

不规则图形到规则图形的映射

陈春雨

2019年9月15日

1 二维图形的映射

1.1 任意三角形到直角三角形的映射

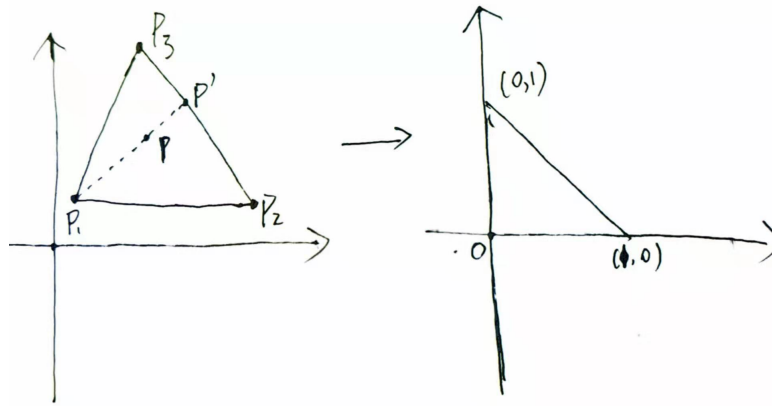
假设一个三角形 A 的三个顶点是 P_1, P_2, P_3 , 其中 $P_i = (x_i, y_i)$, 将其映射为顶点为 $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ 的直角三角形 B 。

对于任意 $P = (x, y) \in A$, $P - P_1$ 可以被 $P_2 - P_1, P_3 - P_1$ 线性表出, 设

$$P - P_1 = a(P_2 - P_1) + b(P_3 - P_1)$$

可以做线性映射 f :

$$(x, y) \rightarrow (a, b)$$



任取 $P = (x, y) \in A$, 连接 P_1, P 并延长交 P_2P_3 于 $P' = (x', y')$ 则

$$a(x', y') \geq a(x, y) \geq 0, \quad b(x', y') \geq b(x, y) \geq 0$$

设 $P'P_3$ 的长度是 P_2P_3 的 k 倍, 则

$$\begin{aligned} P' - P_1 &= P_2 - P_1 + k(P_3 - P_2) \\ &= k(P_3 - P_1) + (1 - k)(P_2 - P_1) \end{aligned}$$

所以

$$a(x', y') = 1 - k, \quad b(x', y') = k$$

所以

$$a(x, y) + b(x, y) \leq 1$$

因此 f 把 A 映射到了 B , 而对于任意 (a, b) 属于 B , 可以找到 $(x, y) = a(P_2 - P_1) + b(P_3 - P_1)$ 属于 A , 所以 f 是满射, 由线性表出的唯一性可知 f 是一个单射, 所以 f 是 A 到 B 的一一映射。

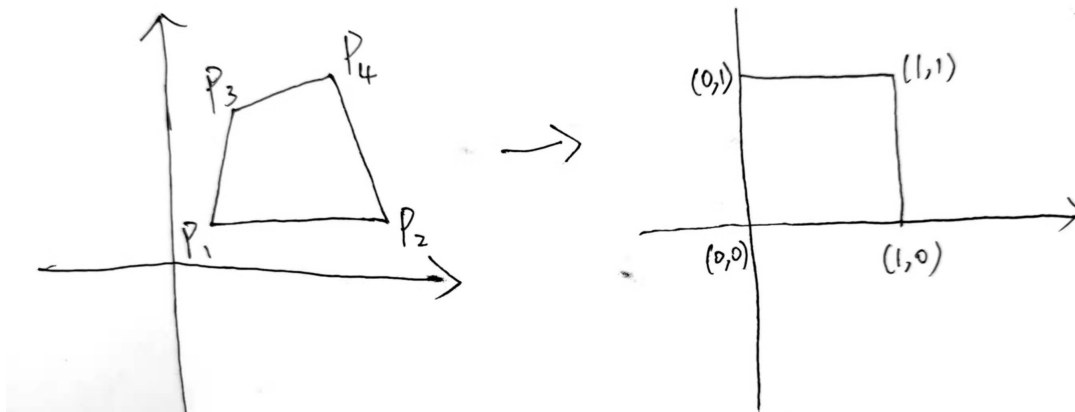
由 $P - P_1 = a(P_2 - P_1) + b(P_3 - P_1)$ 可得:

$$\begin{cases} x - x_1 = a(x_2 - x_1) + b(x_3 - x_1) \\ y - y_1 = a(y_2 - y_1) + b(y_3 - y_1) \end{cases}$$

显然, f 是一个线性映射, 解线性方程组即可得到 (a, b) 。

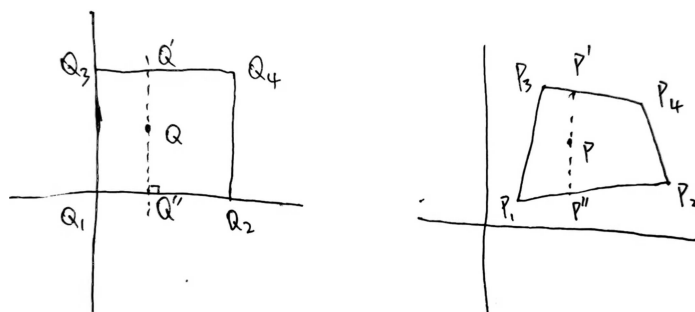
1.2 任意四边形到正方形的映射

假设一个四边形 A 的四个顶点是 P_1, P_2, P_3, P_4 其中 $P_i = (x_i, y_i)$, 将其映射为顶点为 $Q_1 = (0, 0), Q_2 = (0, 1), Q_3 = (1, 0), Q_4 = (1, 1)$ 的正方形 B 。



