

Inhaltsverzeichnis

0	Grundlagen	2
0.1	Zeichen, Wörter und Sprachen	2
0.1.1	Alphabete und Zeichen	2
0.1.2	Wörter	4
0.1.3	Operationen auf Wörtern	7
0.1.4	Sprachen	12
0.1.5	Operationen auf Sprachen	14
1	Reguläre Sprachen und endliche Automaten	21
1.1	Reguläre Sprachen	21
1.2	Endliche Automaten	23
1.3	Deterministische endliche Automaten	26
1.3.1	Definition DEA	26
1.3.2	Die Übergangsschrittrelation \vdash_A	28
1.3.3	Die akzeptierte Sprache $L(A)$	32
1.3.4	Das ‘endliche Gedächtnis’ eines Automaten	33
1.3.5	Entwurf eines DEA für eine gegebene Sprache	36
1.3.6	Eine Sprache, für die kein DEA existiert	41
1.3.7	Die Funktionsschreibweise δ^*	46
1.3.8	Konventionen	48
1.4	Nichtdeterministische endliche Automaten	49
1.4.1	Definition NDEA	49
1.4.2	Die Übergangsschrittrelation \vdash_A	51
1.4.3	Die akzeptierte Sprache $L(A)$	52
1.4.4	Ein NDEA für eine gegebene Sprache	54
1.4.5	Vom NDEA zum DEA	58
1.4.6	Die Potenzautomaten-Konstruktion	61
1.4.7	Beschränkung auf erreichbare Zustände	66
1.4.8	Bestimmung der erreichbaren Zustände	70
1.4.9	Tote Zustände	72
1.4.10	Die Sprachklassen $\mathcal{L}_{reg}, \mathcal{L}_{DEA}, \mathcal{L}_{NDEA}$	74
1.5	ε -NDEAs	76
1.5.1	Definition ε -NDEA	76

1.5.2	Vom ε -NDEA zum NDEA	78
1.5.3	Die Sprachklasse \mathcal{L}_{EA}	88
1.5.4	Abschlusseigenschaften von \mathcal{L}_{EA}	89
1.5.5	Vom Mengenausdruck zum Automaten	96
1.5.6	Weitere Abschlusseigenschaften von \mathcal{L}_{EA}	98
1.5.7	Vom Automaten zum Mengenausdruck	102
1.6	Reguläre Ausdrücke	110
1.6.1	Syntax und Semantik	110
1.6.2	Anwendungen	115
1.7	Entscheidbarkeitsfragen für reguläre Sprachen	117
1.8	Grenzen regulärer Sprachen	121
1.8.1	Das Schubfachprinzip	121
1.8.2	L -Äquivalenzklassen	127
1.8.3	Der Satz von Myhill und Nerode	131
1.8.4	Der Myhill-Nerode-Automat	135
1.8.5	Anwendungsbeispiel: Textsuche	137
1.8.6	Exkurs: Minimalisierung	146
1.8.7	A -Äquivalenzklassen	147
1.8.8	Konstruktion des minimalen DEA	149
1.8.9	Das Pumping Lemma für reguläre Sprachen	161
1.8.10	Das starke Pumping Lemma	168
2	Kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten	172
2.1	Einführung	172
2.2	Kontextfreie Grammatiken	175
2.2.1	Definition KFG	175
2.2.2	Ableitungen und die erzeugte Sprache $L(G)$	179
2.2.3	Kontextfreie Sprachen	181
2.2.4	Linksableitungen	183
2.2.5	Ableitungsbäume	185
2.2.6	Eindeutige und mehrdeutige Grammatiken	188
2.2.7	Korrektheitsbeweise	194
2.2.8	Rechtslineare Grammatiken	202
2.2.9	Vom NDEA zur rechtslinearen Grammatik	204
2.2.10	Von der rechtslinearen Grammatik zum NDEA	207

