

Рекурсивные алгоритмы и их построение

ЗАДАЧИ

Задача 1.

Возвести заданное вещественное число X в заданную натуральную степень N . В этой задаче совсем легко найти формулу: $X^N = X \cdot X^{N-1}$, но такой алгоритм потребует $N-1$ повторение процесса. Гораздо более эффективным будет следующий алгоритм:

$$X^N = \begin{cases} X, & \text{если } N = 1 \\ (X^{N/2})^2, & \text{если } N - \text{четно} \\ X(X^{(N-1)/2})^2, & \text{если } N - \text{нечетно} \end{cases}$$

Уровень 1. Описать по шагам алгоритм "быстрого" возведения в степень. Продемонстрировать его работу при $X=2$, $N=11$.

Уровень 2. Описать рекурсивную функцию "быстрого" возведения в степень. Написать программу, которая возводит заданное вещественное число в натуральную степень.

Формат ввода:

Число X

Число N

Формат вывода:

Значение полученной степени.

Пример.

Ввод:

2

4

Вывод:

16

Задача 2.

Последовательность чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, ..., где каждое число, начиная с третьего, есть сумма двух предыдущих чисел последовательности, называется последовательностью чисел Фибоначчи. При заданном N требуется найти первые N чисел Фибоначчи.

Уровень 1. Описать алгоритм, который для заданного N получит число Фибоначчи с номером N .

Вычислить тринадцатое число Фибоначчи.

Уровень 2. Описать рекурсивную функцию, которая выдает значение K -ого числа Фибоначчи.

Примечание: Обратить особое внимание на недопустимость использования формулы $F(K)=F(K-1)+F(K-2)$, поскольку, в вызове $F(K-1)$ содержится вызов $F(K-2)$ и т.д., что порождает многочисленные повторные вычисления одного и того же.

Формат ввода:

Число N

Формат вывода:

Значение N -ого числа Фибоначчи.

Пример.

Ввод:

Вывод:

21

Задача 3.

На входном потоке находится последовательность литер, которые могут быть только символами '0' или '1'. Пробел - признак конца последовательности.

Любая другая литера - ошибка. Нужно найти десятичное число равное двоичному числу, заданному этой последовательностью.

Уровень 1. Построить по шагам алгоритм перевода двоичного числа в десятичное число. Найти десятичное представление для последовательностей: 100, 110001, 10000011.

Уровень 2. По заданной последовательности найти десятичное число, описав соответствующую рекурсивную функцию.

Формат ввода:

Последовательность нулей и единиц

Формат вывода:

Значение десятичного числа.

Пример.

Ввод:

10111

Вывод:

23

Задача 4.

Уровень 2. На входном потоке находится последовательность литер, которые могут быть только цифрами. Пробел - признак конца последовательности.

Любая другая литера - ошибка. "Собрать" десятичное число из цифр этой последовательности, описав рекурсивную функцию.

Формат ввода:

Последовательность литер, являющихся цифрами

Формат вывода:

Значение полученного числа.

Пример.

Ввод:

4521

Вывод:

4521

В примере 1 мы подробно разобрали рекурсивный алгоритм создания рисунка из окружностей. Теперь можно рассмотреть более сложные, но в то же время и более красивые рисунки, например, "веточки" (рис.1 и рис.2) и "снежинки" (рис.3 и рис.4).

