$H(\mathrm{div};\mathbb{S})$ 协调的对称张量有限元

2025 年 6 月 20 日

1 引言

在线弹性方程的混合元方法中，应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和位移 $\boldsymbol{u}$ 的有限元空间分别为 $H(\mathrm{div};\mathbb{S})$ 和 L^2，其中 $\mathbb{S}$ 为对称张量空间。对应的有限元空间 Σ_h 和 V_h 需要满足 Infsup 条件，该条件成立的前提是 $\mathrm{div}\,\Sigma_h = V_h$。

对于任意的单纯形 T，令 $\mathbb{B}_k(\mathrm{div},T) := \{\sigma \in \mathbb{P}_k(T,\mathbb{S}) \mid \sigma|_{\partial T}\cdot\boldsymbol{n} = 0\}$ 为迹零多项式空间，对于该空间有

$$\mathrm{div}\,\mathbb{B}_k(\mathrm{div},T) = \mathbb{P}_{k-1}(T,\mathbb{S}) \cap RM^{\perp}$$

其中 $RM^{\perp}$ 为 RM 的 L^2 正交补空间，$RM := \mathbb{P}_0(T,\mathbb{R}^d) + \mathbb{P}_0(T,\mathbb{K})\boldsymbol{x}$，$\mathbb{K}$ 为 d 维反对称矩阵。对于单纯形网格 $\mathcal{T}_h$，以及 $\mathcal{T}_h$ 上某个 $H(\mathrm{div},\mathbb{S})$ 协调的有限元空间 Σ_h，作如下假设：

(A1) $\mathrm{div}\,\Sigma_T = \mathbb{P}_{k-1}(T,\mathbb{S}), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$.

(A2) 如下自由度在 Σ_h 上是线性无关的：

$$\mathcal{N}_{F,\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\sigma}) := \int_F (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}S, \quad \forall \boldsymbol{q} \in \mathbb{P}_1(T,\mathbb{R}^d), F \in \Delta_{n-1}\mathcal{T}_h$$

那么可以得到 $\mathrm{div}\,\Sigma_h = \mathbb{P}_{k-1}^{-1}(\mathcal{T}_h,\mathbb{S})$。其中假设 (A2) 保证了 $\Pi_{T\in\mathcal{T}_h} RM(T) \subseteq \mathrm{div}\,\Sigma_h$。

Hu-Zhang 元是一种 $H(\mathrm{div},\mathbb{S})$ 协调有限元，其形函数空间为 $\mathbb{P}_k(T,\mathbb{S})$，因此自然满足假设 (A1)，当 $k \geq d+1$ 时，又满足假设 (A2)。Hu-Zhang 元包含超光滑自由度，其要求在网格的所有小于等于 $d-1$ 维的子单形上都法向连续，这些特点均源自于形函数空间的对称性与光滑性。

为了解决这个问题,形函数空间的选取可以在 $\mathbb{P}_k(T,\mathbb{S})$ 的基础上,加上一些额外的 $H(\mathrm{div};\mathbb{S})$ 协调的函数。这些函数非光滑，在 ∂T 上的迹 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ 非零，以使假设 (A2) 中的自由度在 $k\le d$ 时不再线性相关。且为了 (A1) 成立，这些函数要求散度为零。下面给出这些函数的构造方法。

2　可杂交化 $H(\mathrm{div};\mathbb{S})$ 协调有限元

根据弹性复形的恰当性，$H(\mathrm{div};\mathbb{S})$ 协调且散度为零的函数组成了空间 U 在其对应的微分算子 d 下的像，其中 U 是弹性复形中 $H(\mathrm{div};\mathbb{S})$ 前面的空间。

$$U \xrightarrow{\mathrm{d}} H(\mathrm{div};\mathbb{S}) \xrightarrow{\mathrm{div}} L^2(\mathbb{R}^d) \tag{1}$$

因此，可以选取 U 中的函数在 d 下的像作为额外的函数，为了构造非无穷光滑函数引入如下的分裂单纯形。

2.1　分裂单纯形

对于一个 d 维单纯形 T，其 $d+1$ 个顶点为 $\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_d$，定义

$$\boldsymbol{x}_c=\frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d}\boldsymbol{x}_i,\quad \boldsymbol{t}_{ij}=\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i,\quad \boldsymbol{t}_{ic}=\boldsymbol{x}_c-\boldsymbol{x}_i$$

