重心坐标函数

陈春雨

2019年7月14日

1 一维情况

一维中只用两个点 x_0, x_1, 找两个定义在 $[x_0, x_1]$ 上的线性函数 $f_0(x), f_1(x)$，满足：

$$\begin{cases} f_i(x_i) = 1 \\ f_i(x_j) = 0 \quad i \neq j \end{cases} \qquad i = 0, 1 \tag{1}$$

方法一：待定系数法

假设

$$f_i(x) = k_0^{(i)} x + k_1^{(i)}, \qquad i = 0, 1$$

得到方程：

$$\begin{cases} k_0^{(0)} x_0 + k_1^{(0)} = 1 \\ k_0^{(0)} x_1 + k_1^{(0)} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} k_0^{(1)} x_0 + k_1^{(1)} = 0 \\ k_0^{(1)} x_1 + k_1^{(1)} = 1 \end{cases}$$

则根据克拉默法则

$$k_0^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{x_0 - x_1}, \qquad k_1^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-x_1}{x_0 - x_1}$$

$$k_0^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{x0 - x1}, \qquad k_1^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_0}{x_0 - x_1}$$

这样就得到了两个基函数, 且他们的梯度为：

$$\nabla f_0(x) = k_0^{(0)} \qquad \nabla f_1(x) = k_0^{(1)}$$

方法二：长度函数

令 $f_0(x)$ 是 x 到 x_1 的长度与 x_0 到 x_1 的长度之比，$f_1(x)$ 是 x 到 x_0 的长度与 x_1 到 x_0 的长度之比，所以 f_0, f_1 满足（1）条件，且

$$\begin{cases} f_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \\ f_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

所以 f_0, f_1 是线性函数，所以 f_0, f_1 是要找的两个函数。因为 $f_0(x)$ 是 x 到 x_1 的长度与 x_0 到 x_1 的长度之比，所以 f_0 沿着 x_1 到 x_0 的方向时 $f_0(x)$ 函数值增长，所以其梯度方向为 x_1 到 x_0 的方向，又因为线性函数的梯度恒定不变，所以其大小为

$$\left|\frac{f_0(x_0) - f_0(x_1)}{x_0 - x_1}\right| = \left|\frac{1}{x_0 - x_1}\right|$$

所以 $f_0(x)$ 的梯度为：

$$\nabla f_0(x) = sgn(x_0 - x_1)|\frac{1}{x_0 - x_1}| = \frac{1}{x_0 - x_1}$$

同理，$f_1(x)$ 的梯度为：

$$\nabla f_1(x) = sgn(x_1 - x_0)|\frac{1}{x_1 - x_0}| = \frac{1}{x_1 - x_0}$$

2 二维情况

二维空间中，由三个不共线的点 $(x_0, y_0)(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ 找到三个定义在 $(x_0, y_0)(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ 围成的三角形区域的线性函数 $f_0(x, y), f_1(x, y), f_2(x, y)$，满足：

$$\begin{cases} f_i(x_i, y_i) = 1 \\ f_i(x_j, y_j) = 0 \quad i \neq j \end{cases} \qquad i = 0, 1, 2 \tag{2}$$

方法一：待定系数法

假设

$$f_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i \qquad i = 0, 1, 2$$

得到方程：

$$\begin{cases} a_0x_0 + b_0y_0 + c_0 = 1 \\ a_0x_1 + b_0y_1 + c_0 = 0 \\ a_0x_2 + b_0y_2 + c_0 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 1 \\ a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2 = 1 \end{cases}$$

设 $\lambda = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$，根据克拉默法则：

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 & 1 \\ 0 & y_1 & 1 \\ 0 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \qquad b_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \qquad c_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix}}{\lambda}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_0 & 1 \\ 1 & y_1 & 1 \\ 0 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \qquad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \qquad c_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix}}{\lambda}$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_0 & 1 \\ 0 & y_1 & 1 \\ 1 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 0 \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}$$

由此就得到了三个基函数，且他们的梯度为：

$$\nabla f_0(x,y) = (a_0, b_0), \nabla f_1(x,y) = (a_1, b_1), \nabla f_1(x,y) = (a_1, b_1)$$

方法二：面积函数

假设 $(x_0, y_0) \to (x_1, y_1) \to (x_2, y_2)$ 是逆时针方向

- 令 $f_0(x,y)$ 表示 $[(x,y)(x_1,y_1)(x_2,y_2)]$ 围成的三角形的面积比上 $[(x_0,y_0)(x_1,y_1)(x_2,y_2)]$ 围成的三角形面积.
- $f_1(x,y)$ 表示 $[(x_0,y_0)(x,y)(x_2,y_2)]$ 围成的三角形的面积比上 $[(x_0,y_0)(x_1,y_1)(x_2,y_2)]$ 围成的三角形面积.
- $f_2(x,y)$ 表示 $[(x_0,y_0)(x_1,y_1)(x,y)]$ 围成的三角形的面积比上 $[(x_0,y_0)(x_1,y_1)(x_2,y_2)]$ 围成的三角形面积.

