

Hopf 代数在重整化中的应用

权瀚文

2023 年 6 月 2 日

摘要: 我们将在本篇论文中介绍 Kreimer 和 Connes 在论文 [1] 中的工作, 即通过 Hopf 代数的语言和 Birkhoff 分解的语言为重整化问题给出一个新的描述方式.

本论文开始于一个对于重整化问题的简单历史回顾, 并给出 **Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann** 重整化的一个简单叙述, 结束于给出 Bogoliubov 递推公式和 Zimmerman 公式, 之后再介绍 Kreimer 和 Connes 对于重整化的叙述推出相似的表达式.

我们将引入 Hopf 代数, 并将 BPFZ 重整化解释为 Hopf 代数 H_{CK} 的特征上的 Birkhoff 分解. 我们将给出 H_{CK} 及其特征群的结构, 其上对极映射的计算公式, 并最后抽象的给出计算重整化后散射振幅的公式.

关键词: Birkhoff 分解, BPHZ 重整化, Hopf 代数, Bogoliubov 递归公式.

ABSTRACT: We'll introduce works of Kreimer and Connes in their article [1], which describe the renormalization theory using the language of Hopf algebra and Birkhoff decomposition.

This article will begin with a historical review of renormalization, and then briefly introduce the **Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann** renormalization scheme, ending up with the Bogoliubov induction formula and Zimmerman's formula. After that, we will introduce Kreimer and Connes' description of renormalization using Hopf algebra, trying to give the same formula as in **BPHZ** renormalization scheme.

By introducing Hopf algebra, we may recognize BPFZ renormalization scheme as a Birkhoff decomposition on the characteristic group of Hopf algebra H_{CK} . We will give structure of H_{CK} and its characteristic group, a calculating formula of its antipodal map, and finally derive the formula calculating renormalized amplitude.

Keywords: Birkhoff decomposition, BPHZ Renormalization scheme, Hopf algebra, Bogoliubov's recursion formula.

0 开始：量子场论与重整化问题

重整化的问题来源于物理中的量子场论。在本节之中，我们将引入我们要解决的被称之为“重整化”的问题。

我们要求解的是如下形式上的“Feynman 路径积分”：

$$\int e^{\int i\mathcal{L}[\varphi]d^n x} \mathcal{D}\varphi$$

其中 \mathcal{L} 被称为路径 φ 的拉格朗日量密度，而 $\mathcal{D}\varphi$ 是“路径空间的测度”(然而这并不是数学意义上定义好的测度)。当然，很多时候我们需要的是“生成函数”，即

$$\int e^{\int i(L[\varphi]+J\varphi d^n x)} \mathcal{D}\varphi$$

多数时间，我们在本文中将考虑的是 $D = 6$ (即) 的“ φ^3 模型”，对应拉格朗日量为如下三项之和：

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3$$

物理上， φ 的二次项被称为自由的拉格朗日量，以上述例子中的 φ^3 项为例的其它项被称为相互作用项。在我们较为关注的情形之中，我们希望相互作用的贡献是弱的，即其在拉格朗日之中的贡献远小于自由项的作用。

我们关注的是使用被称为微扰方法的计算方式求解此路径积分，即某种对 φ^3 项使用级数展开并进行计算的方式，从而我们可以用某个指数仅含 φ -二次项的拉格朗日量的某种函数无穷求和计算这一路径积分，这就是我们解决此问题的一般思路。

0.1 引子：0 维量子场论

一般的量子场论理论很难写出严格的公理化叙述，然而我们可以选择一个类似的，即时空是“0”维的情形去研究。这时，时空变成了一些(我们假定是 N 个)散点，而不同的场则是这些散点上的函数。约定对于场 φ ，我们用 φ_n 标记其在第 n 各点的值。于是，我们可以将其生成函数写作做

$$\mathcal{Z}[j] := \int e^{\mathcal{L}_{\text{free}}(\varphi, \varphi) + \mathcal{L}_{\text{int}}[\varphi] + \sum j_n \varphi_n} d^N \varphi$$

这个积分不仅仅是形式上的, 也是一个可以严格定义 (作为对比, 高维时空中的路径难以定义严格的测度和积分) 的 N 维空间的积分.

我们将依照如下步骤计算此积分:

Step1 对积分之中的非自由项进行 (形式的) 泰勒展开, 于是得到

$$\mathcal{Z}[j] := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \int (\mathcal{L}_{\text{int}}[\varphi] + \sum j_n \varphi_n)^k e^{\mathcal{L}_{\text{free}}(\varphi, \varphi)} d^N \varphi$$

这一形式并不是严格的路径积分结果, 仅仅是一个渐近展开式. 我们回顾最开始对于自由拉格朗日量和相互作用拉格朗日量的限制, 便可得知 $\mathcal{L}_{\text{free}}$ 是一个 N 维空间的负定二次型 A (这也是表达式 $L_{\text{free}}(\varphi, \varphi)$ 的来源), 而 \mathcal{L}_{int} 则一般为某个多项式函数.

Step2 考察如下形式的积分:

$$I = \int \varphi_{i_1}^{k_1} \dots \varphi_{i_m}^{k_m} e^{\mathcal{A}(\varphi, \varphi)} d^N \varphi$$

对于 $\sum k_i$ 为奇数的情形, 由对称性即可求得原表达式值为 0. 对于其余情况, 我们试图使用分部积分法完成其求解. 先假设 A 为对角矩阵 $-A_i$, 由于

$$d(\varphi_n^k e^{\mathcal{A}(\varphi, \varphi)}) = k e^{\mathcal{A}(\varphi, \varphi)} \varphi_n^{k-1} d\varphi_n - 2A_n \varphi_n^{k+1} e^{\mathcal{A}(\varphi, \varphi)} d\varphi_n$$

我们可以得到此种形式的表达式值为如下形式:

$$I = \prod \frac{k_i!}{-(k_i/2)!(4A_i)^{k_i/2}} \left(\frac{\pi^N}{|-A|} \right)^{1/2}$$

我们可以将此表达式理解为矩阵 A^{-1} 作用在 (对称的) 多向量场 $e_{i_1}^{\otimes k_1} \dots e_{i_m}^{\otimes k_m}$ 之上 $\sum k_i/2$ 次, 每次消灭两个向量所得到的值 (相差一些权重).

Step3 于是, 我们仅需计算固定 i 的所有项的取值. 每一项我们都可以用如下的一张图来标记, 称为**费曼图**:

1. 对于每个 \mathcal{L}_{int} 中的 k 次项 M , 画一个由 k 个边的点.
2. 在每两个被 A 配对的点之间连一条线, 代表消灭这两个点对应的多向量场的各一个分量的一个 A^{-1} .

从而, 我们可以将路径积分转化为对所有费曼图 Γ 的某种求和

$$I = \sum_{\Gamma} \frac{1}{S(\Gamma)} \langle \otimes_{v \in V(\Gamma)} M_v, \otimes_{e \in E(\Gamma)} A^{-1} \rangle$$

其中 $S(\Gamma)$ 是费曼图自同构群的阶数. 这是一个很自然的表达形式. 我们接下来要做的, 就是试图将这一表达形式推广到一般的高维空间. 这是容易的, 仅需将 A^{-1} 代替以自由理论之中的格林函数即可.

0.2 一般理论: 费曼图展开

我们现在考察 φ^3 模型情形下的路径积分. 我们试图形式地用

$$I = \sum_{\Gamma} \frac{1}{S(\Gamma)} \langle \otimes_{v \in V(\Gamma)} M_v, \otimes_{e \in E(\Gamma)} A^{-1} \rangle$$

这一形式来定义费曼图积分. 以下是一个简略的介绍:

此时, 二次型 $\mathcal{L}_{\text{free}}$ 一般以 $\mathcal{L}_{\text{free}}(\varphi, \varphi) = \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi + m^2 \varphi^2$ 的形式出现. 为了使得计算更加方便, 我们通常对场做傅里叶变换, 并且采用欧氏度量.

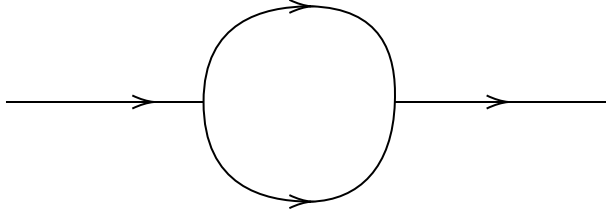
我们可以看到, 每一个 φ^3 项对应的点提供一个标记“动量守恒”的 δ 函数, 而 $j\varphi$ 项则给出确定的外动量 (从而可以确定每一个半边的“动量”, 由自由拉格朗日量的对角化, 一个边对应唯一一个动量), 每一个边给出一个形如 $(p^2 + m^2)^{-1}$ 的因子, 其中 p 是对应边上的“动量”. 为了消去 j 的存在, 我们实际上计算的是对 j 的导数在 $j = 0$ 的取值, 这和 j 的高次项仅仅相差一个系数. 此时, 表达式变为 (考虑在动量下展开):

$$\int g^{\#V(\Gamma)} \prod_{e \in E(\Gamma)} \frac{1}{p_e^2 + m^2} dk_1 \dots dk_L$$

其中 k_i 为每个圈中的环路动量, L 即为图内总圈数.

