量子规范理论的数学方法

权瀚文, 冯梓轩

2026 年 2 月 2 日

前言

本讨论班由权瀚文组织, 冯梓轩主讲, 权瀚文记录讲义. 感谢冯梓轩同学为本讨论班做出的贡献. 本讨论班已经开始讨论 BV 量子化等内容, 然而考虑本讲义自身的整体性, 该版本没有叙述 BV 量子化的相关内容. 现经过少许修改，该版讨论班讲义将发布至求真书院院刊《麟角》共同学参考。

本讨论班主要参考 Henneux、Teitelboim 的《Quantization of Gauge Systems》, 介绍了规范系统的定义及基本的量子化方法——BRST 量子化. 以基本定义和一些等价性证明的故事为主, 因而缺乏对严格数学的讨论. 非常感谢课程 “量子场论 2” 给我机会学习规范理论, 也希望老师能够为本讨论班提供一些指导.

权瀚文

2024.7.3 于怀柔

Chapter 1

规范系统的哈密顿力学

1.1 约束系统

1.1.1 引子: 什么是规范理论?

我们考虑位型空间 (坐标空间)M 上的经典力学系统. 这意味着 M 描述一个经典力学系统所有可能的位形. 回忆经典力学中, 我们用勒让德变换连接拉格朗日力学和哈密顿力学系统, 在这一过程之中, 勒让德变换 $(q,\dot{q}) \mapsto (p,q)$ 总是可逆的, 于是哈密顿量的哈密顿向量场所描述的时间演化给出 Euler-Lagrangian 方程的唯一初值解.

与上述过程不同, (经典的) 规范理论的核心特征在于如下形式的 **Euler-Lagrange 方程** 的初值解不唯一:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0$$

我们可以改写这一方程为:

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial q^{n'}}$$

事实上, 更典型地, 这个方程的解常常是以" 多出一个自由度" 的方式不唯一的. 这个新自由度来源于此常微分方程的系数矩阵 $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}}$ 非满秩. 注意到, 这一矩阵正是拉格朗日力学过渡到哈密顿力学时, 从 $\dot{q}$ 到动量坐标 p 坐标变换的微分 $\frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}^{n'}}$.

这一变换的微分退化, 暗示勒让德变换:

$$\psi : TM \to T^*M, (q,\dot{q}) \mapsto (q,p)$$

并非同构. 在性质足够好时, 这一变换的像在局部是一个闭子流形, 称为这一系统的

原生约束 (Primary constraint). 我们可以用如下方程:

$$\phi_m(q,p)=0, m=1,...,M,$$

来描述此流形. 我们注意, 这一约束并不是对坐标 q 以及其时间导数任何的约束, 而仅仅是勒让德变换的自然结果. 使用哈密顿力学来讨论一个规范系统时, 应当且仅应当在这一平面内讨论.

注记: 一般情形下, 这里的 ϕ_m 都是线性无关的——因为丢弃掉一个可以由其它约束函数给出的约束函数不会改变任何结果.

结论: 经典力学之中, 我们有如下对规范系统的等价描述:

E-L 方程的系数矩阵退化 $\longleftrightarrow$ 勒让德变换不可逆 $\longleftrightarrow$ 存在相空间的原生约束

事实上, 这一条件并不必然给出后文中的规范作用, 而更多时候仅仅是一个约束系统. 这一区别与约束本身的力学性质有关: 约束的一类部分给出规范作用, 二类部分给出较为纯粹的约束.

1.1.2 原生约束与运动方程

在经典力学的哈密顿表述之中, 我们用哈密顿量

$$H(p,q):=\dot{q}(p,q)p-L(q,\dot{q}(p,q))$$

的哈密顿向量场来描述时间演化. 在试图为规范系统赋予哈密顿量时, 我们会遇到如下问题:

- 勒让德变换不再是同构, 因此无法定义反解函数 $\dot{q}(p,q)$.
- 同一个 p,q 对应不同的 $\dot{q}$, 如何确保它们给出的哈密顿量唯一?

为了定义哈密顿量, 我们只需确保在 q 不变的情况下, 哈密顿量仅仅和作为 $q,\dot{q}$ 的函数的动量有关, 即 $\delta p=0$ 蕴含 $\delta H=0$.

计算:

$$\begin{aligned}\delta H(q,\dot{q})&=\dot{q}^n\delta p_n(q,\dot{q})+\delta\dot{q}^n p_n(q,\dot{q})-\delta\dot{q}^n\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^n}-\delta q^n\frac{\partial L}{\partial q^n}\\&=\dot{q}^n\delta p_n(q,\dot{q})-\delta q^n\frac{\partial L}{\partial q^n}\end{aligned}$$

在所需情况的条件下为 0, 从而哈密顿量仅仅为 (p,q) 的函数.

这一哈密顿量仅仅在原生约束内有定义. 回顾代数-几何对偶, 子流形对应函数环商掉其对应理想后的商对象, 我们可以说, 哈密顿量是 $C^\infty(T^*M)/\langle\phi_m\rangle$ 中的元素, 因此做代表元替换

$$H \to H + c^m(p,q)\phi_m$$

不会改变系统的物理性状. 事实上, 全相空间上的物理量 (包括约束, 虽然它在约束的零点集上等于 0——多么巧妙的废话啊!) 也都是如此.

这提醒我们, 物理量在相差约束函数的意义下的弱相等是一个重要概念, 我们使用 $F \simeq G$ 表示此关系, 以区分在全相空间处处相等的 $F = G$.

对任一哈密顿函数, 在原生约束的子流形上, 有 $H(p,q) = \dot{q}p - L(q,\dot{q})$. 考虑任意反解函数 $\dot{q}(p,q)$, 由于 $\partial p/\partial\dot{q}$ 退化, $\delta\dot{q}$ 可以任意选取在不影响 p,q 的某一方向, 从而可以认为方程 $H + L - \dot{q}p = 0$ 可以只对 p,q 变分. 于是我们得到如下方程:

$$(\frac{\partial H}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n})\delta q^n + (\frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n)\delta p_n = 0$$

在原生约束下成立. 我们将其写为 $\delta\phi_m$ 的线性组合. 这就得到了规范系统的运动方程的第一个版本:

$$\begin{cases} \dot{q}^n = \dfrac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \dfrac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n = \dfrac{\partial L}{\partial q^n} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \dfrac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \\ \phi_m = 0 \end{cases}$$

没有规范的情形中, 这正是我们所熟知的正则方程. 这一方程等价于如下变分等式:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H - u^m\phi_m) = 0$$

对 p,q,u 的任意变分成立. 这里的 u 是拉格朗日乘子, 也可以理解为一个新引入的辅助场. 后文将会提到, 是否将其视为一个新的场决定这一系统是否是极小 (minimal) 的.

与无规范情形类似, 利用泊松括号, 我们还可以改写此方程组为:

$$\dot{F} = \{F, H + u^m\phi_m = H_T\}$$

$$\phi_m(p,q) = 0$$

拉格朗日乘子

上文提到的 u_m 是某种意义上的拉格朗日乘子. 我们将拉格朗日乘子作为物理变量进行讨论. 这种构架在书 [1] 中称为 Nonminimal sector.

注意 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_m = 0$ 给出关于拉格朗日乘子 u 的方程:

$$\{\phi_j, H\} + u^m\{\phi_j, \phi_m\} \simeq 0$$

这一方程有如下形式的通解:

$$u^m = U^m + V^m$$

其中 U^m 是方程的一个特解, 而 V^m 是齐次方程 $V^m\{\phi_j, \phi_m\} \simeq 0$ 的所有解. 若其解空间的一组基记为 V_a^m, 则可以写:

$$u^m \simeq U^m + v^a V_a^m$$

其中 v 是完全任意的参数. 于是我们也找到了对于辅助场 u 的所有约束. 此时我们可以定义**总哈密顿量**

$$H_T = H + u^m\phi_m = (H' = H + U^m\phi_m) + v^a(V_a^m\phi_m)$$

此处定义 $V_a^m\phi_m = \phi_a$, 这些新的约束函数满足如下**一类函数条件**

$$\{\phi_a, \phi_m\} \simeq 0$$

$$\{H + U^n\phi_n, \phi_m\} \simeq 0$$

此处 ϕ_a 和 ϕ_m 是不可混淆的.

1.1.3 一类约束与二类约束, 狄拉克括号

我们提到一类函数条件事实上是更一般的" 一类约束" 概念的一部分. 所谓一类函数, 是指如下的物理量 F, 它和所有规范约束的泊松括号在约束曲面上消失, 即:

$$[F, \phi_j] \simeq 0$$

除一类函数之外的函数称为二类函数. 我们称一个约束是一类约束, 当且仅当它由自己的一类函数构成, 反而称之为二类约束.

一类函数的最重要特性是**两个一类函数的泊松括号仍为一类函数**. 这一证明是 Jacobi 恒等式的直接推论. 上一节中, 如果只考虑 $\phi_a \simeq 0$, 给出的便是纯一类的约束, 而 $H' = H + U^a\phi_a$ 给出一个一类函数作为哈密顿量.

事实上, 我们遇到的 Yang-Mills 等理论所给出的约束几乎都是一类约束. 因此我们几乎只处理一类约束, 除非在以狄拉克括号为代表的个别话题之中. 书 [1] 中**交换化定理** (5.2.2) 指出, 所有一类约束都可以局部的化成阿贝尔的 (两两泊松括号恒严格为零的) 约束.

约束的化简

回忆定义总哈密顿量时 ϕ_a 的构造. 当约束已经是一类约束时, ϕ_m 和 ϕ_a 可以不做区分. 在约束是二类约束时, ϕ_a 可以将这一约束中的一类部分抽离出来. 在约束是纯二类约束 ($\{\phi_i, \phi_j\}$ 可逆) 的时候, ϕ_a 空无一物.

由于泊松括号的反对称性, 纯二次类约束常常是偶数维的. 这一结论在出现费米自由度的情况下会不成立.

狄拉克括号

我们考虑如下例子: 最简单的二类约束即是在一个相空间 (q^i, p_i) 上给的约束 $p_1 = 0$ 和 $q^1 = 0$. 这一情形下, 我们应当不在意前两个坐标, 而仅仅将这一系统当作少一个自由度的平凡相空间看待. 于是我们应当修改泊松括号为:

$$[F, G]^* = \sum_{n=2}^{N} (\frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial G}{\partial q^n} \frac{\partial F}{\partial p_n})$$

这一括号叫做**狄拉克括号**. 它的一般定义为:

$$[F, G]^* = [F, G] - [F, \chi_\alpha] C^{\alpha\beta} [\chi_\beta, G]$$

这定义在改变一族约束的表示时不变.

