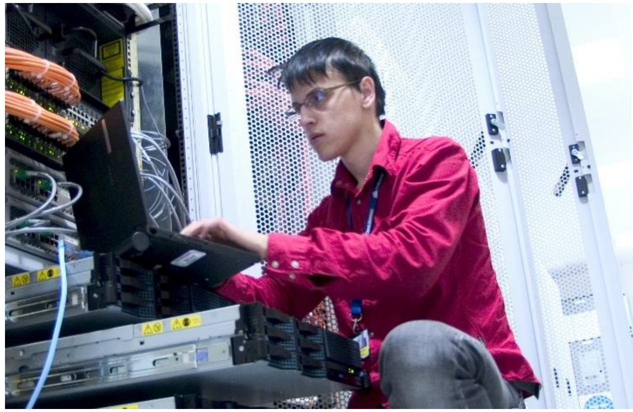
EMIL-VON-BEHRING GYMNASIUM

Exkurs: komplexe Zahlen und Fraktale



Grafiken © shutterstock.com

Komplexe Einheit

- Es existiert keine Zahl, die die Gleichung $x^2 = -1$ erfüllt.
- Daher hat man sich die imaginäre Einheit mit $\sqrt{-1} = i$ definiert.
- $i^2 =$
- $i^3 =$
- $i^4 =$
- $i + i =$

Komplexe Zahl

- Komplexe Zahl $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$
- Beispiel: $\frac{1}{5} + \sqrt{3}i$
- Eine komplexe Zahl besitzt jeweils einen Realanteil x und einen imaginären Anteil y. Diese können aber auch 0 sein.

Rechnen mit komplexen Zahlen

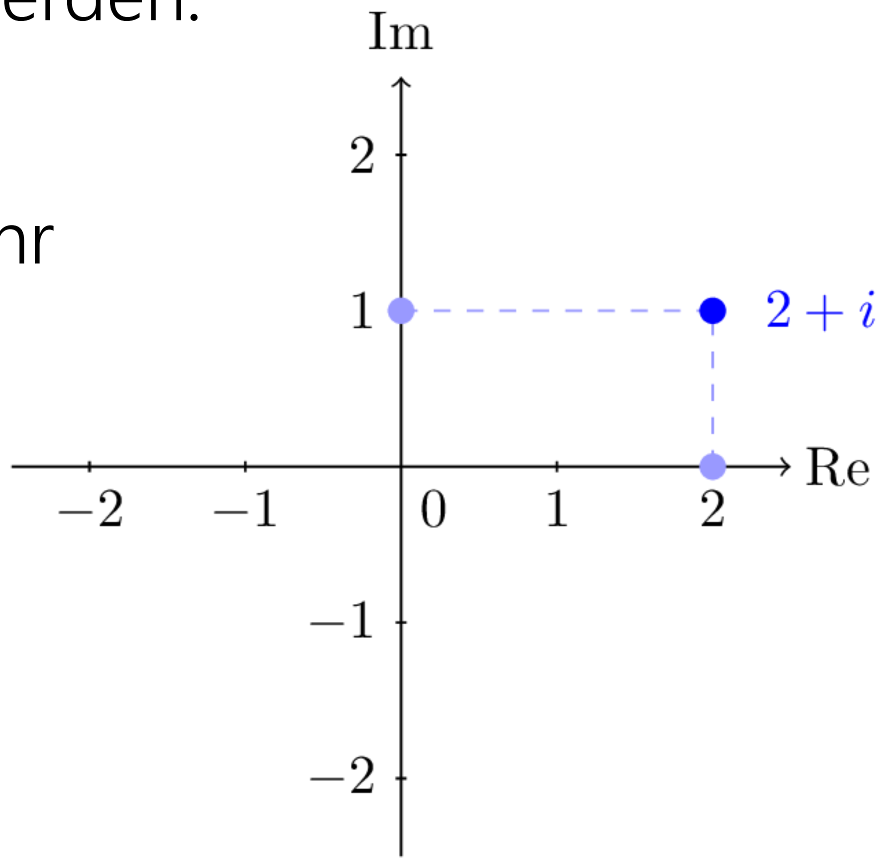
- $(1+3i)+(2-7i)=$
- $(-2-5i)-(4+i)=$
- $(2-3i)\cdot(-1+5i)=$
- $\frac{2+3i}{4-5i}=$
- Tipp: den Nenner rein real machen!
- 2. Tipp: Geschickt mit der 3. binomischen Formel erweitern, sodass der Nenner real wird!

