不规则图形到规则图形的映射

陈春雨

2019年9月16日

1 二维图形的映射

1.1 任意三角形到直角三角形的映射

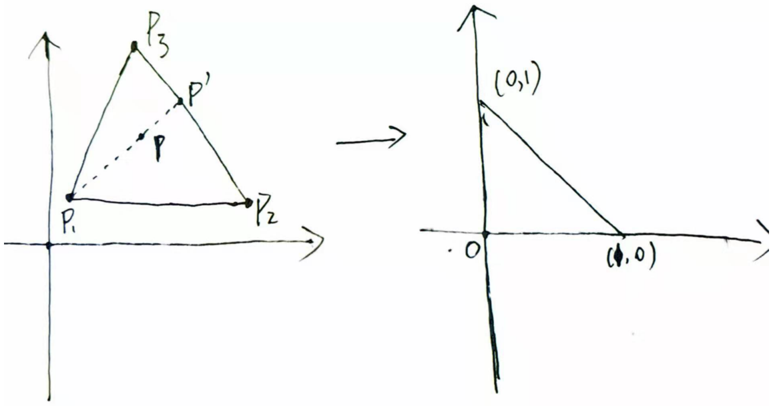
假设一个三角形 A 的三个顶点是 P_1, P_2, P_3, 其中 $P_i = (x_i, y_i)$，将其映射为顶点为 $(0,0), (0,1), (1,0)$ 的直角三角形 B。

对于任意 $P = (x, y) \in A$，$P - P_1$ 可以被 $P_2 - P_1, .P_3 - P_1$ 线性表出，设

$$P - P_1 = a(P_2 - P_1) + b(P_3 - P_1)$$

可以做线性映射 f:

$$(x, y) \to (a, b)$$



任取 $P = (x, y) \in A$, 连接 P_1, P 并延长交 P_2P_3 于 $P' = (x', y')$ 则

$$a(x', y') \geq a(x, y) \geq 0, \quad b(x', y') \geq b(x, y) \geq 0$$

设 $P'P_3$ 的长度是 P_2P_3 的 k 倍，则

$$\begin{aligned} P' - P_1 &= P_2 - P_1 + k(P_3 - P_2) \\ &= k(P_3 - P_1) + (1-k)(P_2 - P_1) \end{aligned}$$

所以

$$a(x', y') = 1 - k, \quad b(x', y') = k$$

所以

$$a(x, y) + b(x, y) \leq 1$$

因此 f 把 A 映射到了 B，而对于任意 (a, b) 属于 B，可以找到 $(x, y) = a(P_2 - P_1) + b(P_3 - P_1)$ 属于 A，所以 f 是满射，由线性表出的唯一性可知 f 是一个单射，所以 f 是 A 到 B 的一一映射。

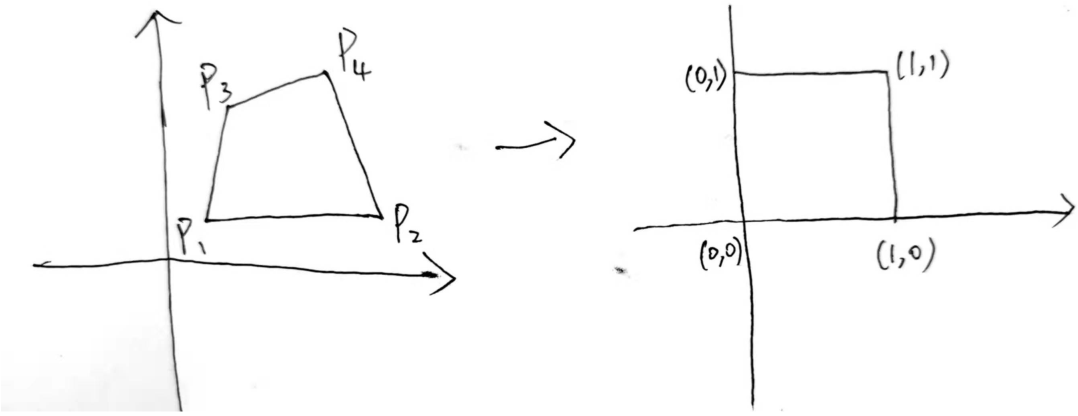
由 $P - P_1 = a(P_2 - P_1) + b(P_3 - P_1)$ 可得：

$$\begin{cases} x - x_1 = a(x_2 - x_1) + b(x_3 - x_1) \\ y - y_1 = a(y_2 - P_1) + b(y_3 - y_1) \end{cases}$$

显然，f 是一个线性映射，解线性方程组即可得到 (a, b).