对于 $f\in\Delta(T)$，定义 $\boldsymbol{t}_{fc}=\boldsymbol{t}_{f[0]c}=\boldsymbol{x}_c-\boldsymbol{x}_{f[0]}$。通过连接 $\boldsymbol{x}_c$ 和 $\boldsymbol{x}_i$ 可以将 T 分裂为 $d+1$ 个 d 维单纯形，记为 T^R。T_i 为 T^R 中不包含 $\boldsymbol{x}_i$ 的单纯形，对于 $f\in\Delta_{d-1}T$, T_{f^*} 包含 f。χ_{T_i} 为 T_i 上的特征函数。

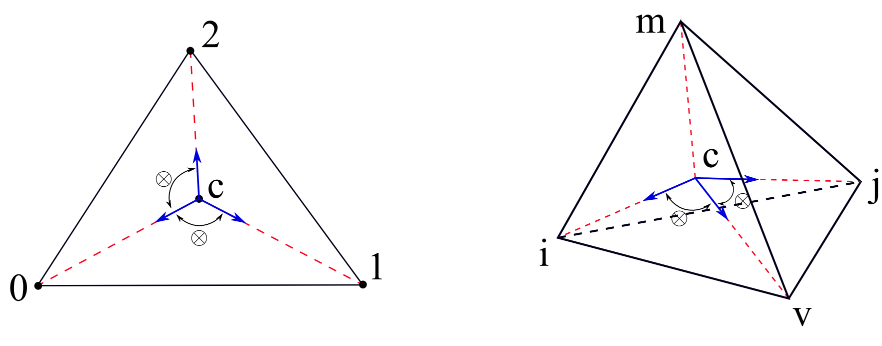

图 1: 分裂单纯形

λ_i 为 T^R 上连续的分片线性函数，满足

$$\lambda_i(\boldsymbol{x}_j)=\delta_{ij},\quad \forall j=0,\cdots,d,\qquad \text{and}\qquad \lambda_i(\boldsymbol{x}_c)=0.$$

Lemma 1. 对于 T^R 中的一个四面体 $T_i, 0\leq i\leq d$，$\{\boldsymbol{t}_{cm}\}_{m=0,m\neq i}^{d}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个基，且 $\{\nabla\lambda_m|_{T_i}\}_{m=0,m\neq i}^{d}$ 是其对偶基。

2.2 二维情况

在二维情况下，弹性复形中 $U=H^2$，微分算子 $\mathrm{d}=J$ 定义如下：

$$J(u)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\nabla^2 u\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{2}$$

现在定义分裂三角形 T^R 上的 H^2 协调函数。令三个顶点为 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$，对于顶点 v，令 $[i,j]=v^*$，定义

$$\psi_v=\lambda_v^3\lambda_i\chi_{T_j}-\lambda_v^3\lambda_j\chi_{T_i}$$

Lemma 2. $\psi_v\in H^2(T^R)$.

证明. 只需证明 $\nabla\psi_v$ 在 T^R 上连续，即在边 $[v,c],[i,c],[j,c]$ 上跳量为零。

$$\nabla\psi_v=(3\lambda_v^2\lambda_i\nabla\lambda_v+\lambda_v^3\nabla\lambda_i)\chi_{T_j}-(3\lambda_v^2\lambda_j\nabla\lambda_v+\lambda_v^3\nabla\lambda_j)\chi_{T_i}$$

因为 λ_v 在 $[i,c],[j,c]$ 上为零，所以 $\nabla\psi_v$ 在这两条边上跳量为零。在 $[v,c]$ 上 λ_i 和 λ_j 都是零，因此 $[\![\nabla\psi_v]\!]|_{[v,c]}=\lambda_v^3(\nabla\lambda_i+\nabla\lambda_j)$。因为 T_i 和 T_j 面积相同，所以 $\nabla\lambda_i$ 和 $\nabla\lambda_j$ 方向相反，大小相等，所以 $\nabla\psi_v$ 在 $[v,c]$ 上跳量为零。引理得证。 $\square$