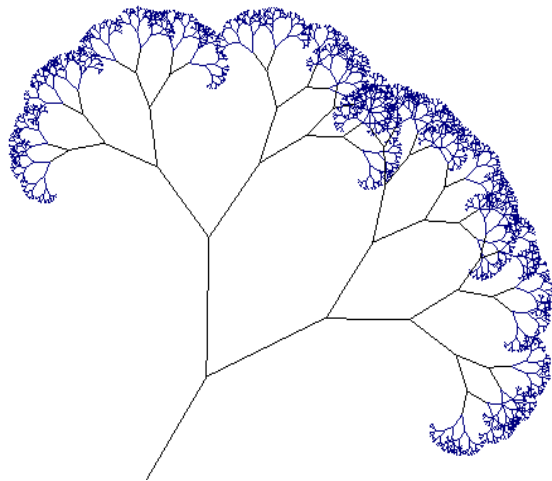


Рис.1

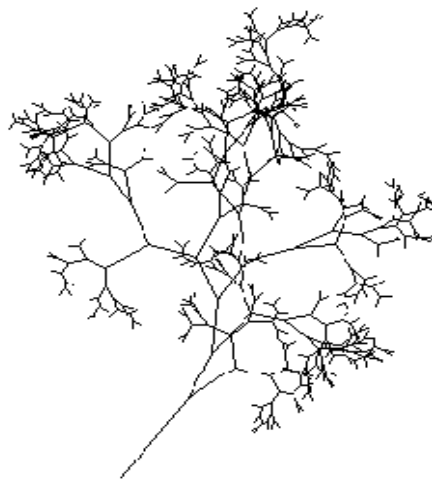


Рис.2

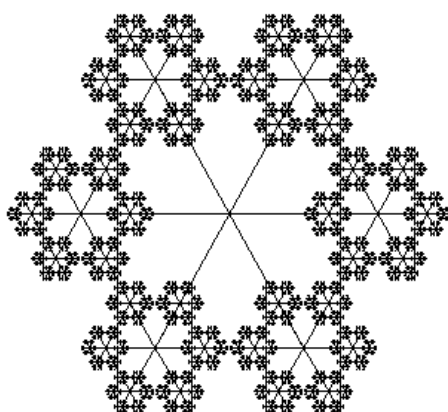


Рис.3

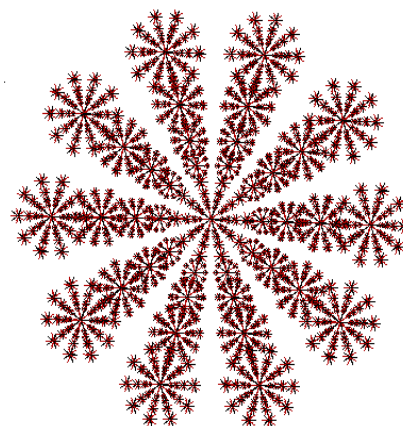


Рис.4

При создании таких рисунков «из реальной жизни» можно проявить настоящее творчество, например, нарисовать:

- снежинки различные по форме или падающие по всему экрану;
- веточки разного цвета, разной пушистости и разного размера (в длину ветки, угол наклона и цвет вносятся случайная составляющая, рис.2);
- а если на последнем уровне вложенности веточки рисовать желтые кружочки, то из голой зимней ветки можно получить пушистую весеннюю мимозу.

Задача 5.

Уровень 1. Описать по шагам, как нарисовать веточку, изображенную на рисунке 1.

Уровень 2. Написать программу, печатающую веточку, изображенную на рисунке 1.

Формат ввода:

Входных данных нет

Формат вывода:

Рисунок веточки

Задача 6.

Уровень 1. Описать по шагам, как нарисовать веточку, изображенную на рисунке 2.

Уровень 2. Написать программу, печатающую веточку, изображенную на рисунке 2.

Формат ввода:

Входных данных нет

Формат вывода:

Рисунок веточки

Задача 7.

Уровень 1. Описать по шагам, как нарисовать снежинку, показанную на рис.3.

Уровень 2. Написать программу, печатающую снежинку, изображенную на рисунке 3.

Формат ввода:

Входных данных нет

Формат вывода:

Рисунок снежинки

Задача 8.

Уровень 1. Описать по шагам, как нарисовать снежинку, показанную на рис.4.

Уровень 2. Написать программу, печатающую снежинку, изображенную на рисунке 4.

Формат ввода:

Входных данных нет

Формат вывода:

Рисунок снежинки

Задача 9.

Для следующей задачи рассмотрим пример из области биологии. С помощью рекурсии можно построить модель Бенуа Мандельброта человеческого легкого, а именно, иерархию трахей и бронхов. Из рисунка 5 видно, что третья ветвь составляет по длине примерно половину первой ветви. Уменьшается также толщина ветвей-сосудов.

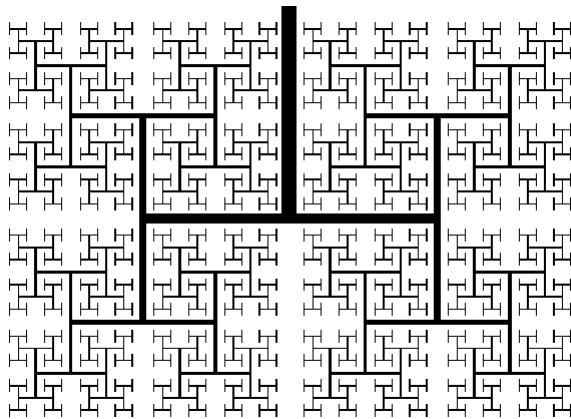


Рис.5

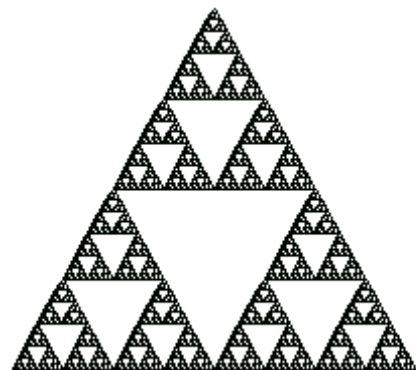


Рис.6

Уровень 2. Написать программу, печатающую модель легкого, приведенную на рисунке 5.