二类约束和一类约束常常有着本质的不同: 纯二类约束没有规范, 而一类约束直接给出规范变换. 狄拉克括号将在量子化有二类约束的系统时代替普通的泊松括号, 并且使得量子化后 $\hat{\chi}_\alpha$ 为 0. 我们不会详细讨论用狄拉克括号量子化二类约束系统的故事, 因为这和我们的主题 (有规范的系统的量子化) 无关.

1.1.4 次生约束与约束曲面

我们考虑有了运动方程之后所产生的新的约束. 这一约束虽然来自于经典的运动方程, 却可以定义出正则量子化的模空间. (作者认为这是因为我们需要算符符合运动方程.)

首先, 我们需要运动时刻具有物理含义, 这意味着真正的约束曲面应当确保物体的运动轨迹时刻在其中. 一个弱化的条件是, 我们考虑原生约束 $\phi_m(p,q)=0$, 那么我们需要存在合适的 u^m, 使得

$$\{\phi_n, H\} + u^m\{\phi_n, \phi_m\} = 0$$

这一条件可能产生新的对 (p,q) 的约束 $X=0$, 这一约束与原生约束不同, 称为次生 (Secondary) 约束. 次生约束可能也会产生新的次生约束.

我们可以递归进行如下定义:

$$S_0 = \text{勒让德变换下的像}$$
$$S_{n+1} = \{(p,q) | \exists u, \delta(H + u^m\phi_m^{(n)})\text{与}S_n = \{\phi_m^{(n)} = 0\}\text{相切}\}$$
$$S_\infty = \bigcap S_n$$

这样得到的 S_∞ 不仅满足是 $\psi(q,\dot{q})$ 的像, 还对于运动方程封闭. 事实上, $(p,q) \in S_\infty$ 正等价于存在函数 $u_m(t)$ 和 S_0 内过 (p,q) 有有限一段解. 我们称这样得到的 S_∞ 为**约束曲面**.

约束的层级结构

原生约束和次生约束揭露了约束的层级结构.

我们用 $\phi_{m_1}, \phi_{m_2}, ...$ 来标记不同阶的约束, 分别为原生约束, 原生约束的次生约束,... 并且所有的 ϕ 记为 γ_a.

原生约束对于泊松括号是封闭的. 事实上, 由于更高阶约束是由低阶约束的运动方程给出的, 完备的第二阶约束集合 (记作 ϕ_{m_2}) 仅需满足:

$$[H, \phi_{m_1}] = V_{m_1}^{m_1'}\phi_{m_1'} + V_{m_1}^{m_2}\phi_{m_2}$$

类似于原生约束, 这些第二阶约束对于泊松括号是封闭的. 第三阶约束仅仅在与哈密顿量做泊松括号时才会由前两阶约束生出来, 并且所有阶都满足类似的性质. 探明约束的层级结构常常在具体计算中是方便的.

约束曲面一般写为方程 $\phi_m = 0$.

我们可以仿照总哈密顿量定义**扩展哈密顿量**

$$H_E = H + u^m\phi_m = (H' = H + U^m\phi_m) + v^a(V_a^m\phi_m)$$

此处定义 $V_a^m\phi_m = \phi_a$. 它们给出这一约束中的一类部分.

于是运动方程被改写为

$$\dot{F} \simeq \{F, H_E\}$$

1.1.5 规范变换的定义与狄拉克猜想

我们在这一节考虑狄拉克猜想. 这一猜想是一个错误的猜想, 但我们并不考虑它的那些反例. 我们的解决方法是将狄拉克猜想的性质加入我们对规范系统的定义之中: 也就是, 无穷小规范变换由一类约束的哈密顿向量场生成 (由泊松结构给出).

回顾最开始, 我们从经典力学的运动方程的任意性出发来引入规范变换, 这是扩展哈密顿量里的任意参数 v_a 带来的. 我们可以获得对规范变换的如下理解: 相空间中的不同点并不一定代表真正的物理状态, 于是通过规范变换链接起来的不同点实际上是同样的物理状态. 考虑从同一初始值出发, 改变这些参数时带来的物理量 F 的改变:

$$\delta F = \delta t(v^a - \tilde{v}^a)[F, \phi_a]$$

我们认为, 同一个物理态并不会随着运动方程演化至不同的物理态, 因此, 这一变换仅仅体现一种冗余的对称性. 鉴于这一变换由纯一类约束 ϕ_a 给出, 我们称**一类约束生成了规范变换**.

这并不是唯一不改变物理态的变化. 我们可以验证:

$$\delta F = \epsilon^a \eta^{a'} \{F, \{\phi_a, \phi'_a\}\}$$

也是任意选择的规范变换.

Dirac 猜想的反例

在上文的定义下, 狄拉克猜想是有反例的. 考虑拉格朗日量:

$$L = \frac{1}{2} e^y \dot{x}^2$$

在这一系统之中, 运动方程仅仅让 x 保持常值. 过渡至哈密顿力学之后, 原生约束仅为 $p_y \simeq 0$, 而次生约束为 $p_x \simeq 0$. p_x, p_y 都是一类约束, 然而仅有 p_y 生成前文所谈的规范作用. p_x 带来的变换是 x 轴上的平移, 然而这并不是一个规范变换: 解从一个解变成了另一个解, 而不分享相同的初值.

然而, QoGS 认为, 我们有必要接受 p_x 作为规范变换的存在. 这样, 做量子化之后, 约束曲面就是一个零维的系统, 于是可以量子化为仅有一个态的希尔伯特空间上的规范系统. 这一观点将贯穿全书. 进一步, 后文对约束空间的曲面的分析将给出我们假设 Dirac 猜想的另一个动机. 或许我们可以说, 狄拉克猜想所提供的才是最好的对规范变换的定义.

评注: 我们认为, 这里实际上可以理解为定义了一些无法避免 “初值” 改变的规范变换, 因而是可以自然接受的.

Dirac 猜想与相空间的辛结构

另外一个接受 Dirac 猜想的原因是考虑流形上的辛结构.

在一般经典力学的相空间上, 我们有一个典范的辛形式等几何结构. 考虑坐标的泊松括号, 即 2-向量场 $\sigma^{\lambda\mu} = \{x^\lambda, x^\mu\}$, 非退化且满足 Jacobi identity. 它自然给出一个 2-形式 $\omega = \sigma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$, 从而给出一个相空间上的辛结构.

当出现一类约束的时候, 我们可以自然的得知如下对应关系:

$\langle$gauge transformation$\rangle$ 给出 gauge orbit;
ω 的 null surface 由一类约束生成 (注意一类约束的定义确保可积性).

我们希望规范作用作用后得到的相空间仍然是一个辛流形, 这就要求 null surface 与 gauge orbit 相等. 这正是 Dirac 猜想所说的一类约束生成规范变换!

1.2 规范变换的代数结构

1.2.1 局部规范变换与诺特荷

我们将定义 "局部的" 规范变换. 设想在 1 维时间上有场 y_i, 取 $R^i_{(k)\alpha}$ 为 y^i 及其有限阶导数的多项式, 定义局部规范变换为 (保持作用量不变的):

$$\delta_\epsilon y^i = \sum_{k=0}^{s} R^i_{(b)\alpha}\frac{\mathrm{d}^k\epsilon^\alpha}{\mathrm{d}t^k}$$

例子: 在 QED 之中, 物质场的 $=0$, 光子场的 $s=1$.

这一规范变换与之前纯粹经典力学的 On-shell 的规范变换不同: 这里的规范变换是更广义的概念, 它有可能并不给出运动方程的解上的规范变换. 这种规范变换是纯粹 Off-shell 的, 我们后面将严格的定义它.

诺特荷

这种局部的规范变换给出 (时间不变的) 连续对称性, 因此我们可以使用诺特定理给出诺特荷. 诺特荷的哈密顿向量场也给出无穷小规范变换.

为了避免记号繁琐, 我们在本节将时间 t 塞入求和指标 i/α 之中. 这意味着当我们对这些指标求和的时候, 同时也对时间做了积分. 同时 $\delta/\delta y^k$ 不再是函数偏导数, 而是泛函导数.

考虑

$$\delta_\epsilon S = \frac{\delta S}{\delta y^i}\delta_\epsilon y^i = \frac{\delta S}{\delta y^i}R^i_\alpha\epsilon^\alpha = 0$$

对任意 ϵ 都成立, 于是:

$$\frac{\delta S}{\delta y^i} R^i_\alpha = 0$$

成立. 这就是这一情形下的诺特定理. (注意导数仍是泛函导数!)

1.2.2 平凡规范变换

若 μ 反对称, 如下的变换

$$\delta_\mu y^i = \mu^{ij} \delta S / \delta y^j$$

不改变作用量, 因此为规范变换. 我们称其为**平凡规范变换**.

考虑规范变换 $\delta_\rho y^i = \rho^i$,

$$[\delta_\mu, \delta_\rho] y^i = \left(\frac{\delta \rho^i}{\delta y^k} \mu^{kj} - \frac{\delta \rho^j}{\delta y^k} \mu^{ki} - \rho^k \frac{\delta \mu^{ij}}{\delta y^k}\right) \frac{\delta S}{\delta y^j}$$

足见这一规范变换构成规范变换的一个李理想.

On-shell 规范变换与 Off-shell 规范变换

平凡规范变换并没有经典物理上的效应, 也并不被约束生成. 通过最小作用量原理, 平凡规范变换在 On-shell 情形下只给出平凡变换, 这意味着它们并不造成运动方程解的更多自由度 (也就是, 并不是经典意义下的 Gauge transformation).

另外一个定理给出 (需要适当的正则性条件):

$$\delta y^i \simeq 0 \text{ and } \delta y^i \frac{\delta S}{\delta y^i} = 0 \Rightarrow \delta y^i = \epsilon^{ij} \frac{\delta S}{\delta y^j}$$

$$\epsilon^{ij} = -\epsilon^{ji}$$

也就是说, 任何一个不改变 On-shell 物理过程的规范变换都是平凡的.

于是, 我们可以如此用平凡规范变换群来沟通 On-shell 变换和 Off-shell 变换: 平凡规范变换群是 Off-shell 变换群的 (正规) 子群, 且其商群给出 On-shell 规范变换.

1.2.3 生成集

在忽略平凡规范变换之后, 我们考虑 On-shell 规范变换的李代数结构. 这一结构也描述了运动方程的退化部分. 我们需要考虑那些生成剩余规范变换的物理量约束 (诺特荷条件).