显然 ψ_v 与 $\mathbb{P}_k(T,\mathbb{S})$ 线性无关，更进一步的有以下引理：

Lemma 3. 不存在 $\boldsymbol{q}\in\mathbb{P}_k(T,\mathbb{S})$，使得 $(\boldsymbol{q}-J(\psi_v))|_{\partial T}\cdot\boldsymbol{n}=0$。

证明. $J(\psi_v)$ 在 T^R 上不连续：

$$J(\psi_v):(\boldsymbol{t}_{cv}\otimes\boldsymbol{t}_{cv})=\nabla^2\phi_v:(\boldsymbol{n}_{cv}\otimes\boldsymbol{n}_{cv})=\frac{\partial^2\psi_v}{\partial n_{cv}^2}$$

因为 ψ_v 在 $[v,c]$ 上二阶法向导数不连续，所以 $J(\psi_v)|_{T_i}:(\boldsymbol{t}_{ci}\otimes\boldsymbol{t}_{ci})$ 和 $J(\psi_v)|_{T_j}:(\boldsymbol{t}_{cj}\otimes\boldsymbol{t}_{cj})$ 在 $\boldsymbol{x}_v$ 上不相等。所以 $J(\psi_v)|_{\partial T}\cdot\boldsymbol{n}$ 在 ∂T 上不连续。

若存在 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{P}_k(T, \mathbb{S})$，使得 $(\boldsymbol{q} - J(\psi_v))|_{\partial T} \cdot \boldsymbol{n} = 0$，那么 $\boldsymbol{q}$ 在 ∂T 上间断，显然不可能，因此引理得证。 □

Theorem 1. 定义 $\Sigma_T = \mathbb{P}_k(T, \mathbb{S}) + \mathrm{span}\{J(\psi_i)\}_{i=0}^2$，那么 $\Sigma_T \in H(\mathrm{div}; \mathbb{S})$，且在 Σ_T 上如下自由度是唯一可解的：

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}, \boldsymbol{q}) \quad \forall e \in \Delta_1 T, \boldsymbol{q} \in \mathbb{P}_k(T, \mathbb{R}^2), \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{q}) \quad \forall \boldsymbol{q} \in \mathbb{B}_k(\mathrm{div}; T) \tag{4}$$

证明. $H(\mathrm{div}; \mathbb{S})$ 协调性显然，现在证明自由度的唯一可解性。首先统计自由度的个数，第一种自由度有 $6(k+1)$ 个，根据几何分解，第二种自由度有 $\dim(\mathbb{B}_k(\mathrm{div}; T)) = 3(k-1)(k-2)/2 + 3(k-1)$ 个，空间 Σ_T 的维数为 $3(k+1)(k+2)/2 + 3$，经过计算可知空间维数与自由度个数相同。令 $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_T$ 且 $\boldsymbol{\sigma}$ 的自由度为零，因为 $\sigma \cdot \boldsymbol{n} \in \mathbb{P}_k(T, \mathbb{R}^2)$，所以自由度 (3) 为零说明 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial T} = 0$，根据引理 6 可知 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{B}_k(\mathrm{div}; T)$。而自由度 (4) 为零说明 $\boldsymbol{\sigma} = 0$，因此自由度唯一可解性得证。 □

定义

$$\Sigma_h := \{\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega) \mid \boldsymbol{\sigma}|_T \in \Sigma_T, \forall T \in \mathcal{T}_h, \text{ and Dof(3) is single valued}\}.$$

那么 Σ_h 是一个 $H(\mathrm{div}; \mathbb{S})$ 协调有限元空间。

2.3 任意维的情况

根据复形的方法可以将该方法推广到任意维的情况，但 2 维以上空间的弹性复形构造复杂，本节给出另外一种构造性的方法。首先考察前面章节中，在 2 维情况下增加的函数 $J(\psi_v)$ 的形式，记

$$\nabla^\perp f = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla f$$

为 ∇f 的旋转。那么根据 J 的定义 (2)，有

$$\begin{aligned} J(\psi_v) =& 6(\lambda_v^2 \,\mathrm{sym}(\nabla^\perp \lambda_i \otimes \nabla^\perp \lambda_v) + \lambda_v \lambda_i \nabla^\perp \lambda_v \otimes \nabla^\perp \lambda_v) \chi_{T_j} \\ & - 6(\lambda_v^2 \,\mathrm{sym}(\nabla^\perp \lambda_j \otimes \nabla^\perp \lambda_v) + \lambda_v \lambda_j \nabla^\perp \lambda_v \otimes \nabla^\perp \lambda_v) \chi_{T_i} \end{aligned}$$