这时，$f_0(x,y), f_1(x,y), f_2(x,y)$ 满足条件（2）。
用 τ 来表示总面积，τ_i 来表示 $f_i(x,y)$ 对应的面积，由三角形面积公式可得

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \tau_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}, \qquad \tau = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

由假设可得：

$$f_0(x,y) = \frac{\tau_0}{\tau}, \quad f_1(x,y) = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad f_2(x,y) = \frac{\tau_2}{\tau}$$

则 $f_0(x,y), f_1(x,y), f_2(x,y)$ 是线性函数。所以它们是要找的函数。
由于 $f_0(x,y)$ 表示的是 $(x,y)(x_1,y_1)(x_2,y_2)$ 围成的三角形的面积比上 $(x_0,y_0)(x_1,y_1)(x_2,y_2)$ 围成的三角形面积。所以当 (x,y) 沿着与 $(x_2 - x_1, \vec{,} y_2 - y_1)$ 方向垂直并指向 (x_0,y_0) 的方向，即 $(y_1 - y_2, x_2 - x_1)$ 方向时，$f_0(x,y)$ 的函数值增加最快，所以 $f_0(x,y)$ 的梯度方向为 $(y_1 - y_2, x_2 - x_1)$，单位方向为 $\vec{n} = \frac{(y_1-y_2, x_2-x_1)}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2}}$

由于 $f_0(x,y)$ 是线性函数,所以梯度不变,假设由 (x_0,y_0) 到对边的垂线的垂足为 (x_3,y_3) 那么垂线长度就是三角形的高，设为 h,$h=\frac{2\tau}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2}}$ 则 $\nabla f_0(x,y)$ 的大小为 $\frac{f_0(x_0,y_0)-f_0(x_3,y_3)}{h}=\frac{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2}}{2\tau}$

$$\nabla f_0(x,y)=\frac{(y_1-y_2,x_2-x_1)}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2}}\frac{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2}}{2\tau}=\frac{(y_1-y_2,x_2-x_1)}{2\tau}$$

同理：

$$\nabla f_1(x,y)=\frac{(y_2-y_0,x_0-x_2)}{2\tau}$$

$$\nabla f_2(x,y)=\frac{(y_0-y_1,x_1-x_0)}{2\tau}$$

3 三维情况

三维空间中,由四个不共面的点 $(x_0,y_0,z_0)(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)(x_3,y_3,z_3)$ 确定四个定义域在四个点围成的三棱柱内的线性函数 $f_0(x,y,z),f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)$ 满足：

$$\begin{cases} f_i(x_i)=1 \\ f_i(x_j)=0 \quad i\neq j \end{cases} \qquad i=0,1,2,3 \tag{3}$$

方法一:待定系数法

设：

$$f_i(x,y,z)=a_ix+b_iy+c_iz+d_i \qquad i=0,1,2,3$$

得到方程组：

$$\begin{cases} a_0x_0+b_0y_0+c_0z_0+d_0=1 \\ a_0x_1+b_0y_1+c_0z_1+d_0=0 \\ a_0x_2+b_0y_2+c_0z_2+d_0=0 \\ a_0x_3+b_0y_3+c_0z_3+d_0=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1=0 \\ a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1=1 \\ a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2+d_1=0 \\ a_1x_3+b_1y_3+c_1z_3+d_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2=0 \\ a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2=0 \\ a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2+d_2=1 \\ a_2x_3+b_2y_3+c_2z_3+d_2=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_3x_0+b_3y_0+c_3z_0+d_3=0 \\ a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1+d_3=0 \\ a_3x_2+b_3y_2+c_3z_2+d_3=0 \\ a_3x_3+b_3y_3+c_3z_3+d_3=1 \end{cases}$$

设 $\lambda = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$, 根据克拉默法则：

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 & z_0 & 1 \\ 0 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & y_2 & z_2 & 1 \\ 0 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad b_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 & z_0 & 1 \\ x_1 & 0 & z_1 & 1 \\ x_2 & 0 & z_2 & 1 \\ x_3 & 0 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad c_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad d_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix}}{\lambda}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_0 & z_0 & 1 \\ 1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & y_2 & z_2 & 1 \\ 0 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 0 & z_0 & 1 \\ x_1 & 1 & z_1 & 1 \\ x_2 & 0 & z_2 & 1 \\ x_3 & 0 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad c_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad d_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix}}{\lambda}$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_0 & z_0 & 1 \\ 0 & y_1 & z_1 & 1 \\ 1 & y_2 & z_2 & 1 \\ 0 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 0 & z_0 & 1 \\ x_1 & 0 & z_1 & 1 \\ x_2 & 1 & z_2 & 1 \\ x_3 & 0 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad d_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix}}{\lambda}$$