0.3 发散性问题

然而, 我们计算一些最简单的例子就可以发现, 这个积分并不具有良好的收敛性. 我们将计算如下图 (1) 的一个例子:



我们假设入射动量为 p , 上半圈动量为 $-k$, 下半圈动量为 $p+k$, 出射动量亦为 p , 于是我们得到了积分

$$I = \int dk \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2}$$

注意到这是 $D = 6$ 维的情形, 因此这个积分在 $|k| \leq \Lambda$ 时的积分

$$I[\Lambda] = \int_{|k| \leq \Lambda} dk \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2}$$

相当于

$$\int_{[0, \Lambda]} \frac{k^5}{1 + k^4} dk$$

容易看出它有一个 Λ^2 的发散度.

对于一个图 Γ , 其圈数 C , 内点数 V , 内边数 I 和外边数 E 的关系为:

$$3V = E + 2I$$

$$2C = V - E + 2$$

我们粗略的定义

$$\omega(\Gamma) = 6C - 2I = 3V - 3E + 6 - 3V + E = 6 - 2E$$

为图的发散次数. 当 $\omega \geq 0$ 的时候, 这个图对应的积分就会发散. 其中, $\omega = 0$ 时此积分对数发散, $\omega > 0$ 时此积分以 Λ^ω 次发散

我们试图消去此积分发散的部分.

我们可以认为, 这一部分的发散是源自于错误的将两个分布 $G = \mathcal{L}_{\text{free}}^{-1}$ 在傅里叶变换之后当作函数相乘. 分布之间并不能定义乘法, 我们只能将 G^2 作为 $\mathbb{R}^6 - 0$ 上的函数定义 (从而在此空间的分布), 再延拓其至全空间之上的分布 (使得). 换句话说, 形式的卷积

$$G^2(y_1 - y_2) = \int \frac{dp}{2\pi^6} e^{p(y_1 - y_2)} \int \frac{dk}{2\pi^6} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(p-k)^2 + m^2}$$

应当被替代以此积分减去发散次数的如下形式, 具体的来说, 就是将

$$F(p) = \int dk_1 \dots dk_n I(p, k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$$

替换成

$$F(p) = \int dk_1 \dots dk_n I(p, k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) - t^\omega I(p, k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$$

此处 $t^k f$ 表示 f 的前 k 阶泰勒展开. 这形式的相当于在 $y = 0$ 处加上一个分布 (然而系数可以为无穷大)

作为一个示例, [2] 给出了四维空间中图 (1) 的计算作为示例, 即

$$G^2(y_1 - y_2) = \int \frac{dp}{2\pi^4} e^{p(y_1 - y_2)} \int \frac{dk}{2\pi^6} \left(\frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(p - k)^2 + m^2} - \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \right)$$

此积分严格收敛.

0.4 Bogoliubov 递归公式

上节所计算的例子之中, 图中仅仅有一个圈. 这种情况是比较简单的. 一般情况之下, 我们还需要考虑其中给出发散度的子图. 对于外边数 E 为 ≥ 4 的图, 容易计算出其发散度严格为负, 从而收敛; 因此, 只有有 2 或 3 条外边的子图才会给出发散的部分, 我们需要把这些部分带来的发散度消灭掉.

我们引入如下记号 \mathcal{I}_Γ 为我们所做的积分被积项, \mathcal{R}_Γ 为减去发散子图所带来的影响后的结果. $\bar{\mathcal{R}}_\Gamma$ 为重整化后的结果.

作为外动量 p 的函数, 我们可以将 \mathcal{I}_Γ 写成积分形式

$$\mathcal{I}_\Gamma = \int f(p, k_1, \dots, k_n) dk_i$$

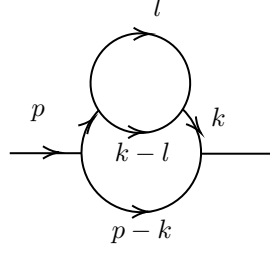
当图较小 (无非平凡子图时), 我们认为

$$\mathcal{R}_\Gamma = \mathcal{I}_\Gamma$$

并且对 \mathcal{R}_Γ 做泰勒展开, 定义 \mathcal{R}_Γ 为

$$\bar{\mathcal{R}}_\Gamma = \mathcal{R}_\Gamma - T_{\omega(\Gamma)} \mathcal{R}_\Gamma$$

这一原则对于更大的图也适用 (即取积分的有限部分). 回忆这样的操作将给出收敛的积分. 对于更大的图, 我们需要考虑它具有非负发散次数子图带来的发散. 以图



为例, 其积分具有形式

$$\mathcal{I} = \frac{1}{(p-k)^2 + m^2} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{1}{(l-k)^2 + m^2}$$

此积分发散, 且存在减去对 p 泰勒展开之后仍然无法消去的无穷大.

这一无穷大由 l 所在圈的子图 (注意其二阶发散) 提供, k 在这一子图之中起到外动量的作用. 因此, 应当减去

$$\mathcal{I} = \frac{1}{(p-k)^2 + m^2} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \left(\frac{1}{(l^2 + m^2)^2} + \frac{2lk}{(l^2 + m^2)^3} + \frac{3l^2 - m^2}{(l^2 + m^2)^4} k^2 \right)$$

即 Γ 缩合这一子图后的积分项乘子图 γ (不必连通) 所带来的积分项 (应当不包含其子图的无穷大) 的泰勒展开 $T_\gamma \mathcal{R}_\gamma$. 换句话说:

$$\mathcal{R}_\Gamma = \mathcal{I}_\Gamma - \sum_{\gamma} \mathcal{I}_{\Gamma/\gamma} \times T_\gamma \mathcal{R}_\gamma$$

这一公式称为 **Bogoliubov 递归公式**.

0.4.1 Zimmermann 森林公式

通过 Bogoliubov 递推公式计算重整化后的结果需要逐次计算子图的泰勒展开式. 我们将不加证明的给出如下形式的 **Zimmermann 森林公式**. 这一公式和 Bogoliubov 公式等价, 我们将在后文介绍另一更严格版本下的等价性证明. 我们需要定义**森林**的概念.

定义 0.1. 称图 γ 和 γ' 互相交缠, 若其交非空且互相不为真子集. (这里的真子集是为了使得交缠的定义在之后正式用 Zimmermann 森林公式计算对极映射时这一定义仍然适用)

定义 0.2. 定义 Γ 的一个**森林** \mathcal{F} 为其互不交缠的子集族.

森林中的图自然有一个由包含关系生成的树状结构. 我们可以用 $\bar{\gamma}$ 标记 1PI 连通图 γ 的所有极大连通子图的并. U 为任意森林, V 为满足如下特性的森林: 若全图 Γ 发散, 则森林中不包括全图.

于是我们得到 **Zimmerman 森林公式**:

$$\bar{\mathcal{R}}_G = \sum_V \prod_{\gamma \in V} (-T_\gamma) \mathcal{I}_G$$

$$\mathcal{R}_G = \sum_U \prod_{\gamma \in U} (-T_\gamma) \mathcal{I}_G$$

其中, 当 γ_1 与 γ_2 不交时, T_{γ_i} 互相交换; 当 $\gamma_1 \subset \gamma_2$ 时, T_{γ_1} 被理解为作用在 T_{γ_2} 左侧. 这一公式的正确性可以通过将其代入入 Bogoliubov 递推公式得到, 在此不再赘述.

1 Hopf 代数

在本章节之中, 我们试图定义 Hopf 代数, 并且叙述与其直接相关的基本定理. 如果未加说明, 默认域 k 特征 0. 事实上, 域 k 一般取 \mathbb{R} 或 \mathbb{C}

1.1 定义: 余代数, 双代数

为了定义 Hopf 代数, 我们需要熟悉余代数 (coalgebra) 和双代数 (bialgebra) 的基本语言.

1.1.1 余代数

回忆 (域 k 上) 的代数为满足如下条件的三元组 $(A, m : A \otimes A \rightarrow A, \epsilon : A \rightarrow k)$:

$$1.(\text{结合律}) \quad m \circ (m \otimes \text{id}) = m \circ (\text{id} \otimes m)$$

$$2.(\text{单位}) \quad m \circ (\epsilon \otimes \text{id}) = m \circ (\text{id} \otimes \epsilon) = \text{id}$$

可以使用交换图的形式表述为此三元组需要满足如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\text{id} \otimes m} & A \otimes A \\ m \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\epsilon \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \text{id} \otimes \epsilon \downarrow & \searrow \text{id} & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

我们试图定义余代数. 这是代数的对偶概念, 被实现为一个三元组 $(A, \Delta : A \rightarrow A \otimes A, \eta : A \rightarrow k)$. 此三元组需要满足的交换图无外乎是代数所需满足的交换图表翻转箭头所得到的图表, 亦即:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xleftarrow{\text{id} \otimes \Delta} & A \otimes A \\ \eta \otimes \text{id} \uparrow & & \uparrow \Delta \\ A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\eta \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \text{id} \otimes \eta \uparrow & \swarrow \text{id} & \uparrow \Delta \\ A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \end{array}$$

映射 Δ 通称**余乘法**, 而映射 η 通称**余单位**. 如果我们给 A 一个分次结构 $A = \bigoplus A_i$, 那么余乘法需要与分次结构相容, 亦即

$$\Delta A_i \subset \bigoplus_{p+q=i} A_p \otimes A_q$$

同时, 余单位也与分次结构相容, 这说明其将非零次元素映至 0. 如果余单位在 A_0 上诱导同构, 则称此余代数为**连通的**.

