傅里叶变换

作者

2019年7月20日

1 公式

1. 傅里叶级数：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{n\pi}{T}x, \\
a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx, \\
b_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx \qquad n = 1,\cdots,+\infty
\end{aligned}
$$

2. 傅里叶级复数形式：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{n\pi}{T}x}, \\
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-\frac{n\pi}{T}x}\,dx \qquad n = -\infty,\cdots,0,\cdots,+\infty
\end{aligned}
$$

3. 傅里叶变换：

$$
\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx
$$

4. 傅里叶逆变换：

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{i\omega x}\,d\omega
$$

5. 离散傅里叶变换：$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_{N-1})$ 的离散傅里变换为 $\boldsymbol{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_{N-1})$

$$
c_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-jk\frac{2\pi i}{N}}
$$

2 公式原理及推导

定义 $L^2[-T,T]$ 空间上的内积为：

$$
< f, g >= \int_{-T}^{T} f * g\,dx
$$

$\left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{n\pi}{T}x, \sin\frac{n\pi}{T}x\right\}_{n=1,2,\cdots}$ 是 $L^2[-T,T]$ 空间上的一组基，设 $f, g \in \left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{n\pi}{T}x, \sin\frac{n\pi}{T}x\right\}_{n=1,2,\cdots}, f \neq g$ 则：

$$
\begin{aligned}
< f, g >= \int_{-T}^{T} f * g\,dx = 0 \\
< f, f >= \int_{-T}^{T} f^2\,dx = T
\end{aligned}
$$

所以 $\{\frac{1}{2}, \cos\frac{n\pi}{T}x, \sin\frac{n\pi}{T}x\}_{n=1,2,\cdots}$ 是 $L^2[-T,T]$ 是 $L^2[-T,T]$ 空间上的一组正交基，所以：

$$< f(x), \frac{1}{2} > = \int_{-T}^{T} \frac{1}{2} * f\, dx$$

$$< f(x), \cos\frac{n\pi}{T}x > = \int_{-T}^{T} f * \cos\frac{n\pi}{T}x\, dx$$

$$< f(x), \sin\frac{n\pi}{T}x > = \int_{-T}^{T} f * \sin\frac{n\pi}{T}x\, dx$$

所以：

$$f(x) = \int_{-T}^{T} \frac{1}{2} * f\, dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-T}^{T} f * \cos\frac{n\pi}{T}x\, dx * \cos\frac{n\pi}{T}x + \int_{-T}^{T} f * \sin\frac{n\pi}{T}x\, dx * \sin\frac{n\pi}{T}x$$

[1]

参考文献

[1] TKH Tam and Cecil G Armstrong. 2d finite element mesh generation by medial axis subdivision. *Advances in engineering software and workstations*, 13(5):313–324, 1991.