Komplexe Zahlen als Ebene

- Komplexe Zahl $z = x + yi$ kann als Punkt (x, y) in einer zweidimensionalen Ebene interpretiert werden.

- Der Betrag einer komplexen Zahl $|z|$ ist ihr Abstand zum Koordinatenursprung.

- Pythagoras: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Aufgabe: Klasse Complex

- Wir benötigen für die Fraktale die Addition, Multiplikation und den Betrag einer komplexen Zahl.
- Überlege dir zunächst auf Papier, wie die Operationen mit allgemeinen komplexen Zahlen funktionieren:
- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) =$
- $(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) =$
- Um ein leichteres Weiterrechnen zu gewährleisten, sollten die Methoden add(…) und mult(…), jeweils eine neue komplexe Zahl zurückgeben.
- Schreibe die Klasse Complex und teste sie.

Fraktale Mandelbrot und Julia

- Für jeden Punkt in einer komplexen Zahlenebene wird eine Zahlenfolge berechnet:
- $(zn)_{n>0} : z_{n+1} = z_n^2 + c$

- Mandelbrot: Startpunkt $z_0 \ = \ 0$, Schrittweite $c = x + yi$ (Zum aktuellen Pixel gehörige Koordinate als komplexe Zahl)
- Julia: Startpunkt $z_0 \ = x + yi$, Schrittweite $c =$ konstante komplexe Zahl (z.B. $c = -0.81 - 0.177i$)

Fraktale Einfärbung

- Die Punkte werden entsprechend ihres Divergenzgrads eingefärbt.
- $(zn)_{n>0} : z_{n+1} = z_n^2 + c$
- Zwei Abbruchsfälle bei dieser Zahlenfolge:
  - z_n überschreitet einen Schwellwert.
    Die Zahlenfolge divergiert (geht gegen ±∞).
  - n überschreitet einen Schwellwert (maximale Anzahl an Iterationen erreicht; die Zahlenfolge konvergiert vermutlich (geht gegen einen bestimmten Wert z.B. 0).
- Die Folge divergiert sicher, wenn $|z| > 2$
- Der Wert von n bei Schleifenabbruch gibt die Farbe an:

$$n \in \{0; 1; \dots; MAXITER\}$$

Fraktale Einfärbung Erklärung

- Bei der voreingestellten Farbpalette werden die konvergenten Punkte schwarz eingefärbt.
- Die stark divergenten Zahlenfolgen zu den Punkten, also wenn der Schwellenwert $|z| > 2$ nach sehr wenigen oder beim ersten Schleifendurchlauf überschritten wird, werden weiß eingefärbt.
- Je weniger stark divergent die Zahlenfolgen der Punkte sind, desto ein dunklerer Blauton wird verwendet. Also wenn es mehrere Schleifendurchläufe benötigt bis der Schwellenwert $|z| > 2$ überschritten wird, aber MAX_ITER wird nicht erreicht.

Aufgabe: Fraktale

1. Vervollständige zunächst die Methode `computeIterations(…)`. Diese ermittelt, nach wie vielen Iterationen der Betrag des aktuellen Folgenglieds $z_{n+1} = z_n^2 + step$ die Grenze `MAXLENGTH` überschreitet. Maximal werden `maxIter` Iterationen ausgeführt.
2. Erstelle ein Mandelbrot, indem du die Methode `mandelbrot(…)` implementierst. Hierfür soll auf einem `Color[][]`-Feld der Größe x,y mit Farben aus der übergebenen Farbpalette der Wertebereich *[realBegin, realEnd)* in x-Richtung sowie *[imBegin·i, imEnd·i)* in y-Richtung dargestellt werden. Die maximale Iterationszahl soll so gewählt werden, dass die Farbpalette vollständig ausgenutzt wird.
3. Verfahre analog zu Mandelbrot-Bild mit dem Julia-Bild.