例 1.1. 一个余代数的示例由以下构造给出:

设 (X, \leq) 为局部有限偏序集 (即任意 $x \leq y$ 之中仅有有限个 z 满足 $x \leq z \leq y$), A 为满足 $x \leq y$ 的有序对 (x, y) 张成的线性空间, 定义

$$\Delta(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} (x, z) \otimes (z, y); \eta(x, y) = \delta_x^y$$

可以证明这给出了一个余代数结构.

关于余代数, 我们还有如下的性质:

引理 1.2. 若 (A, Δ, η) 为一个余代数, 则 A 的对偶空间之上有一个自然的代数结构.

这一引理是显然的, 仅需定义

$$a \times b(x) = m(a \otimes b(\Delta x)); \epsilon(1)(x) = \eta(x)$$

附注 1.3. 值得注意的是, 代数的对偶空间不一定有自然的余代数结构. 在无穷维情形下, 我们希望得到的余乘法结果往往是某种无穷求和, 而这是不现实的.

我们将通过**限制对偶**的定义来解决这一问题.

1.1.2 表示性函数, 限制对偶

我们考虑么半群 X 和它的函数环 $k^X := \text{Hom}_{\text{Set}}(X, k)$. 称 k^X 中元素 f 为一个**表示性函数**, 当且仅当存在有限个 $f_i^{(1)}, f_i^{(2)}$, 使得如下关系对任意 $x, y \in X$ 成立:

$$f(xy) = \sum_i f_i^{(1)}(x) f_i^{(2)}(y)$$

表示性函数对于加法是封闭的, 以及表示性函数的数乘依然是表示性函数 (即表示性函数构成线性子空间).

我们定义运算 $L_x f, R_x f$ 以 $L_x f(y) = f(xy) = R_y f(x)$. 容易看出, 如果 f 是表示性的, 那么 $R_x f$ (这当然是表示性函数) 生成的子空间是有限维的.

定义 1.4. 我们引入空间 $R(X)$, 为所有如下定义的 $C(\pi)$ 的并:

对于所有 X 的有限维表示 π , 我们可以取定一组基, 将 X 嵌入矩阵之中. 这样, 矩阵的每个指标 $\pi_{i,j}$ 都变成一个表示函数, 以如下方式

$$\Delta \pi_{i,j} = \sum_k \pi_{i,k} \otimes \pi_{k,j}$$

$C(\pi)$ 则是这些 $\pi_{i,j}$ 张成的函数空间.

如果 $R_x f$ 生成的子空间是有限维的, 那么 $x \mapsto R_x$ 是一个有限维表示, 从而 $f \in R(X)$, 进而 f 为表示性的. 由此可知, 表示性函数组成的子空间正是 $R(X)$.

以上论证给出如下定理:

定理 1.5. 对于 $f \in k^X$, 如果 f 是表示性的, 则所有 $f(i)_j$ 都可以被选取为表示性的,

这是因为表示性等价于在子空间 $R(X)$ 之中.

定义 1.6 (限制对偶). 给定代数 A , A 的**限制对偶** (restricted dual) A° 定义为 A^* 之中的表示性函数 (这里的幺半群结构继承 A 的幺半群结构). A° 有自然的余代数结构, 仅需定义

$$\Delta f = \sum f_i^{(1)} \otimes f_i^{(2)}$$

引理 1.7 (限制对偶的判据). 对 $\varphi \in A^*$, $\varphi \in A^\circ$ 当且仅当 $\ker(\varphi)$ 包含一个余有限维的双边理想. 特别地, 若 A 为有限维, 则 $A^\circ = A^*$.

命题 1.8 (限制对偶的伴随性质). 对于余代数 C 和代数 A , 有如下伴随关系:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cog}}(C, A^\circ) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(A, C^*)$$

1.1.3 双代数

如果一个代数 B 上有余代数结构 (B, Δ, η) , 使得余乘法 Δ 和余单位 η 是代数同态, 则称 $(B, m, \epsilon, \Delta, \eta)$ 为一个**双代数** (bialgebra).

映射 $\nu = \epsilon \circ \eta$ 是一个常用的映射, 一般称为双代数上的**单位** (unit). 我们可以将 $\epsilon(1)$ 记作 1.

我们可以依此定义本质 (primitive) 元素的概念.

定义 1.9. 称双代数 B 中元素 x 为一个本质元素, 若如下关系成立:

$$\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1$$

称双代数 B 中元素 x 为一个群状 (group-like) 元素, 若如下关系成立¹:

$$\Delta x = x \otimes x$$

引理 1.10. B 之中本质元素构成的集合 $\text{Prim}(B)$ 有自然的李代数结构:

$$[x, y] := xy - yx$$

这是展开表达式 $\Delta[x, y]$ 的直接推论.

定理 1.11. 对于双代数 $(B, m, \epsilon, \Delta, \eta)$, 映射 m 和 ϵ 都是与代数同态.

这一定理的证明是容易的, 仅需注意双代数的定义不过是需要满足如下的自对偶的交换图:

(我们用 T 表示交换形如 $A \otimes A$ 的张量积空间的左右两边的映射.)

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \xrightarrow{\Delta \circ m} & B \otimes B \\ \downarrow \Delta \otimes \Delta & & \uparrow m \otimes m \\ B^{\otimes 4} & \xrightarrow{\text{id} \otimes T \otimes \text{id}} & B^{\otimes 4} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\epsilon} & B \\ \parallel & & \downarrow \eta \\ k & \xlongequal{\quad} & k \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \xrightarrow{m} & B \\ \downarrow \epsilon \otimes \epsilon & & \downarrow \epsilon \\ k & \xlongequal{\quad} & k \end{array} \quad \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\eta} & B \\ \parallel & & \downarrow \Delta \\ k & \xrightarrow{\eta \otimes \eta} & B \otimes B \end{array}$$

命题 1.12. 双代数 B 的限制对偶 B° 有自然的双代数结构. 在不引起混淆的情况下, 这一结构常常被称为对偶, 记为 B^* (我们在之后所谈到的 Hopf 代数的对偶便是这一意义下的对偶).

¹这是因为通常以定义 $\Delta g = g \otimes g$ 给出群代数的 Hopf 代数结构.

1.2 定义: Hopf 代数及其基本性质

1.2.1 卷积与 Hopf 代数

我们先来定义卷积 (convolution) 的概念. 这一概念可以表述为如下定理:

定理 1.13. 给定余代数 C 和代数 A , 则它们作为线性空间之间的映射空间 $\text{Hom}_k(C, A)$ 上有自然的代数结构. 其中乘法 (称为卷积) 由如下方式定义:

$$\varphi * \psi(c) = m(\varphi \otimes \psi(\Delta c))$$

而单位元则是 A 上单位 ϵ_A 与 C 上余单位 η_C 的复合.

卷积的结合性是显然的, 单位元的性质亦可以验证.

有了卷积的概念, 我们就可以定义 **Hopf 代数**.

定义 1.14. 称双代数 H 为 Hopf 代数, 若 id_B 在 $\text{Hom}(B, B)$ 之中有卷积逆, 称为对极映射 (antipodal map).

附注 1.15. 通过和群定义中类似的故事, 我们可以轻松相信对极映射是唯一的.

事实上, 对极映射也是自然的, 我们有如下结论:

如果有 Hopf 代数之间的双代数同态 $\varphi: H \rightarrow H'$, 那么 H 和 H' 的对极映射 S 和 S' 满足关系 $S' \circ \varphi = \varphi \circ S$.

这似乎表明, 如果一个双代数有着足够好的结构, 我们可以直接定义出它的 Hopf 代数结构.

命题 1.16. Hopf 代数 H 上的对极映射满足如下关系:

$$\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ T \circ \Delta, \eta \circ S = \eta$$

$$S \circ m = m \circ T \circ (S \otimes S), S \circ \eta = \eta$$

若 H 交换或者余交换, $S^2 = \text{id}$.

1.2.2 Hopf 代数与群

通过对极映射, 我们可以给出一些 Hopf 代数和群的一些简单的联系.

例 1.17. 给定群 G , 群代数 $k[G]$ 定义为 G 中元素形式的张成的空间, 配上群 G 所自带的乘法结构所生成的代数. 我们定义 $\Delta(g) = g \otimes g$, $\nu(g) = 1$, 则我们可以得到一个 Hopf 代数的结构, 其对极映射由 $S(g) = g^{-1}$ 给出.(这是因为此时 $S * \text{id}(g) = g^{-1}g = \nu(g)$.)

容易验证, 在一般双代数之中, 群状元素对乘法是封闭的. 而在 Hopf 代数之中, 群状元素的逆是良好定义的 ($g^{-1} = S(g)$), 从而群状元素构成一个群 $\Gamma(H)$.

定理 1.18 (伴随关系).

$$\text{Hom}_{\text{Hopf Alg}}(kG, H) = \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, \Gamma(H))$$

接下来, 我们给出两个 Hopf 代数的例子.

1.2.3 多项式 Hopf 代数

例 1.19. 考虑向量空间 V 上的多项式代数 $k[V]$. 我们用多项式代数的泛性质, 即代数同态 $k[V] \rightarrow A$ 完全由线性映射 $V \rightarrow A$ 决定. 从而映射

$$\begin{aligned} V &\rightarrow k[V] \otimes k[V] \\ v &\mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v \end{aligned}$$

唯一给出映射

$$\Delta : k[V] \rightarrow k[V] \otimes k[V]$$

作为余乘法. 这一余乘法给出了 $k[V]$ 一个分次交换余交换双代数结构. 其上的对极映射由如下映射:

$$v \mapsto -v$$

给出, 将一个 n 次单项式映到它自身.

