Kontsevich 的形变量子化

权瀚文

2023 年 1 月 18 日

摘要: 我们将在本篇论文中简略叙述形变量子化相关的问题，并介绍 Kontsevich 的星号乘法（star-product）的一个公式. 本论文开始于一个导向形变量子化的启发式的引子, 之后则顺着 Kontsevich 的思路, 先进行一阶估计, 然后搭建 L-∞ 代数, L-∞ 映射, 构型空间等的语言框架, 并且处理基础语言部分的绝大多数细节问题. 本文的最后介绍了 Kontsevich 构造的欧氏空间上的类似 Moyal 积的公式, 并且给出了这一公式的来源及其中主要步骤的一个证明.

ABSTRACT: We'll introduce the problem of deformation quantization，and introduce the Kontsevich star-product formula. This article start with a heuristic remark on how we get deformation quantization, and then follow the paper of Kontsevich, after doing the first-order approximation, we'll introduce the languages of L-∞ algebra, L-∞ morphism and configuration spaces and so on, with most basic details discussed. At the last of this article we introduced a Moyal-product-like formula given by Kontsevich, with its construction and a proof that it's an L-∞ morphsim contained.

0 引言

在经典的量子力学理论之中，我们用一个 Hilbert 空间 H 上的 Hermite 算符来标记一个物理量，以最简单的一维系统为例, 我们用位置算符 $\hat{x}:\phi\mapsto x\cdot\phi$ 表示位置, 动量算符 $\hat{p}:\phi\mapsto -i\hbar\nabla\phi$ 表示动量. 这个标记实质是构造了一个从相空间上坐标函数到 H 上算子代数 $\mathrm{End}(H)$ 的映射.

我们注意到, 这些基本的力学量都可以写成相空间上 (关于 x 和 p) 的 (实系数) 多项式. 我们试图构造一个将相空间上多项式函数映射到某个结合代数 W 的单射, 来一般化我们对位置和动量进行的量子化过程. 本节仅考虑相空间为 $\mathbb{R}^2$ 的单自由度情形.

0.1 引子:$\mathbb{R}^2$ 的形变量子化

光滑流形 M 上的 **Poisson 括号**意谓一个定义在线性空间 $C^\infty(M)$ 上的李括号 $\{-,-\}:C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$, 其对每个变元都是线性导子. 在本节中, 我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 上标准的泊松括号 $\Pi=\partial_x\wedge\partial_p$.

下文中，$\hat{f}$ 代表相空间上 (多项式) 函数 f 所对应到的代数元素, $\star$ 标记代数中的乘法.

Groenewold 定理 梳理经典量子力学理论的性质, 我们容易得到如下的结论:

1. 对任意多项式函数 f 和 g, 我们都有 $[\hat{f},\hat{g}]=f\star g-g\star f=i\hbar\widehat{\{f,g\}}$.

2. $\widehat{(-)}:f\mapsto\hat{f}$ 是一个线性映射.

3. $\widehat{g\circ f}=g(\hat{f})$, 其中 f 是相空间的多项式函数, g 为单变量多项式.

我们希望量子化映射满足以上条件. 然而, 这样的映射是**不存在的**.

定理 0.1. 不存在定义在所有多项式上的量子化映射 $\widehat{(-)}:f\mapsto\hat{f}\in W$ 使 $[\hat{f},\hat{g}]=i\hbar\widehat{\{f,g\}}$ 永远成立。

这个定理的证明是简单的。

证明: 注意到

$$x^2p^2=\frac{1}{9}\{x^3,p^3\}=\frac{1}{3}\{x^2p,xp^2\}$$

从而, 若这样的量子化映射存在, 如下等式必然成立:

$$-\frac{2}{3}(i\hbar)^3-2(i\hbar)^2\hat{x}\hat{p}-i\hbar\hat{x}^2\hat{p}^2=\frac{1}{9}[\hat{x}^3,\hat{p}^3]=\frac{1}{3}[\hat{x}^2\hat{p},\hat{x}\hat{p}^2]=-i\hbar\hat{x}^2\hat{p}^2-\frac{2}{3}(i\hbar)^2\hat{x}\hat{p}$$

从而 $\hat{x}\hat{p}=-\frac{1}{2}i\hbar$, 矛盾. □

这意味着, 我们需要对这些条件做适当的弱化.

Moyal 积 如果我们修改条件 1. 使得此等式仅在 $\hbar\to 0$ 的渐进条件下成立, 那么就可以构造出这样的单射.

定义 0.2 (Moyal 积)**.** $(\mathbb{R}^{2n},\Pi=\sum_{i,j}\alpha^{ij}\partial_i\wedge\partial_j)$ 为一个带有常值 Poisson 结构的 $2n$ 维欧氏空间. 定义其上的 Moyal 积为映射:

$$-\star-:C^\infty(\mathbb{R}^{2n})\times C^\infty(\mathbb{R}^{2n})\to C^\infty(\mathbb{R}^{2n})[[\hbar]]$$

$$f\star g\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}(i\hbar)^k\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots i_k\\ j_1,j_2,\dots j_k}}\frac{\alpha^{i_1j_1}\alpha^{i_2j_2}\dots\alpha^{i_kj_k}}{k!}(\partial_{i_1}\partial_{i_2}\dots\partial_{i_k}f)(\partial_{j_1}\partial_{j_2}\dots\partial_{j_k}g)$$

可以验证, Moyal 积给出了 $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})[[\hbar]]$ 上一个非典型的结合乘法结构.

定理 0.3. 在 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_p$ 上赋予 Poisson 括号

$$\{f,g\}=\partial_x f\cdot\partial_p g-\partial_p f\cdot\partial_x g$$

则 $\mathbb{R}[[\hbar]]$-代数同态 $(\mathbb{R}[[\hbar]][x,p],\star)\to\mathbb{R}[[\hbar]]\langle\mathfrak{x},\mathfrak{p}\rangle/(\mathfrak{x}\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{x}-i\hbar)$ 为同构.

其中,$\mathbb{R}[[\hbar]]\langle\mathfrak{x},\mathfrak{p}\rangle$ 表示 $\mathfrak{x},\mathfrak{p}$ 在系数环 $\mathbb{R}[[\hbar]]$ 之下生成的自由结合代数.

证明: 我们将采取如下方式证明此结论: 构造一个从 $\mathscr{W}=\mathbb{R}[[\hbar]]\langle\mathfrak{x},\mathfrak{p}\rangle/(\mathfrak{x}\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{x}+i\hbar)$ 到 $\mathscr{M}=(\mathbb{R}[[\hbar]][x,p],\star)$ 的结合代数同态 ϕ, 并证明它是同构.

Step1 构造映射

$$\tilde{\phi}:\mathbb{R}[[\hbar]]\langle\mathfrak{x},\mathfrak{p}\rangle\to\mathscr{M}$$

由于 $\mathbb{R}[[\hbar]]\langle\mathfrak{x},\mathfrak{p}\rangle$ 是自由结合代数, 我们仅需规定:

$$\tilde{\phi}(\mathfrak{x})=x,\tilde{\phi}(\mathfrak{p})=p$$

注意到:

$$\tilde{\phi}(\mathfrak{x}\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{x}+i\hbar)=x\star p-p\star x-i\hbar=0$$

所以此映射穿过理想 $(\mathfrak{x}\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{x}+i\hbar)$, 给出映射:

$$\phi : \mathbb{R}[[\hbar]]\langle \mathfrak{x},\mathfrak{p}\rangle/(\mathfrak{x}\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{x}-i\hbar) \to \mathscr{M}$$

Step2 构造 ϕ 在 $\mathbb{R}[[\hbar]]$-线性空间意义下的一个逆 χ:

我们仅需对所有单项式 x^ip^j 完成构造. 对 $n=i+j$ 归纳定义:

1: 对 $n=0$, $\chi(1)=1$

2: 对 $n<k$ 已完成构造, 则所有 $<k$ 次多项式也已经完成构造.

我们声称: **对 $i+j=k$, $\phi(\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j)-x^ip^j$ 为 $<k$ 次多项式.** 此时定义:

$$\chi(x^ip^j)=\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j-\chi(\phi(\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j)-x^ip^j)$$

即可完成对 $i+j=k$ 时的构造.

Step3 证明 χ 是 ϕ 的逆.

先证明 $\chi\circ\phi=\mathrm{id}_{\mathscr{W}}$, 仅需对 $\mathscr{W}$ 的一组基 $\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j$ 证明即可.

对 $k=i+j$ 归纳证明: 此时, $\chi\circ\phi(\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j)=\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j+\chi(\phi(\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j)-x^iy^j)-\chi(\phi(\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j)-x^iy^j)=\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j$

再证明 $\phi\circ\chi=\mathrm{id}_{\mathscr{M}}$, 也对 $\mathscr{M}$ 的一组基 x^iy^j 证明即可. 此时

$$\chi(x^ip^j)=\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j-\chi(\phi(\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j)-x^ip^j)$$

从而

$$\phi\circ\chi(x^ip^j)=\phi\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j-\phi\circ\chi(\phi(\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j)-x^ip^j)$$

归纳证明: $\phi\circ\chi(x^ip^j)=x^ip^j=1$ 对 $i+j=0$ 一定成立; 若对 $i+j<k$ 皆成立 $\phi\circ\chi(x^ip^j)=x^ip^j$, 那么对 $i+j=k$, 有

$$\phi\circ\chi(x^ip^j)=\phi\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j-(\phi(\mathfrak{x}^i\mathfrak{p}^j)-x^ip^j)=x^ip^j$$

这就完成了证明.

$\square$

这个定理启发我们, 只需要在相空间的函数环上定义一个新的结合乘法, 就可以表示出量子力学中物理量的代数结构. 我们将在本文中给带有一般 Poisson 结构的欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 一个与之相对应的结合乘法结构 $\star$ 的显式表达式; 事实上, 我们更关心的是这样的结构模去规范等价关系后的等价类.

目标: $\star$-乘法与形变量子化 为了严格的叙述一般理论, 我们将给出抽象 $\star$ -乘法, 形变量子化和规范等价的定义. 这些定义来自参考文献 [1].

下文中, 我们用 A 指代某个流形 M 的光滑函数环.

定义 0.4 ($\star$- 乘法)**.** 一个**$\star$- 乘法**意谓一个 $A[[\hbar]]$ 上的 $\mathbb{R}[[\hbar]]$-线性的结合乘法, 其在 $f, g \in A$ 上的取值由

$$f \star g = fg + \hbar B_1(f,g) + \hbar^2 B_2(f,g) + ...$$

给出, 其中 B_i 是由微分双线性型给出的映射 $A \otimes A \to A$.

定义 0.5 (形变量子化)**.** 一个泊松流形 (M, Π) 上的**形变量子化**指一个 $\star$-乘法, 其使得 $\Pi(f,g)$ 恰巧与 $\star$ 给出的交换子 $f \star g - g \star f$ 在商掉 $\hbar^2$ 意义下相一致.

附注 0.6. 这仅仅是在重复我们提到的如下要求: 结合代数 $(A[[\hbar]], \star)$ 的交换子在 $\hbar \to 0$ 时与经典泊松括号一致.

定义 0.7 (规范变换)**.** 一个 $A[[\hbar]]$ 上的规范变换指的是其上的一个由如下形式给出的 $(R)[[\hbar]]$-线性同构:

$$f \mapsto D(f) = f + \hbar D_1(f) + \hbar^2 D_2(f) + ...$$

其中 $D_i(-)$ 都是微分算子.

附注 0.8. 如下事实是显然的: 规范变换 D 将一个乘法 $\star$ 变为一个新的乘法, 从而给出一个结合代数之间的同构:

$$\star' : (f,g) \mapsto D(D^{-1}(f) \star D^{-1}(g))$$

0.2 一阶估计: 如何从抽象 $\star$-乘法结构给出 Poisson 结构

对于 $\star$-乘法的一阶项 $B_1(f,g)$, 我们可以做对称-反对称分解.$B^+(f,g) = \frac{1}{2}(B_1(f,g) + B_1(g,f))$ 称为 B_1 的对称部分,$B^-(f,g) = \frac{1}{2}(B_1(f,g) - B_1(g,f))$ 称为其反对称部分. 由 $\star$ 的结合性, 我们有对任意 $f, g, h \in A$

$$fB_1(g,h) - B_1(fg,h) + B_1(f,gh) - B_1(f,g)h = 0$$

我们考察在规范变换 $D(f)=f+\hbar D_1(f)+\hbar^2 D_2(f)+...$ 的作用下 B_1 的变化. 实际上, 考察 $\hbar$ 的次数可以发现只有一次项算子 D_1 影响 B_1 的表达. 由于 $D\circ D^{-1}=\mathrm{id}$, 我们知道 $D^{-1}=1-\hbar D_1+\mathcal{O}(\hbar^2)$, 所以有:

$$B_1'(f,g)=B_1(f,g)-fD_1(g)-D_1(f)g+D_1(fg)$$

从而规范变换只作用于 B^+, 而 B^- 为一个**规范不变量**, 即在规范作用下不改变. 规范变换 D 对 B^+ 的作用可以用如下 [1] 中的定理刻画:

定理 0.9. 对任意微分双线性型 $B_1(f,g)$, 存在微分算子 $D(f)$, 使得

$$B_1'(f,g)=B_1(f,g)-fD(g)-D(f)g+D(fg)$$

为反对称二次 (对 f 和 g 各一次) 微分双线性型.