若使用 1.1 中的线性映射, 将 P_1, P_2, P_3 映射为 Q_1, Q_2, Q_3 , 则 P_4 不一定映射到 Q_4 , (事实上, 只有 A 是平行四边形的时候才会使 P_4 映射到 Q_4), 所以要使用新的映射。

我们发现任取正方形中一点 $Q = (\lambda, k)$, 经过 Q 做 y 轴平行线, 分别交上下边于 Q', Q''



则

$$\frac{l(Q' - Q_3)}{l(Q_4 - Q_3)} = \frac{l(Q'' - Q_1)}{l(Q_2 - Q_1)} = \lambda, \quad \frac{l(Q - Q'')}{l(Q' - Q'')} = k$$

这样就定义了 Q 的坐标, 那么同样的方法在一般四边形中是否适用呢?

定义 1 $l(\alpha) = \alpha$ 的长度

定义 2 假设一个四边形 A 的四个顶点是 P_1, P_2, P_3, P_4 , P', P'' 分别在 P_1P_2, P_3P_4 上, 且

$$\frac{l(P' - P_3)}{l(P_4 - P_3)} = \frac{l(P'' - P_1)}{l(P_2 - P_1)} = \lambda$$

则称 $P'P''$ 为等比线, λ 为等比线的比

定理 1.1 对于任意四边形中的任意一点,都有唯一一条等比线经过它。

证明:

存在性: 假设一个四边形 A 的四个顶点是 P_1, P_2, P_3, P_4 , 将 P_1P_2, P_3P_4 向两边无线延长, 任取四边形内部一点 P , 作经过 P 的直线, 分别交 P_1P_2, P_3P_4 与 P', P'' , 作关于直线斜率 k 的函数 g :

$$g(k) = \frac{l(P' - P_3)}{l(P_4 - P_3)} - \frac{l(P'' - P_1)}{l(P_2 - P_1)}$$

则 $g(k)$ 是一个连续函数, 设 $P'' = P_1$ 时, 直线斜率为 k_1 , $P'' = P_2$ 时, 直线斜率为 k_2 , 则

$$g(k_1) > 0, \quad g(k_2) < 0$$

所以存在一个 k 使得 $g(k) = 0$, 即存在一条过 P 的直线满足

$$\frac{l(P' - P_3)}{l(P_4 - P_3)} = \frac{l(P'' - P_1)}{l(P_2 - P_1)}$$

所以这是一条等比线。

唯一性: 若存在两条等比线 $Q'Q'', P'P''$ 过 P , 假设 Q' 在 P' 左边, 则 Q'' 在 P'' 右边, 那么两条线至少有一条不是等比线, 所以每个点只有一条等比线经过。证毕 ||

由命题 1 可知, 四边形内任意一个点 $P = (x, y)$ 有唯一一条等比线 $P'P''$ 经过, 设这个等比线的比为 λ ,

$$\frac{l(P - P'')}{l(P' - P'')} = k$$

作映射 f :

$$(x, y) \rightarrow (\lambda, k)$$

由于 $0 \leq \lambda, k \leq 1$, 所以 f 把四边形映射到了正方形内。

任取 $0 \leq \lambda, k \leq 1$, 都存在四边形上比为 λ 的等比线 $P'P''$, 在这条线上定存在一点 P , 满足

$$\frac{l(P - P'')}{l(P' - P'')} = k$$

根据 f 的定义可知:

$$f(P) = (\lambda, k)$$

所以 f 是一个满射, 由于等比线的唯一性可知 f 是一个单射, 所以 f 是 A 到 B 的一一映射。

用待定系数法, 假设 $P = (x, y)$:

$$f(P) = (\lambda, k)$$

则:

$$\begin{aligned} P - P_1 &= P - P'' + P'' - P_1 \\ &= k(P' - P'') + \lambda(P_2 - P_1) \\ &= k(P' - P_3) + k(P_3 - P_1) + k(P_1 - P'') + \lambda(P_2 - P_1) \\ &= \lambda k(P_4 - P_3) + k(P_3 - P_1) + \lambda(1 - k)(P_2 + P_1) \end{aligned}$$

所以得到方程组：

$$\begin{cases} x - x_1 &= \lambda k(x_4 - x_3) + k(x_3 - x_1) + \lambda(1 - k)(x_2 + x_1) \\ y - y_1 &= \lambda k(y_4 - y_3) + k(y_3 - y_1) + \lambda(1 - k)(y_2 + y_1) \end{cases}$$

由于 f 是一一映射, 所以对于任意 (x, y) , 都有解。解方程组即可得到 (λ, k)