注意，存在常数 c_1, c_2，使得

$$\nabla^\perp \lambda_v = c_1 \boldsymbol{t}_{ci} \chi_{T_j} + c_2 \boldsymbol{t}_{cj} \chi_{T_i}$$

记：

$$\psi_v^0 = \lambda_v\lambda_i(\boldsymbol{t}_{ci}\otimes\boldsymbol{t}_{ci})\chi_{T_j}, \quad \psi_v^1 = \lambda_v\lambda_j(\boldsymbol{t}_{cj}\otimes\boldsymbol{t}_{cj})\chi_{T_i},$$
$$\psi_v^2 = \lambda_v^2(\mathrm{sym}(\boldsymbol{t}_{cv}\otimes\boldsymbol{t}_{ci})\chi_{T_j} - \mathrm{sym}(\boldsymbol{t}_{cv}\otimes\boldsymbol{t}_{cj})\chi_{T_i})$$

那么 $J(\psi_v)$ 是 $\psi_v^0, \psi_v^1, \psi_v^2$ 的一个线性组合，有一下引理：

Lemma 4. 上面定义的函数 $\psi_v^0, \psi_v^1, \psi_v^2 \in H(\mathrm{div};\mathbb{S})$。且存在某个线性组合散度为零。

证明. 只需证明在内部边 $[v,c], [i,c], [j,c]$ 上的法向连续。现在 ψ_v^0 和 ψ_v^1 在这三条边上都是零，而 ψ_v^2 在 $[i,c]$ 和 $[j,c]$ 上是零的，且在 $[v,c]$ 上，

$$[\![\psi_v^2|_{[v,c]}\cdot\boldsymbol{n}_{[v,c]}]\!] = \frac{1}{2}\lambda_v^2((\boldsymbol{t}_{ci}+\boldsymbol{t}_{cj})\cdot\boldsymbol{n}_{[v,c]})\boldsymbol{t}_{cv}$$

因为

$$\boldsymbol{t}_{ci}+\boldsymbol{t}_{cj} = \boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_v - \boldsymbol{x}_c = -\boldsymbol{t}_{cv},$$

所以跳量为零。$H(\mathrm{div};\mathbb{S})$ 协调性得证。因此可以计算三个函数的散度，根据 $\nabla\lambda_v|_{T_i}\perp\boldsymbol{t}_{cj}$ 可得

$$\mathrm{div}(\psi_v^0) = \lambda_v\boldsymbol{t}_{ci}\chi_{T_j}, \quad \mathrm{div}(\psi_v^1) = \lambda_v\boldsymbol{t}_{cj}\chi_{T_i}, \quad \mathrm{div}(\psi_v^2) \ = \lambda_v(\boldsymbol{t}_{ci}\chi_{T_j} - \boldsymbol{t}_{cj}\chi_{T_i})$$

显然 $\mathrm{div}(\psi_v^2 - \psi_v^0 + \psi_v^1) = 0$。 □

根据上面的引理可知，可以使用构造性的方法来构造我们需要的函数，其关键是张量部分为 $\{\boldsymbol{t}_{c0}, \boldsymbol{t}_{c1}, \cdot, \boldsymbol{t}_{cd}\}$ 之中的某两个向量的张量积，因为这些向量与 $\{\nabla\lambda_0, \nabla\lambda_1, \cdots, \nabla\lambda_d\}$ 具有某种对偶性见引理 1，使得构造的函数的散度易于计算。现在我们将该构造方法推广到任意维。

考虑 d 维单纯形 T，e 是 T 上的一个 l 维面，$l < d-1$. 对于 $\alpha\in\mathbb{T}_k^l$，定义

$$\lambda_e^\alpha = \lambda_{e[0]}^{\alpha_0}\lambda_{e[1]}^{\alpha_1}\cdots\lambda_{e[l]}^{\alpha_l}$$

