深蓝学院
shenlanxueyuan.com

机器人学中的状态估计

Timothy Barfoot 著 高翔，谢晓佳等 译
Slides by Xiang Gao

2020年春

第5讲 三维几何学基础

- 向量和参考系
- 旋转
- 姿态

注意

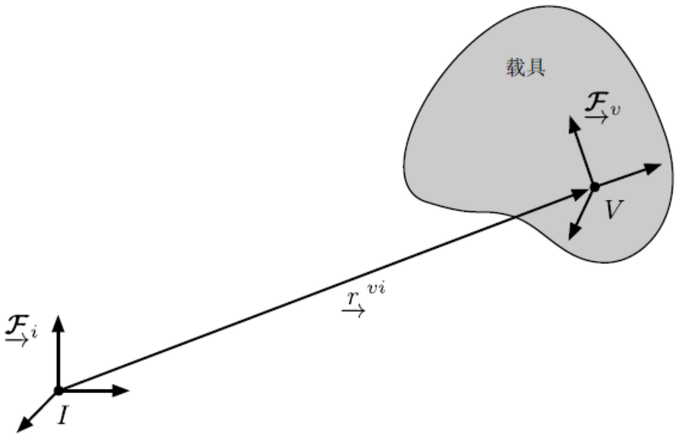
- 本章的几个注意点：
  - 注意区别向量的变换关系与坐标的变换关系
  - 向量变换关系告诉我们向量之间的运算，而坐标变换关系则真正告诉我们数值上的计算

第5讲 三维几何学基础

- 向量和参考系
- 旋转
- 姿态

向量和参考系

- 本章和下章将重点介绍三维空间的各种性质，内容比较丰富
- 本章介绍三维空间，下章介绍三维空间上的李群李代数
- 在考虑实际的车辆或机器人问题时，通常会定义固定在世界上、车辆上的参考系，以及各参考系之间的关系

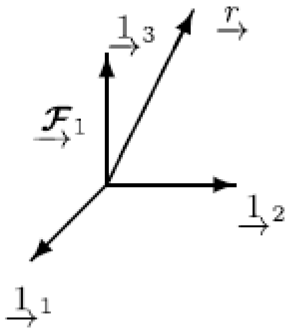


术语：

- 姿态（pose）：六自由度
    - 姿态包含位置（position）和朝向（orientation）
    - 位置和朝向各有三个自由度
- 有些地方，把朝向称为“姿态”，而把这里的“姿态”称为“位姿”
- 但这只是翻译习惯的问题，这里我们统一把6自由度的称为“姿态”

向量和参考系

- 参考系



$$\begin{aligned}\underrightarrow{r} &= r_1 \underrightarrow{1}_1 + r_2 \underrightarrow{1}_2 + r_3 \underrightarrow{1}_3 \\ &= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underrightarrow{1}_1 \\ \underrightarrow{1}_2 \\ \underrightarrow{1}_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{r}_1^{\mathrm{T}} \underrightarrow{\mathcal{F}}_1\end{aligned}$$

- 3D空间中，一个参考系由三个单位正交的空间向量组成
- 空间向量的符号是下方加一个箭头，如：$\underrightarrow{1}_1$

  注意：
  1. 空间向量只是一个符号，指代这样一个有长度有方向的东西，本身不带有“坐标”的概念，所以请不要把它和几个数值联系起来
  2. 向量本身可以取长度，计算夹角、内外积，这些计算结果是有效的数值

请务必区别空间向量与平时使用的数学向量！

同样注意矢阵没有数值！虽然它的运算与矩阵相似，但不是通常意义上的矩阵！

- 坐标系由斜体符号带下箭头组成，如：$\underrightarrow{\mathcal{F}}_1 = \begin{bmatrix} \underrightarrow{1}_1 \\ \underrightarrow{1}_2 \\ \underrightarrow{1}_3 \end{bmatrix}$ 这个称为“矢阵”（vectrix）
- 于是向量 $\underrightarrow{r}$ 可以在这个参考系下表出
  - 左侧的 $\mathbf{r}_1^{\mathrm{T}}$ 是这个向量的坐标，它是有具体取值的
  - 通常写成列的形式：$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$