在这种情况下, 我们可以显式的写出 Δ 为映射

$$x_1 \dots x_n \mapsto \sum_{I \sqcup J = \{1, \dots, n\}} x_I \otimes x_J$$

其中 x_I 表示 $\prod_{i \in I} x_i$. 这一 Hopf 代数称为多项式 Hopf 代数.

下一个例子或许更加重要:

1.2.4 泛包络代数

例 1.20. 我们考虑李代数 \mathfrak{g} 的泛包络代数 (universal enveloping algebra), 其可被实现为 \mathfrak{g} 生成的自由代数商掉关系:

$$[x, y] = xy - yx$$

所得到. 根据 [5], 我们粗浅的用归纳法可以证明如下事实:

定理 1.21. 每一个 $U(\mathfrak{g})$ 之中的元素都可以唯一写成对称积 $\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_n}$ 的和. 换句话说, $U(\mathfrak{g})^n$ 与 $TS^n(\mathfrak{g})$ 同构.

这是著名的 **PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) 定理** 的结果. 此定理的一般形式保证了这一结论对于无限维李代数依然成立, 因此如下结论对于一般情形的李代数也是成立的.²

我们为 $U(\mathfrak{g})$ 赋予余乘法结构, 依旧满足 $\forall v \in \mathfrak{g}$,

$$\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$$

由于 $\Delta(xy - yx) = 1 \otimes xy + xy \otimes 1 - 1 \otimes yx - yx \otimes 1$, 因此这一规定性与 $U(\mathfrak{g})$ 的定义是相容的. 这一余乘法是余交换的, 因而这给出 $U(\mathfrak{g})$ 的余交换 Hopf 代数结构.

我们令对极映射将 v 映射到 $-v$. 于是, 李代数的泛包络代数也有自然的 Hopf 代数结构. 这一定理的重要之处在于, 我们将发现如果 H 是余交换的么幂 Hopf 代数, 那么它一定可以实现为 $\text{Prim}(H)$ 的泛包络代数. 这就是我们在下一节将要叙述的所谓余交换么幂 Hopf 代数的结构定理.

1.3 余交换么幂 Hopf 代数的结构定理

本节之中, 我们将引入么幂性的概念, 叙述并简单证明余交换么幂 Hopf 代数的结构定理.

²[5] 中的第 76 页尾注说明此定理可以被 Bourbaki 或者 Dixmier 的书中论证证明.

1.3.1 么幂 Hopf 代数

定义 1.22 (么幂性). 称双代数 B 么幂, 当且仅当如下定义的 $J_n = m_n \circ \tilde{\Delta}_n$ 最终逐点取值稳定于 0.

$$m_2 = m; m_{n+1} = m(m_n \otimes id)$$

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_2 : \tilde{\Delta}(v) = \Delta(v) - v \otimes 1 + 1 \otimes v$$

$$\tilde{\Delta}_{n+1} = (\tilde{\Delta}_n \otimes id) \circ \tilde{\Delta}$$

$\tilde{\Delta}$ 一般称为约化的余乘法. 我们注意到, 约化余乘法的核就是 $Prim(H)$.

对于么幂的双代数 B , 它一定是一个 Hopf 代数. 我们可以用如下公式计算其对极映射. 先定义映射 $J = id - \nu = J_2$:

$$S = id^{-1} = (\nu + J)^{-1} = \nu - J + J^2 - \dots$$

仅有有限项非 0, 从而此求和合法. 这就给出了 B 的 Hopf 代数结构.

1.3.2 膨胀映射, 权分解

在双代数 $(B, m, \epsilon, \Delta, \eta)$ 之中, 我们可以引入膨胀映射:

$$\Psi^k := id^{*k} = m_k \circ \Delta_k$$

我们有如下的定理³:

定理 1.23 (权分解). 若 B 交换或余交换, Ψ^k 可以同时对角化为特征值取 k^i 的映射. 我们用 $B(n)$ 标记特征值 k^n 的子空间.

B 到 $B(i)$ 的投影映射由如下映射给出:

$$e^i := \frac{(e^1)^{*i}}{i!} = \sum_{j \geq i} s(j, i) \frac{(id - \nu)^{*j}}{j!}$$

其中 $s(i, j)$ 是 $x(x-1)\dots(x-j+1)$ 的 x^i 的系数.

从而, 我们可以将余交换么幂 Hopf 代数 H 分解为 $\bigoplus_{i \geq 0} H(n)$ 的形式.

本节, 我们将要证明如下的余交换么幂 Hopf 代数的结构定理:

³这一定理的证明可在 [5] 中找到.

定理 1.24. 若 H 为余交换幺冪 Hopf 代数, 则李代数 $\mathfrak{g} = \text{Prim}(H)$ 是李代数, 且自然嵌入 $\mathfrak{g} \rightarrow H$ 扩展为 Hopf 代数同构:

$$\varphi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow H$$

1.3.3 结构定理的证明

本节中, 固定 H 为一个余交换幺冪 Hopf 代数. φ 与乘法, 余乘法的相容性是简单的, 因此仅需证明这是一个同构即可.

引理 1.25. $H(1) = \mathfrak{g}$

这是因为 $\Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h$ 给出 $\Psi^2(h) = 2h$. 注意到此时, id 是余代数同态, 从而余交换性也有余代数同态的结构. 那么,

$$\Delta H(1) \subset H(1) \otimes H(0) \oplus H(0) \otimes H(1)$$

从而 $\Delta x = y \otimes 1 + 1 \otimes y$ 给出 $x = y$. 于是, $x \in H(1)$ 必然为本质元素.

由 PBW 定理, $U(\mathfrak{g})$ 和 \mathfrak{g} 生成的余自由余交换余代数 $TS()$ 是余代数同构的.

我们将 φ 复合这一映射, 给出余代数同态 $h : TS(\mathfrak{g}) \rightarrow H$. 这一映射将 $TS(\mathfrak{g})$ 中的 n 次元素映入 $H(n)$. 我们发现, 这一映射无外是一个自然的乘法 m_k . 由于当 $n \geq 2$ 时,

$$\frac{(e^1)^{\otimes n}}{n!} \circ \Delta_n = \frac{(e^1)^{\otimes n}}{n!} \circ \tilde{\Delta}_n$$

将 x^n 映回 $x^{\otimes n}$, 从而成为了一个 h 作为线性映射的逆. 于是定理就得到了证明.

1.4 特征与特征群

我们本节将定义 Hopf 代数的特征群的概念.

我们考虑集合 $\mathcal{G}(H) := \text{Hom}_{\text{Alg}}(H, k)$ 为所有从 H 到 k 的代数同态. 这一同态通过卷积给出自然的乘法, 以 η 为单位, 而 $\varphi \mapsto \varphi \circ S^{-1}$ 给出了这一乘法的逆运算, 这是因为如下等式 (右逆同理):

$$(\varphi \circ S) * \varphi = \varphi \circ S * \text{id} = \varphi \circ \epsilon \circ \eta = \eta$$

从而我们给出 $\mathcal{G}(H)$ 的自然群结构.

更加一般地, 对于任何一个交换环 A , 我们也可以定义 A 系数的特征为 $\mathcal{G}(H, A) := \text{Hom}_{\text{Alg}}(H, A)$ 中的元素. 这一集合依然可以定义群的结构, 具体过程和上述过程基本一致.

我们可以考虑无穷小特征:

定义 1.26. 称 $f \in \text{Hom}_k(H, A)$ 为无穷小特征, 若其在 A 上为 0 且满足:

$$f(hh') = f(h)\eta(h') + \eta(h)f(h')$$

直觉上这可以刻画特征的无穷小变化. 容易相信, 无穷小特征之上可以定义李括号.

引理 1.27. $\mathcal{I}(H)$ 是 $\text{Hom}_k(H, A)$ 的子空间, 并且有李代数结构:

$$[f, g]_* = f * g - g * f$$

这是因为 $f * g(hh')$ 展开后为 $f * g(h)\eta(h') + \eta(h)f * g(h') + f(h)g(h') + g(h)f(h')$, 从而交错相减后确实满足无穷小特征的定义.

无穷小特征和特征群之间的关系相当于李群和李代数的关系. 我们可以看到, 正如我们可以用李代数去理解李群的局部结构, 研究无穷小特征 (所构成的李代数) 也可以用于研究特征群.

我们期望定义某种对数映射. 对于被称为**余幂零**的 Hopf 代数而言, 这是可行的.

定义 1.28 (余幂零). 称 H 余幂零, 若 $\ker \eta$ 上 $\tilde{\Delta}^m$ 逐点收敛于 0.

此时对无穷小特征 f , f^{*m} 逐点收敛至 0, 从而可定义

$$\exp^* f := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{*k}$$

类似, 我们可以对 $f = \eta + g$ 定义 $\log^* f$.

我们有如下的定理:

定理 1.29 (特征-无穷小特征对应). 若 H 是余幂零双代数 (特别地, 如果 H 为联通的分次 Hopf 代数), 则 $\mathcal{I}(H, A)$ 和 $\mathcal{G}(H, A)$ 之间存在双射:

$$\log^* : \mathcal{G}(H, A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(H, A) : \exp^*$$

2 主定理

介绍完 Hopf 代数的基本语言, 我们将开始介绍 Connes 和 Kreimer 的工作. 这一工作最后体现为如下的定理. 我们暂时用模糊的语言叙述如下:

定理 2.1. $1.H_{CK}$, 一个由 1PI(1-粒子可约/1-particle irreducible) 费曼图 (装配上一些 “外动量”) 组成的自由交换代数上有自然的 Hopf 代数结构, 而求解量子场论之中的振幅作为映射可以视作一个 Hopf 代数上的复值特征.