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_0 & z_0 & 1 \\ 0 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & y_2 & z_2 & 1 \\ 1 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 0 & z_0 & 1 \\ x_1 & 0 & z_1 & 1 \\ x_2 & 0 & z_2 & 1 \\ x_3 & 1 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad c_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}, \quad d_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda}$$

这样就得到了四个基函数，且他们的梯度为：

$\nabla f_0(x, y) = (a_0, b_0, c_0), \nabla f_1(x, y) = (a_1, b_1, c_1), \nabla f_2(x, y) = (a_2, b_2, c_2), \nabla f_3(x, y) = (a_3, b_3, c_3)$

方法二：体积函数

若 $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0), (x_3 - x_0, y_3 - y_0, z_3 - z_0)$ 是右手坐标系。

- 令 $f_0(x, y, z)$ 表示 $\{(x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)\}$ 围成的三棱锥的体积比上 $\{(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)\}$ 围成的三棱锥的体积。

- $f_1(x,y,z)$ 表示 $\{(x_0,y_0,z_0),(x,y,z),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\}$ 围成的三棱锥的体积比上 $\{(x_0,y_0,z_0),(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\}$ 围成的三棱锥的体积。

- $f_2(x,y,z)$ 表示 $\{(x_0,y_0,z_0),(x_1,y_1,z_1),(x,y,z),(x_3,y_3,z_3)\}$ 围成的三棱锥的体积比上 $\{(x_0,y_0,z_0),(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\}$ 围成的三棱锥的体积。

- $f_3(x,y,z)$ 表示 $\{(x_0,y_0,z_0),(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x,y,z)\}$ 围成的三棱锥的体积比上 $\{(x_0,y_0,z_0),(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\}$ 围成的三棱锥的体积。

这时，$f_0(x,y,z),f_1(x,y,z),f_2(x,y,z)$ 满足条件(3)。
用 v 来表示总体积，v_i 来表示 $f_i(x,y)$ 对应的棱锥的体积，由三棱锥体积公式可得：

$$v=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x_0&y_0&z_0&1\end{vmatrix},\quad v_0=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x&y&z&1\end{vmatrix},\quad v_1=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x&y&z&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x_0&y_0&z_0&1\end{vmatrix}$$

$$v_2=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x&y&z&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x_0&y_0&z_0&1\end{vmatrix},\quad v_3=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x&y&z&1\\x_0&y_0&z_0&1\end{vmatrix}$$

由假设可知：

$$f_0(x,y,z)=\frac{v_0}{v},\quad f_1(x,y,z)=\frac{v_1}{v}$$
$$f_2(x,y,z)=\frac{v_2}{v},\quad f_3(x,y,z)=\frac{v_3}{v}$$

则 $f_0(x,y,z),f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)$ 是线性函数。所以它们是要找的函数。
设 (x_0,y_0,z_0) 的对面为 s_0, 由于 $f_0(x,y,z)$ 是以 s_0 为底，(x_0,y_0,z_0) 为顶点的立体的体积。所以当 (x,y,z) 沿着与 s_0 垂直且指向 (x_0,y_0,z_0) 的方向时 $f_0(x,y,z)$ 函数值增加最快, 所以 $f_0(x,y,z)$ 的梯度的方向是 $(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)\times(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, 设 $(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1),(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 夹角为 γ, 则单位方向 $\vec{n}$ 为

$$\frac{(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)\times(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)}{|(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)||(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)|sin(\gamma)}$$

由 (x_0,y_0,z_0) 到 s_0 做垂线，垂足为 (x_4,y_4,z_4)，设垂线长度为 h 则

$$h=\frac{6v}{S(s_0)}=\frac{6v}{|(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)||(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)|sin(\gamma)}$$

由于线性函数的梯度处处相等，所以梯度的大小

$$l=\frac{f_0(x_0,y_0,z_0)-f_0(x_4,y_4,z_4)}{h}=\frac{1}{h}$$

所以

$$\nabla f_0(x,y,z) = l * \vec{n} = \frac{(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \times (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}{6v}$$

同理

$$\nabla f_1(x,y,z) = \frac{(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0) \times (x_3 - x_0, y_3 - y_0, z_3 - z_0)}{6v}$$

$$\nabla f_2(x,y,z) = \frac{(x_3 - x_0, y_3 - y_0, z_3 - z_0) \times (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)}{6v}$$

$$\nabla f_3(x,y,z) = \frac{(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \times (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)}{6v}$$