向量和参考系

- 向量之间可以计算点积，考虑两个向量：

$$\underset{\rightarrow}{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\rightarrow}{1}_1 \\ \underset{\rightarrow}{1}_2 \\ \underset{\rightarrow}{1}_3 \end{bmatrix}, \quad \underset{\rightarrow}{s} = \begin{bmatrix} \underset{\rightarrow}{1}_1 & \underset{\rightarrow}{1}_2 & \underset{\rightarrow}{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

- 其内积为：

$$\underset{\rightarrow}{r} \cdot \underset{\rightarrow}{s} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\rightarrow}{1}_1 \\ \underset{\rightarrow}{1}_2 \\ \underset{\rightarrow}{1}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{\rightarrow}{1}_1 & \underset{\rightarrow}{1}_2 & \underset{\rightarrow}{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\rightarrow}{1}_1 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_1 & \underset{\rightarrow}{1}_1 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_2 & \underset{\rightarrow}{1}_1 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_3 \\ \underset{\rightarrow}{1}_2 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_1 & \underset{\rightarrow}{1}_2 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_2 & \underset{\rightarrow}{1}_2 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_3 \\ \underset{\rightarrow}{1}_3 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_1 & \underset{\rightarrow}{1}_3 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_2 & \underset{\rightarrow}{1}_3 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

中间部分有单位正交性：

$$\underset{\rightarrow}{1}_1 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_1 = \underset{\rightarrow}{1}_2 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_2 = \underset{\rightarrow}{1}_3 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_3 = 1$$

$$\underset{\rightarrow}{1}_1 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_2 = \underset{\rightarrow}{1}_2 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_3 = \underset{\rightarrow}{1}_3 \cdot \underset{\rightarrow}{1}_1 = 0$$

于是： $\underset{\rightarrow}{r} \cdot \underset{\rightarrow}{s} = r_1^T 1 s_1 = r_1^T s_1 = r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3$

- ☐ 该式给出了内积结果与坐标数值之间的联系
- ☐ 但是内积也可以通过向量本身的长度和夹角来确定，不需要指定坐标系

向量和参考系

- 叉积：

$$\underrightarrow{r} \times \underrightarrow{s} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underrightarrow{1}_1 \times \underrightarrow{1}_1 & \underrightarrow{1}_1 \times \underrightarrow{1}_2 & \underrightarrow{1}_1 \times \underrightarrow{1}_3 \\ \underrightarrow{1}_2 \times \underrightarrow{1}_1 & \underrightarrow{1}_2 \times \underrightarrow{1}_2 & \underrightarrow{1}_2 \times \underrightarrow{1}_3 \\ \underrightarrow{1}_3 \times \underrightarrow{1}_1 & \underrightarrow{1}_3 \times \underrightarrow{1}_2 & \underrightarrow{1}_3 \times \underrightarrow{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \underrightarrow{1}_3 & -\underrightarrow{1}_2 \\ -\underrightarrow{1}_3 & 0 & \underrightarrow{1}_1 \\ \underrightarrow{1}_2 & -\underrightarrow{1}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underrightarrow{1}_1 & \underrightarrow{1}_2 & \underrightarrow{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$= \underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} r_1{}^{\times} s_1$$

