che il lavoro di una forza conservativa in un cammino tra due punti è uguale alla sua variazione tra il punto iniziale e quello finale.

$$U(\vec{r}_i)=-L(\vec{r}_O,\vec{r}_i)$$
$$U(\vec{r}_f)=-L(\vec{r}_O,\vec{r}_f)$$
$$U(\vec{r})=-L(\vec{r}_O,\vec{r})\,\text{per un punto qualsiasi}$$

Osserviamo che il punto O è arbitrario. In effetti, tutta la funzione U è definita *a meno di una costante arbitraria.* Possiamo impostare questa costante come ci torna più comodo, ma non si può cambiare nella trattazione di un fenomeno.

Energia potenziale e forze conservative

Supponiamo di conoscere in ogni punto dello spazio l'energia potenziale *U* di una certa forza conservativa *F*. Consideriamo il lavoro elementare per un piccolo incremento in ciascuna delle direzioni principali, considerando la forza costante per il tratto percorso:

$$U(\vec{r}) = U(x, y, z)$$

$$U(x,y,z) - U(x+\Delta x, y, z) \simeq F_x \Delta x$$
$$U(x,y,z) - U(x, y+\Delta y, z) \simeq F_y \Delta y$$
$$U(x,y,z) - U(x, y, z+\Delta z) \simeq F_z \Delta z$$

ossia:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{U(x,y,z)-U(x+\Delta x,y,z)}{\Delta x} \simeq F_x \\ \dfrac{U(x,y,z)-U(x,y+\Delta y,z)}{\Delta y} \simeq F_y \\ \dfrac{U(x,y,z)-U(x,y,z+\Delta z)}{\Delta z} \simeq F_z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_x = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z)}{\Delta x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{U(x,y+\Delta y,z)-U(x,y,z)}{\Delta y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{U(x,y,z+\Delta z)-U(x,y,z)}{\Delta z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{matrix}\right.$$

Energia potenziale e forze conservative

Abbiamo ottenuto:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F} = -grad\, U = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Quindi un campo di forza conservativo è pari al **gradiente** dell’energia potenziale, cambiato di segno!

Il gradiente di una funzione scalare di più variabili è il vettore che, in ogni punto, definisce la direzione di massima variazione (o massima pendenza).

Specificata la forma dell’energia potenziale, resta definita la forza esercitata sul punto materiale, e quindi il moto è completamente determinato, a patto che si precisino le condizioni iniziali (che sono comunque libere)