考虑一族变换 $G=\{\delta_\epsilon y^i=R^i_\alpha\epsilon^\alpha\}$ 为" 生成集", 若它包含所有我们所需的诺特守恒式信息, 亦即:

$$\delta y^i\frac{\delta S}{\delta y^i}=0\Rightarrow\delta y^i=\mu^\alpha R^i_\alpha+M^{ij}\frac{\delta S}{\delta y^j}$$

其中 μ 与 M 都可能是场依赖的.

考虑一族完备的 (它们给出生成集) 一类约束 $\gamma=0$, 和哈密顿量 H, 我们有作用量

$$S[q^n,p_n,u^a]=\int(p_n\dot{q}^n-H-u^a\gamma_a)dt$$

和如下的泊松括号:

$$[\gamma_a,\gamma_b]=C^c_{ab}\gamma_c;[H,\gamma_a]=V^b_a\gamma_b$$

我们考虑生成集给出的一个规范变换

$$\delta_\epsilon F=\epsilon^a[F,\gamma_a]$$

由规范变换的作用量不变性, 可以得到如下公式:

$$\delta_\epsilon u^a=\dot{\epsilon}^a+u^c\epsilon^bC^a_{bc}-\epsilon^bV^a_b$$

这就是我们对拉格朗日乘子 (辅助场)u^a 的变分公式.

有时候我们并不对规范变换直接进行线性组合, 而是对诺特荷进行线性组合. 这时规范变换由

$$\bar{\delta}_\mu F=[F,\mu^a\gamma_a]$$

给出. 此时, 拉格朗日乘子的变分由

$$\bar{\delta}_\mu u^a=D_t\mu^a+[\mu^a,H_E]+u^c\mu^bC^a_{bc}-\mu^bV^a_b$$

给出. $D_t=\partial_t+\sum_{i\geq0}\dot{(u^a)}^{(i+1)}\partial_{(u^a)^i}$ 为包括时间直接依赖性和拉格朗日乘子依赖性的时间导数.

1.2.4 规范变换的代数分类

我们还研究这些规范变换带来的李代数结构. 用上一等式, 我们可以将任意规范变换的李括号写成如下形式:

$$R^j_\alpha\frac{\delta R^i_\beta}{\delta y^j}-R^j_\beta\frac{\delta R^i_\alpha}{\delta y^j}=C^\gamma_{\alpha\beta}R^i_\gamma+M^{ij}_{\alpha\beta}\frac{\delta S}{\delta y^j}$$

有如下三种情况:

- $M^{ij}_{\alpha\beta} \neq 0$, 称此生成集给出一个开的代数.
- $M^{ij}_{\alpha\beta} = 0$, 称此生成集给出一个闭的代数–注意, 这不意味着这些无穷小变换给出真正的李代数.
- $M^{ij}_{\alpha\beta} = 0$ 且 $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 为常数, 此时无穷小规范变换真正的生成了与场无关的一个李代数! 也就是说, 存在一个场无关的规范群, 它的李代数给出所有的诺特守恒式信息.

注意！不管是哪种情形，全体规范变换永远构成一个李代数。以上三种情形考查的是生成元张成的子空间的性质。

值得庆贺的消息是, 温伯格量子场论 [4] 的定理 (15.8.10) 告诉我们, 至少对于弦论和普通的杨-Mills 理论, 都是第三种情况. 然而在考虑诸如超引力等系统时, 将会出现第二种甚至第一种情形. 此时我们将被迫使用更加一般的语言来进行描述.

我们在这里所说的完备集并非都是不可约的. 它可能包容一定的冗余性, 然而这并不重要.

1.2.5 例子: 一般/广义系统

本节我们将引入有 "广义协变性"(微分同胚不变性) 的系统. 一个简单的方式是, 将经典力学的时间参量 t 变为一个新的参数 τ 的函数 q^0, 并且引入其正则动量 p_0.

$$S[p,q] = \int (p_i \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} - H_0)\mathrm{d}t$$

考虑 (注意 p, q 含义改变了!)

$$S[p,q,u^0] = \int (p_i \dot{q^i} - u^0(p_0 + H_0))\mathrm{d}\tau$$

和原作用量给出相同的运动方程.

我们意识到, 此时这个作用量里面没有 "哈密顿量" 项! 这也是这种系统的一般特征. 因此, 扩展哈密顿量在这个系统中是纯粹的约束. 一般系统的作用量为:

$$S = \int (p\dot{q} - H_E)$$

$$H_E = u^a \gamma_a + u^\alpha \chi_\alpha$$

一般系统的规范变换

一般系统在无穷小微分同胚

$$\delta q = \dot{q}\epsilon \ \delta p = \dot{p}\epsilon \ \delta u^a = (u^a\epsilon)^\bullet$$

$$\epsilon\text{在边缘为 } 0$$

下是不变的. 这一规范变换并不是由规范给出的. 但是由于 Dirac 猜想, 显然这也不是独立于规范的规范变换. 书 [1] 里讲, 这一规范变换和 $\epsilon^a = u^a\epsilon$ 只差一个平凡规范变换. 所以, 之前的结论仍然正确: On-shell 规范变换与 Off-shell 规范变换只相差平凡规范变换, 而 On-shell 规范变换由规范生成!

Chapter 2

鬼

为了引入量子化规范理论的最重要工具 – BRST 荷和鬼场, 我们将在本节将费米自由度引入经典力学, 并且给出在相当宽泛情形下 BRST 荷的构造.

2.1 费米自由度的哈密顿力学

本节我们将引入有费米 (Grassman 数) 自由度的经典力学系统. 最开始, 我们将介绍基本的无约束情形, 之后我们将介绍约束的情况.

2.1.1 费米自由度的引入

回忆正则量子化的过程之中, 泊松括号和算子的交换子做了对应. 然而, 对于一些有半整数自旋的系统, 我们常常需要使用反交换子来进行量子化. 于是我们需要反交换子和泊松括号进行对应. 然而它们甚至很难在最基本的代数性质 (例如交换性) 上达成一致: 当反交换子是对称的时候, 经典的泊松括号仍然是反对称的! 这就要求我们不得不考虑本身即是反对称的数, 也就是所谓的 Grassman 数.

Grassman 数

一个 n 维格拉斯曼代数 G_n 的乘法结构由反对易关系:

$$\xi^A\xi^B + \xi^B\xi^A = 0$$

自由生成.

我们可以给出一族 G_n 的基:$1, \xi^A, \xi^{A_1}\xi^{A_2}, ..., \xi^{A_1}\xi^{A_2}...\xi^{A_n}$. 这一组基同时也给出一个自然的分次结构. 在此分次结构下, G_n 是 Koszul 交换的.

在研究有费米自由度的经典力学时, 方便起见, 我们将认为这组基是时间无关的, 而其系数会随着时间变化. 我们分开写奇次项与偶次项的动力学变量:

$$q^i(t) = q_0^i(t) + q_{AB}^i(t)\xi^B\xi^A + ...$$

$$\theta^\alpha(t) = \theta_A^\alpha(t) + \theta_{ABC}^\alpha(t)\xi^C\xi^B\xi^A$$

此处的约定是重要的: **正确的求和只作用在相邻的上下指标!**

事实上, ξ 只有辅助作用. 它们只是为了让我们使用的语言更像传统的矢量分析.

在格拉斯曼代数上可以定义格拉斯曼值的函数. 我们更喜欢那些仅仅由 θ 的多项式 (可以有 q-值函数作为系数) 给出的函数, 称为**超函数**.

我们还可以定义 $*$, 满足如下性质:

$$(AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^*)^* = A$$

$$(\alpha A)^* = \alpha^* A^*$$

对超函数求导时的方向是极其重要的, 具体而言, 不考虑与所求方向无关的项, 其它项有且仅有这一方向的一次项. 从左或者从右去除这一因子分别对应左导数和右导数: ∂^L 和 ∂^R. 如无特别说明, 我们都使用右导数.

坐标变换

考虑坐标变换 $(q, \theta) \mapsto (q', \theta')$, 我们定义它的超雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}, B = \frac{\partial q'^i}{\partial \theta^\beta}, C = \frac{\partial \theta'^\alpha}{\partial q^j}, D = \frac{\partial \theta'^\alpha}{\partial \theta^\beta}$$

由于 B 和 C 都为奇次, 它们在行列式中没有贡献. J 可逆完全等价于 A 和 D 分别可逆.

类比反函数定理, 我们有结论: 这一坐标变换局部可逆等价于 J 可逆.

2.1.2 有费米自由度的正则系统

我们考虑如下作用量

$$S=\int L(q,\dot{q},\theta,\dot{\theta})\mathrm{d}t$$

其中 L 是实值 $(a=a^*)$ 偶次函数. 在这种情况下, 我们定义正则动量 (注意这里是左导数):

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\pi_\alpha=\frac{\partial^L L}{\partial\dot{\theta}^\alpha}$$

于是得到如下的哈密顿量和哈密顿量写出的作用量:

$$H=\dot{q}^ip_i+\dot{\theta}^\alpha\pi_\alpha-L$$

$$S=\int(\dot{q}p+\dot{\theta}\pi_\alpha-H)dt$$

和如下的正则方程:

$$\dot{q}=\partial_pH\ \dot{p}=-\partial_qH$$

$$\dot{\theta}=\partial_\pi H\ \dot{\pi}=-\partial_\theta H$$

我们引入如下的**泊松括号**:

$$[F,G]=[\partial_qF\partial_pG-\partial_pF\partial_qG]+(-)^{\deg(F)}[\partial_\theta F\partial_\pi G-\partial_\pi F\partial_\theta G]$$

它具有如下与经典泊松括号形式上类似的性质:

$$[F,G]=(-)^{\deg F\deg G}[G,F]$$

$$[[F_1,F_2],F_3]+(-)^{\deg F_1(\deg F_2+\deg F_3)}[[F_1,F_2],F_3]+(-)^{\deg F_3(\deg F_2+\deg F_1)}[[F_3,F_1],F_2]$$

2.1.3 有费米自由度的约束正则系统

我们试图研究有费米自由度的约束系统, 并给出规范变换, 狄拉克括号等的定义. 书 [1] 中提到这一情形下仍然有些许现象会与纯玻色场不同, 譬如二类约束的相空间可能出现奇维情形. 另外, 很多公式内还需要额外的正负号.

一类约束与规范变换

我们定义一类约束 G_a 为一个 $\epsilon_a(=0/1)$ 的约束函数.