- 叉积的结果是一个向量，它的坐标是倒数第二行右侧项
- 我们把反对称算子写出来：

$$r_1{}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

  - 可以把它看成叉积算子或反对称算子

- 容易验证：

$$(r_1{}^{\times})^{\mathrm{T}} = -r_1{}^{\times}$$

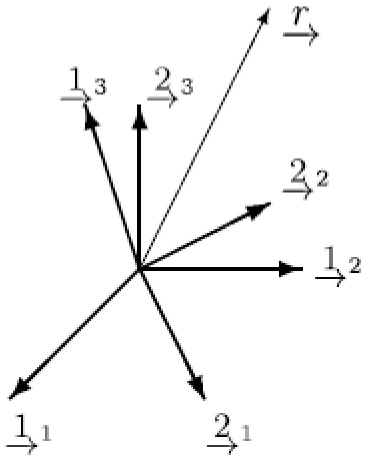
$$r_1{}^{\times} r_1 = 0 \qquad r_1{}^{\times} s_1 = -s_1{}^{\times} r_1$$

第5讲 三维几何学基础

- 向量和参考系
- 旋转
- 姿态

旋转

- 考虑两个系：1系和2系；某一个向量 $\underrightarrow{r}$ 在两个系里分别表示为： $\underrightarrow{r} = \underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} r_1 = \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} r_2$



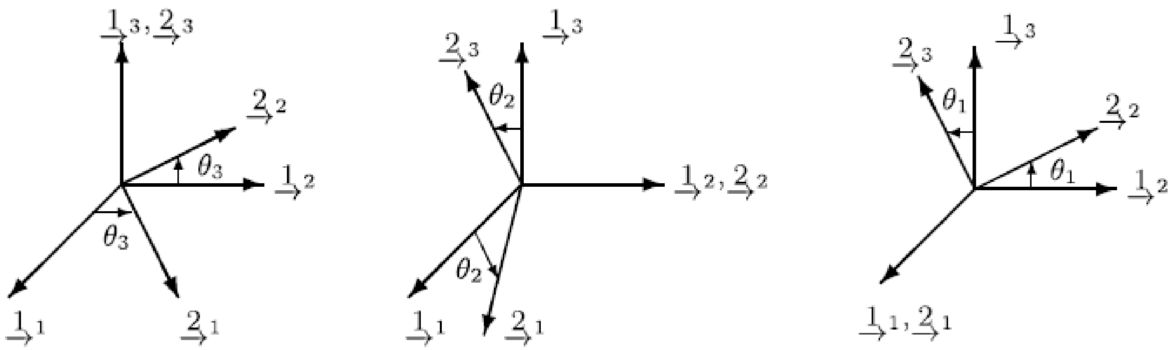
$$\begin{aligned}\underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} r_2 &= \underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} r_1 \\ \underrightarrow{\mathcal{F}}_2 \cdot \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} r_2 &= \underrightarrow{\mathcal{F}}_2 \cdot \underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} r_1 \\ r_2 &= C_{21} r_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{21} &= \underrightarrow{\mathcal{F}}_2 \cdot \underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{bmatrix} \underrightarrow{2}_1 \\ \underrightarrow{2}_2 \\ \underrightarrow{2}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underrightarrow{1}_1 & \underrightarrow{1}_2 & \underrightarrow{1}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underrightarrow{2}_1 \cdot \underrightarrow{1}_1 & \underrightarrow{2}_1 \cdot \underrightarrow{1}_2 & \underrightarrow{2}_1 \cdot \underrightarrow{1}_3 \\ \underrightarrow{2}_2 \cdot \underrightarrow{1}_1 & \underrightarrow{2}_2 \cdot \underrightarrow{1}_2 & \underrightarrow{2}_2 \cdot \underrightarrow{1}_3 \\ \underrightarrow{2}_3 \cdot \underrightarrow{1}_1 & \underrightarrow{2}_3 \cdot \underrightarrow{1}_2 & \underrightarrow{2}_3 \cdot \underrightarrow{1}_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

这里的C21称为旋转矩阵/方向余弦矩阵，可以用于进行坐标的转换

旋转

- 旋转矩阵的性质：
  - 旋转矩阵的逆矩阵与转置相同： $C_{12} = C_{21}^{-1} = C_{21}^{T}$ 因此它是正交矩阵（orthonormal matrix）
  - 绕三个方向上旋转：