证明*:* 我们用 I 标记一个由 k_l 个 i_l 组成的多重指标, 其中 $i_l(l\in 1,2,...,m)$ 取值各不相同. 我们要求 I 最低为三次指标, 即 $\sum k_l\geq 3$.

先证明高次部分可以在规范变换下消失: 由映射 $\Phi: D\mapsto ((f,g)\mapsto fD(g)+D(f)g-D(fg))$ 的逐点线性, 仅需证明每点处 (先取定某个坐标卡) $B_1(f,g)$ 高次指标的可能取值由 $\Phi(D_I=\prod\partial_{i_l}^{k_l})$ 线性生成.

换言之, 对于任意使得 p_l 或 q_l 不全为 0 的拆分 $p_l+q_l=k_l$, 对应到 I 拆分为 p_l 个 i_l 组成的多重指标 I_1 和 q_l 个 i_l 组成的多重指标 I_2, $D_{I_1}(f)D_{I_2}(g)$ 在 B^+ 中的系数 $C_{I_1;I_2}$ 商掉 $\mathrm{C}_I^{I_1}:=\prod\mathrm{C}_{k_l}^{p_l}$ 后都是一个与拆分无关的常数.

我们考虑任意点及其无穷小邻域 $x\subset U\in M$, 考虑在其附近等于 $X_I=\prod x_{i_l}^{k_l}$ 的函数 (仍记为 X_I), 有 (其中 k_l 是 I 中 i_l 的重数)

$$D_I(X_J)|_x=\delta_J^I\times\prod k_l!$$

从而

$$C_{I_1;I_2}=B_1(X_{I_1},X_{I_2})|_x\frac{\prod k_l!}{\mathrm{C}_I^{I_1}}$$

我们仅考虑拆分 (p_l,q_l) 和 (p_1',q_l') 在 $l\neq 1$ 时一致, 且 $p_1'=p_1+1$ 的情形即可. 此时 $x_1X_{I_1}=X_{I_1'}$, $x_1X_{I_2'}=X_{I_2}$. 向结合性条件中代入 $(f,g,h)=(X_{I_1},x_1,X_{I_2'})$, 等式在 x 处的取值给出

$$B_1(X_{I_1}, X_{I_2}) = B_1(X_{I_1'}, X_{I_2'}) = C_{I_1;I_2}\frac{\mathrm{C}_I^{I_1}}{\prod k_l!} = C_{I_1';I_2'}\frac{\mathrm{C}_I^{I_1'}}{\prod k_l!}$$

从而我们证明了 B_1 的高次项都可以被规范变换消灭. 对于二次部分, B_1 的对称部分形如 $\partial_i(f)\partial_j(g) + \partial_i(f)\partial_j(g) = \partial_i\partial_j(fg) - \partial_i\partial_j(f)g - f\partial_i\partial_j(g)$, 也可以被规范变换消灭. 从而存在 D, 使得诱导出的乘法 $\star$ 变为 $\star'$, 其展开表达式中的 B_1' 为反对称二次微分算子.

□

附注 0.10. 这意味着我们可以在每一个 $\star$-乘法的规范变换等价类中找到唯一一个典范的代表元, 它的一阶项的对称部分为 0. 同时, 这也意味着 B^- 是一个 Poisson 括号.

我们将要做的, 就是给出一个典范的 $\star$-乘法使得 $2B^-$ 与给定的 Poisson 括号 Π 一致. 在 Π 为常值时, 我们仿照 Moyal 积就可以得到正确的 $\star$-乘法, 然而对于一般的 Poisson 流形, 甚至欧氏空间上一般的 Poisson 括号, 仿照 Moyal 积所得到的乘法便不再结合. 我即将介绍的 [1] 中的 Kontsevich 公式将给出一个典范的构造解决此问题.

1 基本语言

在本节之中，我们将介绍解决本问题的一些重要的基本语言。

1.1 分次向量空间

我们先引入分次向量空间的概念. **分次向量空间**指一组向量空间 $\mathfrak{g}^i$ 的直和 $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^i$, $\mathfrak{g}^i$ 称为 i 次子空间. 我们需要先定义分次向量空间的直和, 张量积, 对称积和反对称积.

定义 1.1 (直和, 张量积)**.** 给定分次向量空间 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$, 其直和和张量积分别定义为:

$$(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}')^i = \mathfrak{g}^i \oplus \mathfrak{g}'^i$$

$$(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}')^i = \bigoplus_{p+q=i} \mathfrak{g}^p \otimes \mathfrak{g}'^q$$

给定分次向量空间 $\mathfrak{g}$, 我们定义其 n 次张量积为 n 个 $\mathfrak{g}$ 的张量积, 即

$$\mathfrak{g}^{\otimes n} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes ... \otimes \mathfrak{g}$$

给定对称群 Σ_n 在 $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ 上的作用, 我们用 $(\mathfrak{g}^{\otimes n})_{\Sigma_n}$ 代指 $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ 商掉此群作用得到的空间, 用 $(\mathfrak{g}^{\otimes n})^{\Sigma_n}$ 代指 $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ 的 Σ_n-稳定的子空间. 容易相信, 这两个空间是自然同构的. 在后文中, 如果不产生歧义, 我们将多次省略掉映射 $\pi_n : \mathfrak{g}^{\otimes n} \to (\mathfrak{g}^{\otimes n})_{\Sigma_n}$ 和 $\iota_n : (\mathfrak{g}^{\otimes n})^{\Sigma_n} \to \mathfrak{g}^{\otimes n}$. 我们将灵活的在商空间和子空间中转换, 以求得叙述上的方便. 我们将考察两个重要的置换群作用.

由张量积的显式公式, 仅需给出群作用在形如 $a_1^{k_1} \otimes a_2^{k_2} \otimes ... \otimes a_n^{k_n}$ 的元素上给出的像便可确定整个群作用. (其中, $a_i^{k_i}$ 表示一个 k_i 次齐次元素)

Σ_n 在分次线性空间 $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ 上的第一种作用由

$$\sigma(a_1^{k_1} \otimes a_2^{k_2} \otimes ... \otimes a_n^{k_n}) = \varepsilon(\sigma; k_1, k_2, ...k_n) a_{\sigma(1)}^{k_{\sigma(1)}} \otimes a_{\sigma(2)}^{k_{\sigma(2)}} \otimes ... \otimes a_{\sigma(n)}^{k_{\sigma(n)}}$$

给出, 其中 $\varepsilon(\sigma; k_1, k_2, ...k_n)$ 标记 σ 在 $k_1, k_2, ...k_n$ 中的奇数上置换的奇偶性, 称为 Koszul 指数. 这种作用可以由将对换相邻的指标看作交换相邻的 p 次元素和 q 次元素并乘 $(-1)^{pq}$ 的变换给出.

Σ_n 在分次线性空间 $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ 上的第二种作用由

$$\sigma(a_1^{k_1}\otimes a_2^{k_2}\otimes ...\otimes a_n^{k_n})=\mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma;k_1,k_2,...k_n)a_{\sigma(1)}^{k_{\sigma(1)}}\otimes a_{\sigma(2)}^{k_{\sigma(2)}}\otimes ...\otimes a_{\sigma(n)}^{k_{\sigma(n)}}$$

给出, 其中 $\mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma;k_1,k_2,...k_n)$ 又记作 $\chi(\sigma;k_1,k_2,...k_n)$, 称为反对称 Koszul 指数. 这种作用可以由将对换相邻的指标看作交换相邻的 p 次元素和 q 次元素并乘 $(-1)^{pq+1}$ 的变换给出.

定义 1.2 (对称积, 反对称积)**.** 这两种作用分别给出一个线性空间:

第一种作用所给出的空间 $(\mathfrak{g}^{\otimes n})^{\Sigma_n}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 n 次对称积 $\mathrm{Sym}^n(\mathfrak{g})$.

第二种作用所给出的空间 $(\mathfrak{g}^{\otimes n})^{\Sigma_n}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 n 次反对称积 $\bigwedge^n(\mathfrak{g})$.

交换相邻的 p 次元素和 q 次元素, 就需要乘 $(-1)^{pq}$, 这一规律被称为 Koszul's rule, 是分次向量空间里面最重要的精神之一. 对于次数 $\deg(f_i)$ 可能非 0 的映射 $f_i:\mathfrak{g}_i\to\mathfrak{h}_i(i=1,2)$, Koszul's rule 也会起作用:

$$(f_1\otimes f_2)(g_1\otimes g_2)=(-1)^{\deg(f_2)\deg(g_1)}f_1(g_1)\otimes f_2(g_2)$$

我们可以定义上移和下移函子 $\uparrow$: $(\uparrow\mathfrak{g})^i=\mathfrak{g}^{i-1}$ 和 $\downarrow$: $(\downarrow\mathfrak{g})^i=\mathfrak{g}^{i+1}$. 从 $\mathfrak{g}$ 到 $\uparrow\mathfrak{g}$ 有自然的次数 1 映射, 也记作 $\uparrow$. 类似地, 从 $\mathfrak{g}$ 到 $\downarrow\mathfrak{g}$ 有自然的次数 1 映射, 也记作 $\downarrow$.

定理 1.3 (引自 [3])**.** 我们有自然的次数 n 的自然同构:

$$\uparrow^{\otimes n}:\mathrm{Sym}^n(\downarrow\mathfrak{g})\to\bigwedge^n(\mathfrak{g})$$

$$a_1^{k_1-1}\otimes a_2^{k_2-1}\otimes ...\otimes a_n^{k_n-1}\mapsto(-1)^{k_{n_1}-1+k_{n-3}-1+\cdots}a_1^{k_1}\otimes a_2^{k_2}\otimes ...\otimes a_n^{k_n}$$

证明: 将此映射的定义域和到达域看作商空间, 仅需验证群作用交换即可.

由于置换群由相邻对换生成, 仅需验证对 $j=i+1$:

$$\uparrow^{\otimes n}((-1)^{(k_i-1)(k_j-1)}a_1^{k_1-1}\otimes a_2^{k_2-1}\otimes ...\otimes a_j^{k_j-1}\otimes a_i^{k_i-1}\otimes ...\otimes a_n^{k_n+1})$$

$$=(-1)^{(k_i)(k_j)+1}a_1^{k_1}\otimes a_2^{k_2}\otimes ...\otimes a_j^{k_j}\otimes a_i^{k_i}\otimes ...\otimes a_n^{k_n}(-1)^{k_{n-1}-1+k_{n-3}-1+\dots}$$

注意到

$$\uparrow^{\otimes n}(a_1^{k_1-1}\otimes a_2^{k_2-1}\otimes ...\otimes a_j^{k_j-1}\otimes a_i^{k_i-1}\otimes ...\otimes a_n^{k_n-1})$$

$$= a_1^{k_1} \otimes a_2^{k_2} \otimes ... \otimes a_j^{k_j} \otimes a_i^{k_i} \otimes ... \otimes a_n^{k_n} (-1)^{k_{n-1}-1+k_{n-3}-1+\cdots} (-1)^{(k_i+k_j)}$$

这就验证了两者的相等. $\square$

在下文中, 分次向量空间之间的映射默认为保次数 (次数 0) 的线性映射, 除非特别额外说明此映射为次数 i, 亦即定义域的 k 次子空间被映到到达域的 $k+i$ 次子空间之中. 特别的, 次数 0 就是指定义域的 k 次子空间被映到到达域同为 k 次的子空间之中.

1.2 微分分次李代数 (DGLA)

微分分次李代数 (Differential Graded Lie Algebra, 可简称为 DGLA) 是 Kontsevich 构造 $\star$-乘法的显式公式中最重要的概念之一. 我们可以用公理化的方式给出微分分次李代数的定义.

定义 1.4. 一个**微分分次李代数**意谓如下资料 $(\mathfrak{g}, d, [-,-])$:

1) 分次向量空间 $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^i$

2) 线性导子 $d : \mathfrak{g} \to\downarrow \mathfrak{g}$.

3) 双线性映射 $[-,-] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$

使得如下条件被满足:

1) $d \circ d = 0$, 且 d 相对 $[-,-]$ 满足分次 Leibniz 公式

$$d[a_1^{k_1}, a_2^{k_2}] = [da_1^{k_1+1}, a_2^{k_2}] + (-1)^{k_1}[a_1^{k_1}, da_2^{k_2+1}]$$

2) $[-,-]$ 反对称, 即 $[a_1^{k_1}, a_2^{k_2}] = -(-1)^{k_1k_2}[a_2^{k_2}, a_1^{k_1}]$.

3) $[-,-]$ 满足分次 Jacobi 恒等式, 即:

$$(-1)^{k_1k_3}[a_1^{k_1},[a_2^{k_2},a_3^{k_3}]]+(-1)^{k_3k_2}[a_3^{k_3},[a_1^{k_1},a_2^{k_2}]]+(-1)^{k_2k_1}[a_2^{k_2},[a_3^{k_3},a_1^{k_1}]] = 0$$

我们将定义光滑流形 X 上两个微分分次李代数, $T_{poly(X)}$ 和 $D_{poly(X)}$.