我们类似与上面的方法，定义三类 $H(\mathrm{div};\mathbb{S})$ 协调的函数：对于 $\alpha\in\mathring{\mathbb{T}}_k^l = \{\alpha\in\mathbb{T}_k^l \mid \alpha_i \neq 0, \forall i = 0,\cdots,l\}$，$i<j\in e^*$，定义

$$\psi_{ij,0}^{e,\alpha} = \lambda_e^{\alpha-\epsilon_0}\lambda_i\boldsymbol{t}_{ci}\otimes\boldsymbol{t}_{ci}\chi_{T_j}$$
$$\psi_{ij,1}^{e,\alpha} = \lambda_e^{\alpha-\epsilon_0}\lambda_j\boldsymbol{t}_{cj}\otimes\boldsymbol{t}_{cj}\chi_{T_i}$$
$$\psi_{ij,2}^{e,\alpha} = \lambda_e^{\alpha}(\mathrm{sym}(\boldsymbol{t}_{ce}\otimes\boldsymbol{t}_{ci})\chi_{T_j} - \mathrm{sym}(\boldsymbol{t}_{ce}\otimes\boldsymbol{t}_{cj})\chi_{T_i})$$

其中 $\epsilon_0 = (1,0,\cdots,0)$，是一个长度为 $l+1$ 的数组。我们有以下引理：

Lemma 5. $\forall \alpha \in \mathring{\mathbb{T}}_k^l$，$i < j \in e^*$，上面定义的函数 $\psi_{ij,0}^{e,\alpha}, \psi_{ij,1}^{e,\alpha}, \psi_{ij,2}^{e,\alpha} \in H(\mathrm{div};\mathbb{S})$。且存在某个线性组合散度为零。

证明. 对于 $f \in \Delta T$ 定义 $\bar{f} = f \cup \{\boldsymbol{x}_c\} \in \Delta \mathring{T}^R$ 为 T^R 的一个内部面。我们只需要证明对于任意的 $f \in \Delta_{d-2}T$，三类函数在 $\bar{f}$ 上的法向连续。

首先讨论 $\psi_{ij,0}^{e,\alpha}$ 的协调性，$\psi_{ij,1}^{e,\alpha}$ 证明类似，分情况讨论：若 $\bar{f} \notin \Delta_{d-1}T_j$ 那么显然 $\psi_{ij,0}^{e,\alpha}$ 在 $\bar{f}$ 上为零。考虑 $\bar{f} \in \Delta_{d-1}T_j$ 的情况，令 $q = T_i \setminus \bar{f}$，若 $q = i$，那么 λ_i 在 $\bar{f}$ 上为零，这说明 $\psi_{ij,0}^{e,\alpha}$ 在 $\bar{f}$ 上为零，若 $q \neq i$，记那么 $\nabla \lambda_q$ 是 $\bar{f}$ 上的一个法向量，根据引理 1 中的对偶性，$\nabla \lambda_q \cdot \boldsymbol{t}_{ci} = 0$，所以 $\psi_{ij,0}^{e,\alpha}$ 在 $\bar{f}$ 上的法向分量为零。所以 $\psi_{ij,0}^{e,\alpha} \in H(\mathrm{div};\mathbb{S})$。

现在讨论 $\psi_{ij,2}^{e,\alpha}$ 的协调性，分情况讨论：若 $f \notin i^*$ 且 $f \notin j^*$，那么根据定义 $\psi_{ij,2}^{e,\alpha}$ 在 $\bar{f}$ 上为零。考虑 $f \in j^*$ 的情况，即 $\bar{f} \in \Delta_{d-1}T_j$，记 $q = T_j \setminus \bar{f}$，若 $q = e[0]$，那么 λ_e^α 在 $\bar{f}$ 上为零，从而 $\psi_{ij,2}^{e,\alpha}$ 在 $\bar{f}$ 上为零。若 $q \neq e[0]$ 且 $q \neq i$，由于 $\nabla \lambda_q$ 是 $\bar{f}$ 上的一个法向量，根据引理 1 中的对偶性，$\nabla \lambda_q \cdot \boldsymbol{t}_{ce} = \nabla \lambda_q \cdot \boldsymbol{t}_{ci} = 0$，所以 $\psi_{ij,2}^{e,\alpha}$ 在 $\bar{f}$ 上的法向分量为零。若 $q = i$，那么 $f = [i,j]^*$。对 $f \in i^*$ 的情况应用相同的论证方法，我们最终只需要对 $f = [i,j]^*$ 的情况进行讨论。此时 $\nabla \lambda_i|_{T_j}$ 和 $\nabla \lambda_j|_{T_i}$ 是 $\bar{f}$ 上的法向量，且根据 T_i 和 T_j 体积相同可知 $\nabla \lambda_i|_{T_j} = -\nabla \lambda_j|_{T_i}$，由于 $i, j \in e^*$，所以