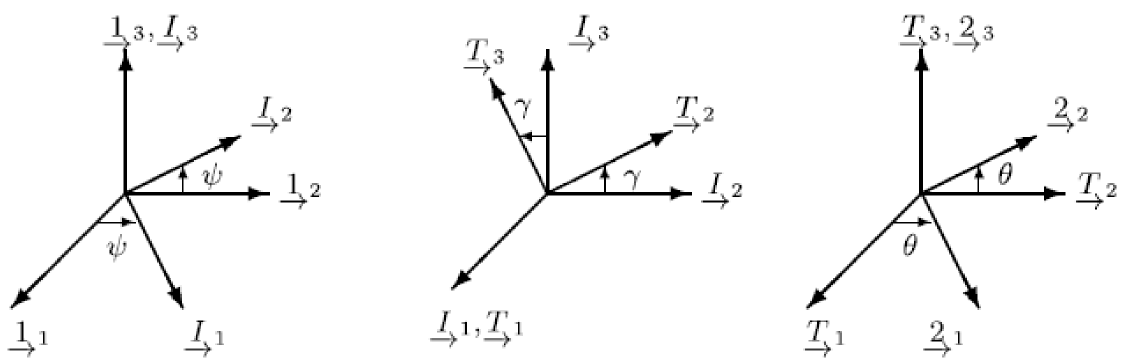
$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转

- 其他旋转表达形式
  - 旋转矩阵是9参数3自由度的，因此必须带有约束（正交且行列式为1）
  - 多于3个参数的表达式，必然有额外约束；只有3个参数的表达式，必然存在奇异点。
- 欧拉角
  - 用一系列绕主轴的旋转之序列来分解某个旋转，例如3-1-3的欧拉角：



θ：自旋角（spin angle）；

γ：章动角（nutation angle）；

ψ：进动角（precession angle）。

$$
\begin{aligned}
C_{21}(\theta,\gamma,\psi) &= C_{2T}C_{TI}C_{I1} \\
&= C_3(\theta)C_1(\gamma)C_3(\psi) \\
&= \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi - s_\theta c_\gamma s_\psi & s_\psi c_\theta + c_\gamma s_\theta c_\psi & s_\gamma s_\theta \\ -c_\psi s_\theta - c_\theta c_\gamma s_\psi & -s_\psi s_\theta + c_\theta c_\gamma c_\psi & s_\gamma c_\theta \\ s_\psi s_\gamma & -s_\gamma c_\psi & c_\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

旋转

- 其他例子的欧拉角：1-2-3（翻滚-俯仰-偏航）

$$C_{21}(\theta_3,\theta_2,\theta_1)=C_3(\theta_3)C_2(\theta_2)C_1(\theta_1)$$

$$=\begin{bmatrix} c_2c_3 & c_1s_3+s_1s_2c_3 & s_1s_3-c_1s_2c_3 \\ -c_2s_3 & c_1c_3-s_1s_2s_3 & s_1c_3+c_1s_2s_3 \\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}$$

所有欧拉角都有奇异点，RPY中P=90度时：

$$C_{21}(\theta_3,\frac{\pi}{2},\theta_1)=\begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta_1+\theta_3) & -\cos(\theta_1+\theta_3) \\ 0 & \cos(\theta_1+\theta_3) & \sin(\theta_1+\theta_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见Roll和Yaw描述了同样的运动，此时，给定某个姿态时，计算出来的欧拉角不是唯一的（Roll和Yaw可以任意取值，只要和不变）

旋转

- RPY中，如果旋转角度很小：

$$
\begin{aligned}
C_{21}(\theta_3, \theta_2, \theta_1) &= C_3(\theta_3)C_2(\theta_2)C_1(\theta_1) \\
&= \begin{bmatrix} c_2c_3 & c_1s_3 + s_1s_2c_3 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 \\ -c_2s_3 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & s_1c_3 + c_1s_2s_3 \\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