2. 对于分次连通交换的 Hopf 代数 H , 特征群

$$G = \text{Hom}(H, \mathbb{C})$$

上 (全纯) 路径 $\gamma(\epsilon)$ 总可以做 Birkhoff 分解 $\gamma(\epsilon) = \gamma_-^{*-1} * \gamma_+$, 由如下 Bogoliubov 递归公式给出 (暂时将 $\gamma(\epsilon)$ 理解为到形式洛朗级数环 $\mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]]$ 的特征):

$$\begin{aligned} \gamma_- : (x \in H) &\rightarrow \eta(x) - \text{PP}(\gamma_- \otimes \gamma) \circ (1 \otimes (1 - \eta)) \circ \Delta(x) \\ (\gamma_-(x \in \ker(\eta))) &= -\text{PP}(\gamma(x) + \sum_{(x)} \gamma_-(x') + \gamma(x'')) \end{aligned}$$

其中 PP 指的是一个形式洛朗级数的极点部分, $\tilde{\Delta}(x) = \sum_{(x)} x' \otimes x''$.

3. 通常的 BPHZ 量子化路径可以理解为结论 2. 在结论 1. 中的 Hopf 代数 H_{CK} 之上的应用, 用 Birkhoff 分解后的 γ_+ 代替 γ 给出正确的振幅.

我们接下来将完成如下任务:

- 叙述 Birkhoff 分解的定义
- 介绍上述定理中的 H_{CK} (在后文中记作 H)
- 介绍维数正规化, 一种给出正确的未重整化振幅的方法
- 给出重整化群在 H 上的作用 (未完成)

2.1 Birkhoff 分解

Birkhoff 分解叙述如下事实. 假设 C 是 \mathbb{CP}^1 上的光滑简单曲线, ∞ 不在曲线的图像之上. 记 ∞ 所在的 \mathbb{CP}^1 分支为 C_- , 另一分支为 C_+ . 对于 C 上函数

γ , 我们需要找 C_{\pm} 上全纯函数 γ_{\pm} 使得

$$\gamma(z) = \gamma_{-}(z)^{-1} \gamma_{+}(z)$$

我们令 $\gamma_{-}(\infty)$ 保持为 1, 以获得 Birkhoff 分解的唯一性.

例 2.2 (\mathbb{CP}^1 上的向量丛). 此时, 考虑 $\gamma(z)$ 为 z 处的转移函数, 于是 γ 和 γ_{\pm} 的取值落在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 之中. Birkhoff 分解的存在性说明此向量丛平凡.

我们将对 Hopf 代数 H 的特征 $\varphi \in \mathcal{G}(H, \mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]] := \mathcal{A})$ 做 Birkhoff 分解. 这一分解的可能性是因为我们将其视为 ϵ 到特征群的全纯函数. 首先我们将 \mathcal{A} 分拆成

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-} \oplus \mathcal{A}_{+}$$

其中 $\mathcal{A}_{+} = \mathbb{C}[[\epsilon]]$, $\mathcal{A}_{-} = \epsilon^{-1}C[\epsilon^{-1}]$. 我们构造映射 $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{-}$.

定理 2.3. 我们可以形式地对这一特征做 Birkhoff 分解. Birkhoff 分解的结果可以显式写为 ($\eta(X) = 0$):

$$\varphi_{-}(X) = -\pi(\varphi(X) + \sum_{(X)} \varphi_{-}(X') \varphi(X''))$$

$$\varphi_{+}(X) = (\mathrm{id} - \pi)(\varphi(X) + \sum_{(X)} \varphi_{-}(X') \varphi(X''))$$

可以验证 φ_{-} 将 1 映至 $1_{\mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]}$, 将 X 映至 \mathcal{A}_{-} , 而映射 $\varphi(X)$ 的像完全在 \mathcal{A}_{+} 之中. 它们都是 H 的特征. 因此, 如果 $\gamma(\epsilon)$ 是一个真正的取值在特征群内的函数, 这一形式的 Birkhoff 分解就给出了严格意义下的 Birkhoff 分解.

2.2 费曼图的 Hopf 代数 \mathcal{H}

2.2.1 定义

我们来严格引入 Kreimer 和 Connes 在 [1] 之中所研究的费曼图 Hopf 代数 H . 这一 Hopf 代数用以研究 $D = 6$ 时的 φ^3 理论, 因此费曼图之中的内点仅有三种:

- (1) 连接三个边的内点, 对应拉式量之中的 φ^3 项.
- (2) 连接两个边的点, 带上类型标记 (1), 对应拉式量之中的 $\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi$ 项.

- (3) 连接两个边的点, 带上类型标记 (0), 对应拉式量之中的 $m^2\varphi^2$ 项.

我们称图 Γ 为 1PI, 当且仅当剪除其任意一条内边之后都不会破坏其连通性. 我们特别约定仅有一个点的图不是 1PI 的 (即使此定义被满足).

作为线性空间, H 由每个连通分支都为 1PI 的图 Γ 构成. Γ 带有确定的外部动量. 物理上每一个外边都有一个 (形式上) 向内的动量 p_i , 对每个连通子图满足动量守恒定律

$$\sum_i p_i = 0$$

数学上我们定义外部动量 σ 为一个分布 (一般是紧支集的, 仅需选取合适的试验函数空间 \mathcal{S}). $\sigma_L \in \mathcal{S}'(E_L)$, $E_L = \bigoplus_{\text{连通分支}} \{k_i \mid \sum_i k_i = 0\}$, 其中外边对应动量 p_i 的图对应的分布为 $\sigma_L = \delta_{(p_1, \dots, p_n)}$.

特别地, $\Gamma = \emptyset$ 是被容许的. 我们认为这是“单位元” 1.

作为代数, H 上的乘法是将图之间简单做无交并, 这是一个交换的乘法; 单位 ϵ 则为 $k \rightarrow H; 1 \mapsto \mathbb{1} = \emptyset$.

我们将定义 H 的余乘法结构. 粗略地, 1PI 图 Γ 的余乘法为

$$1 \otimes \Gamma + \Gamma \otimes 1 + \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{(i)} \otimes \Gamma / \gamma_{(i)}$$

γ 应当满足如下条件:

- γ 非平凡; 换言之, $\gamma \neq \emptyset$ 且 $\gamma \neq \Gamma$.
- γ 应当为 Γ 之中 1PI 子图族⁴, 且两两之间无共点情形⁵.

此时, Γ/γ 由 Γ 将 γ 中每一个连通分支之中的所有点缩合为一个新点得出. 如果 Γ 1PI 则此图亦然. Γ/γ 继承 Γ 的外部动量, 因为它们的外边一一对应.

- 每个 γ 中连通分支的所有外边 (即不在 γ 之中却与 γ 中点相连的边) 只有两个或三个. 这一条件保证了 Γ/γ 之中只有上述提到的三种点.

⁴我们对这一子图族和它形式的并不做区分, 并认为它到 Γ 有一个可能并非单射的自然嵌入.

⁵然而可能出现共边的情形, 参见 [1]p.11 的 (8) 式.

- 对于 γ 仅有两个外边的连通子图, $\gamma^{(i)} \otimes \Gamma/\gamma_{(i)}$ 取遍多重指标 i , i 对每个 γ 的仅有两条外边的连通 1PI 子图给出 0 或 1.

若 i 对某一连通分支给出 0, 则子图 $\gamma^{(i)}$ 之中对应此连通分支的部分装配外动量 0 (作为分布为 $\frac{1}{m^2}\delta_0$), $\Gamma/\gamma_{(i)}$ 之中对应此分支的点带上类型标记 (0); 反之, 若 i 给出 1, 则子图 $\gamma^{(i)}$ 之中对应此连通分支的部分装配有分布

$$\frac{\partial}{\partial p^2}(0) = \frac{1}{2}\delta_0''$$

$\Gamma/\gamma_{(i)}$ 之中对应此分支的点带上类型标记 (1). 于是我们就完全的给出了 1PI 图的余乘法, 从而给出了所有图的余乘法.

H 的余单位映射 η 将非空图映至 0. 因此 $\ker \eta$ 为非空图张成的极大理想.

我们已经完全定义出了双代数 $(H, m, \epsilon, \Delta, \eta)$.

我们将给出两个具体的计算 1PI 图余乘法的例子.

$$\Delta \text{ (triangle)} = \text{triangle} \otimes 1 + 1 \otimes \text{triangle}$$

这一例子表明 triangle 是一个本原元素. 我们给出一个非本原元素的例子:

$$\begin{aligned} \Delta \text{ (bubble)} &= 1 \otimes \text{bubble} + \text{bubble} \otimes 1 \\ &+ (\text{circle}, \sigma_1) \otimes \text{circle}_{(1)} + (\text{circle}, \sigma_0) \otimes \text{circle}_{(0)} \end{aligned}$$

2.2.2 H 的结构

命题 2.4. H 上有如下命题:

1. H 为连通交换的余幂零 Hopf 代数.
2. H 上有两个自然的分次结构, 分别按照 H 的圈数 L 和点数 $-1 = v$ 分次. 内边数也给出一个有效的分次结构 i , 可写为 L 和 v 之和.

证明: 连通性由 η 的结构显然可知. 余幂零性仅需注意到 $\tilde{\Delta}^i$ 将 n 次图映到 $\leq n - i$ 次图的张量积之中也可以证明. 由于 H 余幂零, H 自然满足么幂性条件. 2. 中的关系成立是由于欧拉公式

$$v + 1 + E - (I + E) = -L + 1$$

对于 1PI 图成立, 移项即可得 $L + v = I$ 成立. 这给出了 H 的分次连通么幂双代数结构.