我们有如下代数关系:

$$[G_a, G_b] = C_{ab}^c G_c$$

$$[H_0, G_a] = V_a^b G_b$$

于是 C, V 等常数的对易关系变为:

$$C_{bc}^a = -(-)^{\epsilon_b \epsilon_c} C_{cb}^a, \epsilon(C_{bc}^a) = \epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c$$

$$(C_{bc}^a)^* = C_{bc}^a (-)^{(\epsilon_a+\epsilon_b)(\epsilon_a+\epsilon_c)}$$

$$(V_b^a)^* = V_b^a (-)^{\epsilon_a(1+\epsilon_b)}, \epsilon(V_b^a) = \epsilon_a + \epsilon_b$$

一类约束由

$$\delta F = [F, \epsilon^a(t) G_a] = (-)^{\epsilon_F \epsilon_a} \epsilon^a(t) [F, G_a]$$

给出.

考虑扩展哈密顿量

$$S_E = \int [\dot{z}^A a_A(z) - H_0 - \lambda^a G_a] \mathrm{d}t$$

在乘子变化 (这一变换事实上是对 $G_a * \epsilon$ 做了某种分部积分)

$$\delta_\epsilon \Lambda^a = \dot{\epsilon}^a + \lambda^c \epsilon^b C_{bc}^a - \epsilon^b V_b^a$$

下不变. 此时平凡规范变换的表述变为:

$$\delta_\mu y^i = \mu^{ij} \frac{\delta^R S}{\delta y^j}$$

$$\mu^{ij} = (-)^{(\epsilon_i+1)(\epsilon_j+1)} \mu^{ji}, \epsilon(\mu^{ij}) = \epsilon_i + \epsilon_j$$

二类约束与狄拉克括号

我们考虑如下有三个自由度 $\theta^{1,2,3}$ 的系统:

$$L = -\frac{i}{2}\dot{\theta}^i\theta^j\delta_{ij}$$

它给出原生约束

$$\chi_i = p_i + \frac{i}{2}\delta_{ij}\theta^j = 0, [\chi_i, \chi_j] = -i\delta_{ik}$$

以及 0 哈密顿量. ‘ 我们可以得到:

$$[\theta_i, \theta_j]^* = -i\delta_{ij}$$

这就给出了奇数维纯二类约束的可能.

2.2 BRST 的经典理论

在本节中, 我们将给出经典版本的 BRST 理论的构造, 具体而言, 我们将从一个约束系统出发, 构造一个新的系统, 并给它的物理量一个 BRS 同调结构, 并将其物理量用 BRS 同调的零阶同调类表示出来.

我们回忆相空间的构造: 首先, 所有的原生约束和次生约束给出约束曲面 Σ, 然后其上的一类部分的约束生成规范群 G, 则相空间定义为 Σ/G.

我们要研究 Σ/G 上的函数, 仅仅需要研究 Σ 上规范不变的函数即可. 我们仅仅考虑纯一类约束 $G_a = 0$ 给出的约束曲面. 需要通过两步操作来获得:

- 构造 Σ 上的函数环
- 找出 Σ 上的规范不变函数

我们将用两个同调理论完成这两步构造, 以分别实现其为同调理论的 0 阶同调群, 这样我们所求的函数环就成为全相空间 (naive phase space) 函数上一个复形的同调群.

这一理论的构造在约束不可约 (irreducible) 时较为明快, 然而我们也会提供可约约束集下的理论.

2.2.1 基本语言: 微分分次代数

一个超交换代数是一个线性空间 $A = A_0 \oplus A_1$ 上的 (结合) 代数结构, 满足

$$x_i \in A_i \Rightarrow x_i x_j = (-)^{ij} x_j x_i$$

在 $\mathbb{Z}$-分次代数上, 根据分次的奇偶, 也有自然的超交换代数结构 (这也是我们大多数讨论的情形). 我们使用如下记号: A_k 表示 k 次齐次空间, 对于 $a \in A_k$, 我们写 $\deg(a) = k$. 这一规则被称为 Koszul 符号规则, 即交换两个 k,l 次元素则乘上 $(-)^{kl}$.

分次空间的张量积和直和上也有自然的分次结构. 直和的 i 次空间正是直和项的 i 次空间之直和, 张量积 $A \otimes B$ 的 i 次空间是 $k + l = i$ 的 $A_k \otimes B_l$ 之直和, 而更多分次代数的张量积可以依此定义.

如果认为 (左) 映射 $f_i \to f_{i+k}$ 有 degree k, 我们也以此定义映射的张量积:

$$f \otimes g(a \otimes b) = (-)^{\deg(g)\deg(a)}$$

类似定义右映射:

$$f \otimes g(a \otimes b) = (-)^{\deg(g)\deg(b)}$$

我们关注那些保持代数结构的映射, 称为同态. 无穷小的同态称为导子 (derivative). 用严格的语言说明, 一个导子 $d : A \to A$ 是满足

$$d \circ m = m \circ (\mathrm{id} \otimes d + d \otimes \mathrm{id})$$

的映射. 如果分次代数上配备了一个度数 $+1$ 的微分, 则称其为一个微分分次代数. 这就是我们将使用的最主要语言. 我们将依此引入 Koszul 复形和纵向同调复形, 并用同调微扰论将二者联系起来.

2.2.2 从 $C^\infty(P)$ 到 $C^\infty(\Sigma)$: Koszul 复形

我们试图给出约束曲面 Σ 上的函数环 $C^\infty(\Sigma)$. 这一函数环可以理解为全相空间函数的等价类, 等价关系由约束函数 G_a 生成. G_a 的 Grassman 手性记为 ϵ_a.

我们将构造一个 Koszul 复形: $(\mathbb{C}[P_a] \otimes C^\infty(P), \delta)$, 使得 $C^\infty(\Sigma) = H_0(\delta)$.

不可约理论

我们需要 $\ker(\delta)_0 = C_\infty(P)$, $\mathrm{Im}(\delta)_0 = I(\Sigma) = \{f | f(\sigma) = 0\} = \langle G_a \rangle$.

一个自然的方法是令 P_a 为一个 1 次的形式变元, 满足 $\epsilon(P_a) = \epsilon_a + 1$. 当 G_a 为不可约的约束函数, 即 $Z^a_b G_a = 0 \Rightarrow Z = 0$ 时, 定义:

$$\delta : \mathbb{C}[P_a] \otimes C^\infty(P) \to \mathbb{C}[P_a] \otimes C^\infty(P)$$

$$\delta(P_a) = -G_a, \delta(C^\infty(P)) = 0$$

且满足**右**导子性质, 则我们有 $\delta^2 = 0$, 并且这一定义给出的 $(\mathbb{C}[P_a] \otimes C^\infty(P), \delta)$ 的零阶同调群正是 $\ker(\delta)_0 / XIm(\delta)_0 = C^infty(\Sigma)$, 这也是唯一不平凡的同调群.

这一分次代数的次数叫做反鬼数 (anti-ghost), P_a 称为反鬼/鬼动量, δ 叫做 Koszul-Tate 微分算子. 我们写作: $\mathrm{antigh}(P_a) = 1$, $\delta(P_a) = G_a$

一般理论

当 G_a 不可约的条件被去除的时候, 一些高阶同调群将不再平凡. 为了继续我们的理论, 我们需要继续保证只有零阶同调群是非平凡的.

G_a 的关系可以用等式 $Z^a_\alpha G_a$ 完全描述. 我们给这些 a 重新命名为 a_0, 以揭露其层级结构, 于是, 我们得到 $Z^{a_0}_{a_1} G_{a_0} = 0$. 考虑 $\delta(Z^{a_0}_{a_1} P_{a_0}) = 0$, 但是它们并不都是 exact 的, 所以我们需要让他 exact. 于是我们设定"鬼中鬼"动量:

$$\epsilon(P_{a_1}) = \epsilon(Z^{a_0}_{a_1} P_{a_0}) + 1$$

$$\mathrm{antigh}(P_{a_1}) = 2$$

并且依此类推: 如果我们定义了前 $k-1$ 阶的鬼动量以及"鬼中鬼"动量, 我们可能得到一些反鬼数 k 的多项式, 具体形式为:

$$Z^{a_{k-1}}_{a_k} P_{a_{k-1}} + M_{a_k}$$

这个式子确实穷尽了所有的可能性, 然而找到这样的显式等式是十分困难的. 我们只知道, 它们生成所有反鬼数 k 的闭 (但不 exact) 的多项式. 对于不 exact 的一组完备关系, 我们定义:

$$\delta P_k = Z^{a_{k-1}}_{a_k} P_{a_{k-1}} + M_k$$

$$\mathrm{antigh}(P_{a_k}) = k + 1$$

$$\epsilon(P_{a_k}) = \epsilon(\delta P_{a_k}) + 1$$

即可给出这一函数环的消解. 此时 $(\mathbb{C}[P_a]\otimes C^\infty(P),\delta)$ 零阶同调群给出 $\ker(\delta)_0/XIm(\delta)_0 = C^i nfty(\Sigma)$, 作为其唯一不平凡的同调群.

2.2.3 纵向同调: Σ 上的规范不变函数

我们现在已经获得了 $C^\infty(\Sigma)$, 然而正如我们前面所说, 真正的物理效应仅仅发生在空间 $C^\infty(\Sigma/G)$ 上, 亦即 $C^\infty(\Sigma)^G$. 我们将使用纵向同调来将这一函数环实现为一个上链复形的零阶上同调群.

不可约理论

我们考虑约束曲面 Σ. 规范作用给出这个曲面上的一个分布结构. 我们称落在分布里 (规范作用方向上) 的为纵向 (longitudinal) 的. 纵向向量和规范约束之间是自然一一对应的. 自然地, 我们也可以通过纵向向量的对偶空间定义纵向 p-形式. 纵向 p-形式可以被视为 p-形式的一个等价类, 此处等价意指在纵向向量上作用给出相同的结果.

通过正常的微分形式, 我们可以在纵向微分形式上定义外积结构, 并且保证纵向形式的外积仍然是纵向的. 同样, 通过 Eilenberg-Cartan 公式

$$(d)\alpha(X_0,...,X_p) = \sum(-)^j \partial_{X_j}\alpha(\hat{X_j}) + \sum(-)^{p-i-j}\alpha(X_0,...,X_p,[X_i,X_j])$$

我们可以定义出纵向外微分 d. 约束曲面上规范不变的函数可以用这一外微分的零阶同调来描述.

具体写下所有元素, 可以通过构造如下的对偶基 ω^a, $\omega^a(X_b)=\delta^a_b$, 且 $\epsilon\omega^a = \epsilon_a + 1$.