这时把：

$$
\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}
$$

称为旋转向量（rotation vector）

- 那么cos约等于1，sin约等于一次项，两个sin可忽略：

$$
\begin{aligned}
C_{21} &\approx \begin{bmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\approx 1 - \theta^{\times}
\end{aligned}
$$

旋转

- 欧拉旋转定理：刚体在三维空间的一般运动可分解为刚体上方某一点的平移，以及绕此点旋转轴的转动
- 我们把旋转轴定义为 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}$，角度定义为 ϕ，那么旋转矩阵可表为：

$$\boldsymbol{C}_{21}=\cos\phi\mathbf{1}+(1-\cos\phi)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-\sin\phi\boldsymbol{a}^{\times}$$

- 该式即罗德里格斯公式。
- 如果把转轴和角度写为：$\eta=\cos\frac{\phi}{2},\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{a}\sin\frac{\phi}{2}=\begin{bmatrix}a_1\sin(\phi/2)\\a_2\sin(\phi/2)\\a_3\sin(\phi/2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{bmatrix}$
- 那么也可以用参数ε，η来表示旋转，这种表示称为欧拉参数（Euler parameters）

旋转

- 四元数
  - 四元数使用扩展的复数来表达旋转，3D旋转可以用单位四元数表达
  - 由于四元数在各种教材中都有涉及，本课程不展开四元数的详细性质，重点放在后面运动学和动力学上
  - 本书使用的四元数：

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix}$$

虚部,3x1向量
实部，1维标量

  - 定义两个算子：

$$\boldsymbol{q}^{+} = \begin{bmatrix} \eta\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\times} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}^{\oplus} = \begin{bmatrix} \eta\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\times} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix}$$

可以把四元数表为旋转矩阵：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{q}^{+}\boldsymbol{q}^{-1^{\oplus}} = \boldsymbol{q}^{-1^{\oplus}}\boldsymbol{q}^{+} = \boldsymbol{q}^{\oplus^{T}}\boldsymbol{q}^{+} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{T} & 1 \end{bmatrix}$$

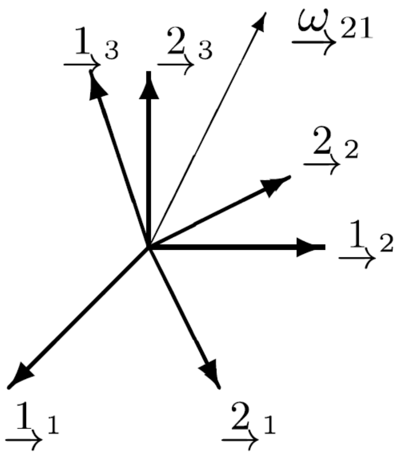
旋转

- Gibbs向量（略）

- 以上谈了各种旋转的表达方式，但这是不够的
- 我们更关心它的运动特性和状态估计特性
- 下面来介绍运动学

运动学

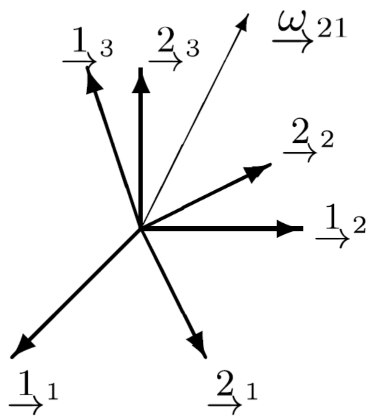
- 设参考系F2正在绕F1旋转，它的旋转角速度是一个向量，记作 $\underset{\rightarrow}{\omega}_{21}$，反过来的记作 $\underset{\rightarrow}{\omega}_{12} = -\underset{\rightarrow}{\omega}_{21}$