2.3	Kellerautomaten	209
2.3.1	Definition Kellerautomat	209
2.3.2	Die Übergangsschrittrelation \vdash_M	212
2.3.3	Die akzeptierte Sprache $L(M)$	214
2.3.4	Von der KFG zum Kellerautomaten	221
2.4	Abschlusseigenschaften der Klasse \mathcal{L}_{kf}	229
2.5	Entscheidbarkeitsfragen für kontextfreie Sprachen	237
2.5.1	Das Wortproblem	238
2.5.2	Entfernung von ε - und Einheitsproduktionen	240
2.5.3	Entscheidungsalgorithmen	247
2.6	Grenzen kontextfreier Sprachen	254
2.6.1	Intuition	254
2.6.2	Das Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen	256
2.7	Deterministisch kontextfreie Sprachen	267
2.7.1	Deterministische Kellerautomaten	267
2.7.2	Deterministisch kontextfreie Sprachen	270
2.7.3	$\mathcal{L}_{dkf} \subseteq \mathcal{L}_{kf}$	275
2.7.4	Abschlusseigenschaften der Klasse \mathcal{L}_{dkf}	278
2.7.5	$\mathcal{L}_{dkf} \neq \mathcal{L}_{kf}$	280
3	Berechenbarkeitstheorie	282
3.1	Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit	282
3.1.1	Einführung	282
3.1.2	Berechenbare Funktionen	289
3.1.3	Gödelnummern	292
3.1.4	Entscheidbare und semi-entscheidbare Mengen	294
3.1.5	Halteproblem und Selbsthalteproblem	297
3.1.6	Die Unentscheidbarkeit des Selbsthalteproblems	300
3.1.7	Die Unentscheidbarkeit des Halteproblems	303
3.1.8	‘Entscheidbar = $2 \times$ semi-entscheidbar’	307
3.1.9	Rekursive Aufzählbarkeit	308
3.1.10	‘Semi-entscheidbar = rekursiv aufzählbar’	310
3.1.11	Funktionen mit mehrstelligem Resultat	315
3.1.12	Komposition berechenbarer Funktionen	320
3.1.13	Charakterisierungen semi-entscheidbarer Mengen	322

3.1.14	Charakterisierungen entscheidbarer Mengen	325
3.1.15	Reduzierbarkeit	326
3.1.16	Weitere unentscheidbare Probleme	330
3.1.17	Weitere Untersuchungen zur Semi-Entscheidbarkeit	335
3.1.18	Der Satz von Rice	338
3.2	Unterschiedliche Berechenbarkeitsbegriffe und Churchsche These	341
3.3	<i>while</i> - und <i>loop</i> -berechenbare Funktionen	344
3.3.1	<i>while</i> -Programme: Syntax und Semantik	344
3.3.2	Die vom Programm P berechnete Funktion	349
3.3.3	Korrektheitsbeweise	353
3.3.4	Ein Interpreter für <i>while</i> -Programme	356
3.3.5	Codierung von Zahlenfolgen und Speicherzuständen	357
3.3.6	Codierung von Anweisungen und Programmen	359
3.3.7	Simulation des Übergangsschrittes	361
3.3.8	Zusammensetzung von <i>while</i> -Programmen	363
3.3.9	Programme zur Codierung und Decodierung	373
3.3.10	Simulation einer Berechnung	379
3.3.11	<i>loop</i> -Programme	382
3.4	Primitiv rekursive und μ -rekursive Funktionen	385
3.4.1	Die Grundfunktionen	386
3.4.2	Substitution	387
3.4.3	Primitive Rekursion	390
3.4.4	Die Klasse \mathcal{PR} der primitiv rekursiven Funktionen	393
3.4.5	Abschlusseigenschaften der Klasse \mathcal{PR}	396
3.4.6	Der unbeschränkte μ -Operator	403
3.4.7	Die Klasse $\mu - \mathcal{REC}$ der μ -rekursiven Funktionen	406
3.4.8	Der beschränkte μ -Operator	407
3.5	Äquivalenzen zwischen den Berechenbarkeitsbegriffen	414
3.5.1	Von der primitiv rekursiven Funktion zum <i>loop</i> -Programm	415
3.5.2	Von der μ -rekursiven Funktion zum <i>while</i> -Programm	419
3.5.3	Vom <i>loop</i> -Programm zur primitiv rekursiven Funktion	421
3.5.4	Vom <i>while</i> -Programm zur μ -rekursiven Funktion	424
3.5.5	Grenzen der primitiven Rekursion	427