定义 1.5. (微分分次李代数 $T_{poly}(X)$)

$T_{poly}(X)$ 由以下资料给出:

n 次齐次子空间 $T^n_{poly}(X) = \Gamma(X, \bigwedge^{n+1} TX)$;

导子 $d = 0$;

双线性映射 Schouten-Nijenhuis 括号:

$$[\xi_0 \wedge \xi_2 \wedge ... \wedge \xi_k, \eta_0 \wedge \eta_2 \wedge ... \wedge \eta_l] :=$$

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}(-1)^{i+j+k}[\xi_i, \eta_j] \wedge \xi_0 \wedge ... \wedge \hat{\xi}_i \wedge ... \wedge \xi_k \wedge \eta_0 \wedge ... \wedge \hat{\eta}_j \wedge ... \wedge \eta_l$$

Schouten-Nijenhuis 括号还可以用乘法 $\bullet$ 定义. 记多重向量场 γ 中 ∂_i 为形式变元 p_i, 则可定义:

$$\gamma_1 \bullet \gamma_2 = \sum_{i=1}^{\dim(X)} \partial_{p_i}(\gamma_1)\partial_{x^i}(\gamma_2)$$

给出

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \gamma_1 \bullet \gamma_2 - (-1)^{\deg\gamma_1 \deg\gamma_2}\gamma_2 \bullet \gamma_1$$

为了定义微分分次李代数 $D_{poly}(X)$, 我们回忆 $\mathbb{R}$ 上结合代数 A 上的 Hochschild 上链复形.

Hochschild 上链复形上的一个 n-上链指一个线性映射 $A^{\otimes(n+1)} \to A$. Hochschild 上链复形带有一个非结合的乘法 $\circ$, 其在 k_1-上链 Φ_1 和 k_2-上链 Φ_2 上的取值由如下等式给出:

$$(\Phi_1 \circ \Phi_2)(a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{k_1+k_2}) :=$$

$$\sum_{i=0}^{k_1}(-1)^{ik_2}\Phi_1(a_0 \otimes ... \otimes \Phi_2(a_i \otimes .. \otimes a_i + k_2) \otimes ... \otimes a_{k_1+k_2})$$

我们可以定义括号:

$$[\Phi_1, \Phi_2] = \Phi_1 \circ \Phi_2 - (-1)^{k_1 k_2}\Phi_2 \circ \Phi_1$$

我们还可以定义导子 $d\Phi := [m, \Phi]$, 其中 $m : A \otimes A \to A$ 为 A 上代数结构所附带的结合乘法.

定义 1.6. (微分分次李代数 $D_{poly}(X)$)

$D_{poly}(X)$ 由以下资料给出:

$D_{poly}(X)$ 的 n 次齐次子空间 $D^n_{poly}(X)$ 为光滑函数环 $C^\infty(X)$ 上的 n-Hochschild 上链空间中, 由微分算子所生成的线性子空间;

$D_{poly}(X)$ 的导子和括号继承 Hochschild 上链复形中的导子和括号.

推论 1.7. $d \circ d = 0$

证明: 注意到 $d \circ d(\Phi^k) = [m, [m, \Phi^k]]$, 由刚刚证明的分次 Jacobi 恒等式:

$$[m, [m, \Phi^k]](-1)^k - (-1)^k [m, [m, \Phi^k]](-1)^1 + [\Phi, [m, m]] = 0$$

注意到 m 的结合性, $[m, m] = 0$, 从而 $[m, [m, \Phi^k]] = 0$, 即证. □

证明: $D_{poly}(X)$ 满足分次 Leibniz 恒等式.

存目

□

$T_{poly}(M)$ 和 $D_{poly}(M)$ 的概念十分关键, 因为 Kontsevich 给出 $\star$-乘法显式公式的最重要一步就是证明了 $T_{poly}(M)$ 和 $D_{poly}(M)$ 作为微分分次李代数, 其上的形式流形上有自然的 L^∞-代数结构, 并且它们之间有一个拟同构诱导它们的形变集 $\mathscr{MC}(\hbar\mathbb{R}[[\hbar]])$ 之间的同构. 在本章接下来的几节中, 这些基本的概念将一一被介绍.

1.3 余代数, 分次空间上的形式流形

我们本节的目标是引入 L^∞-代数和 L^∞-态射的概念. 在正式引入它们之前, 我们需要介绍余代数和形式流形的语言. **余代数**是代数的对偶概念, 其定义仿照代数的定义即可得到. 我们考虑的是一个域 $\mathbb{K}$ 上的余代数 (实际情况一般 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$)

定义 1.8. 一个 $\mathbb{K}$ 上的无余单位余代数意谓一个线性空间 A, 其上配有余乘法 $\Delta : A \to A \otimes A$, 满足余结合律

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$$

如果还存在映射 $\mathbf{1}: A \to \mathbb{K}$, 满足余单位条件:

$$(\mathrm{id} \otimes \mathbf{1}) \circ \Delta = \mathrm{id} = (\mathbf{1} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$$

则称 $(A, \Delta, \mathbf{1})$ 为一个带余单位的余代数. 这也是一般意义上的余代数. 如果余乘法 $\Delta : A \to A \otimes A$ 穿过对称积 $\mathrm{Sym}^2(g)$, 那么称此余乘法为余交换的.

我们称 $C(V)$ 是 V 生成的余自由余代数, 如果对任意 (无余单位) 余代数 A, (无余单位) 余代数同态 $f : A \to C(V)$ 和线性映射 $f : A \to V$ 之间存在一一对应, 亦即, 每一个 (无余单位) 余代数同态 $f : A \to C(V)$ 都由线性映射 $f : A \to V$ 唯一给出; 如果此双射仅对余交换的 (无余单位) 余代数 A 成立, 并且要求 $C(V)$ 交换, 那么称之为余自由的余交换 (无余单位) 余代数. 类似的, 我们也可以讨论含余单位的余自由的 (余交换) 余代数.

分次线性空间 V 上的余自由无余单位余代数有如下的显式构造, 即给线性空间 $\bigoplus_{i>0} V^{\otimes n}$ 赋予如下余乘法

$$\Delta(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) := \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_i + 1 \otimes ... \otimes v_n)$$

这里括号内外的 $\otimes$ 的含义是不同的: 括号内代表余代数构造内自带的张量积, 而括号外标记的是余乘法到达域的张量积结构. 为方便起见, 我们用 $\boxtimes$ 指代后者.

余交换情形下, 余乘法则定义为上述余乘法在 $A = \bigoplus_{i>0} \mathrm{Sym}^n(V)$ 上的限制, 自然以商映射映至 $A \otimes A$.

如果我们考虑带余单位的情况, 那么我们仅需为线性空间直和上一个系数域, 此时 $C'(V) = C(V) \oplus \mathbb{K} = \bigoplus_{i \geq 0} V^{\otimes n}$(交换时, $\bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Sym}^n(V)$) , 而余单位即是其到系数域 $\mathbb{K}$ 的自然投影. 余乘法在 $\mathbb{K}$ 上为对角映射, 在 $C(V)$ 上取值相较无余单位情形还需要加上一项 $\mathbf{1} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \boxtimes \mathbf{1}$.

定义 1.9. 一个形式流形定义为某个同构于由 V 生成的余自由余交换无余单位余代数的无余单位余代数, 换句话说, 作为余代数:

$$M \cong C(V) = (\bigoplus_{i>0} \mathrm{Sym}^n(V), \Delta)$$

形式流形这一称呼是有意义的: 它可以被看作某一点的无穷小邻域, 其上的函数环 $C(M)$ 可以看作到 $\mathbb{K}$(此处取为 $\mathbb{R}$) 的线性映射. 此时, $C(M)$ 上乘法定

义为 $f \times g(a) = (f \boxtimes g)(\Delta(a))$. 我们认为, 不带余单位的余代数对应固定在原点处为 0 的函数环, 而带余单位的余代数对应一个无锚点的形式无穷小邻域.

形式流形 $C(\mathfrak{g}[1])$ 与 $C(\mathfrak{g}'[1])$ 之间的同态叫做预 L^∞-态射. 对于形式流形之间的线性映射 $\mathscr{F}$(不一定为预 L^∞-态射), 我们用记号 $\mathscr{F}^m : C(\mathfrak{g}[1]) \to \mathrm{Sym}^m(\mathfrak{g}'[1])$ 表示此映射复合上到 m 阶张量子空间的投影, $\mathscr{F}_n : \mathrm{Sym}^n(\mathfrak{g}[1]) \to C(\mathfrak{g}'[1])$ 表示此映射在 n 阶张量子空间上的限制, $\mathscr{F}_n^m : \mathrm{Sym}^n(\mathfrak{g}[1]) \to \mathrm{Sym}^m(\mathfrak{g}'[1])$ 表示此映射在 n 阶张量子空间上的限制复合上到 m 阶张量子空间的投影. 我们知道这样的映射 $\mathscr{F}$ 总是由线性映射

$$\mathscr{F}^1 : C(\mathfrak{g}[1]) \to \mathfrak{g}'[1]$$

所给出, 这等价于我们给出一列映射 $\{\mathrm{Sym}^n(\mathfrak{g}[1]) \to g'[1]\}_{n\geq 1}$, 或者是 $\{\bigwedge^n \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'[1-n]\}$, 此二者之间的等价是由于定理 1.3 所提到的次数 n 的自然同构:

$$\uparrow^{\otimes n}: \mathrm{Sym}^n(\downarrow \mathfrak{g}) \to \bigwedge^n(\mathfrak{g})$$

预 L^∞-态射无外乎是流形之间的映射在形式流形上的某种类比, 我们在此处定义它是为了定义下文所提到的 L^∞-代数之间的态射.

定义 1.10. 称余代数间的线性映射 $Q : A \to B$ 为一个 (无余单位) 余代数上的余导子, 若如下等式成立:

$$(\mathrm{id} \boxtimes Q + Q \boxtimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \Delta \circ Q$$

注: 含余单位情形下, 我们还需要条件 $\mathbf{1} \circ Q = 0$, 这是导子在基域作用为 0 的对偶版本.

定义 1.11. 一个 L^∞-代数意谓一个分次向量空间 $\mathfrak{g}$ 和其下移 1 格 ($\mathfrak{g}[1] =\downarrow \mathfrak{g}$) 后所生成的形式流形 $C(\mathfrak{g}[1])$ 上的一个 $+1$ 次余导子 Q, 满足 $Q \circ Q = 0$. L^∞-代数之间的 L^∞-态射意谓与 Q 交换的预 L^∞-态射 $C(\mathfrak{g}[1]) \to C(\mathfrak{g}'[1])$.

我们试图说明这样的事情: 余导子 Q 由线性映射 $C(\mathfrak{g}[1]) \to \mathfrak{g}[2]$ 给出.

定理 1.12 (引用自 [3]). 设 V 是分次向量空间, 则存在由限制在一次项上给出的双射:

$$\varphi : \{C(V)\text{上的} + 1\text{次余导子}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C(V), V[1])$$

证明: 我们给出如下的显式公式来计算此映射的逆. 记 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C(V), V[1]) = \bigoplus_{i\geq 1} f^i$, 其中 $f^i : V^{\otimes i} \to V[1]$ 穿过 $\mathrm{Sym}^i(V)$. 则

$$Q_f(v_1 \otimes ... \otimes v_i) := \sum_{i=0}^{n} \frac{n-m+1}{n!} \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \epsilon(\sigma) f^m(v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(m)}) \otimes v_{\sigma(m+1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}$$

验证 Q_f 的导子性: 由对称性, 我们仅仅考虑

$$f^m(v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(m)}) \otimes v_{\sigma(m+1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(l)} \boxtimes v_{\sigma(l+1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}$$

在 $\Delta \circ Q_f$ 作用下的系数, 即 $\frac{m!(n-m+1)!}{n!} \times \frac{(n-l)!(l-m+1)!}{(n-m+1)!}$, 而在 $(\mathrm{id} \boxtimes Q_f + Q_f \boxtimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ 作用下的系数为 $\frac{l!(n-l)!}{n!} \times \frac{m!(l-m+1)!}{l!}$, 从而两者相等.

此外, 因为 Q_f 在 i 阶元素上项的非一次部分可由在低阶元素上的映射由

$$(\mathrm{id} \boxtimes Q + Q \boxtimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \Delta \circ Q$$

唯一给出, 而一次部分由 f^i 给出, 进而可归纳证明 Q_f 是唯一的满足 $\varphi(Q) = f$ 的余导子, 这就给出了所需的一一对应. □

我们用 Q^1 在前三次项的限制 $Q^1_1 = d$, $Q^1_2 = [-,-]$, $Q^1_2 = [-,-,-]$ 来计算 Q 在低阶元素上的像. 注意这里我们再一次使用自然同构

$$\uparrow^{\otimes n}: \mathrm{Sym}^n(\downarrow \mathfrak{g}) \to \bigwedge^n(\mathfrak{g})$$

从而这里的 Q^1_i 可以看作映射 $Q_i : \bigwedge^n \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}[2-n]$. 在这种看法下, 我们有公式

$$Q^1(\sum(v_1 \otimes ... \otimes v_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \downarrow^n \circ Q_i \circ \uparrow^{\otimes i} (v_1 \otimes ... \otimes v_i)$$

来计算 Q_i 和 Q^1 的关系.