聪明的小读者会问：角速度是什么？为什么它是个向量呢？

- 旋转是由转轴和速度刻画的；
- 把转轴定义成方向，速度大小定义为长度，就得到了角速度向量；
- 由于转轴和速度都是可变的，所以我们现在谈论的是瞬时转轴；
- 同样，在没有定义参考系时，没法谈论这个向量的坐标或数值

运动学



不是说坐标不一样，而是向量本身不一样

- 向量随时间发生变化
  - 从其中一个系里看来，另一个系的三个轴在不断地运动，因此可以谈论向量时间导数（vector time derivate）
  - 向量时间导数仍然是向量，但是在不同系里是不一样的。例如：1系的三个轴在1系里是不动的，但在2系里看来是动的。所以，用不同的符号来表达导数在哪个系里取：

$$\underrightarrow{\mathcal{F}}^{\bullet}_1 = \underrightarrow{0}, \quad \underrightarrow{\mathcal{F}}^{\circ}_2 = \underrightarrow{0}$$

黑点表示在1系中取导数，白点在2系中显然自身三个轴在自身看来不动；

  - 2系的三个轴在1系看来，以 $\underrightarrow{\omega}_{21}$ 约角速度转动：

$$\underrightarrow{2}^{\bullet}_1 = \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{2}_1, \quad \underrightarrow{2}^{\bullet}_2 = \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{2}_2, \quad \underrightarrow{2}^{\bullet}_3 = \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{2}_3$$

$$\underrightarrow{\mathcal{F}}^{\bullet T}_2 = \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{\mathcal{F}}^{T}_2$$

  - 等价地写成：$\begin{bmatrix} \underrightarrow{2}^{\bullet}_1 & \underrightarrow{2}^{\bullet}_2 & \underrightarrow{2}^{\bullet}_3 \end{bmatrix} = \underrightarrow{\omega}_{21} \times \begin{bmatrix} \underrightarrow{2}_1 & \underrightarrow{2}_2 & \underrightarrow{2}_3 \end{bmatrix}$

注意这里依然没涉及数值
请区分向量时间导数与坐标的时间导数

运动学

- 对于某个向量 $\underrightarrow{r}$ ，它的表达式为：$\underrightarrow{r} = \boxed{\underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_1} = \boxed{\underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_2}$

□ 注意 r 本身是在变的

- 对该式求时间导数，导数运算法则仍然成立：

$$\underrightarrow{r}^{\bullet} = \underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\bullet\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_1 + \underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1 = \underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1$$

为零 只乘r1的坐标导数

这两个结论是平凡的，显然在自己的系下，坐标轴不动，变化的只有坐标

- 对橙色框取2系的时间导数（白点）：

$$\underrightarrow{r}^{\circ} = \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\circ\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_2 + \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \overset{\circ}{\boldsymbol{r}}_2 = \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \overset{\circ}{\boldsymbol{r}}_2 = \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2$$

- 也可以对橙框取1系的时间导数（黑点）：

坐标对时间导数是数值的，取黑白点都是一样的

$$\begin{aligned}
\underrightarrow{r}^{\bullet} &= \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 + \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\bullet\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_2 \\
&= \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 + \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_2 \\
&= \underrightarrow{r}^{\circ} + \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{r}
\end{aligned}$$

这个结论是有意义，揭示了黑白点（速度向量）之间的转换关系

运动学

- 对角速度取坐标： $\underset{\rightarrow}{\omega}_{21} = \underset{\rightarrow}{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\omega}_2^{21}$
- 那么可写出坐标之间的变换关系： $\underset{\rightarrow}{r}^{\bullet} = \underset{\rightarrow}{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1 = \underset{\rightarrow}{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 + \underset{\rightarrow}{\omega}_{21} \times \underset{\rightarrow}{r}$

$$
\begin{aligned}
&= \underset{\rightarrow}{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 + \underset{\rightarrow}{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\omega}_2^{21^\times} \boldsymbol{r}_2 \\
&= \underset{\rightarrow}{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} (\dot{\boldsymbol{r}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2^{21^\times} \boldsymbol{r}_2)
\end{aligned}
$$