$$\nabla \lambda_i|_{T_j} \cdot \boldsymbol{t}_{ci} = \nabla \lambda_j|_{T_i} \cdot \boldsymbol{t}_{cj} = 0, \quad \nabla \lambda_i|_{T_j} \cdot \boldsymbol{t}_{ci} = \nabla \lambda_j|_{T_i} \cdot \boldsymbol{t}_{cj} = 1$$

取 $\boldsymbol{n}_{\bar{f}} = \nabla \lambda_i|_{T_j}$，那么：

$$[\![\psi_{ij,2}^{e,\alpha} \cdot \boldsymbol{n}_{\bar{f}}]\!]|_{\bar{f}} = \frac{1}{2}\lambda_e^\alpha((\boldsymbol{t}_{ci} + \boldsymbol{t}_{cj}) \cdot \boldsymbol{n}_{\bar{f}})\boldsymbol{t}_{ce} \quad = \frac{1}{2}\lambda_e^\alpha(\boldsymbol{t}_{ci} + \boldsymbol{t}_{cj}) \cdot \nabla \lambda_i|_{T_j}\boldsymbol{t}_{ce} = 0$$

协调性得证。现在计算三类函数的散度，根据引理 1 中的对偶性，由于 $i, j \in e^*$ 所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\psi_{ij,0}^{e,\alpha}) &= \lambda_e^{\alpha-\epsilon_0}\boldsymbol{t}_{ci}\chi_{T_j}, \\
\mathrm{div}(\psi_{ij,1}^{e,\alpha}) &= \lambda_e^{\alpha-\epsilon_0}\boldsymbol{t}_{cj}\chi_{T_i}, \\
\mathrm{div}(\psi_{ij,2}^{e,\alpha}) &= \frac{\alpha_0}{2}\lambda_e^{\alpha-\epsilon_0}(\boldsymbol{t}_{ci}\chi_{T_j} - \boldsymbol{t}_{cj}\chi_{T_i})
\end{aligned}$$

令 $\psi_{ij}^{e,\alpha} = -\frac{\alpha_0}{2}\psi_{ij,0}^{e,\alpha} + \frac{\alpha_0}{2}\psi_{ij,1}^{e,\alpha} + \psi_{ij,2}^{e,\alpha}$ 那么 $\mathrm{div}(\psi_{ij}^{e,\alpha}) = 0$。 □

Lemma 6. 不存在 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{P}_k(T, \mathbb{S})$，使得 $(\boldsymbol{q} - \psi_{ij}^{e,\alpha})|_{\partial T} \cdot \boldsymbol{n} = 0$。

证明. 证明与引理 6 类似。 □

Theorem 2. 令 $V_T := \mathbb{P}_k(T,\mathbb{S}) + \oplus_{l=0}^{d-2} \oplus_{e\in\Delta_l T} \operatorname{span}(\Phi_e^k)$，其中：

$$\Phi_e^k = \{\psi_{ij}^{e,\alpha} \mid i<j\in e^*, \alpha\in \mathring{\mathbb{T}}_k^l\}$$

那么 $V_T \in H(\operatorname{div};\mathbb{S})$。且在 V_T 上如下自由度是唯一可解的：

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n},\boldsymbol{q})_F \quad \forall F\in\Delta_{d-1}T, \boldsymbol{q}\in\mathbb{P}_k(T,\mathbb{R}^d), \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{q}) \quad \forall \boldsymbol{q}\in\mathbb{B}_k(\operatorname{div};T) \tag{6}$$