我们可以由此计算出如下事实 (仍然记 v_i 为 $\mathfrak{g}^{d_i}$ 中的元素):

$$Q(v_1) = dv$$

$$Q(v_1 \otimes v_2) = dv_1 \otimes v_2 + (-1)^{d_1-1} v_1 \otimes dv_2 + \uparrow^2 (-1)^{d_1} [\downarrow v_1, \downarrow v_2]$$

方便起见, 我们省略箭头, 将 $\downarrow^2 [\uparrow v_1, \uparrow v_2]$ 简记为 $[v_1, v_2]$, 则:

$$
\begin{aligned}
Q(v_1\otimes v_2\otimes v_3) =& dv_1\otimes v_2\otimes v_3+(-1)^{d_1-1}v_1\otimes dv_2\otimes v_3+(-1)^{d_1+d_2}v_1\otimes v_2\otimes dv_3\\
&+\frac{1}{3}[v_1,v_2]\otimes v_3(-1)^{d_1}+\frac{1}{3}[v_2,v_3]\otimes v_1(-1)^{(d_3+d_2)(d_1-1)+d_2}\\
&+\frac{1}{3}[v_3,v_1]\otimes v_2^{(d_2+d_1)(d_3-1)+d_3}+[v_1,v_2,v_3](-1)^{d_2}
\end{aligned}
$$

在 Kontsevich 的原始论文之中, k 元括号 $[-,-,...-]_k$ 一般用于表示 Q^1_k 的 $k!$ 倍, 称之为 Taylor 系数. 我们仅在涉及到微分分次李代数和 L^∞ 代数的对应之中尊重此记号.

我们通过计算 $Q\circ Q$, 可以获得如下观察:

定理 1.13 (引用自 [1]). 存在自然的一一对应:

$$\{Q_i=0\text{对于}i>2\text{都成立的}L^\infty\text{-代数}\}\xrightarrow{\sim}\{\text{微分分次李代数}\}$$

由 $d=Q^1_1$, $[-,-]=2Q^1_2$ 给出.

证明: 此证明之中, 我们用 Q^2 表示 Q 的平方而非其二次部分. 仅需验证 $Q\circ Q=0$ 和微分分次李代数的条件等价.

$Q\circ Q=0$ 在前三阶张量上的作用给出 $d\circ d=0$,Leibniz 条件和 Jacobi 恒等式, 从而 ($\Rightarrow$) 方向被验证. 要证明 ($\Leftarrow$) 方向, 需要证明 $Q\circ Q=0$ 在更高阶张量上成立. 注意更高阶 (i 阶) 元素 A 上 $Q\circ Q$ 的结果仅有高阶 (i 阶, $i-1$ 阶, $i-2$ 阶) 张量项, 则仅需验证 $\Delta^k\circ Q^2=0$, 其中 k 取 $i,i-1,i-2$.

若 $Q\circ Q=0$ 对于前三阶张量满足, 则由于

$$
\begin{aligned}
\Delta\circ Q^2 &= (\mathrm{id}\boxtimes Q+Q\boxtimes\mathrm{id})\circ\Delta\circ Q\\
&=(\mathrm{id}\boxtimes Q+Q\boxtimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\boxtimes Q+Q\boxtimes\mathrm{id})\circ\Delta\\
&=(\mathrm{id}\boxtimes Q^2+Q^2\boxtimes\mathrm{id})\circ\Delta
\end{aligned}
$$

并且类似地, 我们有

$$\Delta\circ(\sum_{i=1}^n\mathrm{ev}_i(Q^2))=(\sum_{i=1}^n\mathrm{ev}_i(Q^2))\circ\Delta$$

其中 $\mathrm{ev}_i(Q^2)$ 指 $\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{id}\boxtimes...\boxtimes Q^2\boxtimes...\boxtimes\mathrm{id}$, Q^2 出现于第 i 个位置.

通过简单的归纳法, 我们得到: $\Delta^k\circ Q^2=(\sum_{i=0}^k\mathrm{ev}_i(Q^2))\circ\Delta^k$, 注意到 $\Delta^k(A)$ 仅为低阶张量的张量积, 即验证了我们的结论.

□

附注 1.14. 我们遗忘掉分次向量空间的结构, 只保留形式流形的语言, 此时 Q 无法典范的给出 Q_i. 附加上余导子 Q 的形式流形被称为 Q-流形, 在这个意义下我们仍然可以抛开具体的张量结构, 讨论 L^∞-态射和同构的事情. 此时 L^∞-态射可以看作是 Q-流形之间的 Q-等价映射.

1.4 拟同构 (quasi-isomorphism)

本章的完成需要特别感谢 Alberto Canonaco 教授发送的文献 "L^∞-代数与拟同构". (参考文献 [2])

我们容易知道, 一个 L^∞-代数 $\mathfrak{g}$ 配上导子 Q_1^1 自动成为一个链复形 $(\mathfrak{g}, Q_1^1)$. 我们将引入 "拟同构" 的概念.

定义 1.15. 我们称一个 L^∞-态射为**拟同构**, 如果它在链复形 $(\mathfrak{g}, Q_1^1)$ 之上的限制诱导上同调群的同构.

我们本节的目标是证明如下 [1] 中的定理:

定理 1.16. 给定拟同构 $\mathscr{F}: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, 则存在拟同构 $\mathscr{G}: \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_1$ 在 $(\mathfrak{g}_i, Q_1^{1;\mathfrak{g}_i})$ 给出上同调群映射的逆.

我们先引入极小 L^∞-代数和线性可缩 L^∞-代数的概念.

定义 1.17. 称 L^∞-代数 $(C(\mathfrak{g}[1]), Q)$ 极小, 若 Q_1^1 在其上消失.
称 L^∞-代数 $(C(\mathfrak{g}[1]), Q)$ 线性可缩, 若 $Q_{\geq 2}$ 消失, 并且 $(\mathfrak{g}, Q_1^1)$ 上同调群平凡.

附注 1.18. 极小性被可逆 L^∞-态射保持, 从而我们可以讨论极小的 Q-流形; 然而线性可缩却并不如此.

我们需要如下的分类定理来完成对此映射的构造 (亦引用自 [1]):

定理 1.19. 任意 L^∞-代数都 L^∞-同构于某个极小 L^∞-代数和线性可缩 L^∞-代数的直和.

为了使用直和的泛性质, 我们需要先说明如下 [3] 中提到的事实:

定理 1.20. 两个含余导子的自由余交换代数在余交换余连通 (即所有元素在有限次 Δ 作用下都归零) 无余单位分次余代数范畴之中的直和是作为线性空间的直和配上两个导子的直和.

这一定理的简要证明如下:

证明: 我们假设作为线性空间有 $(\mathfrak{g},Q)=(\mathfrak{g}_1,Q^{(1)})\oplus(\mathfrak{g}_2,Q^{(2)})$, 假设有两个态射 $F_{(k)}:C\to C(\mathfrak{g}_k[1])$ 从余连通余交换分次余代数 (C,D,Δ) 映到 $C(\mathfrak{g}_k[1])$, 显然 $F:C\to C\mathfrak{g}[1]$ 由 $F^1:=F^1_{(1)}\oplus F^1_{(2)}$ 在分次无余单位余代数范畴中是唯一使泛性质图表交换的映射. 我们仅需要证明 $QF=FD$ 即可, 而这由:

$$\begin{aligned}(Q\circ F)^1=Q^1F&=Q^1\sum_{n>0}\pi_n(F^1_{(1)}\oplus F^1_{(2)})^{\otimes n}\Delta^(n-1)\\&=Q^1_{(1)}\sum_{n>0}\pi_n(F^1_{(1)})^{\otimes n}\Delta^{(n-1)}\oplus Q^1_{(2)}\sum_{n>0}\pi_n(F^1_{(2)})^{\otimes n}\Delta^{(n-1)}\\&=Q^1_{(1)}F_{(1)}\oplus Q^1_{(2)}F_{(2)}=F^1D=(F\circ D)^1\end{aligned}$$

给出, 这就完成了证明. □

现在我们开始对主定理进行证明, 这一证明摘抄自论文 [2]:

证明: 我们将分多步证明此结论.

Step1 $(\mathfrak{g},Q_1)$ 作为复形, 其 i 次部分可以不自然的同构为 $\mathrm{im}(Q^1_{1;i-1})\oplus H^i(\mathfrak{g},Q^1_1)\oplus\mathrm{im}(Q^1_{1;i})$. 我们选取好的同构让 $\mathfrak{g}^i$ 就是 $\mathrm{im}(Q^1_{1;i-1})\oplus H^i(\mathfrak{g},Q^1_1)\oplus\mathrm{im}(Q^1_{1;i})$, 则此时需要有:

$$(\mathfrak{g},Q^1_1)=(\bigoplus H^i(\mathfrak{g},Q^1_1),0)\oplus(\bigoplus\mathrm{im}(Q^1_{1;i-1})\oplus\mathrm{im}(Q^1_{1;i}),Q_1)$$

我们试图扩展这个同构和两个余导子, 使之成为 L^∞-态射 $\mathscr{F}$:

$$(\mathfrak{g},Q)\to(\bigoplus H^i(\mathfrak{g},Q^1_1),Q_{\min})\oplus(\bigoplus\mathrm{im}(Q^1_{1;i-1})\oplus\mathrm{im}(Q^1_{1;i}),Q_{\mathrm{l.c.}})$$

这只需要映射:

$$G:(\mathfrak{g},Q)\to(\bigoplus H^i(\mathfrak{g},Q_1),Q_{\min}):=(C(W),R)$$

和映射

$$F:(\mathfrak{g},Q)\to(\bigoplus\mathrm{im}(Q_{1;i-1})\oplus\mathrm{im}(Q_{1;i}),Q_{\mathrm{l.c.}}):=(C(U),P)$$

我们使用归纳法构造 G^1_n 和 F^1_n, 从而给出 F^1 和 G^1.

Step2 F^1 需要且仅需要满足如下等式来成为 L^∞-态射:

$$\mathcal{E}_m : P_1^1 F_m^1 = \sum_{i=1}^{m} F_i^1 Q_m^i = \sum_{i=1}^{m-1} F_i^1 Q_m^i + F_m^1 Q_m^m$$

我们假设已经构造了全部 $F_{<n}^1$, 并且它们满足等式 $\mathcal{E}_{<n}$. 我们需要定义 $F_n^1 : \mathrm{Sym}^n(\mathfrak{g}[1](:= V)) \to U$. 我们做如下拆分: $\mathrm{Sym}^m(V) = Z_n \oplus V_n$, 其中 Z_n 是导子 Q_n^n 的核, V_n 同构于其像. 对于 Z_n 中的元素, 如果 F^1 给出的 F 尊重余导子, 则必有

$$P_1^1 \sum_{i=1}^{n-1} F_i^1 Q_n^1 = \sum_{i=1}^{n-1} (PF)_i^1 Q_n^1 = \sum_{i=1}^{n-1} (FQ)_i^1 Q_n^1 = (FQQ)_n^1 - (\sum_{i=1}^{n-1} (FQ)_n^1 Q_n^n)$$

从而 $\mathrm{im} \sum_{i<n} F_i^1 Q_n^i|_{Z_n} \subset \ker(P_1^1) = \mathrm{im}(P_1^1)$. 于是我们可以选择出合适的 $F_n^1|_{Z_n}$ 使得 Z_n 之上如下等式成立:

$$P_1^1 F_m^1 = \sum_{i=1}^{m} F_i^1 Q_m^i = \sum_{i=1}^{m-1} F_i^1 Q_m^i + F_m^1 Q_m^m (= 0)$$

对于 V_n, 我们直接考虑 $P_1^1 (FQ)_n^1|_{V_n} = P_1^1 F_n^1 Q_n^n|_{V_n} + \sum_{i=1}^{n-1} F_i^1 Q_n^1|_{V_n}$, 此时:

$$P_1^1 F_n^1 Q_n^n = (PF)_n^1 Q_n^n = (FQQ)_n^1 (= 0) - \sum_{i=1}^{n-1} (FQ)_n^1 Q_n^n$$

从而 $(FQ)_n^1|_{V_n}$ 在 P_1^1 的核之中, 进而在其像之中, 于是可以构造出合适的 $F_n^1|_{V_n}$. 于是我们归纳构造了全部 F_n^1, 使得 $\mathcal{E}_n$ 成立.

Step3 G^1 的构造须和 R^1 的构造同步进行. 我们需要让它们满足等式:

$$\mathcal{D}_m : (RR)_m^1 = \sum_{i=2}^{m-1} R_m^1 R_m^i = 0$$

$$\mathcal{F}_m : G_m^1 Q_m^m - R_m^1 G_m^m = \sum_{i=2}^{m-1} R_i^1 G_m^i - \sum_{i=1}^{m-1} G_i^1 Q_m^i$$

回忆拆分: $\mathrm{Sym}^m(V) = Z_n \oplus V_n$, 我们定义 $H_i = \mathrm{Sym}^i(W)$, 则 $Z_n = H_n \oplus \mathrm{im}(Q_n^n)$.

我们假设我们给出了 $G_{<n}^1, G_{i<n}^1|_{H_i = \mathrm{Sym}^i(W)} = 0$ 和 $R_{<n}^1$ 的构造满足 $\mathcal{D}_{<n}$ 和 $\mathcal{F}_{<n}$, 然后试图给出 R_n^1 的构造和 G_n^1 满足 $\mathcal{D}_n$ 和 $\mathcal{F}_n$, 且 $G_n^1|_{H_n = \mathrm{Sym}^n(W)} = 0$.

