二维分片多项式空间

陈春雨

2019 年 11 月 8 日

1 分片线性多项式空间

给定三角形区域 $I=(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 其上的线性多项式空间定义如下：

$$P_1(I)=\{v:v(x)=c_0+c_1x+c_2y,(x,y)\in I,c_0,c_1,c_2\in\mathbb{R}\}, \tag{1}$$

基函数的选择: 重心坐标函数 (节点基函数)

用 λ_0 表示在 (x_0,y_0) 处为 1, 在 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 处为 0 的一次函数, λ_1 表示在 (x_1,y_1) 处为 1, 在 $(x_0,y_0),(x_2,y_2)$ 处为 0 的一次函数, λ_2 表示在 (x_2,y_2) 处为 1, 在 $(x_1,y_1),(x_0,y_0)$ 处为 0 的一次函数.

$\forall(x,y)\in I$ 假设

$$\begin{aligned}I_0&=(x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2)\\ I_1&=(x_0,y_0),(x,y),(x_2,y_2)\\ I_2&=(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x,y)\end{aligned}$$

则由重心坐标函数的性质可知:

$$\lambda_0(x,y)=\frac{s(I_0)}{s(I)},\lambda_1(x,y)=\frac{s(I_1)}{s(I)}.\lambda_2(x,y)=\frac{s(I_2)}{s(I)}. \tag{2}$$

2 k 次多项式空间 $P_k(I)$

给定区间 $I=[x_0,x_1]$, 其上的线性多项式空间定义如下：

$$P_k(I)=\{v:v(x)=c_{00}+c_{10}x+c_{20}x^2+\cdots+c_{k0}x^k+c_{01}y+\cdots+c0ky^k,(x,y)\in I,c_{00},c_{10},\cdots c_{k0}\in\mathbb{R}\}, \tag{3}$$

I 上的 $k\geq 1$ 次基函数共有

$$n_{dof}=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

其计算公式如下:

$$\phi_{m,n,r}=\frac{1}{m!n!r!}\prod_{l_0=0}^{m-1}(k\lambda_0-l_0)\prod_{l_1=0}^{n-1}(k\lambda_1-l_1)\prod_{l_2=0}^{r-1}(k\lambda_2-l_2).$$

其中 $m\geq 0$, $n\geq 0$,$r\geq 0$, 且 $m+n+r=k$, 这里规定:

$$\prod_{l_i=0}^{-1}(k\lambda_i-l_i):=1,\quad i=0,1,2$$

k 次基函数的面向数组的计算构造向量：

$$P=(\frac{1}{0!},\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,\frac{1}{k!})$$

构造矩阵：

$$A:=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k\lambda_0 & k\lambda_1 & k\lambda_2 \\ k\lambda_0-1 & k\lambda_1-1 & k\lambda_2-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k\lambda_0-(k-1) & k\lambda_1-(k-1) & k\lambda_2-(k-1) \end{pmatrix}$$

对 A 的每一列做累乘运算, 并左乘由 P 形成的对角矩阵, 得矩阵:

$$B=\mathsf{diag}(P)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \prod_{l=0}^{1}(k\lambda_0-l) & \prod_{l=0}^{1}(k\lambda_1-l) & \prod_{l=0}^{1}(k\lambda_2-l) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \prod_{l=0}^{k-1}(k\lambda_0-l) & \prod_{l=0}^{k-1}(k\lambda_1-l) & \prod_{l=0}^{k-1}(k\lambda_2-l) \end{pmatrix}$$

易知, 只需从 B 的每一列中各选择一项相乘 (要求三项次数之和为 k, 其中取法共有

$$n_{dof}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

构造指标矩阵：

$$I=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & 1 \\ k-1 & 1 & 0 \\ k-2 & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

则第 i 个 k 次基函数可写成如下形式

$$\phi_i=B_{m,0}B_{n,1}B_{r,2},$$

其中 $m=I_{i,0},n=I_{i,1}r=I_{i,2}$, 并且 $m+n+r=k$.

$$\begin{aligned}
\nabla\prod_{j=0}^{m-1}(k\lambda_0-j)=&k\sum_{j=0}^{m-1}\prod_{0\le l\le m-1,l\ne j}(k\lambda_0-l)\nabla\lambda_0,\\
\nabla\prod_{j=0}^{n-1}(k\lambda_1-j)=&k\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{0\le l\le n-1,l\ne j}(k\lambda_1-l)\nabla\lambda_1,\\
\nabla\prod_{j=0}^{r-1}(k\lambda_2-j)=&k\sum_{j=0}^{r-1}\prod_{0\le l\le r-1,l\ne j}(k\lambda_2-l)\nabla\lambda_2,
\end{aligned}$$

$$
\boldsymbol{D}^0 = \begin{pmatrix} k & k\lambda_0 & \cdots & k\lambda_0 \\ k\lambda_0 - 1 & k & \cdots & k\lambda_0 - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\lambda_0 - (k-1) & k\lambda_0 - (k-1) & \cdots & k \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{D}^1 = \begin{pmatrix} k & k\lambda_1 & \cdots & k\lambda_1 \\ k\lambda_1 - 1 & k & \cdots & k\lambda_1 - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\lambda_1 - (k-1) & k\lambda_1 - (k-1) & \cdots & k \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{D}^1 = \begin{pmatrix} k & k\lambda_2 & \cdots & k\lambda_2 \\ k\lambda_2 - 1 & k & \cdots & k\lambda_2 - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\lambda_2 - (k-1) & k\lambda_2 - (k-1) & \cdots & k \end{pmatrix},
$$

把 $\boldsymbol{D}^0$,$\boldsymbol{D}^1$ 和 $\boldsymbol{D}^2$ 的每一列沿行的方向做累乘运算, 然后取它们的下三角矩阵, 最后把下三角矩阵的每一行再求和, 即可得到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每一列各个元素的求导后系数. 可得到矩阵 $\boldsymbol{D}$, 其元素定义为

$$
\boldsymbol{D}_{i,j} = \sum_{m=0}^{j} \prod_{k=0}^{j} D^i_{k,m}, \quad 0 \le i \le 2, , 0 \le j \le k-1.
$$

最后, 可以用如下的方式来计算 $\boldsymbol{B}$ 的梯度：

$$
\begin{aligned}
\nabla \boldsymbol{B} =& \mathrm{diag}(\boldsymbol{P}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{D}_{0,0}\nabla\lambda_0 & \boldsymbol{D}_{1,0}\nabla\lambda_1 & \boldsymbol{D}_{2,0}\nabla\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \\ \boldsymbol{D}_{0,k-1}\nabla\lambda_0 & \boldsymbol{D}_{1,k-1}\nabla\lambda_1 & \boldsymbol{D}_{2,k-1}\nabla\lambda_2 \end{pmatrix} \\
=& \mathrm{diag}(\boldsymbol{P}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\lambda_0 & & \\ & \nabla\lambda_1 & \\ & & \nabla\lambda_2 \end{pmatrix} \\
=& \boldsymbol{F} \begin{pmatrix} \nabla\lambda_0 & & \\ & \nabla\lambda_1 & \\ & & \nabla\lambda_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\boldsymbol{F} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{P}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix}. \tag{4}
$$