回忆前文中么幂双代数的对极映射公式:

$$S = \text{id}^{-1} = (\nu + J)^{-1} = \nu - J + J^2 - \dots$$

这给出了 H 的分次 Hopf 代数结构.

2.2.3 \mathcal{H} 上的对极映射

在前文之中, 我们提到了 H 通过其么幂性获得了自然的 Hopf 代数结构, 通过以以下方式定义对极映射 S :

$$S = \text{id}^{-1} = (\nu + J)^{-1} = \nu - J + J^2 - \dots$$

事实上, 对于 H , 它自身的良好结构可以使得我们用更多方法计算其对极映射.

定理 2.5. 对 1PI 图 X , 我们有如下的 **Bogoliubov** 递归公式:

$$S(X) = -X + \sum_{(X)} S(X') \otimes X''$$

其中

$$\tilde{\Delta}X = \sum_{(x)} X' \otimes X''$$

证明: 由对极映射的定义, 我们有 $S * \text{id} = \nu$. 展开卷积的定义, 即

$$m \circ (S \otimes (\text{id})) (1 \otimes X + X \otimes 1 + \sum_{(X)} X' \otimes X'') = 0$$

化简可得

$$X + S(X) + \sum_{(X)} S(X')X'' = 0$$

这就证明了 Bogoliubov 递推公式. 类似地, 我们也可以证明:

$$S(X) = -X + \sum_{(X)} X' \otimes S(X'')$$

我们还有如下的 **Zimmerman 森林公式**, 它和 Bogoliubov 递推公式的关系一如在最开始提到的 Bogoliubov 递推公式和 Zimmerman 森林公式一样, 可以不用递推就计算出对极映射的表达式.

定义 2.6. 称一个连通 1PI 图 Γ 的森林 \mathcal{F} 为一族互不交缠的连通且 1PI 的分散非平凡子图 (非 \emptyset 或 Γ). 记 $d(\mathcal{F}) = \#\mathcal{F} + 1$.

Γ 的所有森林的集合记为 $F(\Gamma)$

附注 2.7. 注意 $\gamma_{(1)}$ 和 $\gamma_{(0)}$ 应当算作不同子图.

对于固定的森林 \mathcal{F} 里的图 γ , 我们总是可以找到它的极大真子图. 我们定义 $\tilde{\gamma}$ 为其极大真子图之并 (注意当 γ 极小时其为空). 对于森林 \mathcal{F} , 我们可以定义:

$$\Theta(\mathcal{F}) = \prod_{\gamma \in \mathcal{F} \cup \Gamma} \gamma / \tilde{\gamma}$$

定理 2.8 (Zimmerman 森林公式). 对于连通 1PI 图 X , 我们有如下对极映射公式:

$$S(X) = \sum_{\mathcal{F} \in F(X)} (-1)^{d(\mathcal{F})} \Theta(\mathcal{F})$$

证明: 仅需证明其与 Bogoliubov 递归公式等价即可. 对于无连通 1PI 子图的连通图 X , $S(X) = -X$ 与 Zimmerman 森林公式相合.

我们将对圈数 L 做数学归纳法, 已证明 $L = 1$ 情形成立.

若对于圈数 $L \leq k$ 的 1PI 连通图, Zimmerman 森林公式皆成立, 则考虑 $L = k + 1$ 的图 X .

由 Bogoliubov 递推公式,

$$S(X) = -X + \sum_{(X)} X' \otimes S(X'')$$

此时, 用 Zimmerman 森林公式, 有 (记 X' 各连通分支为 X'_i)

$$S(X) = -X + \sum_{(X)} \left(\prod_i \sum_{\mathcal{F} \in F(X'_i)} (-1)^{d(\mathcal{F})} \Theta(\mathcal{F}) \right) \otimes X''$$

而我们要验证

$$S(X) = \sum_{\mathcal{F} \in F(X)} (-1)^{d(\mathcal{F})} \Theta(\mathcal{F})$$

仅需注意到, 对于非空森林 \mathcal{F} , 总可以唯一定义出一些极大元, 且对应极大元之并为 $\sqcup X'_i$ 的森林集合自然对应于 X'_i 的森林之积. 考虑到 $\Theta(\mathcal{F})$ 的值此时无外乎是

$$X'' (= X/X') \times \prod_i \Theta(\mathcal{F} \cap P(X'_i))$$

, 对应 Bogoliubov 公式的第二项, 而第一项则是空森林所给的项, 于是我们证明了 Zimmerman 森林公式对于 X 的正确性.

Zimmerman 森林公式在计算较高阶的费曼图的对极映射时较为简便, 仅需寻找其所有的连通分支的所有森林即可. 而对于 Bogoliubov 公式而言, 计算一个图的对极映射需要计算其所有子图的对极映射, 计算量一般较大.

我们结合一个示例来体会 Zimmerman 森林公式和 Bogoliubov 递归公式在计算中的区别:

Bogoliubov:

$$S(\text{bubble}) = -\text{bubble} - S(\text{circle}_{(1)}) \text{bubble}_{(1)} - S(\text{circle}_0) \text{bubble}_{(0)}$$

$$S(\text{circle}_{(i)}) = -\text{circle}_{(i)}$$

$$S(\text{bubble}) = -\text{bubble} + \text{circle}_{(1)} \text{bubble}_{(1)} - \text{circle}_0 \text{bubble}_{(0)}$$

Zimmerman:

$$\text{森林: } \emptyset, \{ \text{circle}_{(i)} \}$$

$$S(\text{bubble}) = -\text{bubble} + \text{circle}_{(1)} \text{bubble}_{(1)} - \text{circle}_0 \text{bubble}_{(0)}$$

2.3 H 和其特征群

我们注意到, H 是一个交换的 Hopf 代数.

命题 2.9. H 是如下 Hopf 代数的限制对偶:

$$H^* = \bigoplus_{\Gamma} S(E_{\Gamma})$$

证明概要: H^* 是一些线性空间的直和. 我们考虑其对偶为这些线性空间对偶的直积中的元素. 一个这样的元素若为表示性的, 从其余乘法就可以找寻出其中所有的直和项, 从而其在

$$H^* = \bigoplus_{\Gamma} S(E_{\Gamma})$$

之中. 而 H^* 中元素又都有余乘法仅有有限项, 从而包含于限制对偶之中. 进而, 限制对偶正是 H^* .

如此, 我们研究 H^* 的结构的时候就可以使用么幂余交换 Hopf 代数的结构性定理. 从而, H^* 有 $\text{Prim}(X) = L$ 的泛包络代数的结构. 注意这里带有不同分布的图不再互相区分 (它们张成空间 E_{Γ}).

这一结构由如下方式确定:

$$[Z_{X_1}, Z_{X_2}] = Z_{X_1} Z_{X_2} - Z_{X_2} Z_{X_1}$$

其中

$$\langle Z_1, Z_2, \Gamma \rangle = \langle Z_1 \otimes Z_2, \Delta \Gamma \rangle$$

这一规则来自于 H^* 的乘法以 H 的余乘法之对偶定义.

定理 2.10. 选定 $\varphi_0 = m^2, \varphi_1 = p^2$ 定义

$$L_0 = \bigoplus_{\Gamma} \{\varphi \in S(E_{\Gamma}), \varphi(0) = 0; \varphi''(0) = 0\}$$

$$L_c = \sum_{\Gamma \text{ 腿数为 } 2 \text{ 或 } 3} \langle \Gamma, \varphi_i \rangle$$

则

L 为 L_0 半直积上 L_c , 且 L_c 有基 $\Gamma(i) = -\#\text{Aut}(\Gamma)$ 使得

$$[\Gamma, \Gamma'] = \sum_v \Gamma \circ_v \Gamma' - \Gamma' \circ_{v'} \Gamma$$

其中 $\Gamma \circ_v \Gamma'$ 为将 Γ' 接在 $v \in \Gamma$ 之上的所有图之和.

这一定理的证明参考 [1], 是直接的.

我们有如下的直觉: L 是某种对“无穷小特征”的刻画 (实际上确实满足这一条件——无穷小特征条件是本原条件的某种直接推论), 所以我们可以用 L 的结构去理解特征群 G 的结构.

我们只考虑在分布上连续作用的那些特征.

首先, 我们引入 H_c 为 L_c 生成的群, 某种意义上即是 $U(L_c)$ 的 (限制) 对偶 Hopf 代数. 我们令其特征群为 G_c . 于是, 我们自然有映射

$$\rho: G \rightarrow G_c$$

同时, 类似上述定理, 我们对 G 也有如下分解:

$$G = G_0 \rtimes G_c$$

其中 G_0 是限制在 H_c 上为 ν 的映射 (直观上是 L_0 的指数), 而 G_c 由 ρ 如下定义的截面 ρ' 给出:

$$\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$$

其中

$$\tilde{\varphi}|_{H_c} = \varphi, \tilde{\varphi}(\Gamma) = 0 \text{ 若 } \Gamma \text{ 外边非 } 2/3 \text{ 条.}$$

可以验证这一映射满足乘性, 即 $(\varphi_1 * \varphi_2) = \tilde{\varphi}_1 * \tilde{\varphi}_2$.