Формат ввода:

Входных данных нет

Формат вывода:

Графическое изображение легкого

Задача 10.

На рис.6 представлена салфетка Серпинского. Как она образуется? Рисуется треугольник и в нем средние линии. В образованных при углах исходного треугольника новых треугольниках опять рисуются средние линии и т.д. до заданного порядка вложенности. Интересно, что полученная фигура допускает другое (не рекурсивное) построение с помощью моделирования методом Монте-Карло (но об этом в другой раз). А если вместо треугольника взять прямоугольник, то получим скатерть Серпинского.

Уровень 1. Нарисовать скатерть Серпинского.

Уровень 2. Написать программу, печатающую салфетку Серпинского, приведенную на рис.6.

Формат ввода:

Входных данных нет

Формат вывода:

Изображение салфетки Серпинского

Задача 11.

Уровень 2. Рассмотрим задачу о разрезании прямоугольника с натуральными длинами сторон a и b на квадраты максимальной площади (задача на использование алгоритма Евклида). Предлагается не просто решить эту задачу, но и сделать наглядное графическое сопровождение с помощью рекурсии (Рис.7).

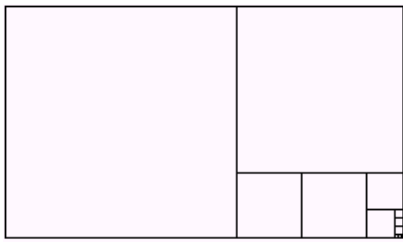


Рис. 7

Параметрами рекурсивной процедуры являются координаты вершин диагонали прямоугольника (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Как только стороны прямоугольника становятся равными, то есть $(x_2 - x_1 = y_2 - y_1)$, осуществляется выход из процедуры, если же нет, то вычисляется длина меньшей стороны k (это и будет сторона квадрата), и вдоль большей стороны отрезается (рисуются) квадрат. Затем происходит обращение к

рекурсивной процедуре с измененными параметрами, либо вместо x_1 берется $x_1 + k$ (если сторона по оси x больше), либо вместо y_1 берется $y_1 + k$ (если сторона по оси y больше).

Формат ввода:

Два целых числа через пробел

Формат вывода:

Изображение схемы деления

Далее приводятся несколько задач повышенной сложности для учащихся, умеющих программировать.

Задача 12.

На входном потоке последовательность литер, заканчивающаяся пробелом. При помощи рекурсивной логической функции определить является ли эта последовательность правильным идентификатором. (Правильным идентификатором считается любая конечная последовательность букв или цифр, начинающаяся с буквы).

Формат ввода:

Последовательность букв и/или цифр

Формат вывода:

" Последовательность является правильным идентификатором " или

"Последовательность не является правильным идентификатором"

Пример.

Ввод:

Max12

Вывод:

Последовательность является правильным идентификатором

Задача 13.

На входном потоке последовательность литер, признаком конца которой является знак равенства. В самой последовательности могут встречаться только цифры и знаки «+». При этом вся последовательность представляет собой формулу сложения однозначных целых чисел. Описать рекурсивную функцию, которая найдет значение этой формулы или сообщит об ошибке.

Формат ввода:

Чередующаяся последовательность цифр и знаков "+", заканчивающаяся "="

Формат вывода:

Значение суммы

Пример.

Ввод:

1+3+6+2 =

Вывод:

12

Задача 14.

На входном потоке последовательность литер, признаком конца которой является знак "=". В самой последовательности могут встречаться только цифры и знаки «+» или «-». При этом вся последовательность представляет собой формулу арифметической суммы однозначных целых чисел. Описать рекурсивную функцию, которая найдет значение этой формулы или сообщит об ошибке.

Формат ввода:

Чередующаяся последовательность цифр и знаков "+" и "-"

Формат вывода:

Значение суммы

Пример.

Ввод:

2+5-7+1+9=

Вывод:

10

Задача 15.

На входном потоке последовательность литер, признаком конца которой является пробел. В самой последовательности могут встречаться только цифры и знаки «+» или «-». При этом вся последовательность представляет собой формулу арифметической суммы произвольных целых чисел. Описать рекурсивную процедуру или функцию, которая найдет значение этой формулы или сообщит об ошибке.

Формат ввода:

Последовательность цифр и знаков "+" или "-"

Формат вывода:

Значение суммы

Пример.

Ввод:

45+6-35+4-17=

Вывод:

3

Литература

1. Павлова М.В., Паньгина Н.Н. Примеры и задачи на тему «Рекурсия». – «Компьютерные инструменты в образовании», 2001