Index

\emptyset , 110

$(\alpha)^*$, 110

$(\alpha\beta)$, 110

$(\alpha \mid \beta)$, 110

A -äquivalent, 147

$E(p)$, 78

H , 297, 303, 304, 306, 329

K , 299, 303, 306, 329

\bar{K} , 299, 306

H_0 , 330, 335

H_\exists , 330, 335

H_\forall , 330, 335

I^k , 356, 379

L -Ergänzung, 127

L -Äquivalenzklasse, 128

L -äquivalent, 127

L -unterscheidbar, 122

$L(A)$, 32, 51

$L(G)$, 180

$L(\alpha)$, 111

L^* , 16

L^+ , 16

L^R , 16

L^n , 15

$L_1 L_2$, 14

$L_1 \cap L_2$, 14

$L_1 \circ L_2$, 14

$L_1 \cup L_2$, 14

$L_1 \setminus L_2$, 14

\bar{L} , 14

L_{fix} , 19

L_{float} , 19

L_{int} , 19

L_{nat} , 19

L_{bin} , 101

L_{ij} , 102, 103

L_{ij}^k , 103

R^* , 31

R^+ , 31

R^n , 31

$R_1 \circ R_2$, 31

X_i , 344

$[q]_A$, 147

$[u]_L$, 128

Σ^* , 4, 6

Σ^+ , 4, 6

Σ^n , 6

$[P]$, 360

$[st]$,

$[stl]$, 359

$\langle \sigma \rangle_m$, 358

$\langle n_1, \dots, n_k \rangle$, 356, 357

$\llbracket P \rrbracket$, 352, 383

δ^* , 46

$A \rightarrow u$, 175

\Rightarrow , 179

\Rightarrow_G , 179

\Rightarrow_G^* , 180

\Rightarrow_G^+ , 180

\Rightarrow_G^n , 180

μ -Operator, 385, 403

μ -rekursiv, 385, 406

$\mu(g)$, 403

$\mu - \mathcal{REC}$, 406

$\mu^{\leq}(g)$, 407

$\mu z. (g(n_1, \dots, n_k, z) = 0)$, 403

$\mu z \leq m. (g(n_1, \dots, n_k, z) = 0)$, 407

π_i , 292

σ_0 , 345

ε , 4

ε -Abschluss, 78

ε -NDEA, 76

ε -Produktion, 239

\vdash , 212, 347, 348

\vdash^* , 347

\vdash^+ , 347

\vdash^n , 347

\vdash_A , 28, 29, 51, 77

\vdash_A^* , 28, 29, 51

\vdash_A^+ , 28, 29, 51

\vdash_A^n , 28, 29, 51

\vdash_M , 212

$\wp(\Sigma^*)$, 12

a_B , 294

c_B , 294

$f(A)$, 319

$f : A \hookrightarrow B$, 286

$f^{-1}(B)$, 319

$g \circ f$, 319

$m \dot{-} n$, 348

$p \sim_A q$, 147

$p \sim_n q$, 154

$u_1 \not\sim_L u_2$, 127

$u_1 \sim_L u_2$, 127

$v \circ w$, 7

vw , 7

w^R , 9

w^n , 8

w_n , 287

\mathcal{L}_{reg} , 74

\mathcal{L}_{DEA} , 74

\mathcal{L}_{NDEA} , 74

$\mathcal{L}_{\varepsilon-NDEA}$, 77

\mathcal{L}_{EA} , 88

\mathcal{L}_{kf} , 208

\mathcal{L}_{dkf} , 278

$Def(f)$, 319

$Equiv$, 330, 335

$Erg_L(u)$, 127

Graph(f), 317
If($g; h_1, h_2$), 396
Iter(g), 398
Loc, 344
Prim(g, h), 390
Store, 345
Sub($g; h_1, \dots, h_l$), 387

$const_c^k$, 386
 $const_m$, 290
 pr_i^m , 315
 $proj_i^k$, 386
succ, 386

abgeschlossen, 89
 ableitbar, 180
 Ableitung, 180
 Ableitungsbaum, 185
 Ableitungsschritt, 179
 Abschlussoperator, 18
 Ackermann-Funktion, 384
 akzeptierbar, 294
 akzeptierender Zustand, 23, 26, 209
 akzeptierte Sprache, 32, 51, 214
 akzeptiertes Wort, 32, 52, 214
 Akzeptorfunktion, 294
 allgemeines Halteproblem, 298
 allgemeines Wortproblem, 237
 Alphabet, 2
 Anfangswort, 10
 Anweisung, 344
 Anweisungsliste, 344
 antisymmetrisch, 11
 äquivalent, 330
 äquivalente Grammatiken, 244
 Äquivalenzproblem, 253, 330

Assoziativität, 7, 14
 Aufpumpen, 163
 Aufzählungsalgorithmus, 308

Basisfunktionen, 386
 berechenbare Funktion, 289, 315
 Berechenbarkeit, 343
 berechnete Funktion, 289, 349
 beschränkter μ -Operator, 407
 beschriebene Sprache, 111
 Bild, 319

charakteristische Funktion, 294
 Churchsche These, 343
 Codierung einer Anweisung, 359
 Codierung einer Anweisungsliste, 359
 Codierung einer Zahlenliste, 357
 Codierung eines Programms, 360
 Codierung eines Speicherzustands, 358
 Codierung eines Wortes, 287