这一上同调的阶数记作正鬼 (pure ghost).

于是:

$$\mathrm{puregh}(d) = \mathrm{puregh}(\omega^a) = 1$$

$$dF = (\partial_a F)\omega^a$$

$$d\omega^a = \frac{1}{2}\omega^b\omega^c C^a_{cb}$$

当约束是不可约的时候, 这一外微分给出的上同调群仅在零阶非平凡, 为 $C^\infty(\Sigma)^G$, 在可约的情形下, 我们仍需进一步的讨论.

最后, 为了将外微分与纵向形式的语言推广至 $C^\infty(P)$ 上, 我们依旧有纵向向量场 (因为给定约束后规范变换是全局定义的), 因而仍然可以定义纵向形式. 在这一情形下的纵向 1-形式的对偶基被写作 η^a, 以示区分于 ω. 我们仍然有外积, 对偶和外微分, 只是此

时的外微分不再满足 $d^2=0$, 而仅仅是 $d^2 \simeq 0$ (这是因为李括号在全局并不对纵向向量场封闭, 而我们仅保留它的纵向部分, 用一组特定的结构常数给出 $[X_a, X_b] = C^c_{ab} X_c$.).

d 还会被扩展到 P_a 上. 我们将定义泊松括号 $[P_a, \eta^b] = -\eta^b_a$. 为了保持 δ 和 d 的良好性质 ($[\delta, d] = \delta d + d\delta$=0), 且 $dP=0$, 我们需要定义:

$$dP_a = (-)^{\epsilon_a} \eta^c C^b_{ca} P_b$$

可约理论

在可约的情形下, 我们必须面对 η 遇到的更多困难. 继续使用 a_0 代替前文的 a, 其一是 p-形式的系数 $\alpha_{a_0 \ldots d_0} = (-)^{(\epsilon_a+1)(\epsilon_{a_0}+\ldots+\epsilon_{d_0}+p)} \alpha(X_{a_0}, \ldots, X_{d_0})$ 可能并不线性独立. 事实上, 我们有

$$Z^{d_0}_{a_1} \eta^{c_0} \ldots \eta_{a_0} \alpha_{a_0 \ldots d_0} = 0$$

我们定义 η^{a_k} 为满足 puregh $\eta^{a_k} = k+1$, 且 $\epsilon(\eta) = \epsilon_{a_k} + k + 1$ 的形式变量, 定义算子 Δ 为:

$$\Delta \eta^{a_k} = \eta^{a_{k+1}} Z^{a_k}_{a_{k+1}} (-)^{\epsilon_{a_k}+k+1}$$

. 我们将不加证明的承认如下事实, Δ 的上同调群在 $C^\infty(\Sigma) \otimes \mathbb{C}[\eta^{a_0}]$ 给出 $H^*(\Delta) =$. 事实上, 通过定义 $\deg(\eta) = 1$, 我们可以给出另外的分次方法: deg, 并且 aux = puregh − deg, 为辅助分次. d 有辅助分次 0, Δ 有辅助分次 1, 于是我们可以按辅助阶数展开一个元素, (维持正鬼数) 的映射等. 计算可得, 在约束曲面 Σ 上,$d^2, [d, \Delta]$ 给出 0.

我们定义 $D = \Delta + D^{(0)} + (\mathrm{aux}(\leq -1))$, 并且期望 $D^2 = 0$, 且给出我们想要的同调群, 因而我们又需要对于 η_{a_0} 和 $F \in C^\infty(\Sigma)$ 而言, $D^{(0)} = d$. 逐项展开 D 的辅助次数 k 次为 $D^{(k)}$, 可以用递推求解.

$D^{(-1)}$ 由以下方程确定:

$$D^{(0)} \Delta + \Delta D^{(0)} = 0, D^2 = -[D^{(-1)}, \Delta]$$

我们有如下定理:

$$H^k(D) \simeq H^k(d)$$

简要证明如下:

考虑 $\alpha \in C^\infty(\Sigma) \times \mathbb{C}[\eta^{a_0}]$ 代表一个闭 1 形式, 满足 $\Delta\alpha = 0, d\alpha = 0$, 所以 $D\alpha = 0$.

另外, 如果 α 是 exact 的, $(\alpha = d\beta) \Rightarrow (\alpha = D\beta)$, 所以也是 D-exact 的.

同调微扰论

上一节的定理与之后要证明的**同调微扰论**很类似, 这也是我们给出 BRST differential 时的主要理论框架.

对于微分算子 δ, 我们称复形 $(\bar{A}, \delta)$ 给出一个 A 的消解, 若 $H_k(\delta) = 0, \forall k \neq 0$, 且 $H_0(\delta) = A$. 这一链复形结构自然给出一个分次结构, 记作 $r(\bullet)$.

考虑 d 是模 δ 的消解次数为 0 的, 但是是奇的微分算子. 这意味 d 满足:

- d 和 δ 交换, 即 $[d, \delta] = 0$
- $d^2 = [\Delta, \delta]$

我们可以用这样的 d 对 δ 进行微扰, 即我们将给出一个导子 $s = \delta + d + ...$ 计算 $H_\star(\delta)$ 的上同调. 每一个上同调类被一个满足 δ-闭条件的元素所代表, 并且满足 d-闭性质. 因此, 我们可以认为 $x \sim x + dz + \delta z', \delta z = 0$. 这提示我们可以认为有某种微分 $s = \delta + d + ...$, 其中 "..." 是新分次结构下的更低阶项.

反转 $\bar{A}$ 上的分次, 我们会得到一个上链复形. 我们考虑 d, 它是一个 $+1$ 次算子. 注意这里的次数 deg 不同于消解次数. 我们要求 $\deg(\delta) = 0$, $r(d) = 0$. 我们考虑总分次 $\mathrm{gh} = \deg - r$, 在这个意义下 δ 和 d 都是 $+1$ 次的. 我们会得到如下主定理, 并以此构造我们的 s:

Theorem 2.2.1. 若 δ 是一个消解, 则存在 s 为总次数 $\mathrm{gh} = +1$ 的微分算子, 且

$$s = \delta + d + s^{(1)} + s^{(2)} + ...$$

$$r(s^{(k)} = k), \mathrm{gh}(s^{(k)}) = 1$$

$$s^2 = 0$$

Theorem 2.2.2. 所有这样的 s 都给出

$$H^k(s) = H^k(d)$$

其中后者是 d 在 $H_0(\delta)$ 上给出的同调群.

我们将提供一个简短的证明概述. 第一个定理的证明可以用归纳法证明. 考虑到第 n 阶的解

$$s_n = \delta + d + ... + s^{(n)}$$

满足

$$[s_n, s_n] = (r \geq k\text{的项})$$

我们需要证明 $s^{(n+1)}$ 的存在性. 仅需找 $[s_n, s_n]$ 中的 $r = k$ 次项 $\rho^{(k)} = 2[\delta, s^{(n+1)}]$ 即可, 这等价于 $[\delta, \rho^(n)] = 0$, 因为 $H_n(\delta) = 0$. 而 $[\delta, \rho^(n)]$ 是 $0 = [s_n, [s_n, s_n]]$ 的 $\deg = n-1$ 项, 即证.

证明第二个定理时, 我们将每一个 gh 齐次元素 x 都按照 r 展开 $x = x^{(0)} + ...$, 然后构造 $\pi(x) = x^{(0)}$, 并证明这在上同调中给出同构即可.

2.2.4 扩展相空间, BRST 荷

扩展相空间上的 BRST 理论: 一个大纲

我们仍然需要将费米自由度 P_a 和 η^a 加入考虑的空间视为一个新的相空间, 称为**扩展相空间**. 我们将对扩展相空间上的函数做上同调.

首先, 我们需要赋予这一扩展相空间泊松结构. 在不可约理论之中, 泊松括号由 $[P_a, \eta_b] = -\delta_b^a$ 给出, 在可约情形下, 我们希望这依然成立. 对于 "鬼中鬼"η^{a_k}, 它们被取为实变量 ($\eta^* = \eta$), 而对于鬼动量, 其虚实性取决于其 Grassman 手性: "$(P_{a_k})^* = -(-)^{\epsilon_{a_k}+k} P_{a_k}$".

这一空间上的分次由 $\text{gh} = \text{puregh} - \text{antigh}$ 给出. 我们有算符 $\mathcal{G} = i \sum (k+1) \eta^{a_k} P_{a_k}$, 其特征子空间给出 k 次齐次空间, 特征值则是 $i(\text{gh}(\bullet))$. puregh 和 antigh 都给出这个空间上的分次结构. 在这个分次结构下, $\text{gh}(\delta) = \text{gh}(D) = 1, \text{puregh}(\delta) = 0, \text{puregh}(D) = 1$.

我们依旧定义 $\delta\eta = 0$, 否则没有定义可以满足 $\text{antigh}(\delta) = -1$. 为了与之相容, 我们还需要定义 $C^\infty(P)$ 上的 D, 无论如何, D^2 的像落在 $\text{Im}\delta$ 之中, 且因为 δ 给出消解,$D^2 = [\delta, -]$. 另外, 我们要求 $[\delta, D] = 0$ 仍应成立. 之后, 由于我们所叙述的同调微扰论, 我们就得到了 $\text{gh} = +1$ 的 BRST differential s. s 满足以下性质:

$$s = \delta + D + \text{``more''}, s^2 = 0$$

在这一过程之中, 我们不严谨的做了两件事:

- 没有定义 D 在扩展相空间上的作用
- 没有证明 s 和泊松结构相容: 即 s 给出一个无穷小的正则变换

在可约理论之中, 最好证明 s 的存在性且回应这些问题的方式是直接地揭示 s 是由一个物理量生成的无穷小对称性, 称为 BRST 荷 Ω:

$$sA = [A, \omega]$$

这里的泊松结构严格由原空间的泊松结构和 $P-\eta$ 的泊松结构给出 (这个是严格定义的!).

我们将给出 BRST 荷的公理, 并且完成其存在性荷唯一性的证明来完成整个理论的构造.

BRST 荷的公理

BRST 荷意为满足如下性质的一个扩展相空间上函数:

a) $\mathrm{gh}(\Omega)=1, \epsilon(\Omega)=1, \Omega^*=\Omega$

b) $\Omega=\eta^{a_0}Ga_0+\eta^{a_k}Z^{a_{k_1}}_{a_k}P_{a_{k-1}}+(\deg(\geq 2))$

c) $[\Omega,\Omega]=0$

我们将检验: 这样的 BRST 荷给出我们想要的 BRST differential. 性质 a 是自然的; 性质 c 本身是对幂零性质的重写; 而性质 b 对于 P 给出 δP, 对 η 给出 $\Delta\eta$, 对 $F\in C^\infty(P)$ 给出 dF. 这些足以给出生成元在 $D+\delta$ 下的最低 degree 项, 从而可以通过性质 $[\Omega,\Omega]=0$ 对应到我们期望的 BRST 微分 s.