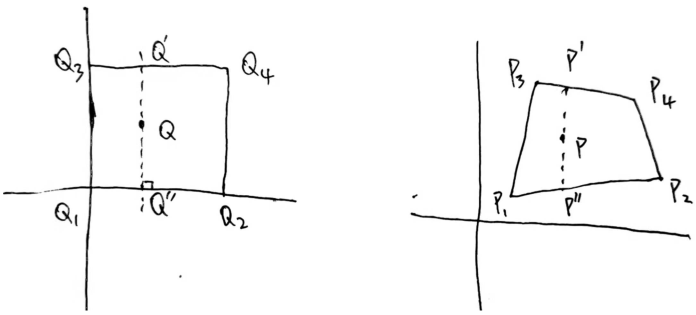
1.2 任意四边形到正方形的映射

假设一个四边形 A 的四个顶点是 P_1, P_2, P_3, P_4 其中 $P_i = (x_i, y_i)$，将其映射为顶点为 $Q_1 = (0,0), Q_2 = (0,1), Q_3 = (1,0), Q_4 = (1,1)$ 的正方形 B。



若使用 **1.1** 中的线性映射，将 P_1, P_2, P_3 映射为 Q_1, Q_2, Q_3，则 P_4 不一定映射到 Q_4，(事实上，只有 A 是平行四边形的时候才会使 P_4 映射到 Q_4)，所以要使用新的映射。

我们发现任取正方形中一点 $Q = (\lambda, k)$, 经过 Q 做 y 轴平行线，分别交上下边于 Q', Q''



则

$$\frac{l(Q' - Q_3)}{l(Q_4 - Q_3)} = \frac{l(Q'' - Q_1)}{l(Q_2 - Q_1)} = \lambda, \quad \frac{l(Q - Q'')}{l(Q' - Q'')} = k$$

这样就定义了 Q 的坐标，那么同样的方法在一般四边形中是否适用呢？

定义 1 *$l(\alpha) = \alpha$ 的长度*

定义 2 *假设一个四边形 A 的四个顶点是 P_1, P_2, P_3, P_4，P', P'' 分别在 P_1P_2, P_3P_4 上，且*

$$\frac{l(P' - P_3)}{l(P_4 - P_3)} = \frac{l(P'' - P_1)}{l(P_2 - P_1)} = \lambda$$

则称 $P'P''$ 为等比线,λ 为等比线的比

定理 1.1 *对于任意四边形中的任意一点,都有唯一一条等比线经过它。*

证明:

存在性:假设一个四边形 A 的四个顶点是 P_1, P_2, P_3, P_4, 将 P_1P_2, P_3P_4 向两边无线延长,任取四边形内部一点 P,作经过 P 的直线,分别交 P_1P_2, P_3P_4 与 P', P'', 作关于直线斜率 k 的函数 g:

$$g(k) = \frac{l(P' - P_3)}{l(P_4 - P_3)} - \frac{l(P'' - P_1)}{l(P_2 - P_1)}$$

则 $g(k)$ 是一个连续函数,设 $P'' = P_1$ 时,直线斜率为 k_1,$P'' = P_2$ 时,直线斜率为 k_2, 则

$$g(k_1) > 0, \quad g(k_2) < 0$$

所以存在一个 k 使得 $g(k) = 0$,即存在一条过 P 的直线满足

$$\frac{l(P' - P_3)}{l(P_4 - P_3)} = \frac{l(P'' - P_1)}{l(P_2 - P_1)}$$

所以这是一条等比线。

唯一性:若存在两条等比线 $Q'Q''$, $P'P''$ 过 P,假设 Q' 在 P' 左边,则 Q'' 在 P'' 右边,那么两条线至少有一条不是等比线,所以每个点只有一条等比线经过。证毕 ||

由定理 1.1 可知,四边形内任意一个点 $P = (x, y)$ 有唯一一条等比线 $P'P''$ 经过,设这个等比线的比为 λ,

$$\frac{l(P - P'')}{l(P' - P'')} = k$$

作映射 f:

$$(x, y) \to (\lambda, k)$$

由于 $0 \le \lambda, k \le 1$, 所以 f 把四边形映射到了正方形内.

任取 $0 \le \lambda, k \le 1$,都存在四边形上比为 λ 的等比线 $P'P''$,在这条线上定存在一点 P,满足

$$\frac{l(P - P'')}{l(P' - P'')} = k$$

根据 f 的定义可知:

$$f(P) = (\lambda, k)$$

所以 f 是一个满射,由于等比线的唯一性可知 f 是一个单射,所以 f 是 A 到 B 的一一映射。

用待定系数法,假设 $P = (x, y)$:

$$f(P) = (\lambda, k)$$

则:

$$\begin{aligned} P - P_1 &= P - P'' + P'' - P_1 \\ &= k(P' - P'') + \lambda(P_2 - P_1) \\ &= k(P' - P_3) + k(P_3 - P_1) + k(P_1 - P'') + \lambda(P_2 - P_1) \\ &= \lambda k(P_4 - P_3) + k(P_3 - P_1) + \lambda(1 - k)(P_2 + P_1) \end{aligned}$$

所以得到方程组：

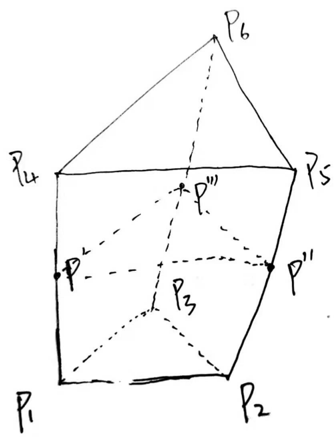
$$\begin{cases} x - x_1 &= \lambda k(x_4 - x_3) + k(x_3 - x_1) + \lambda(1-k)(x_2 + x_1) \\ y - y_1 &= \lambda k(y_4 - y_3) + k(y_3 - y_1) + \lambda(1-k)(y_2 + y_1) \end{cases}$$

