五点差分法求解椭圆型偏微分方程

陈春雨

2019年9月29日

1 问题

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \cos 3x \sin \pi y, \quad (x,y) \in G = (0,\pi) \times (0,1) \\
u_x(0,y) = u_x(\pi,y) &= 0, \quad 0 < y < 1, \\
u(x,0) = u(x,1) &= 0, \quad 0 < x < \pi,
\end{aligned}
$$

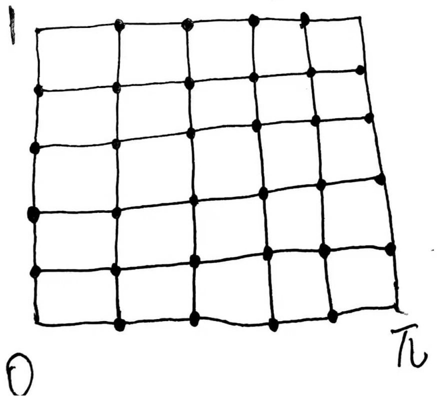
精确解为：$u = (9+\pi^2)^{-1} \cos 3x \sin \pi y$

1.1 离散

对 x, y 的范围等距离散得到

$$\{x_0, x_1, ...x_n\}\{y_0, y_1, ...y_m\}$$

步长分别为 $\frac{\pi}{n}, \frac{1}{n}$, 用 u_{ij} 代表 $u(x_i, y_j)$



对于上下两个边界上的点，u_{ij} 满足：

$$u_{ij} = 0$$

对于左右两个边界的点满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = 0 \tag{1}$$

对于内部的点满足：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = -\cos 3x_i \sin \pi y_j \tag{2}$$

由泰勒公式可知：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_1} + o(h_1) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_1} + o(h_1) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h_1^2} + o(h_1^2) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{h_2^2} + o(h_2^2)
\end{aligned}$$

对 (1) 进行离散，得到：

$$u_{i+1j} - u_{ij} = o(h_1)$$

或：

$$u_{i-1j} - u_{ij} = o(h_1)$$

对 (2) 进行离散，得到：

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{h_2^2} = -cos3x_i sin\pi y_j + o(h_1^2) + o(h_2^2)$$

综上可得：

$$\begin{cases}
u_{ij} = 0 \qquad (j = 0 \quad or \quad j = n) \\
u_{i+1j} - u_{ij} = o(h_1) \qquad (i = 0) \\
u_{i-1j} - u_{ij} = o(h_1) \qquad (i = n) \\
\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{h_2^2} = -cos3x_i sin\pi y_j + o(h_1^2) + o(h_2^2) \qquad (other)
\end{cases} \tag{3}$$

设 U 为 $(n+1)^2$ 维向量，$U(i \times (n+1) + j) = u_{ij}$，则可以得到方程：

$$AU = b + e$$

其中 b, e 是 $(n+1)^2$ 维向量，b 中没有高阶无穷小量，e 中全是高阶无穷小量且最高阶为 $o(h_1)$. 所以精确解为：

$$U = A^{-1}b + A^{-1}e$$

而数值解为：

$$U_s = A^{-1}b$$

所以误差为：$A^{-1}e$, 所以以无穷范数做误差的话，误差的阶数是 1 阶的。

1.2 计算

经过编程计算以后，得到：

剖分数	误差	阶
4	0.11731442534924674	
8	0.047303607146040476	1.3
16	0.019117740374945326	1.3
32	0.008457203854343821	1.1
64	0.003969881130677012	1.1