我们还需要计算 G_c 在 G_0 之上的作用 α :

$$\alpha(\varphi_1)\varphi = \tilde{\varphi}_1 * \varphi * \tilde{\varphi}_1^{-1}$$

而对于 $H_{(1)}$ (1PI 图张成的线性空间) 中 H_c 的补中的元素,

$$(\varphi * \tilde{\varphi}_1^{-1})(\Gamma, \sigma) = \varphi(\Gamma, \sigma)$$

从而

$$\alpha(\varphi_1)\varphi = \varphi(\Gamma, \sigma) = \varphi(\Gamma, \sigma) + \sum_{(x)} \varphi_1(\gamma_{(i)})\varphi(\Gamma/\gamma_{(1)}, \sigma)$$

这就给出了 G 的结构.

2.4 积分: 维数正规化

在 Connes 和 Kreimer 的论文之中, 相较于 Bogoliubov 手动减去发散项的方式, Connes 采用了维数正规化 (dimensional regularization) 的方式计算费曼图的积分. 我们认为我们是对形式的 $d = D - \epsilon$ 维空间做费曼图积分, 用以替代 $D = 6$ 维的情形. 此时, 考虑量纲问题, φ^3 项的系数应当变为 $\mu^{3-\epsilon/2}g$ (μ 是某个选取的能标).

对于费曼图 Γ , 我们定义其积分项为如下项的乘积:

- $\frac{1}{k^2+m^2}$, 对每一个有动量 k 的内边; 动量 k 在每点处应满足动量守恒.
- $\mu^{(3-d/2)}g$, 对每一个有三条边的点;
- m^2 , 对每一个有类型标记 (0) 的有两条边的点;
- p^2 , 对每一个有类型标记 (1) 的有两条边的点.

然后对圈中的动量分别积分.

然而我们要对一个 “ d 维线性空间” 积分:

$$\int f(k, p_1, \dots, p_n) d^d k$$

我们如何定义这样的积分呢? 对于一般的函数这自然是不可能的, 然而我们可以对一类函数定义 d -维积分.

对于 d -维向量 $k \in \mathbb{K}$ “=” $\mathbb{R}^d, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}$, 如果函数 f 仅为 p 和 k_i 通过点乘给出的数字的函数 (称为张量函数), 那么我们可以做形式的分解:

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_{//} \oplus \mathbb{K}'$$

其中 $\mathbb{K}_{//}$ 包含 p_i 张成的子空间, 为一个 $m \in \mathbb{Z}$ 维空间, 而 \mathbb{K}' 为一个 $d-m$ 维空间 (暂时限制 $d-m$ 非负). 如上的积分可以被改写为

$$\int f(k_{//}, k'^2, p_1, \dots, p_n) d^{d-m} k' d^m k_{//}$$

我们自然希望它等于

$$\int \left(\int f(k_{//}, k'^2, p_1, \dots, p_n) d^m k_{//} \right) d^{d-m} k'$$

括号内是一个正确的积分, 其积分结果是一个仅与 k^2 相关的函数 $F(|k|)$. 我们考虑 $F(|k|) = O(|k|^{-l})$ 的情形. 此时, 如果 $d - m - 1 + l$ 足够好, 我们用如下积分: ($n = d - m$)

$$\int_0^\infty F(r) \omega_n r^{n-1} dr$$

计算之. 此处 ω_n 选取为 $n - 1$ 维球的体积 $\frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\frac{n-1}{2})!}$.

此定义仅对 $d - m \geq 0$ 的情况下是自然的. 然而目前我们并未给 d -维积分做出一个一致的良好定义, 我们现在仅处理 f 是轴对称正函数的情形, 并要求 f 有着极快的下降速度.

当 $\text{Re}(d) > 0$ 时, 如上给出的积分

$$\int_0^\infty f(r) \omega_d r^d dr$$

被称为函数 f 的 d -维积分.

当 $\text{Re}(d) \in (-2l - 2, -2l)$ 时, 我们定义

$$\int d^d p f(p^2) = \int_0^\infty [f(p^2) - f(0) - p^2 f'(0) - \dots - p^{2l} f^{(l)}(0)/l!] \omega_{d-1} p^{d-1} dr$$

我们还需要将其延拓至一般的数 $d < 0$ 来进行这一操作. 然而此时积分很可能在原点发散, 我们仿照如上所定义的 d 维积分会变得无法定义. 我们通过对 f 在原点处泰勒展开的方式消去无穷大.

当 $\text{Re}(d) = -2l$ 且 $d \neq -2l$ 时, 我们用 $d + \epsilon$ 和 $d - \epsilon$ 分别求极限, 对于足够好的 f 可得到同一个值. 我们简略证明如下:

证明: 仅需考虑 $l = 0$ 情形, 否则选取函数为 $[f(p^2) - f(0) - p^2 f'(0) - \dots - p^{2l-2} f^{(l-1)}(0)/(l-1)!] p^{-2l-1}$ 即可化为 $l = 0$ 情形.

$l = 0$ 时, 仅需注意到:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \frac{1}{ik - \epsilon} d\{[f(p^2) - f(0)] p^{-\epsilon+ik}\} \\ &= \int_0^\infty [f(p^2) - f(0)] p^{-\epsilon+ik-1} dp + \int_0^\infty \frac{1}{ik - \epsilon} 2f(p^2) p^{-\epsilon+ik+1} \end{aligned}$$

$$0 = \int_0^\infty \frac{1}{ik - \epsilon} d\{f(p^2) p^{\epsilon+ik}\} = \int_0^\infty f(p^2) p^{\epsilon+ik-1} dp + \int_0^\infty \frac{1}{ik - \epsilon} 2f(p^2) p^{\epsilon+ik+1}$$

从而由 $l = 1$ 情形下此积分的连续性可推出所需结论.

对于 $d = -2l$, 直接定义

$$\int d^{-2l} p f(p^2) = (-\pi)^{-l} f^l(0)$$

即可. 于是, 我们将 d -维积分定义在整个复平面之上.

我们声称, 若 f 增长速度为多项式的, 且在原点处解析, 则我们永远可以对于实部足够小的 d 定义有限的 d -维积分. 此时, 如果这一结果可以对 d 做解析延拓, 则称解析延拓的结果为我们所需的 d -维积分. 特别地, 如果 f 在远处收敛极快, 其 d -维积分可以被延拓为整个复平面上的整函数.

2.4.1 d -维积分的公理化定义及性质

本节之中, 我们将讨论 d -维积分的一些性质. 我们的目的是从轴对称的 $d \geq 0$ -维积分出发, 推导满足如下公理的, 对任意张量函数的积分.

定义 2.11 (Wilson 公理). 我们要求 d -维积分为满足如下条件的映射:

1. d -维积分应当为线性映射;
2. d -维积分应当满足如下的放缩条件:

$$\int d^d p f(sp) = s^{-d} \int d^d p f(p)$$

3. d -维积分在仿射变换下不变.

由 [7], 这些公理可以保证 d -维积分在相差一个全局正规化的意义下唯一. 我们选取的正规化条件是

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-x^2} d^d x &= \pi^{d/2} \\ \int_{\mathbb{R}^d} e^{-x^2} d^d x &= \pi^{d/2} \end{aligned}$$

此时, 由 [6], $d \in \mathbb{N}$ 情形下给出一般欧氏空间上的 Lebesgue 测度所给出的积分.

命题 2.12. 对于二元函数 $f(x, y)$, 如下形式的 d -维二重积分:

$$\int \int f(x, y) d^d x d^d y$$

与积分次序无关.

证明: 对如下二重积分 (至多相差一些泰勒展开项)

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) d^d x d^{d'} y$$

使用 Fubini 定理即可.

命题 2.13. 如下等式成立:

$$\int \int f(x^2 + y^2) d^d x d^{d'} y = \int f(q^2) d^{d+d'} q$$

证明:

$$\int \int f(x^2 + y^2) d^d x d^{d'} y = \int f(q^2) d^{d+d'} q$$

令 $q = \sqrt{x^2 + y^2}$, $k = y^2/q^2$, 则 $dq = \frac{1}{q}(x dx + y dy)$, $dk = 2y dy/q^2 + f(y, q) dq$;
从而 $dx dy = \frac{q^3}{2xy} dq dk$.

$$\int \int f(x^2 + y^2) d^d x d^{d'} y = \int_0^\infty \int_0^1 q^3 f(q^2) x^{d-2} y^{d'-2} / 2\omega_d \omega_{d'} dq dk$$

而

$$\int_0^1 (1-k)^{d/2-1} k^{d'/2-1} dk = \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(d'/2)}{\Gamma(d'/2 + d/2)}$$

代入原等式即可证明.

推论 2.14. 我们可以对一般的张量函数 $f(p_1, \dots, p_n)$ 定义 d -维积分, 且这一积分和 $\mathbb{R}_{//}$ 的具体选取无关.

这是因为上一命题保证了可以随意扩大 $\mathbb{R}_{//}$ 的维数而不改变 d -维积分的取值, 所以任意选取 $\mathbb{R}_{//}$ 计算出的值与选取最小的 $\mathbb{R}_{//}$ 相同.