由于 f 是一一映射，所以对于任意 (x, y), 都有解。解方程组即可得到 (λ, k)

2 三维

2.1 任意三棱柱到直角三棱柱的映射

假设一个三棱柱的六个顶点为：$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$，其中 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ 将其映射为顶点为将其映射为顶点为 $Q_1 = (0, 0$□$0), Q_2 = (0, 1, 0), Q_3 = (1, 0, 0), Q_4 = (0, 0, 1), Q_5 = (0, 1, 1), Q_6 = (1, 0, 1)$ 的直角三棱柱。



定义 3 *假设一个三棱柱的六个顶点为：$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$，在三条棱上分别取三个点 P', P'', P''，若：*

$$\frac{l(P' - P_4)}{l(P_1 - P_4)} = \frac{l(P'' - P_5)}{l(P_2 - P_5)} = \frac{l(P''' - P_6)}{l(P_4 - P_6)} = b$$

则称 P', P'', P'' 组成的三角形为三棱柱的等比面，b 成为等比面的比。

定理 2.1 *对任意三棱柱，取内部任意一点，都有唯一一个等比面经过。*

证明：存在性：假设一个三棱柱的六个顶点为：$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$，取内部一点 $P = (x, y, z)$，在 P_3P_6, P_2P_5 上分别取两个点 P'', P''，令：

$$\frac{l(P'' - P_5)}{l(P_2 - P_5)} = \frac{l(P''' - P_6)}{l(P_4 - P_6)}$$

P, P'', P''' 组成一个平面，交 P_1P_4 于 P'，设：

$$g = \frac{l(P' - P_4)}{l(P_1 - P_4)} - \frac{l(P'' - P_5)}{l(P_2 - P_5)}$$

则 g 与平面 P', P'', P'' 与三个坐标轴夹角角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 有关，显然他是连续的，设 $P'' = P_5$ 时，夹角为 t_{11}, t_{21}, t_{31}，$P'' = P_2$ 时，夹角为 t_{12}, t_{22}, t_{32}，则：

$$g(t_{11}, t_{21}, t_{31}) \leq 0, g(t_{12}, t_{22}, t_{32}) \geq 0$$

所以存在 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$，使：

$$g(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$$

即存在 P', 使：

$$\frac{l(P' - P_4)}{l(P_1 - P_4)} = \frac{l(P'' - P_5)}{l(P_2 - P_5)} = \frac{l(P''' - P_6)}{l(P_4 - P_6)}$$

即 P', P'', P''' 是一个等比面。

唯一性，与定理 1.1 类似。||

由定理 2.1 可知，对于三棱柱内任意一点 P，在三条棱上有三个点 P', P'', P'' 使 P 在三个点组成的三角形内。且

$$\frac{l(P' - P_4)}{l(P_1 - P_4)} = \frac{l(P'' - P_5)}{l(P_2 - P_5)} = \frac{l(P''' - P_6)}{l(P_4 - P_6)} = b$$

所以存在 λ, k 使 $P = \lambda P\prime + kP\prime\prime + (1 - \lambda - k)P\prime\prime\prime$,$0 \leq b \leq 1, 0 \leq \lambda + k \leq 1$ 作映射 f:

$$(x, y, z) \to (\lambda, k, b)$$

则 f 把三棱柱映射为直角三棱柱，$\forall(\lambda, k, b)$ 属于直角三棱柱，原三棱柱存在比为 b 的等比面 P', P'', P''，令 $P = \lambda P\prime + kP\prime\prime + (1 - \lambda - k)P\prime\prime\prime$, 则由 f 的定义可知：

$$f(P) = (\lambda, k, b)$$

所以 f 是一个满射，由定理 2.1 可知，f 是一个单射，所以 f 是一个一一映射。

综上，若 $f(P) = (\lambda, k, b)$, 可以得到如下关系：

$$\begin{aligned} P &= \lambda P' + kP'' + (1 - \lambda + k)P'' \\ &= \lambda(bP_4 + (1 - b)P_1) + k(bP_5 + (1 - b)P_2)(1 - \lambda + k)(bP_6 + (1 - b)P_3) \end{aligned}$$

得到方程组：

$$\begin{cases} x = \lambda(bx_4 + (1 - b)x_1) + k(bx_5 + (1 - b)x_2)(1 - \lambda + k)(bx_6 + (1 - b)x_3) \\ y = \lambda(by_4 + (1 - b)y_1) + k(by_5 + (1 - b)y_2)(1 - \lambda + k)(by_6 + (1 - b)y_3) \\ z = \lambda(bz_4 + (1 - b)z_1) + k(bz_5 + (1 - b)z_2)(1 - \lambda + k)(bz_6 + (1 - b)z_3) \end{cases}$$

由定理 2.1 可以方程组必有解，求解方程组即可得到 (λ, k, b)。