- 利用旋转矩阵C12，将其统一到1系的坐标：

$$
\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{C}_{12} (\dot{\boldsymbol{r}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2^{21^\times} \boldsymbol{r}_2)
$$

该式完全是坐标变换关系

运动学

- 速度
  - 速度即位移的时间导数，它也是一个向量，而且在两个系中看起来不同

$$\underrightarrow{v} = \underrightarrow{r}^{\bullet} = \underrightarrow{r}^{\circ} + \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{r}$$

同样，不是说速度这个向量在两个系中坐标不同，而是说，两个系中速度向量本来就不是同一个

  - 再求一次1系的时间导数，可得到加速度向量的变换关系：

$$\begin{aligned}\underrightarrow{r}^{\bullet\bullet} = \underrightarrow{v}^{\bullet} &= \underrightarrow{v}^{\circ} + \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{v} \\ &= \left(\underrightarrow{r}^{\circ\circ} + \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{r}^{\circ} + \underrightarrow{\omega}^{\circ}_{21} \times \underrightarrow{r}\right) \\ &\quad + \left(\underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{r}^{\circ} + \underrightarrow{\omega}_{21} \times \left(\underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{r}\right)\right) \\ &= \underrightarrow{r}^{\circ\circ} + 2\underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{r}^{\circ} + \underrightarrow{\omega}^{\circ}_{21} \times \underrightarrow{r} + \underrightarrow{\omega}_{21} \times \left(\underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{r}\right)\end{aligned}$$

代入坐标：

$$\underrightarrow{r}^{\bullet\bullet} = \underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{r}}_1, \quad \underrightarrow{r}^{\circ\circ} = \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{r}}_2, \quad \underrightarrow{\omega}^{\circ}_{21} = \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_2^{21}$$

于是得：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{C}_{12}\left[\ddot{\boldsymbol{r}}_2 + 2\boldsymbol{\omega}_2^{21^\times}\dot{\boldsymbol{r}}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2^{21^\times}\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{\omega}_2^{21^\times}\boldsymbol{\omega}_2^{21^\times}\boldsymbol{r}_2\right]$$

2系加速度 角加速度

科式加速度 向心加速度

运动学

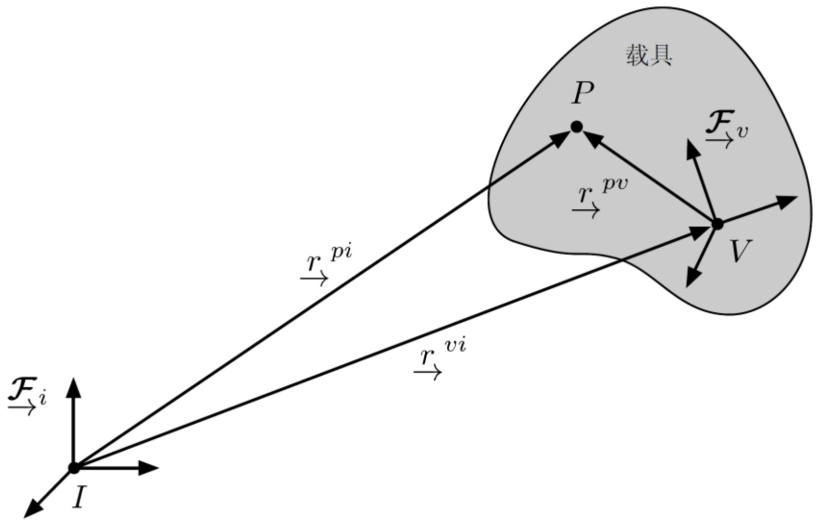
- 角速度与旋转矩阵的关系
  - 旋转矩阵刻画两个参考系之间的变换：$\underrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\mathrm{T}} = \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{21}$
  - 两侧取1系的时间导数：$\underrightarrow{0} = \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\bullet\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{21} + \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{C}}_{21}$
  - 代入角速度表达式：$\underrightarrow{0} = \underrightarrow{\omega}_{21} \times \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{21} + \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{C}}_{21}$
  - 代入角速度坐标：$$\begin{aligned}\underrightarrow{0} &= \boldsymbol{\omega}_2^{21^{\mathrm{T}}} \underrightarrow{\mathcal{F}}_2 \times \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{21} + \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{C}}_{21} \\ &= \underrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\omega}_2^{21^{\times}} \boldsymbol{C}_{21} + \dot{\boldsymbol{C}}_{21} \right)\end{aligned}$$
  - 内部为零，于是：$\dot{\boldsymbol{C}}_{21} = -\boldsymbol{\omega}_2^{21^{\times}} \boldsymbol{C}_{21}$
  - 因此，角速度给出了旋转矩阵在时间上的微分关系。该式称为泊松公式（Poisson’s Equation）。
  - 欧拉角序列的运动学（略）