DEA, 26
 Definitionsbereich, 319
 deterministisch kontextfrei, 270
 deterministischer endlicher Automat, 26
 deterministischer Kellerautomat, 268
 Diagonale, 317
 Diagonalfunktion, 316
 Diagonalisierung, 301
 dovetailing, 312, 313, 324, 336, 380
 Durchschnitt, 14

EA, 88
 eindeutige Grammatik, 188
 Eingabealphabet, 209
 Einheitsproduktion, 239

Einsetzung, 387
 endlicher Automat, 23, 88
 Endwort, 10
 Endzustand, 23, 26, 209
 entscheidbar, 294
 Entscheidbarkeit, 327
 Entscheidungsalgorithmus, 117, 295
 erkannte Sprache, 32, 51, 214
 erreichbarer Zustand, 66
 erzeugte Sprache, 180

 Fallunterscheidung, 396
 formale Sprache, 12

 Gödelnummer, 292
 Graph einer Funktion, 317
 Grundfunktionen, 385, 386

 Hüllenoperator, 18
 Halteproblem, 298

 induktiv definiert, 174
 inhärent mehrdeutige Grammatik, 188
 inkompatibel, 268
 Interpreter, 356
 Iteration, 398

 Kelleralphabet, 209
 Kellerautomat, 209
 KFG, 175
 Kleene-Abschluss, 16
 kompatibel, 268
 Komplement, 14
 Komposition, 31, 319
 Konfiguration, 28, 212, 347
 Konkatenation, 7, 14

 konsistent, 268
 konstante Funktion, 386
 Kontext, 182
 Kontextbedingungen, 264
 kontextfrei, 181, 182
 kontextfreie Grammatik, 175

 Länge eines Wortes, 4
 leere Funktion, 290
 leeres Wort, 4
 Linksableitung, 183
 Linksableitungsschritt, 183
 linkslineare Grammatik, 202
loop-Programm, 382
loop-berechenbar, 383

 mehrdeutige Grammatik, 188
 Mengendifferenz, 14
 minimaler DEA, 136
 Monoid, 7, 14
 Myhill-Nerode-Automat, 136

 Nachfolgerfunktion, 386
 NDEA, 50
 Nebenparameter, 390
 neutrales Element, 7, 14
 nichtdeterministischer endlicher Automat, 50
 Nichtterminalzeichen, 175

 Parser, 264
 partielle Funktion, 286
 partielle Ordnung, 11
 PDA, 209
 pigeonhole principle, 43
 Potenz, 8, 15
 Potenzautomat, 61

Potenzmenge, 12
 Präfix, 10
 primitiv rekursiv, 385, 393, 401
 primitive Rekursion, 385, 390
 Produktion, 175
 Projektion, 315, 386
 pushdown automaton, 209

 Rechtskongruenzrelation, 130
 rechtslineare Grammatik, 202
 reduzierbar, 326
 reflexiv, 11
 reflexiver transitiver Abschluss, 29
 Regel, 175
 reguläre Sprache, 21, 109
 regulärer Ausdruck, 97, 110
 Rekursionsparameter, 390
 rekursiv aufzählbar, 308, 317

 Schubfachprinzip, 43, 121
 Selbsthalteproblem, 299
 semantische Analyse, 264
 semantische Eigenschaft, 338
 semi-entscheidbar, 294
 Semi-Entscheidungsalgorithmus, 295
 simultane Induktion, 197
 Speicherplatz, 344
 Speicherzustand, 345
 spezielles Äquivalenzproblem, 339
 spezielles Halteproblem, 299, 330
 Spiegelung, 9, 16
 spontaner Zustandsübergang, 76
 Sprache, 12
 Sprachklasse, 74
 Startzeichen, 175
 Startzustand, 23, 26, 209

 Substitution, 385, 387
 Suchprogramme, 144
 Suffix, 10
 Symbol, 2
 syntaktische Analyse, 264
 Syntaxbaum, 185

 Teilwort, 10
 Terminalzeichen, 175
 Totalitätsproblem, 330
 toter Zustand, 72
 Transition, 209
 transitiv, 11
 transitiver Abschluss, 29
 Turing-mächtig, 343

 überabzählbar, 288
 Übergang, 209
 Übergangsfunktion, 26
 Übergangsrelation, 50, 209
 Übergangsschritt, 29, 212
 Übergangsschrittrelation, 28, 347
 unbeschränkter μ -Operator, 403
 Unentscheidbarkeit, 327
 unerreichbarer Zustand, 66
 Urbild, 319

 Vereinigung, 14

while-Programm, 344
while-berechenbar, 352
 Wort, 4
 Wortproblem, 118, 237

 Zeichen, 2
 Zeichenvorrat, 2
 Zustand, 26, 209, 345