回顾原系统的物理量应该由新系统下, s 的零阶同调群给出. 在扩展相空间中, 可观测量由 $[\Omega,\bullet]$ 的零阶同调群给出. 换言之, 称 $A(p,q,\eta,P)$ 是一个可观测量, 若:

- A 是 BRST 不变的, 即 $[\Omega,A]=0$.
- A 是鬼数为零的齐次元素 (gh(A)=0).

且 A 与 $A+[B,\Omega]$ 会被视为相同的可观测量.

经典 BRST 框架下的物理量

引入 BRST 理论中物理量之后, 一个自然的问题是: 在何种意义上, 这些物理量和原本的大相空间上的可观测量是对应的?

在原本的情形下, 物理量由 Σ 上规范不变的实值函数等价类 $A(p,q)+\xi^aG_a$ 定义, 且规范不变性等价于 $\{A(p,q),G_a\}=\epsilon^aG_a$. 我们将给出如下定理:

Theorem 2.2.3. 对任意 P 上的规范不变的实值函数 $A_0(p,q)$, 我们可以唯一给出一个相差 BRST-exact 项意义下的 BRST 不变的实函数:

$$A(p,q,\eta,P)=A_0(p,q)+\sum_{p\geq 1}A_p(p,q,P,\eta),\ \mathrm{antigh}(A_p)=p$$

称为 A_0 的 BRST 的扩张.

证明. (仅仅是一个 sketch)

考虑如下展开 BRST 不变条件得到的方程:

$$\delta A_{p+1} + \sum [A_{p-k}, \Omega^k]_{\text{原相空间}} + \sum_k \sum_s [A_k, \Omega^{p+s+1-k}]_{\eta^{a_s} P_{a_s}}$$

唯一决定 A_p.

这一方程与 BRST 荷构造所使用的方程非常相似, 因此我们可以归纳得出 A_p, 并说明其相差 BRST-exact 项意义下的唯一性. □

在此定义下, 可以验证 G_a 被扩张为函数 $[-P_a, \Omega]$, 成为 BRST-exact 项, 因此这一扩张的确将函数的等价类映到等价类, 从而给出可观测量集合的两种定义等价性. 这种等价关系还体现在函数环的乘法结构和泊松结构上:

Theorem 2.2.4. 若 $A_0(p,q)$ 和 $B_0(p,q)$ 的 BRST 扩张为 A, B, 则:

- AB 也是 A_0B_0 的 BRST 扩张,
- $[A,B]$ 也是 $[A_0,B_0]$ 的 BRST 扩张.

鬼动力学

考虑哈密顿量 H_0, 给出扩展哈密顿量 $H_E = \lambda^{a_0} G_{a_0} + H_0$. 我们考虑 H_0 的 BRST 扩展, 它诱导扩展相空间上的演化算子.

如果 F 是 F_0 的 BRST 扩张, 那么因为泊松括号被保持:

$$\dot{F} = [F, H] \Leftrightarrow \dot{F}_0 = [F_0, H_0]$$

于是我们可以依此规定任意物理量随时间的演化. 仅需注意, 当我们改变哈密顿量的具体选取时 (通过加入 G), 物理量的变化依然不变, 仅有鬼场的演化可能改变.

2.2.5 BRST 荷的经典构造

本节将复述 QoGS 上对于 BRST 荷存在性和唯一性的构造.

存在性

我们假设 $\Omega = \sum \Omega^{(i)}$, 其中 i 为反鬼数; $[\Omega, \Omega] = \sum B^i$, i 也代表反鬼数.

假设对于 $k < p$, $B^{(k)} = 0$, 并且

$$\Omega = -\eta^{a_i}\delta P_{a_i} + (\text{无}\eta\text{的项})$$

考虑方程 $B^{(p)} = 0$. 我们期望它给出我们 $\Omega^{(p+1)}$ 的一个解, 并且满足我们的递归假设. 考虑 R_p 为 Ω 上反鬼数不超过 p 的齐次项和, 于是 $[R_p, R_p]$ 的最低阶项总会被实现为导子 $D^{(p)}$. 我们意识到, 必须有

$\delta\Omega^{(p+1)} + D^p = 0$

才能够维持我们的公理. 而事实上, 这总是可以办到的, 因为 $\delta D^{(p)} = 0$ 来自于 R_p 自己的雅可比恒等式, 从而由同调群的消失即得出 $\Omega^{(p+1)}$ 的存在性构造. 于是这一构造过程延申至无穷, 存在性即得证.

唯一性

这一节我们要考察如下问题: 在何种意义下, 这一量子规范理论是有自然性的? 我们将改变 G_{a_0}, Z 等常数, 以及构造 BRST 时的种种任意性, 仅仅从公理出发来得到我们想要的唯一性质.

我们先用归纳法讨论基本模型: 仅需考虑 Ω 和 Ω' 为不同的 BRST 荷, 并且假设恰好在 antigh 中前 $p-1$ 阶完全一致, 于是, 考察性质 c 带来的方程:

$$\delta\Omega^p = D^{(p_1)}$$

比较可得:

$$\Omega'^{(p)} = \Omega^{(p)} + \delta_\Omega M^{p+1}$$

此处的 δ_Ω 是因为不同的选取会带来完全不同的 δ. 这一定理对于 $p=0$ 也成立, 仅需考虑 $G'_{a_0} = G_{a_0} + (M_{a_0}^{b_0} - \delta_{a_0}^{b_0})G_{b_0}$ 即可. 考虑 M 无穷小的情形, 于是 $\delta_\Omega M = [M, \Omega]$ 给出 Ω 和 Ω' 相差的无穷下正则变换. 书 [1] 中的习题 10.07 保证, 这一过程相差的可能是任意有限正则变换, 仅需颠倒必要的符号以将问题约化至正则变换群的单位连通分支. 于是, 任意两个 BRST 荷都可以通过正则变换链接起来.

Chapter 3

量子化

在本章, 我们将回顾**量子化**的过程, 并且仿照经典情形的故事去量子化规范系统. 本章内容主要来自 QoGS[1] 与论文 [2].

3.1 从超 Poisson 代数到 Clifford 代数: 量子化

我们回顾, 量子化经典系统时, 余切丛上的泊松括号结构给出了一个函数之间的李代数/泊松代数结构. 在一切自由度都是经典的 (即没有费米自由度) 的情形下, 唯二的费米场 – 鬼场与反鬼场 (鬼动量) 之间新增的 "泊松括号" 给出一个交换的度量结构. 对这种交换的度量结构做形变时, 我们便不可避免的需要借助 Clifford 代数的语言.

超泊松代数

我们回顾 (超) 泊松代数的定义. 我们有一个超交换代数 $B = \otimes B_i$, 和一个泊松括号结构: $\{\bullet, \bullet\} : \Lambda^2 B \mapsto B$. 泊松括号满足导子条件, 即当 $b_j \in B_j$ 时,

$$\{b_i, b_j b_k\} = b_i, b_j b_k + (-)^{ij} b_j \{b_i, b_k\}$$

令 $V = \mathfrak{g}^* + \mathfrak{g}$, 我们考虑超流形 $V \otimes P$ 上的函数环 $C^(\infty) \otimes \Lambda V$, 我们在 V 上赋予的度量 $[P, \eta] = -\delta$ 和 P 上的自然泊松结构自然给出了函数环上的超泊松结构: $\{,\} = [\bullet, \bullet]_\eta + [\bullet, \bullet]_P$. 这也可以理解成作为有费米自由度的经典力学系统的相空间函数环上的 (超) 泊松结构.

Clifford 代数

Clifford 代数相当于“度量关系”自由生成的非交换代数. 考虑度量空间 V, V 自由张成一个多项式环: $T(V)=\mathbb{R}\oplus V\otimes V\oplus ...$, 我们在其中商掉关系 $(v\otimes u+u\otimes v)=2(u,v)1_{T(V)}$ 生成的双边理想, 就可以得到 Clifford 代数 $C(V)$.

Clifford 代数的万有性质可以用 Clifford 映射来刻画. 考虑度量空间 V, 称其到代数 A 的映射 $\phi: V\to A$ 为 Clifford 映射, 若:

$$\phi(u)\phi(v)+\phi(v)\phi(u)=2(u,v)$$

则称此映射为 Clifford 映射. 所有 Clifford 映射都穿过 Clifford 代数.

度量空间 $\mathfrak{g}+\mathfrak{g}^*$ 与 Clifford 代数的关系可以类比于 $[x,p]=-i\hbar$ 之于形变量子化后的 $A_\hbar$ 的关系. 事实上, 考虑到鬼场和鬼动量的奇性, 我们可以认为这里的“度量”承载着生成 (超) 泊松代数中泊松括号矩阵的作用.

Clifford 代数的 “阶梯”gr

考虑那些 Clifford 代数中的 $\epsilon=k\bmod 2$ 子空间中可以写成 $\leq k$ 的向量内积的子空间 $C^k(V)$, 自然给出 $C(V)$ 的一个滤过结构. 我们可以定义 $\mathrm{gr}^k C=C^k/C^{k-2}$ 为奇/偶次齐次空间上的 k 阶梯.

我们可以定义

$$\mathrm{gr}_1 C=\mathrm{gr}^1 C\oplus \mathrm{gr}^3\oplus ...$$

$$\mathrm{gr}_0 C=\mathrm{gr}^0 C\oplus \mathrm{gr}^2\oplus ...$$

$$\mathrm{gr}C=\mathrm{gr}_1 C\oplus \mathrm{gr}_0 C$$

我们可以给出如下的结构定理:

$$\mathrm{gr}C(V)=\Lambda(V)$$

对于 $b_j\in \mathrm{gr}^j C, b_i\in \mathrm{gr}^i C$, 我们还可以定义乘法和反交换映射 $\{b_i,b_j\}$.

考虑 c_i 和 c_j 作为代表元, 则 $c_ic_j\in C^{i+j}$ 可以相差一个 C^{i+j-2} 中的元素, $[c_i,c_j]\in C^{i+j-2}$ 可以相差一个 C^{i+j-4} 中的元素, 于是可以在 gr^{i+j} 中定义 b_ib_j, 在 $\mathrm{gr}^{i+j-2}C$ 中定义 $\{b_i,b_j\}$. 从而, $\Lambda(V)=\mathrm{gr}C(V)$ 被实现为一个超泊松代数.