首先我们先证明 $\mathcal{D}_n$ 成立. 注意到 G_n^i 在 $1 < i < n$ 时消失, 且 $Q_n^n|_{H_n} = 0$, 有:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n-1} R_i^1 R_n^i G_n^n|_{H_n} &= \sum_{i=2}^{n} (RR)_i^1 G_n^i|_{H_n} = (RRG)_n^1|_{H_n} \\
&= \sum_{i=2}^{n} R_i^1 (RG)_n^i|_{H_n} = \sum_{i=2}^{n} R_i^1 (GQ)_n^i|_{H_n} = (RGQ)_n^1|_{H_n} \\
&= \sum_{i=2}^{n} (RG)_i^1 Q_n^i|_{H_n} = \sum_{i=2}^{n-1} (RG)_i^1 Q_n^i|_{H_n} = \sum_{i=2}^{n-1} (GQ)_i^1 Q_n^i|_{H_n} \\
&= \sum_{i=2}^{n} (GQ)_i^1 Q_n^i|_{H_n} = (GQQ)_n^1|_{H_n}
\end{aligned}$$

由于 $G_n^n|_{H_n} = id_{H_n}$, 我们证明了 $\mathcal{D}_n$.

对于 $\mathcal{F}_n$, 在 B_n 上, 无论 R_n^1, G_n^1 如何选取, 都有:

$$\begin{aligned}
(GQ - RG)_n^1 Q_n^n &= \sum_{i=1}^{n} (GQ - RG)_i^1 Q_n^i = (GQQ - RGQ)_n^1 = -(RGQ)_n^1 \\
&= -\sum_{i=2}^{n} R_i^1 (GQ)_n^i = -\sum_{i=2}^{n} R_i^1 (RG)_n^i \\
&= (RRG)_n^1 = \sum_{i=1}^{n} (RR)_i^1 G_n^i = 0
\end{aligned}$$

利用 $G_n^n|H_n$ 是恒等映射, 定义:

$$R_n^1 := \sum_{i=1}^{n-1} G_i^1 Q_n^i - \sum_{i=2}^{n-1} R_i^1 G_n^i$$

则在 H_n 上也成立 $\mathcal{F}_n$.

类似, 因为 $Q_n^n|_{V_n}$ 是同构 $B_n \to V_n$, 直接构造:

$$G^1|_{B_n} := ((RG)_n^i - \sum_{i=1}^{n-1} G_i^1 Q_n^i)(Q_n^n|_{V_n})^{-1}$$

则在 V_n 上也成立 $\mathcal{F}_n$.

我们已经给出了满足 $\mathcal{D}_n$ 和 $\mathcal{F}_n$ 的 G^1 和 R^1 的构造.

Step4 由直和的泛性质, 我们将此复形之间的同构扩张为了一个 L^∞-态射. 我们需要证明这是一个同构. 我们将证明更一般的结论.

定理 1.21. 若 L^∞-态射 $\mathscr{F}: V \to W$ 使 $\mathscr{F}_1^1$ 为同构, 则其容许一个 L^∞-态射意义下的逆.

证明: 若 $\mathscr{F}$ 为同构, 假设其逆为 $\mathscr{G}$, 那么首先:

$$(\mathscr{F}\mathscr{G})_1^1 = \mathscr{F}_1^1\mathscr{G}_1^1 = (\mathrm{id}_{C(V)})_1^1 = \mathrm{id}_V$$

从而 $\mathscr{G}_1^1 = (\mathscr{F}_1^1)^{-1}$. 对于 $n > 1$:

$$(\mathscr{G}\mathscr{F})_n^1 = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{G}_i^1 \mathscr{F}_n^i$$

因为 F_1^1 为同构, $F_n^n = (F_1^1)^{\otimes n}$ 也为同构, 所以我们可以直接得到公式:

$$G_n^1 = -(\sum_{i<n} G_i^1 F_n^i)(F_n^n)^{-1}$$

.

□

附注 1.22. 这是某种反函数定理在形式流形上的类比.

□

这个定理容许我们构造如下映射: 某个 L^∞-代数 U 投影到极小 L^∞-代数上的拟同构 p_u, 而这个极小 L^∞-代数嵌入到此 L^∞-代数的拟同构 i_u.

此时, 如果 $F: C(V) \to C(W)$ 是拟同构, 则 $C(W)$ 和 $C(V)$ 分解出的极小 L^∞-代数必然同构 (暂且视为相同), 则 F 的拟逆由 $i_v \circ p_w$ 自然给出, 这就完成了我们在节初所需要的构造.

1.5 形变函子

我们在这一节试图研究一个微分分次李代数 $\mathfrak{g}$ 的形变函子 $\mathfrak{Def}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$.

定义 1.23. 对一个微分分次李代数 $\mathfrak{g}$, 我们去解 Maurer-Cartan 方程, 并且考虑其解的规范等价类:

$$\mathscr{MC}(\mathfrak{g}) := \{\gamma \in \mathfrak{g}^1 | d\gamma + \frac{1}{2}[\gamma, \gamma] = 0\}/\Gamma^0$$

其中 Γ^0 由如下的无穷小规范变换的指数生成:

$$\alpha \in \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{g}^0 \mapsto (\dot{\gamma} = d\alpha + [\alpha, \gamma])$$

我们可以类比 γ 为某种联络, 此时 Maurer-Cartan 方程对应着某种曲率 0 的条件. 这或许是几何上的一个类比, 也有助于我们理解什么叫做 "规范变换".

定义 1.24. 我们定义 $\mathfrak{g}$ 的形变函子 $\mathfrak{Def}_{\mathfrak{g}}$ 是从有限维幂零交换结合不含单位元的代数范畴映射至集合范畴的如下函子:

$$\mathfrak{Def}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) = \mathscr{MC}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m})$$

$$\mathfrak{Def}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{n}) = (\gamma \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}' \mapsto \gamma \otimes_{\mathfrak{m}'} \mathfrak{n}')$$

这里 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{K}$ 为 $\mathfrak{m}$ 对应的含单位元的有限维 Artin 代数. 我们注意到因为 γ 系数取值在 $\mathfrak{m}$ 之中, 自然 $\gamma \otimes_{\mathfrak{m}'} \mathfrak{n}'$ 系数取值于 $\mathfrak{n}$. 直觉上, 一个不含单位的环可以看作指定了某个基点的环.

这个形变函子的定义域可以推广到幂零有限维代数的投射极限之上 (这是因为张量积是一个左伴随). 作为例子, 在形变量子化之中, 我们一般考虑如下代数:

$$\mathfrak{m} := \hbar\mathbb{R}[[\hbar]] = \varprojlim(\hbar\mathbb{R}[\hbar]/\hbar^k\mathbb{R}[\hbar])$$

这样扩充形变函子的源范畴使得直接讨论此系数环成为可能.

我们还需要讨论一般 L^∞-代数 (更抽象地, 一个带基点的 Q-形式流形)M 的形变函子. 我们记 M 对应余代数 $C(M)$:

定义 1.25. 我们定义 M 上 Maurer-Cartan 方程带系数环 $\mathfrak{m}$ 的解为如下余代数同态的集合:

$$\{\varphi : \mathfrak{m}^* \to C(M) | Q \circ \varphi = 0\}$$

我们称两个解 p_0 和 p_1 规范等价, 若存在 $\mathfrak{m}'$ 上多项式的 M 上 -1 次的向量场 (也就是 $C(M)$ 之上 -1 次的导子)$\xi(t)$ 连接 p_0 和 p_1, 即存在多项式函数 $p(t)$(可以看作是系数以多项式变化的余代数同态) 使得 $p(0) = p_0; p(1) = p_1$, 且满足方程:

$$\frac{dp(t)}{dt} = [Q, \xi(t)]|_{p(t)}$$

这是一个容易验证的等价关系. 此时, 形变函子在 $\mathfrak{m}$ 上的解定义为所有 Maurer-Cartan 方程带系数环 $\mathfrak{m}$ 的解的规范等价类.

几何地说, 形变函子在 $\mathfrak{m}$ 上的解就是在向量场 Q 的零点的 "形式的" 概形中的 $\mathfrak{m}$-点的规范等价类.

我们还需要解释李括号 $[Q,\xi(t)]$, 其被定义为 $Q\circ\xi(t)+\xi(t)\circ Q$. 我们知道

$$\begin{aligned}\Delta(Q\circ\xi(t)+\xi(t)\circ Q) =&(Q\otimes \mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes Q)(\xi(t)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\xi(t))\Delta\\ &+(\xi(t)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\xi(t))(Q\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes Q)\Delta\\ =&((Q\circ\xi(t)+\xi(t)\circ Q)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes(Q\circ\xi(t)+\xi(t)\circ Q))\end{aligned}$$

为一个导子, 而其在 $p(t)$ 上的取值为其和 $p(t)$ 的复合, 而方程的含义是 t-参数化的余代数同态族 $p(t)$ 的导数 (这也是一个导子!) 应与其一致.

命题 1.26. (L^∞-代数) 的形变函子有如下的重要性质:

1) L^∞-态射给出两个 L^∞-代数形变函子之间的自然变换.

2) 线性可缩的 L^∞-李代数的形变函子自然是一个点.

3) $\mathfrak{Def}_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}'}=\mathfrak{Def}_{\mathfrak{g}}\times\mathfrak{Def}_{\mathfrak{g}'}$ 为自然同构.

这些命题都是容易验证的. 从而, 每个 L^∞-代数的形变函子只和其极小部分有关. 一个直接推论是, **形变函子将拟同构映为自然同构**.

我们剩下的任务是验证在微分分次李代数上定义的形变函子就是它作为 L^∞-代数的形变函子.

Step1 在微分分次李代数之上, 证明:

$$d\gamma+\frac{1}{2}[\gamma,\gamma]=0\Leftrightarrow Q|_\gamma=0$$

展开 $Q|_\gamma=0$, 给定 $\gamma\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{m}$ 就给出了

$$\gamma\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}^*,\mathfrak{g})\tilde{\to}Hom_{\mathbb{R}-\mathrm{coAlg}}(\mathfrak{m}^*,C(\mathfrak{g}))$$

$$\gamma\mapsto\sum_{k\geq 0}\gamma\circ\Delta^k$$

从而右式等价于

$$\forall a\in\mathfrak{m}^*, d\gamma(a)+\frac{1}{2}[-,-](\gamma\otimes\gamma(\Delta a))=0$$

即在 $\mathfrak{m}$ 中取系数的 Maurer-Cartan 方程. 对于一般的 L^∞-代数, 给出的结果是所谓广义 Maurer-Cartan 方程:

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}[]_k(\gamma^{\otimes k})=0$$

Step2 微分分次李代数之中的规范等价显然是一个 L^∞-代数的规范等价, 仅需注意到 $\gamma\mapsto d\alpha+[\alpha,\gamma]$ 是余导子 $[Q,\Xi_{\alpha(t)}]$ 在 γ 上的取值, 其中 $\Xi_{\alpha(t)}$: $\gamma_1\otimes...\otimes\gamma_n\mapsto(n+1)\times\alpha\otimes\gamma$ 是一个次数 -1 的余导子即可. 相反方向, 一个次数 -1 的余导子 ξ 必然可以被其作用于形式单位 1 的像还原为一个 $\Xi_{\alpha(t)}$ 形式的余导子, 这是因为 ξ^1 满足 $\Delta\xi(v)=(\xi\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\boxtimes\xi)(1\boxtimes v+v\boxtimes 1)=(1\boxtimes\xi(v)+\xi(v)\boxtimes 1)+(\xi(1)\boxtimes v-v\boxtimes\xi(1))$, 从而 $\xi(v)$ 为 $2\xi(1)\otimes v$. 我们再假设已经证明 $\xi(v_1\otimes...\otimes v_k)=(k+1)\xi(1)\otimes v_1\otimes...\otimes v_k$, 再使用导子性可以证明高一阶的情况, 从而 $\xi=\Xi_{\xi(1)}$. 这就给出了 -1 阶导子和 $\alpha\in\mathfrak{g}^0$ 的等价性.

这样我们就搭建起了形变函子的基本框架. 我们再次强调如下结论:

定理 1.27. L^∞-映射诱导出形变函子之间的自然变换, 且拟同构诱导出的自然变换为自然同构.

我们在这一节还将研究微分分次李代数 T_{poly} 的形变函子和 D_{poly} 的形变函子 (在 $\hbar\mathbb{R}[[\hbar]]$ 系数下) 的取值. 我们固定光滑流形 X.

T_{poly} 下, Maurer-Cartan 方程变为 $[\gamma,\gamma]=0$, 这意味着对任意 $X,Y,Z\in C^\infty(X)$, 记 $X_i=\frac{\partial X}{\partial x^i}$, $\gamma=\gamma^{ij}\partial_i\wedge\partial_j$, 那么:

$$\gamma(X,Y)=\gamma^{ij}(X_iY_j-Y_iX_j)$$

$$\gamma(Z,\gamma(X,Y))=\gamma^{ij}Z_i(\gamma^{kl}_j(X_kY_l-X_lY_k)+\gamma^{kl}(X_{jk}Y_l-X_{jl}Y_k+X_kY_{jl}-X_{jk}Y_l))$$

$$\gamma(Z,\gamma(X,Y))+\gamma(X,\gamma(Y,Z))+\gamma(Y,\gamma(Z,X))=[\gamma,\gamma]^{ijk}(X^iY^jZ^k-X^iY^kZ^j)$$

即 $[\gamma,\gamma]=0$ 与 Jacobi 恒等式等价, 从而 $[\gamma,\gamma]=0$ 的解恰是 X 上所有可能的 Poisson 结构 (的 $\hbar$ 倍.)