证明. 证明与定理 1 类似。 □

定义全局空间

$$\Sigma_h := \{\boldsymbol{\sigma}\in L^2(\Omega) \mid \boldsymbol{\sigma}|_T\in V_T, \forall T\in\mathcal{T}_h, \text{ and Dof(5) is single valued}\}$$

Theorem 3. $\operatorname{div}\Sigma_h = \mathbb{P}_{k-1}^{-1}(\mathcal{T}_h,\mathbb{S})$，且存在常数 $C>0$，使得

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}\in\Sigma_h} \frac{(\operatorname{div}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div})}} \geq C\|\boldsymbol{v}\|_{L^2} \tag{7}$$

证明. □

3 数值实验

3.1 线弹性方程的混合元方法

设 Ω 为 $\mathbb{R}^d$（$d=2,3$）中的多边形区域，边界为 $\partial\Omega$，我们考虑以下弹性问题：

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}) - \varepsilon(\boldsymbol{u}) = 0, & \text{in} \quad \Omega, \\ -\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}, & \text{in} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0, & \text{in} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 是应力张量，u 是物体的位移向量，f 是体力，$\varepsilon(u)$ 和 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma})$ 定义如下:

$$\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^T), \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda_0\boldsymbol{\sigma} - \lambda_1\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})I.$$

令 λ 和 μ 是拉梅（Lamé）常数，上式中 $\lambda_0=\frac{1}{2\mu}$ 和 $\lambda_1=\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+d\lambda)}$，$I$ 是单位张量。将 Ω 划分为一组单纯形网格 $\mathcal{T}_h$，并定义空间 Σ_h 和 $V_h:=\mathbb{P}_{k-1}^{-1}(\mathcal{T}_h)$，线弹性方程的混合元方法为：找到 $\boldsymbol{\sigma}_h\in\Sigma_h$ 和 $\boldsymbol{u}_h\in V_h$，使得

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}_h)+b(\boldsymbol{\tau}_h,\boldsymbol{u}_h)&=0, \quad \forall\boldsymbol{\tau}_h\in\Sigma_h,\\ b(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{v}_h)&=(-\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h), \quad \forall v\in V_h, \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}_h)=(\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}_h),\boldsymbol{\tau}_h), \quad b(\boldsymbol{\tau}_h,\boldsymbol{u}_h)=(\mathrm{div}\boldsymbol{\tau}_h,\boldsymbol{u}_h)$$

3.2 二维

令真解为 $u=(\sin(5x)\sin(7y),\cos(5x)\cos(4y))$，$\Omega=(0,1)^2$，$\lambda_0=4$，$\lambda_1=1$。图 2 给出了 $k=2,3,5$ 时的数值结果，中可以看到，$||\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h||_{L^2}=O(h^{k+1})$ 和 $||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h||_{L^2}=O(h^k)$。

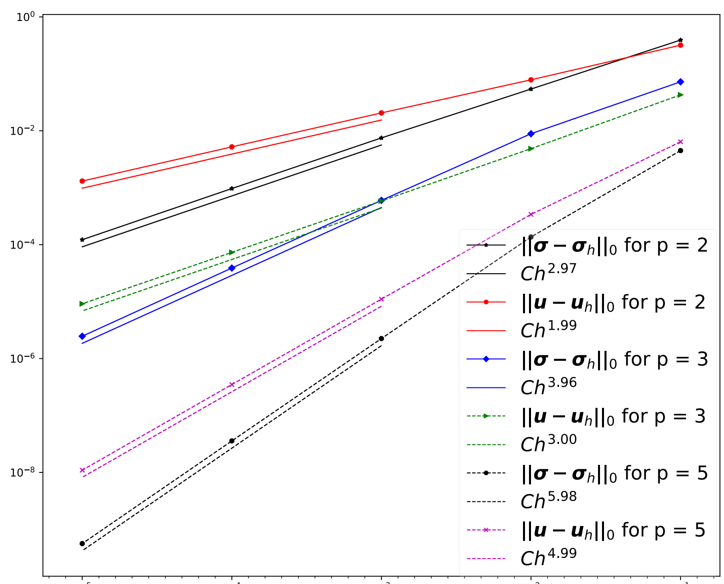

图 2: $k=2,3,5$ 时的数值结果