我们可以认为, 从 $\mathrm{gr}C(V)$ 到 $C(V)$ 的过程就是对鬼场做量子化的过程.

作为左 $C(V)$ 模的外代数

给定 $x \in V$, 我们可以定义 $\Lambda V = \mathrm{gr} C$ 上的算子:

$$\epsilon(x) : \omega \mapsto x \wedge \omega$$

$$\iota(x) : \omega \mapsto \frac{1}{2}\{x, \omega\}$$

满足

$$[\epsilon(u), \iota(v)] = (u, v)\mathrm{id}$$

$$[\epsilon(u), \epsilon(v)] = [\iota(u), \iota(v)] = 0$$

考虑 $\phi = \epsilon + \iota$, 可以验证 ϕ 给出一个 Clifford 映射, 从而提升至

$$Phi : C(V) \mapsto \mathrm{End}(\Lambda V)$$

ΛV 和 $C(V)$ 作为线性空间是同构的. 我们有从 $C(V)$ 到 ΛV 的典范映射:$\psi(\bullet) = \Phi(\bullet)1$. 比较构成元素可以看出, 这一映射给出一个线性同构.

选定一组基 v_i, ψ^{-1} 可以被写为:

$$\psi : v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge ...v_{i_n} \mapsto (n!)^{-1} \sum_{S_n} (\mathrm{sgn}\pi) v_{i_{\pi(1)}} \wedge v_{i_{\pi(2)}} \wedge ...v_{i_{\pi(n)}}$$

3.1.1 BRST 量子化

对鬼场量子化的过程是将经典的, (超) 交换的 $\Lambda(V)$ 还原为 $C(V)$, 量子版本的可观测量算子代数的过程. 某种意义上, "量子" 版本的理论更加简单和自然.

考虑我们的扩展相空间函数环 $C^\infty(P) \otimes \Lambda V$, 经过量子化之后, 它会变成 $A_\hbar \otimes C(V)$. 我们将使其实现为一个空间上的算子代数, 并且定义可观测量和空间里的物理态. 这需要我们引入**量子 BRS 上同调**.

量子 BRST 上同调

我们给出如下的物理态条件 $\Omega\psi = 0$, 并考虑对应于经典可观测量条件的量子可观测量条件在这一条件下意味着什么:

- $[A, \Omega] = 0$, 于是 A 将物理态映到物理态.

- $(\phi, [K,\Omega]\psi) = 0$, 于是 A 和 $A + [K,\Omega]$ 物理意义上没有区别.

考虑到 $[\Omega, [\Omega, -]] = 0$, 我们引入**量子算符上同调**, 同调群的每个元素都可以描述一个物理量, 其中经典物理量用零阶同调群元素 (鬼数 0) 描述:

$$H^*_{\mathrm{op}}(\Omega) = \frac{\{A|[A,\Omega]=0\}}{\{A|[B,\Omega]\}}$$

此时, 规范约束的物理量对应的算子是:

$$\hat{G}_a = [-P_a, \Omega]$$

对应 0 算子.

同时, 因为对物理态 ψ, $(\psi, \Omega\chi) = (\Omega\psi, \chi) = 0$, 所以我们常常认为两个相差 $\Omega\chi$ 的物理态是等价的. 考虑 $\Omega^2 = 0$, 我们可以定义**量子态上同调**, 并用其元素描述物理态:

$$H^*_{\mathrm{st}}(\Omega) = \frac{\{\psi|\Omega\psi = 0\}}{\{\psi|\psi = \Omega\chi\}}$$

我们可以挑选那些 $\mathcal{G}\psi = 0$ 亦即鬼数为 0 的物理态为真正的物理态, 这对应零阶的量子态上同调.

量子反常

并不是所有情况下, 经典的 BRST 荷 Ω 都会对应 Ω^2=0 的元素, 这时会有部分的规范自由度保持不消失, 以导致无法以通常方式定义物理态. 量子理论此时出现反常.

如果不考虑 BRST 量子化的框架, 仅仅要求规范算子在物理态上作用为 0(Dirac 量子化), 出现反常的原因可以被理解为原先以泊松括号表示的一类约束条件

$$\{G_a, G_b\} = C^c_{ab} G_c$$

或者时间演化条件

$$[H_0, G_a] = V^b_a G_b$$

并不被量子理论的对易子严格保持. 此时如果继续要求规范算符 $[G_a, G_b]$ 在物理态上为 0, 且物理态对演化封闭可能会出现限制过多的情况. 此时, 我们应该停止将 G_a 给出的约束视为一类约束, 规范作用在量子层面破坏. 然而有些情况下, 这种情况仍然保持 BRST 理论不反常, 亦即 $\Omega^2 = 0$.(虽然有些情况不保持).

3.2 有限维情况

我们回顾我们在上一章完成的构造:

- 扩展相空间上的函数环: $C^\infty(P_{ext}) = \mathbb{C}[P.\eta] \otimes C^\infty(P)$
- 泊松结构: $[-,-] = [-,-]_{\text{原相空间}} + [-,-]_{P,\eta}$
- 哈密顿量: $H + \lambda G_a$, 其中 λ 是固定的参量.
- BRST 荷: Ω 满足:

  a $\mathrm{gh}(\Omega) = 1, \epsilon(\Omega) = 1, \Omega^* = \Omega$

  b $\Omega = \eta^{a_0} Ga_0 + \eta^{a_k} Z_{a_k}^{a_{k_1}} P_{a_{k-1}} + (\deg(\geq 2))$

  c $[\Omega, \Omega] = 0$

- 可观测量为 $A \in C^\infty(P_{ext}) = \mathbb{C}[P.\eta] \otimes C^\infty(P)$, 满足:
  - A 是 BRST 不变的, 即 $[\Omega, A] = 0$.
  - A 是鬼数为零的齐次元素 (gh(A)=0).
  - A 与 $A + [B, \Omega]$ 会被视为相同的可观测量

我们考虑最简单的情况, 对应有全局规范变换群, 并给出不可约约束的情形. 此时 $\Omega = \eta^{a_0} Ga_0 + \eta^{a_k} Z_{a_k}^{a_{k_1}} P_{a_{k-1}} + (\deg(\geq 2))$ 可以写为

$$\Omega = \eta_a^G - \frac{1}{2}\eta^b \eta^c C_{cb}^a P_a$$

即可满足 $[\Omega, \Omega] = 0$.

此时, 考虑 $G_a = 0$ 给出规范变换 δ_a, 且 $[\delta_a, \delta_b] = C_{ab}^c \delta_c$. 这时, 这些无穷小规范变换群给出一个李代数 $\mathfrak{g}$, 而 (大) 规范变换群给出一个李群 G.

考虑动量映射 (moment map):

$$P : P \mapsto \mathfrak{g}^*$$

满足

$$P(m)[\xi] = \delta(\xi)(m)$$

其中 $\delta(\xi), \bullet = \xi(\bullet)$, 于是约束曲面也可以表示为 $P^{-1}(0)$. 我们要求的约化相空间则是 $P^{-1}(0)/G$, 这和 [2] 中的定义一致.

定义 moment map 之后, 我们可以对任意有群作用的相空间上进行哈密顿约化, 找到约化相空间 $P^{-1}(0)/G$, 而不用从相空间的约束函数出发去计算规范群.

我们的鬼场和鬼动量分别同构于 $\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}$. 因此, 我们的扩展相空间上的函数环正是 $C^\infty(P) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^* \otimes \Lambda\mathfrak{g} = C^\infty(P) \otimes \Lambda(V)$. 然而此时, 为了维持我们的泊松括号不变, 我们应当定义 $\eta^a(P_b) = \frac{1}{2}\delta^a_b$. 为了保证记号与 [2] 相统一, 除特别说明外, 从现在起本节中的 P_a 对应前文的 P_a 的一半, 对应 C^c_{ab} 也变为一半.

重逢: 经典 BRST 荷

我们为 $V = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ 定义李括号 $[x, f](y) := -f[x, y]$. 我们声称:

$$\omega \in \Lambda^3 V := \Omega(x, y, z) := -\frac{1}{2}(x, [y, z])$$

为经典 BRST 荷的三阶部分, 而 $\delta := \sum \eta^a G_a$ 给出经典 BRST 荷的一阶部分. 验证其满足 BRST 荷的性质:

$$\omega = -\frac{1}{2}(\sum_{abc} C^c_{ba}\eta^a \wedge \eta^b \wedge P_c)$$

$$\delta = \sum \eta^a G_a$$

$$\{\delta + \omega, \delta + \omega\} = \{\delta, \delta\} + 2\{\delta, \omega\} + \omega, \omega = C^d_{ab}\eta^a\eta^b G_d - C^d_{ab}\eta^a\eta^b G_d + 0 = 0$$

于是 $\Omega = \omega \otimes 1 + \delta$ 给出我们之前所谈的经典 BRST 荷.

量子 BRST 荷

我们试图寻找一个对于量子 BRST 荷 $\mathfrak{Q}$ 的显式构造. 我们先考虑总相空间上的函数环为平凡的情形 (此时我们用 moment map 完成约化相空间的构造).

我们考虑 $Q \in C^3(V)$, 使得 $\mathrm{gr}_3(Q) = \frac{1}{2}\Omega$. 论文 [2] 的第五节保证, 我们总可以找到这样的 $Q = \frac{1}{2}\psi^2(\Omega)$, 使得 $Q^2 = 0$.

接下来, 我们要寻找一个模 S, 将 Q 实现为其上的自同态. 我们将考虑 V 的极大迷向子空间 N, 及其极大迷向补空间 P (这总是可以找到的: 从现在开始我们假设 $N = \mathfrak{g}, P = \mathfrak{g}^*$ 即可), 我们可以定义 $S = \Lambda(P)$.

计算可得 (这里 [2] 的式子 6.11 有误, 但是如下等式仍然是正确的):

$$Q = \frac{1}{2}\sum C^i_{ij}\eta^j = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(\bullet)\ \mathrm{mod}\ \langle\mathfrak{g}\rangle_{\mathrm{left}}$$

$$[Q, x] = dx/2, x \in V$$

我们认为

$$S = C(V)/\langle\mathfrak{g}\rangle_{\mathrm{left}}$$

是一个 $C(V)$ 的左模. 计算 Q 作用在 $\alpha \in \Lambda\mathfrak{g}^*$ 上的结果为 $d\alpha+(-1)^{\deg(\alpha)}\alpha\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(\bullet)$.