T_{poly} 下的无穷小规范变换由向量场的 ad 作用给出, 这意味着规范变换作用于 γ 是微分同胚群在其上的共轭作用.

D_{poly} 下, Maurer-Cartan 方程变为 $[m+\gamma, m+\gamma]=0$, 这标志 $m+M$ 是一个由微分算子给出的结合乘法, 且模掉 $\hbar$ 之后为 m, 即 $C^\infty(X)[[\hbar]]$ 自带的乘法. 换句话说, $m+M$ 是一个 $C^\infty(X)[[\hbar]]$ 上的 $\star$-乘法.

D_{poly} 下的无穷小规范变换由 $[\alpha, m+\gamma]$ 给出, 这意味着规范变换在 $\star$-乘法上的作用正是由规范变换 $f \mapsto f+\hbar D_1(f)+...$ 的共轭作用给出.

我们现在要做的就是给出一个 T_{poly} 到 D_{poly} 的显式拟同构, 并且依此给出所需的 Poisson 结构到 $\star$-乘法之间的典范构造.

1.6 构型空间和角度映射

我们将在本节之中讲述构型空间 (Configuration space) 的概念. 考虑 $n, m \in \mathbb{Z}, 2n+m \geq 2$, 我们定义 $Conf_{n,m}$ 为如下 $2n+m$ 维流形:

$$Conf_{n,m} = \{(p_1, ..., p_n; q_1, ..., q_m) | p_i \in \mathbb{H} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}, q_j \in \mathbb{R}, p_i, q_j \text{各不相同}\}$$

我们在 $Conf_{n,m}$ 之上定义一个实数轴上的保定向仿射同构群 $G^{(1)}$ 的作用. $g: m \mapsto am+b \in G^{(1)}$ 在每个分量上独自作用, 将 z 映射至 $az+b$, 此处 a 为正实数, 而 b 是一个实数. $2n+m \geq 2$ 保证了这是一个自由的作用, 并且 $C_{n,m} = Conf_{n,m}/G^{(1)}$ 为 $2n+m-2$ 维的流形. 我们将点 p 在商流形中的对应记为 $[p]$.

$C_{n,m}$ 不必连通. 我们用 $C^+_{n,m}$ 表示标记 $q_1 < q_2 < ... < q_m$ 的那个分支. 这也是一个光滑流形.

相似地, 对 $n \geq 2$, 我们定义 $Conf_n$ 与 C_n 为如下空间:

$$Conf_n := \{(p_1, ..., p_n) | p_i \in \mathbb{C}, p_i \neq p_j \text{若} i \neq j\}$$

$$C_n := Conf_n/G^{(2)}, G^{(2)} = \{z \mapsto az+b | a \in \mathbb{R}_{>0}, b \in \mathbb{C}\}$$

$Conf_n$ 有自然的 $2n$ 维流形结构, 而 C_n 有自然的 $2n-3$ 维流形结构.

我们接下来要做的是定义构型空间的 “紧化” : $\bar{C}_{n,m}$ 和 $\bar{C}_n$.

我们可以将 C_n 自然地嵌入如下的紧空间:

$$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{n(n-1)} \times [0, +\infty]^{n^2(n-1)^2}$$

前 $n(n-1)$ 个分量标记相对角度:

$$(\mathrm{Arg}(p_i - p_j))_{i \neq j}$$

后 $n^2(n-1)^2$ 个分量标记距离的比例:

$$(|p_i - p_j|/|p_k - p_l|)_{i\neq j, k\neq l}$$

于是, 我们可以定义 $\bar{C}_n$ 为此嵌入像的闭包.

此嵌入映射是一个到 $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{n(n-1)} \times (0, +\infty)^{n^2(n-1)^2}$ 的闭嵌入, 这是因为其像是受一些余弦定理, 长度和角度关系的恒等式约束出的闭集.

而对于 $C_{n,m}(C^+_{n,m})$, 我们先用如下映射将其嵌入 (这自然也是闭嵌入)C_{2n+m}

$$(p_1, ..., p_n; q_1, ..., q_m) \mapsto (p_1, ..., p_n, \bar{p_1}, ..., \bar{p_n}, q_1, ..., q_m)$$

然后在 $\bar{C}_{2n+m}$ 之中取闭包以得到其紧化 $\bar{C}_{n,m}(\bar{C}^+_{n,m})$.

我们要讨论的是这些紧化空间 "表层" 的结构. 鉴于 C_n(或 $C_{n,m}$) 嵌入

$$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{n(n-1)} \times (0, +\infty)^{n^2(n-1)^2}$$

是闭嵌入, 其紧化的边界点必有分量取 0 或 $+\infty$. 这意味着发生了 "碰撞".

我们有一个自然的观点去看待这个事情: 将这些表层上的点看作一列从构型空间内部逼近其边界的点. 对于一个边界上的点, 我们将比例不为 0 和 $+\infty$ 的距离大小视为等价的, 如果两个点的距离相对于另外两个点的比例是 0, 我们可以看作此二点先于另外两个点 "碰撞".

从而, 给定一个 C_n 中的极限点, 我们总可以画出一个对应的 "树" T, 它以一个形式的根点开始 (如果存在), 然后分裂成通过最 "大" 的距离分开的几个点, 然后每个点内部再分出更小的点, 直到每个点都不可分为止.

这个树反向模拟了一列点 "逼近" 指定边界点时的相互碰撞, 特别地, 一个内点对应于一个仅从根点分开一次的树, 对应所有点被看作只碰撞最后一次.

同样的过程对于 $\bar{C}_{n,m}$ 仍然适用, 只是我们需要将 "共轭点" 纳入考量.

考虑空间 $\bar{C}_{2,0}$ 的边界作为 $\bar{C}_{n,m}$ 情形下的示例. 对任意点 $[(p_1, p_2)]$ 我们找到代表元使得 $p_1 = i$, 想象 p_2 在剩余部分随意走动, 因此其内部 $C_{2,0} \simeq \mathbb{H} - i$. 而其整体则由如下各情形分别对应的点组成:

0) (内部) $p_1, p_2, \bar{p_1}, \bar{p_2}$ 同时分开;

1) p_2 以某个方向撞向 $p_1 = i$:

$\{p_1, p_2\}$ 先与 $\{\bar{p_1}, \bar{p_2}\}$ 分离, 然后再分别 (实际上是同时) 分开;

2) p_2 从某个与实数相交的角度远离 p_1:

p_1, $\bar{p_1}$ 和 $\{p_2, \bar{p_2}\}$ 三者先分开, 然后 $\{p_2, \bar{p_2}\}$ 再分开;

3) p_2 撞向某个实数轴上的点 (即 p_2 和 $\bar{p_2}$ 相撞):

p_2, $\bar{p_2}$ 和 $\{p_1, \bar{p_1}\}$ 三者先分开, 然后 $\{p_1, \bar{p_1}\}$ 再分开;

4) p_2 从某个与实数轴平行的方向飞离 p_2:

$\{p_2, \bar{p_2}\}$ 和 $\{p_1, \bar{p_1}\}$ 先分开, 然后再各自分开.

由此观察不难得到如下 [1] 之中的结论:

命题 1.28. 每一个紧化构型空间的边界都是一些构型空间乘积的并.

这是因为, 要唯一确定一个边界点, 我们只需要考虑每次分裂的时候, 分裂出的点的相互位置 (碰撞时的相对方向). 不同的方向对应构型空间的点, 此种分裂 (碰撞) 方式下的边界点组成一整个构型空间. 如果待分裂的点 (碰撞后的点) 在实数轴上, 对应的构型空间为 $C_{n,m}$, 反之为 C_n. 多次碰撞的所有情形自然对应于每次碰撞的所有情况组成的构型空间的乘积.

为了叙述方便, 我们引入 $\{p_1, ..., p_n\} \sqcup \{\bar{q_1}, ..., \bar{q_m}\}$ 的有限子集 $A \sqcup B$ 的 (紧化) 构型空间 $C_{A,B}$ 和 $p_1, ..., p_n$ 有限子集族 A 的构型空间 C_A, 配上由 $A' \hookrightarrow A, B' \hookrightarrow B$ 诱导的自然嵌入 $C_A \to C_{A'}$, $C_{A,B} \to C_{A',B'}$.

例如在上个例子之中, 我们可以看到:

$$\begin{aligned}\partial\bar{C}_{2,0} = & C_{\{\{p_1,p_2\}\},\varnothing} \times C_{\{\{p_1\},\{p_2\}\}} \sqcup C_{\{\{p_1\}\},\{p_2,\bar{p_2}\}\}} \times C_{\{p_2\},\varnothing} \\ & \sqcup C_{\{\{p_2\}\},\{p_1,\bar{p_1}\}\}} \times C_{\{p_1\},\varnothing} \sqcup C_{\{\{p_1\},\{p_2\}\},\varnothing} \times C_{\{\{p_1\}\},\varnothing} \times C_{\{\{p_2\}\},\varnothing}\end{aligned}$$

而对于一般的构型空间, 一个模糊但不失严格的公式是:

$$\bar{C}_{n,m} = \bigsqcup_{\text{树}T} \prod_{v\text{是树上非叶的节点}} C_v$$

其中, C_v 由以下情况唯一决定:

若 v 是实数轴上的点, 则 $C_v = C_{\{u|u\text{在实数轴外且分裂自}v\},\{u|u\text{在实数轴且分裂自}v\}}$;

若 v 远离实数轴, 则 $C_v = C_{\{u|u\text{直接分裂自}v\}}$.

对一般的紧化构型空间 $\bar{C}_{A,B}$, 我们可以据此计算其边界上所有由此给出的余一维构型子空间结构. 由于每 (相比内部点对应直接分裂的平凡情形的树) 出现一次分裂点, 余维数就会加一, 所以余一维构型子空间对应仅碰撞一次的情形. 根据此碰撞发生的位置, 我们将 $\partial \bar{C}_{A,B}$ 中的余一维构型子空间分为两类:

S1) A 的非空非单元子集 S 中点在远离实数轴处碰撞至点 $\bullet$, 对应

$$\partial_S \bar{C}_{A,B} \simeq C_S \times C_{(A-S)\sqcup\{\bullet\},B}$$

S2) A 的子集 S 与 B 的子集 S' 在实数轴处某点碰撞至点 $\bullet$, 对应

$$\partial_{S,S'} \bar{C}_{A,B} \simeq C_{S,S'} \times C_{(A-S),(B-S')\sqcup\{\bullet\}}$$

注: 此情形下, 须有 $2\#S + \#S' \geq 2$ 且至少保证有一点不属于 $S \sqcup S'$.

最后, 我们需要借助刚才所举的 $\bar{C}_{2,0}$ 的例子, 定义角度映射的概念.

定义 1.29. 一个角度映射意谓光滑映射 $\phi : \bar{C}_{2,0} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, 满足其在 $C_{\{\{p_1,p_2\}\},\varnothing} \times C_{\{\{p_1\},\{p_2\}\}}$ 上限制给出同构, 且拉回 $\mathbb{R}$ 上的定向为逆时针定向; 在 $C_{\{\{p_2\}\},\{p_1,\bar{p_1}\}} \times C_{\{p_1\},\varnothing}$ 上限制为常值映射.

我们将取定一个角度映射 $\phi(x,y)$. 一个重要的结论是: 如果 x 为实数, 微分形式 $d\phi(x,y)$ 消失, 这是因为角度映射在 $C_{\{\{p_1\}\},\{p_2,\bar{p_2}\}} \times C_{\{p_2\}}$ 上限制为常值映射.

我们将使用构型空间和角度映射来完成 Kontsevich$\star$-乘法公式的构造与证明.

2 Kontsevich 的 $\star$-乘法公式

我们将在这一部分介绍 Kontsevich 的 $\star$-乘法公式. Kontsevich 的原始论文只给出了 $X = \mathbb{R}^d$ 的情形. 后文中, 我们省略 T_{poly} 和 D_{poly} 后面对流形的标记, 则默认标记流形 $\mathbb{R}^d$. 我们先做如下的准备:

定义 2.1. 我们定义**可容许图**的概念. 一个可容许图 Γ 应包含以下资料:

1) 点集 $V_\Gamma = 1, ..., n \sqcup \bar{1}, ..., \bar{m}$, 其中 n, m 都是非负整数, 并且 $2n+m-2 \geq 0$; $1, ..., n$ 中点称为第一型点, 而 $\bar{1}, ..., \bar{m}$ 中的点称为第二型点;

2) 边集 E_Γ; 每条边 $(v_1, v_2) \in E_\Gamma$ 始于第一型点, 即 $v_1 \in 1, ..., n$, 边 e 的出发点记为 e^+, 到达点记为 e^-;

3) 对第一型点 k, 由 k 出发的边集 $\mathrm{Star}(k)$ 有编号 $(e_k^1, ..., e_k^{\#\mathrm{Star}(k)})$.

