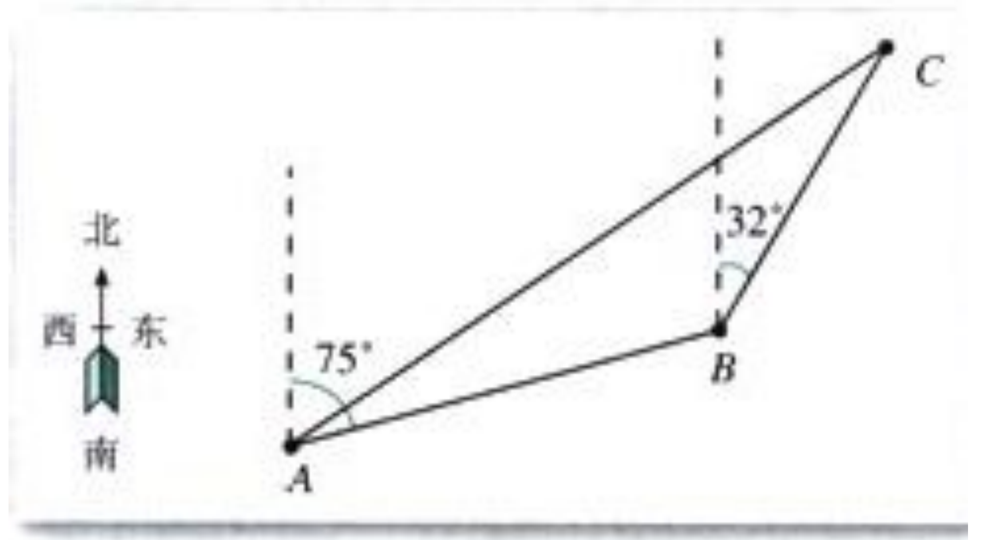
例6 一艘海轮从A出发，沿北偏东75°的方向航行67.5n mile后到达海岛B,然后从B出发，沿北偏东32°的方向航行54.0n mile后到达海岛C.如果下次航行直接从A出发到达C,此船应该沿怎样的方向航行，需要航行多少距离（角度精确到0.1°,距离精确到0.01n mile）？



解：在⊿ABC中，∠ABC＝180°－75°＋32°＝137°，根据余弦定理，

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\angle ABC}$$

$$=\sqrt{67.5^2+54.0^2-2\times67.5\times54.0\cos137^\circ}$$

$$\approx113.15$$

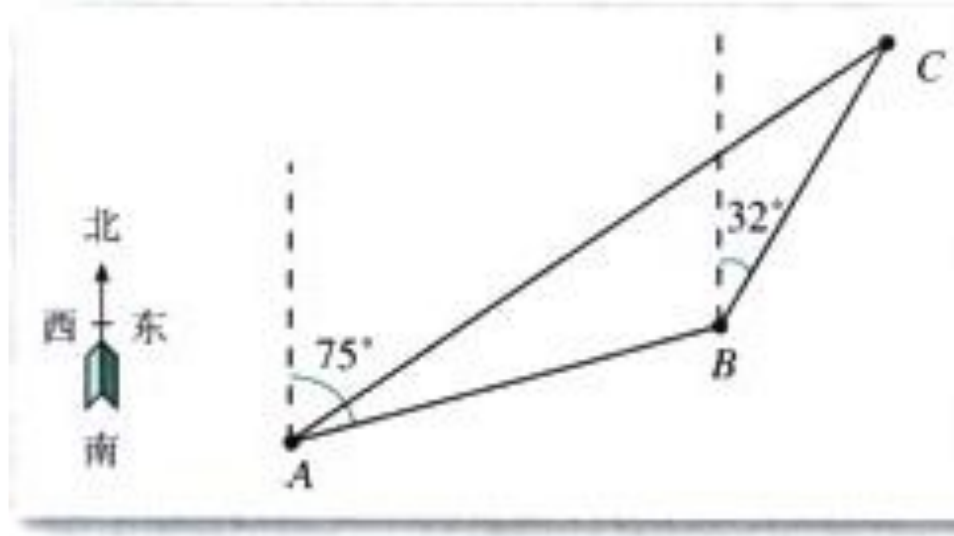
根据正弦定理，

$$\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

$$\sin\angle CAB=\frac{BC\sin\angle ABC}{AC}$$

$$=\frac{54.0\sin 137^{\circ}}{113.15}$$

$$\approx 0.3255,$$



所以，$\angle$**CAB=19.0°,**

75°－$\angle$CAB=56.0°.

答：此船应该沿北偏东**56.0°**的方向航行，需要航行**113.15n mile.**

例7 在⊿ABC中，根据下列条件，求三角形的面积S(精确到0.1cm²)

(1)已知a=14.8cm,c=23.5cm,B=148.5°;

解:(1)应用$S=\frac{1}{2}ca\sin B$,得

$$S=\frac{1}{2}\times 23.5\times 14.8\times \sin 148.5^{\circ}\approx 90.9(cm^{2})$$

(2)已知B=62.7°,C=65.8°,b=3.16cm;

(2)根据正弦定理，$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}, c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}b^2\frac{\sin C\sin A}{\sin B},$$

$$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(62.7^\circ+65.8^\circ)=51.5^\circ,$$

$$S=\frac{1}{2}\times 3.16^2\times\frac{\sin 65.8^\circ\sin 51.5^\circ}{\sin 62.7^\circ}\approx 4.0(cm^2).$$

（3）已知三边的长分别为a=41.4cm,b=27.3cm,c=38.7cm.

（3）根据余弦定理的推论，得

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{38.7^2+41.4^2-27.3^2}{2\times 38.7\times 41.4}\approx 0.7679$$

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}\approx\sqrt{1-0.7697^2}\approx 0.6384$$

应用$S=\frac{1}{2}ca\sin B$,得

$$S\approx\frac{1}{2}\times 38.7\times 41.4\times 0.6384\approx 511.4(cm^2).$$

例8 在某市进行城市环境建设中，要把一个三角形的区域改造成市内公园，经过测量得到这个三角形区域的三条边长分别为68m,88m,127m，这个区域的面积是多少（精确到0.1cm²）？

解：设a=68m,b=88m,c=127m,根据余弦定理的推论，

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{127^2+68^2-88^2}{2\times127\times68} \approx 0.7532,$$

$$\sin B = \sqrt{1-0.7532^2} \approx 0.6578.$$

应用$S=\frac{1}{2}ca\sin B$,得

$$S \approx \frac{1}{2}\times127\times68\times0.6578 \approx 2840.38(m^2).$$

答：这个区域的面积是$2840.38m^2$.

例9 在ΔABC中，求证：

(1) $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}$；

（2） $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$.

2.（1）根据余弦定理的推论，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

由同角三角函数之间的关系，

$$\begin{aligned}\sin C&=\sqrt{1-\cos^2 C}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2},\end{aligned}$$

代入

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

得

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\end{aligned}$$

记 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则可得到

$$\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a,$$

$$\frac{1}{2}(c+a-b)=p-b,$$

$$\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c.$$

代入可证得公式.

三角形的面积 S 与三角形内切圆半径 r 之间有关系式

在任一ΔABC中，求证：

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$$

在⊿ABC中，若B=60°,2b=a+c,试判断⊿ABC的形状。