若 g 上的映射 $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(\bullet)$ 为 0, 称其为一个**幺模**的李代数. 此情况下, Q 作为 S 上的算子仅仅是一般的李代数同调的上边缘算子. 一般情形下, 我们将 S 视作外代数本身就给出了其上的一个分次结构, 且 Q 将 p 次元素映到 $p+1$ 阶元素. 于是我们找到了 Q 所在的一个表示, 且是分次线性的.

我们还要处理 $C^\infty(P)$ 不平凡的情形. 假设我们给出了一个量子化映射:

$$C^\infty(P) \mapsto \mathrm{End}(T)$$

使得某个包含 moment map 的子空间泊松括号被对易子所保持 (即 BRST 量子反常不会发生). 此时, 我们记 $P(P_i)$ 的量子版本为 $\tau(P_i)$, 于是 $\tau = \sum\eta^i \otimes \tau(P_i)$ 给出了 δ 的量子版本.

我们定义 $\mathfrak{Q} = Q\otimes\mathrm{id} + \tau \in \mathrm{End}(S)\otimes\mathrm{End}(T) \simeq \mathrm{End}(S\otimes T)$, 容易验证它满足量子 BRST 荷的性质

$$\mathfrak{Q}^2 = 0$$

并且给出 Ω 的一个量子化.

3.3 无限维情形的困难与解决

我们试图在可数无限维情形下重复上节的构造. 我们仍然假设 V 可以分为 $V = N\otimes P$, 并且有基 $n_i \in N, p_i \in P$ 满足:

$$(n_i, n_j) = (p_i, p_j) = 0$$

$$(n_i, p_j) = \delta_{ij}$$

我们再考虑模 $S = C(V)/(C(V) \bullet N)$, 及 $C(V)$ 在其上的作用. 因为 $C(V) \bullet N$ 是极大左理想, 所以由 Jacobson-Bourbaki 定理, $C(V)$ 在 S 之中稠密. 我们定义:

$$\mathrm{End}^k(S) = \overline{C^k(V)}$$

以及

$$\mathrm{End}_i(S) = \overline{C_i(V)}$$

我们知道, 此时 $\mathrm{End}^0 S$ 没有任何的不平凡元素, $\mathrm{End}^1 S$ 的不平凡元素由 n_i 的无限求和和 p_i 的有限求和生成. 元素 $l = \sum a_i n_i + \sum b_j p_j$ 作用在 S 上, 依照 $\rho(l) = \sum a_i \iota(n_i) + \sum b_j \epsilon(p_j)$ 嵌入 S 的自同态环. ρ 给出 Clifford 映射, 于是这一作用自然扩充至整个 $C(V)$ 上, 和原先的作用一致.

对于更高阶的元素, 我们仿照从 $\psi : C(V) \to \Lambda(V)$ 的过程, 去研究由 p_i, n_j 等元素的外积求和所生成的子空间 $\Lambda_N^* V$. 我们要求求和指标对于 p(的下标) 是有限的, 对于 n 则可以是无限的, 于是我们得到

$$\Lambda V \subset \Lambda_N V \subset \overline{\Lambda V}$$

和同构:

$$\beta : \mathrm{gr}^k \mathrm{End}(S) \to \Lambda_N^* V$$

其中 gr 的定义与前文有限维情形类似.

对于任意一个 $\Lambda_N V$ 中的元素 ω, 我们可以从其原像中找到一个代表元 : $\omega :\in \mathrm{End} S$, 将用基展开后的每一项中的 p 排在最前面, 再改写成 $C(V)$ 中的元素即可. 这一元素具体依赖于我们所选的基, 然而并不改变其在 $\mathrm{gr} C(V)$ 中的像, 从而构造出 β 的逆映射.

BRST 荷 (介绍)

我们在本讲义的最后给出无限维情形下量子化 BRST 构造的一个概述.

现在, 我们考虑 V 是可数维的李代数, 配上一个双不变度量. 继续考虑 $\overline{\Lambda^3 V}$ 中的元素 ω, 并且假设存在 N, P 使得 ω 在 $\Lambda_N^3 V$ 之中. 我们将依此继续完成 BRST 荷的构造.

考虑 $\mathrm{End}^3(S)$ 之中的元素 Q, 满足 $\mathrm{gr}^3 Q = \omega$. 继续, 我们可以证明 $Q^2 \in \mathrm{End}^2 S$, 并且 $c = [Q^2] \in \mathrm{gr}^2 \mathrm{End} S$ 是 Q-闭的. [2] 中点明 c 的上同调类是不变的, 且与有限维情形不同, 这一上同调类不能轻易选为 0, 这也预示着量子反常的出现.

回顾: 有限维情形下, 我们一般使用 $V = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$. 在这里我们需要模仿这一过程.

假设 $\mathfrak{g}$ 分次, 且 $\dim\mathfrak{g}_i < \infty$, 我们把 $\mathfrak{g}^*$ 替换为一个 coadjoint 不变的子空间 $\mathfrak{g}^{\#} := \oplus\mathfrak{g}_i$. 在这种情形下, 情形不仅满足节初的假设, 具体过程也非常类似有限维的情形, 并且兼容我们之前所提到的可约的经典 BRST 理论.

我们定义: $L = N \cap \mathfrak{g}$, 于是

$$N = L + L^0$$

其中 L^0 为 $\mathfrak{g}^{\#}$ 中 L 的零化子.

此时, 我们假设可以调整齐次空间, 使得:

$$L = \oplus_{i<0}\mathfrak{g}_i$$

于是

$$N = \oplus_{i<0}\}_i + \oplus_{j>0}\}_j^*$$

考虑到在齐次基 η^k, P_i 下, 我们得到:

$$\omega(\eta^k, P_i, P_j) = 0 \text{ unless } k = i + j$$

于是假设: 存在 N, P 使得 ω 在 $\Lambda^3_N V$ 之中得到验证.

此时, 我们写出

$$Q = \frac{1}{2} : \sum C^k_{ji}\eta^i \wedge \eta^j \wedge \xi_k :$$

为正规排序. 这样构造的 Q 的平方仍然会给出一个非平凡的同调类 $[c]$, 为此我们将寻求一个在物理场部分的算子作用的空间 T 上的投影表示 τ, 其对应的上同调类为 $-[c]$, 来消除 $[c]$ 所带来的非平凡同调类. 此处投影表示及其对应上同调类所需的理论由 [2] 引用自 [3].

我们希望

$$\mathbb{T} = \sum \eta^i \otimes \tau(P_a)$$

满足

$$\mathbb{T}^2 = \frac{1}{2}\sum \eta^i\eta^j \otimes [\tau(P_i), \tau(P_j)] = -\frac{1}{2}(c \otimes \mathrm{id} + \sum d\eta^i \otimes P_i)$$

于是 $\mathfrak{Q} = Q \otimes 1 + \frac{1}{2}\mathbb{T}$ 给出一个满足 $\mathfrak{Q}^2 = 0$ 的 BRST 荷算子.

3.4 通向另一种道路: 哈密顿版本的 Faddeev-Popov 作用量

我们在介绍完 [1] 和 [2] 中的量子化步骤之后, 还应关心如下的问题: 如何链接我们给出的量子化路线和经典路径, 即进行 gauge-fixing 后使用 Faddeev-Popov 技巧所给出的鬼场和作用量? 在 Faddeev-Popov 技巧下的 bc 鬼场和我们引入的鬼自由度 P, η 究竟有何关系? 我们将在本节解答这个问题.

首先, 一般的量子场论框架中, 构型空间的自由度事实上是同时以坐标点和场自由度构成的. 因此, 鬼场在我们的理论框架下仅仅与鬼自由度对应. 我们考虑一维情形的场论时, 单个 b, c 都仅仅是时间的向量值函数, 因此应当与单个的 P_a, η^a 这一类的自由度相对应. 我们期望找到一个哈密顿形式的作用量, 和我们在量子场论学习的 Faddeev-Popov 作用量 (至少是一维时空上) 仅仅差一些勒让德变换.

继续假设约束的不可约性, 并且假设约束给出的规范变换是一个李代数 (存在全局规范群), 我们将在此情况下讨论.

拉格朗日乘子的动力学

我们将再一次对相空间做出扩展. 考虑经典的大相空间中的拉格朗日乘子 λ^a, 及其决定的唯一的哈密顿量 $H_0 + \lambda^a G_a$, 并给出这时的哈密顿形式作用量

$$S_E = \int p\dot{q} - H_0 - \lambda^a G_a$$

在这里, 如果我们将 λ^a 也视作构型空间的坐标, 其对应的动量记为 b_a, 我们将得到在新的大相空间中的约束:

$$b_a \simeq 0$$

这一约束给出新的鬼动量和鬼场, 分别记作 $(-ic_a, -i\rho^a)$. c 和 ρ 有鬼数 ∓ 1. 然而, 我们经常将 c_a 视为场, 而 ρ^a 视为动量, 称为反鬼和反鬼动量. (事实上, 通过添加 i, c 和 ρ 的泊松括号关系确实与一般的正鬼动量和鬼场相反.)

考虑 $K = ic_a\chi^a - P_a\lambda^a$, 其中 χ 是 (p, q) 的函数 (一般理解为规范固定函数). 在这种情形下, 回顾没有 λ 的 BRST 荷:

$$\Omega = \eta^a G_a - \frac{1}{2}\eta^a\eta^b C^c_{ba} P_c$$

变为

$$\Omega = \eta^a G_a + (-i)\rho^a b_a - \frac{1}{2}\eta^a\eta^b C^c_{ba} P_c$$

注意 H 的任意性, 我们考虑 $S_K = S_E - \int [K, \Omega] dt$, 再将鬼动量的 on-shell 条件全部带入, 我们将得到 Faddeev-Popov 作用量:

$$S'_K[p, q, \lambda, b, \eta, c] = S_E + \int dt(\dot{\lambda}^a + \chi^a)b_a + \int -idtc_a\delta_\eta(\dot{\lambda} + \chi^a)$$

于是 b, η, c 和我们在 bc 鬼场里的 ϕ, b, c 自由度一一对应.

参考文献

[1] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, 1992.

[2] Bertram Kostant and Shlomo Sternberg. Symplectic reduction, brs cohomology, and infinite-dimensional clifford algebras. *Annals of Physics*, 176(1):49–113, 1987.

[3] D.H.Peterson V.G.Kac. Spin and wedge representations of infinite-dimensional lie algebras and groups. *Proc Natl Acad Sci U S A* ., 1981.

[4] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995.