我们定义映射

$$p_v : i \mapsto p_i; \bar{j} \mapsto q_j$$

将 V_Γ 中元素映至构型空间的坐标分量. 对于可容许图 Γ, 我们可以定义权 W_Γ:

$$W_\Gamma := \frac{1}{(2\pi)^{2n+m-2}} \int_{\bar{C}^+_{n,m}} \bigwedge_{e \in E_\Gamma} d\phi_e$$

此处 ϕ_e 定义为由遗忘映射 (遗忘 p_{e^+}, p^{e^-} 之外的坐标分量)$\bar{C}_{n,m} \to \bar{C}_{2,0}$ 或 $\bar{C}_{n,m} \to \bar{C}_{1,1}$ 拉回已经固定的角度映射 ϕ 给出的映射. 这两种遗忘映射对应到达第一型点和第二型点的映射. 我们固定这样的外积顺序: 边 e_i^j 固定 i 从 1 开始对 j 从小到大外积, 完毕后增加 i, 到 $i = n$ 的边全部外积完为止.

我们始终保持如此的顺序: 在构型空间 $C_{2,0}$ 或 $C_{1,1}$ 的坐标中, 出发点对应的点在前, 到达点对应的点在后.

我们还需要定义一个由可容许图 Γ 给出的映射:

$$\mathscr{U}_\Gamma :\downarrow T_{poly}^{\otimes n}(\mathbb{R}^d) \to D_{poly}(R^d)[1+l-n]$$

其中, 图 Γ 有 n 个第一型点, m 个第二型点和 $2n+m-2+l$ 条边. 我们挑选 n 个多重向量场 $\gamma_1, ..., \gamma_n$, m 个 $\mathbb{R}^d$ 上的函数 $f_1, ..., f_m$. 我们定义

$$\Phi := (\mathscr{U}_\Gamma(\gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_n))(f_1 \otimes ... \otimes f_m)$$

仅在 γ_i 次数皆为 $\#(Star)(i) - 1 = k_i$ 时可能取非零值, 此时定义:

$$\Phi = \sum_{I: E_\Gamma \to \{1, ..., d\}} \Phi_I$$

我们用如下的方式定义 Φ_I:

对第一型点 i, 我们将多重向量场 γ_i 视为 $TX^{\otimes k+1}$ 的全局截面, 定义 (此处我们将多向量场里的外积视为在反对称作用下对置换群的平均)

$$\psi_i = \langle \gamma_i, dx^{I(e_i^1)} \otimes ... \otimes dx^{I(e_i^{k_i+1})} \rangle$$

对第二型点 $\bar{j}$, 我们定义 $\psi_{\bar{j}} = f_j$.

此时, 我们定义 Φ 为:

$$\Phi_I = \prod_{v \in V_\Gamma} \Big(\prod_{e=(-,v)} \partial_{I(e)} \Big) \psi_v$$

如果我们记 $G_{n,m}$ 为全体有 n 个一型点, m 个二型点和 $2n+m-2$ 条边的可容许图, 我们就可以定义泰勒系数:

$$\mathscr{U}_n := \sum_{m \geq 0} \sum_{\Gamma \in G_{n,m}} W_\Gamma \times \mathscr{U}_\Gamma$$

此时, 对换 γ_i 和 γ_{i+1} 相当于对换了 W_Γ 外积中的微分形式, 从而给出了此映射的对称性.

我们要证明的主定理即是:

定理 2.2. $\mathscr{U}_n^1$ 给出的 L^∞-映射是一个 T_{poly} 到 D_{poly} 的 L^∞-拟同构.

这一 L^∞ 作用于 Poisson 括号上, 即可得到对应的 $\star$-乘法. 在本章的剩余部分, 我们将完成这一定理的证明.

2.1 第一步: $\mathscr{U}_1^1$ 为拟同构的证明概要

本节部分直接照抄自原始论文 [1].

我们考虑 $n=1$ 的情形. 此时可容许图 Γ 仅由一个第一型点构成, 我们意识到此时 $W_\Gamma = \pm(m!)^{-1}$,

$$\mathscr{U}_1(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_n)(f_1 \otimes ... \otimes f_m) = \pm\delta_{mn}(m!)^{-1} \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod \xi_{\sigma(i)}(f_i)$$

我们引用原始论文的一个简单的论证概要证明这是一个拟同构.

首先, 因为 $\mathscr{U}_1^1$ 的像在 Hochschild 复形中的微分作用下消失, 其必然是一个链映射.

我们用次数的限制给 T_{poly} 和 D_{poly} 各自一个滤过结构, 并且 $\mathscr{U}_1$ 恰好与这个滤过结构相容. 记 $A^{(k)}$ 为 A 的第 k 次部分, 此时我们考虑 $Gr(\mathscr{U}_1): T_{poly}^{(k)} \to D_{poly}^{(k)}$ 是自同构.

我们可以将 D_{poly}^n 中元素看作其对应的主象征, 进而等同于 $C'(T)^{\boxtimes n}$ 带余单位形式流形 (自由余代数) 的 n 次张量积中的元素, 且在后者中的余乘法就是前者元素源空间之中 "乘法" 的对偶. 这一映射是保持次数的. 此时, Hochschild 复形里的微分正对应着余乘法交错出的映射:

$$C'(T)^{\boxtimes n} \to C'(T)^{\boxtimes n+1}$$

$$a_1 \boxtimes a_2 ... \boxtimes a_n \mapsto 1 \boxtimes a_1 \boxtimes a_2 ... \boxtimes a_n + \sum (-1)^i a_1 \boxtimes ... \hat{a}_i \boxtimes \Delta(a_i) ... \boxtimes a_n + a_1 \boxtimes a_2 ... \boxtimes a_n \boxtimes 1$$

我们仅仅需要给出从 $\wedge^n T$ 装配上 0-微分构成的复形在如上的自然映射下确实给出了到 $C'(T)^{\boxtimes n} = \bigoplus_{k=k_1+...+k_m} \boxtimes (T^{\otimes k_i})^{\Sigma_i}$ 的拟同构.

我们先证明这一映射给出了到 $\prod_{k=k_1+...+k_m} \boxtimes (T^{\otimes k_i})^{\Sigma_i}$ 的拟同构. 注意到上同调群秩数的有限性, 上述拟同构成立等价于此拟同构成立. 我们通过把后者等同为 $\mathrm{Hom}(A(T)^{\otimes (n+1)}, k)$, 从 T 生成的多项式环的 n 次张量积到基域 k 的代数同态, 并且注意到, 若将 k 自然的视为 $A(T) = A$ 模 (数乘结构即成多项式在原点的取值), 则如下长正合列自由消解 k:

$$... \to A \otimes A \to A \to k$$

其中 $A^{\otimes n} \to A^{\otimes n-1}$ 取为如上的 Hochschild 复形中微分的对偶.

引用计算 $\mathrm{Ext}_A^n(k,k)$ 正是 $\wedge^n T$(这是 de Rham 上同调的一种类似形式), 给出了这一拟同构. 这一拟同构给出上同调群中固定次数部分的同构, 进而给出两个复形之间的拟同构.

2.2 主定理的主要证明思路

由于我们已经证明了 $\mathscr{U}_1$ 给出拟同构, 我们仅需证明 $\mathscr{U}$ 给出的预 L^∞-映射是一个 L^∞-映射即可. 我们要证明的是余导子 Q 和映射的交换性, 仅需 $(Q\mathscr{U})^1 = (\mathscr{U}Q)^1$ 即可, 这意味着, 对任意 n:

$$Q_2^1 \circ \mathscr{U}_n^2 + Q_1^1 \circ \mathscr{U}_n^1 = \mathscr{U}_{n-1}^1 \circ Q_n^{n-1} + \mathscr{U}_n^1 \circ Q_n^n$$

必须成立.

我们仅需验证这一等式作用于 $\downarrow^{\otimes n} \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n$ 后在 $f_1 \otimes ... \otimes f_m$ 上的取值依然相等, 粗略的计算如下 (暂时忽视掉正负号):

$$
\begin{aligned}
f_1 \mathscr{U}_n(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)(f_2 \otimes ... \otimes f_m) \pm f_m \mathscr{U}_n(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)(f_1 \otimes ... \otimes f_{m-1}) \\
+ \sum_{i=1}^{m-1} \pm \mathscr{U}_n(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)(f_1 \otimes ... \otimes f_i f_{i+1} \otimes ... \otimes f_m) \\
+ \sum_{i \leq j} \pm (\mathscr{U}_{n-1}([\gamma_i, \gamma_j] \wedge \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n))(f_1 \otimes ... \otimes f_m)
\end{aligned}
$$

$$
+1/2 \sum_{k+l=n, k,l \geq 1} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \pm [\mathscr{U}_k(\gamma_{\sigma_1} \wedge ... \wedge \gamma_{\sigma_k}), \mathscr{U}_l(\gamma_{\sigma_{k+1}} \wedge ... \wedge \gamma_{\sigma_{k+l}})](f_1 \otimes ... \otimes f_m) = 0
$$

我们将前面的微分算子 d 作用出的部分理解为和光滑函数环上自带的结合乘法的 Hochschild 括号, 依照前文提到的 $\mathscr{U}$ 给出结合乘法的高阶项的精神, 我们认为这一结合乘法即是 $\mathscr{U}_0$ 的取值. 于是, 我们仅需验证如下等式 (E):

$$
\sum_{i \neq j} \pm (\mathscr{U}_{n-1}(\gamma_i \bullet \gamma_j \wedge \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n))(f_1 \otimes ... \otimes f_m)
$$

$$
+ \sum_{k+l=n, k,l \geq 0} \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \pm \mathscr{U}_k(\gamma_{\sigma_1} \wedge ... \wedge \gamma_{\sigma_k}) \circ \mathscr{U}_l(\gamma_{\sigma_{k+1}} \wedge ... \wedge \gamma_{\sigma_n})(f_1 \otimes ... \otimes f_m) = 0
$$

即可.

我们对等式的左边按图展开, 并且将外积理解为稳定子空间的元素而拆解为张量积的和, 对每项做如此处理:

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{U}_\Gamma(\gamma_i \bullet \gamma_j \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_n)(f_1 \otimes ... \otimes f_m) \\
=&(-1)^{\deg(\gamma_i)} \sum_{\Gamma'} \mathscr{U}'_\Gamma(\gamma_i \otimes \gamma_j \otimes ... \otimes \gamma_n)(f_1 \otimes ... \otimes f_m)
\end{aligned}
$$

其中 Γ' 取遍所有不同的缩合对应 γ_i 和 γ_j 所对应的第一型点 v_1 和 v_2 及其中间的一条边 e_0 从 v_1 射向 v_2 之后变为图 Γ 的可容许图, 其拥有的边数为 $2n-2+m+1$, 点数为 n.

这个等式成立的原因是每一个这样的 Γ' 对应着对打入合并后的点 v_0 的边集和从合并后的点打出的边集分别做不同的拆分 (此处我们要求出边拆分仍和

点所对应的多向量场次数相容). 从而

$$\sum_{\Gamma'} \mathscr{U}'_{\Gamma}(\gamma_i \otimes \gamma_j \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_n)(f_1 \otimes ... \otimes f_m)$$

$$= \sum_{\text{出, 入边的拆分}} \sum_{I} (\prod_{V_\Gamma - \{v_0\}} (\prod_{e=(-,v)} \partial_{I(e)})\psi_v) \times (\prod_{e=(-,v_1)} \partial_{I(e)})\psi_{v_1} \times (\prod_{e=(-,v_2)} \partial_{I(e)})\psi_{v_2}$$

$$= \sum_{I|_{E_\Gamma}} \prod_{\text{非合并点的点}v} (\prod_{e=(-,v)} \partial_{I(e)})\psi_v \times (\prod_{e=(-,v_0)} \partial_{I(e)})(\sum_{\text{出边的拆分}} \psi_{v_1} \sum_{i=I(e_0)=1}^{d} \partial_i \psi_{v_2})$$

最后的乘积项 $\sum_{\text{出边的拆分}} \psi_{v_1} \sum_{i=I(e_0)=1}^{d} \partial_i \psi_{v_2}$ 给出的是

$$\sum_{\text{出边的拆分}} \psi_{v_1} \sum_{i=I(e_0)=1}^{d} \partial_i \psi_{v_2} = \sum_{\text{出边的拆分}p} \mathrm{sgn}(p) \sum_{j=I(e_0)=1}^{d} \gamma_i(dx^j \otimes dx^{I(p_1)})\partial_j \gamma_j(dx^{I(p_2)})$$

其中, p_i 表示拆分 $(e_1^{v_0}, ..., e_{\#\mathrm{Star}(v_0)}^{v_0})$ 后得到的 v_0 的出边在编号顺序下形成的有序对, 而 $dx^{I(p_i)}$ 则表示拆分后在 p_1 中的边对应的编号 i 对应的 1-形式 dx^i 按照编号顺序做张量积得到的形式, $\mathrm{sgn}(p)$ 则代表将 p_1 和 p_2 中编号依次陈列对应的置换的符号. 这一求和即是正确的合并后的点所对应的 ψ 的 $(-1)^{\deg(\gamma_i)-1}$ 倍.

这是因为对对任意 k-向量场 γ, $\gamma(dx^i \otimes \omega) = (-1)^{\deg(\omega)} \frac{\partial \gamma}{\partial \psi_i}(\omega)$.