对于一般形式的 d -维积分, 我们有如下性质:

定理 2.15. 我们定义的 d -维积分满足 Wilson 公理和我们选定的正规化条件.

定理 2.16. 我们定义的 d -维积分在 $d \in \mathbb{N}$ 时和一般勒贝格积分一致.

定理 2.17. 对于一般形式的 $f(x, y)$ (无需轴对称), 如下形式的 d -维二重积分:

$$\int \int f(x, y) d^d x d^{d'} y$$

与积分次序无关.

证明参见 [6] 的章节 4.3.

对于下降速度较快的 $f(x, y)$, 我们总可以实现 d -维积分为一个整函数. [8] 提到, 对于 f 为有理函数的情形, d -维积分总可以给出一个亚纯函数, 这也是我们可以对这一积分过程做 Birkhoff 分解的原因.

2.5 特征 Birkhoff 分解

如上文所言, 对 Hopf 代数 H 的特征 $\varphi \in \mathcal{G}(H, \mathcal{A})$ 可以做 Birkhoff 分解. 我们将 d 维积分给出的亚纯函数在 $d = 6$ 附近展开为 $\epsilon = d - 6$ 的幂级数 (从而唯一确定 $\varphi \in \mathcal{A}$), 再将 \mathcal{A} 分拆成

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$$

其中 $\mathcal{A}_+ = \mathbb{C}[[\epsilon]]$, $\mathcal{A}_- = \epsilon^{-1}\mathbb{C}[\epsilon^{-1}]$. 我们构造映射 $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_-$, 即证明上文提到的定理:

定理 2.18. 我们可以形式地对这一特征做 Birkhoff 分解. Birkhoff 分解的结果可以显式写为 ($\eta(X) = 0$):

$$\varphi_-(X) = -\pi(\varphi(X) + \sum_{(X)} \varphi_-(X')\varphi(X''))$$

$$\varphi_+(X) = (\text{id} - \pi)(\varphi(X) + \sum_{(X)} \varphi_-(X')\varphi(X''))$$

可以验证 φ_- 将 1 映至 $1_{\mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]}$, 将 X 映至 \mathcal{A}_- , 而映射 $\varphi(X)$ 的像完全在 \mathcal{A}_+ 之中. 它们都是 H 的特征. 因此, 如果 $\gamma(\epsilon)$ 是一个真正的取值在特征群内的函数, 这一形式的 Birkhoff 分解就给出了严格意义下的 Birkhoff 分解.

证明: 先证明 φ_- 是 \mathcal{A} 值的特征: 仅需验证

$$\varphi_-(X) = -\pi(\varphi(X) + \sum_{(X)} \varphi_-(X')\varphi(X''))$$

满足乘性. 记 $b(X) = \varphi(X) + \sum_{(X)} \varphi_-(X')\varphi(X'')$

$$\begin{aligned}\varphi_-(XY) &= -\pi(\varphi(X)\varphi(Y)) - \pi(\varphi_-(X)\varphi(Y)) - \pi(\varphi(X)\varphi_-(Y)) - \pi(\varphi_-(XY')\varphi(Y'')) \\ &\quad - \pi(\varphi_-(YX')\varphi(X'')) - \pi(\varphi_-(X')\varphi(YX'')) - \pi(\varphi_-(X'Y')\varphi(X''Y'')) - \pi(\varphi_-(Y')\varphi(XY'')) \\ \varphi_-(X)\varphi_-(Y) &= \pi(\varphi(X))\pi(\varphi(Y)) + \pi(\varphi_-(X')\varphi(X''))\pi(\varphi(Y)) + \pi(\varphi(X))\pi(\varphi_-(Y')\varphi(Y'')) \\ &\quad + \pi(\varphi_-(X')\varphi(X''))\pi(\varphi_-(Y')\varphi(Y''))\end{aligned}$$

若我们已经假设此乘性等式对于更小阶数的图正确, 则:

$$\begin{aligned}\varphi_-(XY) &= -\pi(\varphi(X)\varphi(Y)) - \pi(\varphi_-(X)\varphi(Y)) - \pi(\varphi(X)\varphi_-(Y)) - \pi(\varphi_-(X)\varphi_-(Y')\varphi(Y'')) \\ &\quad - \pi(\varphi_-(Y')\varphi(X)\varphi(Y'')) - \pi(\varphi_-(Y)\varphi_-(X')\varphi(X'')) - \pi(\varphi_-(X')\varphi(Y)\varphi(X'')) \\ &\quad - \pi(\varphi_-(X')\varphi_-(Y')\varphi(X'')\varphi(Y''))\end{aligned}$$

我们引用定理:

$$\pi(xy) + \pi(x)\pi(y) = \pi(\pi(x)y + x + \pi(y))$$

$$\begin{aligned}\varphi_-(X)\varphi_-(Y) &= \pi(\varphi(X))\pi(\varphi(Y)) + \pi(\varphi_-(X')\varphi(X''))\pi(\varphi(Y)) \\ &\quad + \pi(\varphi(X))\pi(\varphi_-(Y')\varphi(Y'')) + \pi(\varphi_-(X')\varphi(X''))\pi(\varphi_-(Y')\varphi(Y'')) \\ &= \pi(\pi(\varphi(X))\varphi(Y) + \pi(\varphi(X))\varphi(Y) - \varphi(X)\varphi(Y) + \varphi_-(X')\varphi(X'')\pi(\varphi(Y)) \\ &\quad + \pi(\varphi_-(X')\varphi(X''))\varphi(Y) - \varphi_-(X')\varphi(X'')\varphi(Y) + \varphi_-(X')\varphi(X'')\pi(\varphi(Y)) \\ &\quad + \pi(\varphi_-(X')\varphi(X''))\varphi(Y) - \varphi_-(X')\varphi(X'')\varphi(Y) + \pi(\varphi_-(X')\varphi(X''))\varphi_-(Y')\varphi(Y'')) \\ &\quad + \pi(\varphi_-(Y')\varphi(Y''))\varphi_-(X')\varphi(X'') - \varphi_-(Y')\varphi(Y'')\varphi_-(X')\varphi(X''))\end{aligned}$$

与 $\varphi_-(XY)$ 相减为 0, 则乘性得证.

之后仅需证明 $\varphi_- * \varphi = \varphi_+$ 即可. 仅需

$$\varphi_- * \varphi(X) = \varphi(X) + \varphi_-(X) + \sum \varphi_-(X')\varphi(X'') = b(X) - \pi(b(X))$$

即可验证 φ_+ 的公式, 于是给出了这一定理的证明.

回顾本节开始的内容, 我们完成了用 Kreimer-Connes 理论进行重整化的一般程序的叙述: 用维数正规化给出的特征 φ 的 Birkhoff 分解的正部分作为重整化之后的结果. 这便是 Hopf 代数在重整化中的应用.

参考文献

- [1] Connes, A., Kreimer, D. Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann - Hilbert Problem I: The Hopf Algebra Structure of Graphs and the Main Theorem[J]. Communications in Mathematical Physics, 2000, 210, 249-273 (2000).<https://arxiv.org/abs/hep-th/9912092>
- [2] Jean-Bernard Zuber, Claude Itzykson. Quantum Field Theory[M], Dover: Dover Publications, 2006.
- [3] Hepp, K., Proof of the Bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization[J]. Communications in Mathematical Physics, 1966, 2, 301 - 326 (1966).<https://doi.org/10.1007/BF01773358>
- [4] Zimmerman, W., Convergence of Bogoliubov's Method of Renormalization in Momentum Space[J]. Communications in Mathematical Physics, 1969, 15, 208 (1969). 另见 W. Zimmerman, 收录于 Lecture on Elementary Particles and Quantum Field Theory — Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics (M.I.T. Press, Cambridge, 1970).
- [5] Cartier, P., Patras, F. (2021). Classical Hopf Algebras and Their Applications. Algebra and Applications[M], vol 29. Springer, Cham. 2021. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-77845-3>
- [6] Collins, J. Dimensional regularization[M]. In Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, pp. 62-87). Cambridge: Cambridge University Press(1984). doi:10.1017/CBO9780511622656.004
- [7] Wilson, K., Quantum Field - Theory Models in Less Than 4 Dimensions[J]. Phys. Rev. D 7, 1973, 2911, (1973).<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2911>
- [8] Etingof, P., Note on Dimensional Regularization[M]. In Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians: Volume 1(pp.597-608). Providence: American Mathematical Society(1999).
- [9] Figueroa, H., Gracia-Bondia, J. Combinatorial Hopf algebras in quantum field theory I[J]. Reviews in Mathematical Physics, 2005, 17, No. 08, pp. 881-976.(2005)
- [10] Figueroa, H., On the antipode of Kreimer's Hopf algebra[J]. Modern Physics Letters A, 2000, 16, No.22, pp.1427-1434.(2000)

- [11] Manchon., D., Hopf algebras, from basics to applications to renormalization[OL][2006-5-16], <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0408405>
- [12] Borchers. R.D., Barnard. A., Lectures on Quantum Field Theory[OL][2002-4-8], <https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0204014>
- [13] Mario Flory, Robert C. Helling, Constantin Sluka., How I Learned to Stop Wor-rying and Love QFT[OL][2012-1-13], <https://doi.org/10.48550/arXiv.1201.2714>
- [14] Weinberg, S. (1995). The Quantum Theory of Fields[M]. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139644167