Во всех задачах считается, что арифметические действия с целыми числами выполняются за $O(1)$.

1. Задано множество из n целых чисел. Требуется найти сумму произведений всех подмножеств заданного множества. $O(n)$.

2. Задано n прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат. Найдите площадь пересечения заданных прямоугольников. $O(n^2)$.

3. В прямоугольной таблице $n \times m$ записаны произвольные вещественные числа. Разрешается менять знак у всех чисел какой-либо строки или какого-либо столбца. Придумайте алгоритм, который выполяя разрешённые операции добъётся того, чтобы в каждой строке и столбце сумма чисел была бы неотрицательна. Оцените время работы.

4. Докажите, что группу людей всегда можно разбить на две команды так, чтобы общее число пар друзей, оказавшихся в одной и той же команде, было меньше числа пар друзей, оказавшихся в разных командах.

5. В Тридевятом королевстве есть монеты номиналом $1, 10, 100, \ldots, 10^{10}$ рублей. Житель королевства, накопив несколько монет, заключил сделку с дьяволом, по условиям которой он обязан каждый день отдавать дьяволу какую-то монету. При этом в обмен он может получить любое количество монет меньшего достоинства, если такие есть. Например, отдавая монету в 100 рублей, он может забрать 50 монет по 10 рублей и 500 монет по 1 рублю. Если же ему нечего отдать, то он отправляется в ад. Докажите, что житель не сможет жить бесконечно.

6. Имеется n гирь. Вес i-ой гири целое число $0 \leqslant a_i \leqslant i$. Известно, что сумма весов гирь чётная. Придумайте алгоритм, раскладывающий все гири на две чаши весов так, чтобы чаши находились в равновесии. $O(n)$

7. а) Дана функция $f : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$. Найти период последовательности $1, f(1), f(f(1)), \ldots$. Количество действий должно быть пропорционально суммарной длине предпериода и периода.
   б) Дан массив чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, где $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ для всех $i = 1, \ldots, n{+}1$. Найдите повторяющиеся значения, при условии, что можно использовать только постоянное, не зависящее от n, количество дополнительных переменных, сделав $O(n)$ сравнений.

8. На клетчатой доске 100×100 расставлено несколько шахматных коней. Каждую минуту один из коней делает ход на свободное поле. Через некоторое время оказалось, что каждый побывал на всех полях ровно по одному разу и вернулся в исходную клетку. Докажите, что был момент, когда все кони стояли не на своих местах.

9. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

10. В одном государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, что от любого города можно было доехать до любого другого.

11. В городе Незнакомске живут $3n$ человек, причем любые двое имеют общего знакомого. Докажите, что можно указать n человек таким образом, чтобы каждый из остальных был знаком хотя бы с одним человеком из этих n.

12. Назовем лабиринтом доску 100×100, где в некоторых местах на границы клеток приклеены перегородки, но так, что ладья может сойти с доски, начав движение из любой клетки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или выходит за пределы доски, но если справа перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Конечную последовательность таких команд назовем программой. Как только ладья сошла с доски, программа останавливается. Докажите, что есть одна программа, которая выводит ладью с любого места из любого лабиринта.