对于

$$\mathscr{U}_{\Gamma_1}(\gamma_{\sigma_1} \otimes ... \otimes \gamma_{\sigma_k}) \circ \mathscr{U}_{\Gamma_2}(\gamma_{\sigma_{k+1}} \otimes ... \otimes \gamma_{\sigma_n})(f_1 \otimes ... \otimes f_m)$$

我们作类似的处理: 取遍所有 (同构意义下) 缩合一个同构于 Γ_2 的有第二型点的子图后和 Γ_1 一致的可容许图 Γ, 在选定合并点 v_0 在 Γ_1 之中的位置之后, 这对应对 Γ_1 之中合并后点的所有入边做拆分到每一个 Γ_2 之中的点. 我们有

$$\mathscr{U}_{\Gamma_1}(\gamma_{\sigma_1} \otimes ... \otimes \gamma_{\sigma_k}) \circ \mathscr{U}_{\Gamma_2}(\gamma_{\sigma_{k+1}} \otimes ... \otimes \gamma_{\sigma_n})(f_1 \otimes ... \otimes f_m)$$

$$= \sum_{i \le m-l} (-1)^{i(s-1)} \mathscr{U}_{\Gamma_1}(\gamma_{\sigma_1} \otimes ... \otimes \gamma_{\sigma_k})(f_1 \otimes ... \otimes \mathscr{U}_{\Gamma_2}(\gamma_{\sigma_{k+1}} \otimes ... \otimes \gamma_{\sigma_n})(f_{i+1} \otimes ... \otimes f_{i+s}) \otimes ... \otimes f_m)$$

而对于每个 i, 我们总有

$$\mathscr{U}_{\Gamma_1}(\gamma_{\sigma_1} \otimes ... \otimes \gamma_{\sigma_l})(f_1 \otimes ... \otimes \mathscr{U}_{\Gamma_2}(\gamma_{\sigma_{k+1}} \otimes ... \otimes \gamma_{\sigma_n})(f_{i+1} \otimes ... \otimes f_{i+l}) \otimes ... \otimes f_m)$$

$$= \sum_{I} \prod_{V_\Gamma - V_{\Gamma_2}} (\prod_{(-,v)} \partial_{I(-,v)})\psi_v \times (\prod (-, v_0) \partial_{I(-,v_0)}) \times \sum_{J} \prod_{V_{\Gamma_2}})(\prod_{(-,v') \in E_{\Gamma_2}} \partial_{I(-,v')})\psi_v$$

$$= \sum_{I,J} \prod_{V_\Gamma - V_{\Gamma_2}} (\prod_{(-,v)} \partial_{I(-,v)})\psi_v \times \sum (\sum_{J} \prod_{V_{\Gamma_2}})(\prod_{(-,v') \in E_\Gamma} \partial_{I(-,v')})\psi_v$$

从而是所有以 Γ_2 为子图, 合并后变为 Γ_1 的 $2n+m-1$ 边图所对应的 $\mathscr{U}_\Gamma(\gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_n)(f_1 \otimes ... \otimes f_m)$ 的线性组合.

以上分析足以让我们将要证明的等式 (E) 化为 $\sum c_\Gamma \times \mathscr{U}_\Gamma$ 的形式. 我们仅需证明每一个 c_Γ 的实际取值都为 0 即可. 我们试图证明这样的事实:

$$c_\Gamma = w_\Gamma \int_{\partial \bar{C}^+_{n-1,m}} \bigwedge_{E_\Gamma} d\phi_e = w_\Gamma \int_{\bar{C}^+_{n-1,m}} d \bigwedge_{E_\Gamma} d\phi_e = 0$$

即需要如下事实成立.

$$c_\Gamma = w_\Gamma \sum_S \int_{\partial_S \bar{C}^+_{n-1,m}} \bigwedge_{E_\Gamma} d\phi_e + w_\Gamma \sum_{S,S'} \int_{\partial_{S,S'} \bar{C}^+_{n-1,m}} \bigwedge_{E_\Gamma} d\phi_e$$

上述等式的右侧可以理解为四个部分相加:

1) 第一类边界中对应两个点 i,j 碰撞的部分, 我们令其对应由 $\mathscr{U}_{n-1}(\gamma_i \bullet \gamma_j \wedge \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n))(f_1 \otimes ... \otimes f_m)$ 给出的那些项, 亦即由碰撞后的图给出的那些像 (碰撞后的图的第一个第一型点被强制对应到合并后的点).

2) 第一类边界中对应多点碰撞的部分.

此时 $\partial_S \bar{C}^+_{n-1,m}$ 有自然的乘积流形结构 ("碰撞部分" 的相空间 C_{n-1} 和 "碰撞后" 的相空间的乘积), 并且 $\bigwedge_{E_\Gamma} d\phi_e$ 可以被写成 "碰撞部分" 的边对应的形式和 "碰撞后" 保留的边对应形式的外积.

$\int_{\partial_S \bar{C}^+_{n-1,m}} \bigwedge_{E_\Gamma} d\phi_e$ 是一个 C_{n-1} 之上的 $2n-1$ 个对应碰撞部分的闭 1-形式 (这一形式可以写成有理函数的) 的外积的积分与一个常数的乘积.

我们试图证明 C_{n-1} 之上的 $2n-1$ 个此种对应到边的角度映射的微分的闭 1-形式 $\phi_{e_i}(i \leq 2n-1)$ 的外积的积分必然为 0.

我们先固定 C_{n-1} 为代数簇 $Conf_{n-1}$ 里面 e_1 起始点对应到 0, 终点落在单位圆上的那个子流形, 再分解其为 $\mathbb{S}^1$ 和固定第一条边两端分别对应到 0 和 1 的子簇 M 的乘积. $\bigwedge_{E_\Gamma} d\phi_e = d\phi_{e_1} \wedge \bigwedge_{i\neq 1} d(\phi_{e_i} - \phi e_1)$ 使得这一微分形式被分解成了 $\mathbb{S}^1$ 和 M 上两个最高维形式的乘积.

在有正维数的复代数簇 M 上的一个 Zariski 非空开集 U 上, 对 U 上的函数 Z_i, 如下积分

$$\int_U \bigwedge_i d\mathrm{Arg}(Z_i) = \int_U \bigwedge_i \frac{1}{2i} d(\mathrm{Log}(Z_i) - \mathrm{Log}(\bar{Z}_i))$$

注意到后者中全纯形式和反全纯形式次数不一样的部分不影响积分取值,因此此式等于

$$\int_M \bigwedge_i \frac{1}{2} d(\mathrm{Log}(Z_i) + \mathrm{Log}(\bar{Z}_i)) = \int_M \bigwedge_i d(\mathrm{Log}|Z_i|)$$

$$= \int_M d(\mathrm{Log}|Z_1| \wedge \bigwedge_{i\neq 1} d(\mathrm{Log}|Z_i|)) = 0$$

从而注意到两个角度映射的外微分之差在 M 上是两个分别从上半平面通过全纯映射拉回的有理函数的辐角之差的外微分, 进而自然是有理函数, 于是我们就证明了这一部分积分取 0 值.

3) 第二类边界之中, 从 S' 出发的边都落在 S, S' 内的部分. 这一部分的图缩合 S, S' 为一个第二型点之后仍然是可容许图. 我们将将这一部分的积分对应到

$$\sum_{k+l=n,k,l\geq 0} \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \pm \mathscr{U}_k(\gamma_{\sigma_1}\wedge ... \wedge \gamma_{\sigma_k}) \circ \mathscr{U}_l(\gamma_{\sigma_{k+1}} \wedge ... \wedge \gamma_{\sigma_n})(f_1 \otimes ... \otimes f_m)$$

对 c_Γ 的贡献.

4) 第二类边界之中, 从 S' 出发的边有一条落在 S, S' 外的部分. 此时这一部分积分变为 0, 因为此条边对应的角度映射在此部分边界上必然取常值, 从而其微分为 0, 自然这一部分的积分结果也是 0.

我们仅需验证情形 1) 和情形 3) 中的积分刚好与我们要求的系数贡献相等即可完成整个定理的证明.

2.3 主定理证明的完成

我们带着具体的正负号展开等式 (E), 得到如下恒等式:

$$\frac{1}{n!} \sum_{\Sigma_n} \epsilon(\sigma, \downarrow\gamma_1, ..., \downarrow\gamma_n)[\sum_{k+l=n} (-1)^{\sum_{j\leq k} \deg(\downarrow\gamma_{\sigma_j})} (\mathscr{U}_k(\downarrow\gamma_{\sigma_1}, ..., \downarrow\gamma_{\sigma_k})$$

$$\circ \mathscr{U}_l(\downarrow\gamma_{\sigma_{k+1}}, ..., \downarrow\gamma_{\sigma_n})) - (-1)^{\deg(\gamma_{\sigma_1})} \mathscr{U}_{n-1}(\downarrow\gamma_{\sigma_1} \bullet \gamma_{\sigma_2}, ..., \downarrow\gamma_{\sigma_n})] = 0$$

我们按图展开, 选取 $\mathscr{U}_\Gamma(\gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_n)(f_1 \otimes ... f_m)$ 的系数.

验证由 $\circ$ 乘法给出的一项的贡献是由如下的带标号有序图对 Γ_1 和 Γ_2 生成, 其第一型点取值于 $1, ..., n$, 并且每点各不相同, 并且有自然的对应将 Γ_2 视为 Γ 的子图, $\Gamma_1 = \Gamma/\Gamma_2$, $\bar{0}$ 标号在 Γ_1 之中代表着合并后的第二型点. 我们考虑这一部分给出的系数, 即是

$$\frac{1}{n!}\sum_{\Gamma_1,\Gamma_2} w_{\Gamma_1} \times w_{\Gamma_2}\epsilon|p|$$

其中, ϵ 表示 Γ_1 和 Γ_2 自带的编号和对应到 Γ 之中的编号相差的一个置换的 Koszul 符号, $|p|$ 代表 (-1) 的在 Γ_1 自然编号之中合并点前的第二型点数和 Γ_2 第二型点数的乘积次方 (这是由 $\circ$ 的定义所给出的系数). 在给所有不同的带标号有序图对商掉编号的置换之后 (或者说限制其编号为 Γ 给予的编号), 我们仅需证明对于 Γ_2 中编号在 Γ 之中连续出现的可容许图对 Γ_1 和 Γ_2(这是因为我们总是可以复合一个 n 元置换来做到这一点)

$$\sum_{\Gamma_1,\Gamma_2} w_{\Gamma_1} \times w_{\Gamma_2}\epsilon|p| = w_\Gamma$$

即可. 而此时 $\epsilon|p|$ 成为了 $\wedge_{e\in\Gamma_1} d\phi_e \times \wedge_{e\in\Gamma_2} d\phi_e$ 和 $\wedge_{e\in\Gamma} d\phi_e$ 之间相差的倍数 (这是因为一条边在不在 Γ_2 内完全取决于其射出点, 从而允许我们根据射出点批量交换 1-形式), 从而此等式左右两端都等于

$$W_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{2n+m-2}}\int_{\bar{C}^+_{n,m}} \bigwedge_{e\in E_\Gamma} d\phi_e$$

这就完成了情形 3) 的证明. 而要证明情形 1), 需要计算

$$-(-1)^{\deg(\gamma_{\sigma_1})}\mathscr{U}_{n-1}(\downarrow \gamma_{\sigma_1} \bullet \gamma_{\sigma_2}, ..., \downarrow \gamma_{\sigma_n})$$

给出的系数需要对于每个 σ, 定义合并 σ_1,σ_2 两点后的可容许图 Γ_σ 并对其求和. 一个这样的图对应一个对合并后的点的入边/出边的拆分, 从而我们计算此系数为

$$w_{\Gamma_e} = 1/(2\pi)^{2n+m-2}\int_{\bar{C}^+_{n-1,m}} \bigwedge_{e'\in E_{\Gamma_e}} d\phi'_e = 1/(2\pi)^{2n+m-1}\int_{\bar{C}^+_{n-1,m}} \bigwedge_{e'\in E_\Gamma} d\phi'_e \times \int_{\bar{C}_2} d\phi_e = w_\Gamma$$

于是我们完成了所有情形的讨论.

2.4 结论

于是我们得到了公式:

$$f \star g = fg + \mathscr{U}(i\hbar\alpha)(f \otimes g)$$

其中 $\mathscr{U}(x)$ 代表 $\mathscr{U}$ 作为点 (理解为带系数的余代数同态) 的映射将 x 映至的像, 亦即 $\sum_n \mathscr{U}_n^1 x^{\otimes n}$.

这就是 Kontsevich 的乘法公式. 值得注意的是, $i\hbar\alpha$ 是一个 $\mathcal{O}(\hbar)$ 项, 因此 i 阶项出自于 $\mathscr{U}_i^1$ 给出的部分.

参考文献

[1] M.Kontsevich. Deformation Quantization of Poisson Manifolds, 1997, arXiv:q-alg/9709040

[2] A.Canonaco. L_∞-algebras and quasi-isomorphisms. Algebraic Geometry Seminars, 1998-1999(Italian)(Pisa),67-86, Scuola Norm.Sup.,Pisa,1999.

[3] M.Doubek,M.Barkl, P.Zima. Deformation theory, 2007, arXiv:0705.3716

[4] Alberto S.Cattaneo. Formality and Star Products, 2018, arXiv:math/0403135

[5] Schlessinger, M.,Stasheff, J. (1985). The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory. Journal of Pure and Applied Algebra, 38(2-3), 313–322. doi:10.1016/0022-4049(85)90019-2

[6] M.Kontsevich, Y.Soibelman. Deformation theory I(2011), https://people.maths.ox.ac.uk/beem/papers/kontsevich_soibelman_deformation_theory_1.pdf

[7] Lada, T. , and M. Markl . ”Strongly homotopy Lie algebras.” Marcel Dekker, Inc. 6(1995).