第5讲 三维几何学基础

- 向量和参考系
- 旋转
- 姿态

姿态

- 下面我们把平移也考虑进来：



平移部分的向量关系：

$$\underrightarrow{r}^{pi} = \underrightarrow{r}^{pv} + \underrightarrow{r}^{vi}$$

取 I 系作为参考系，那么坐标关系为：

$$\boldsymbol{r}_i^{pi} = \boldsymbol{r}_i^{pv} + \boldsymbol{r}_i^{vi}$$

如果 P 固定在载具上，那么利用载具系的旋转矩阵，可写为：

$$\boldsymbol{r}_i^{pi} = \boldsymbol{C}_{iv}\boldsymbol{r}_v^{pv} + \boldsymbol{r}_i^{vi}$$

那么载具的姿态（或位姿）记为： $\{\boldsymbol{r}_i^{vi}, \boldsymbol{C}_{iv}\}$

注意实际取Cvi或riv都是可以的

姿态

- 有了平移之后，加进旋转矩阵，将其扩充为变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_i^{pi} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{iv} & \boldsymbol{r}_i^{vi} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}_{iv}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_v^{pv} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 变换矩阵在使用时，需要对3D点坐标末尾增加一个1，使之成为齐次坐标：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

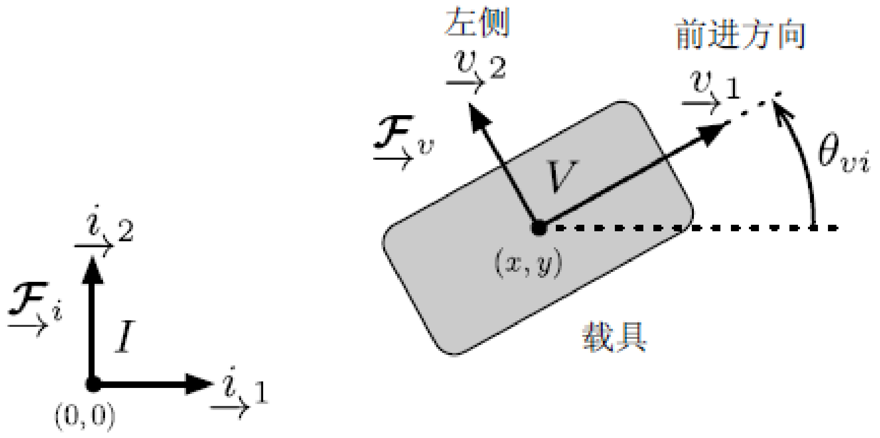
  - 齐次坐标在计算机视觉中很有用，不过状态估计中不必展开讨论
- 不需要齐次坐标时，把最后的1去掉即可。
- 有了齐次坐标，变换矩阵就可以累乘： $\boldsymbol{T}_{iv} = \boldsymbol{T}_{ia}\boldsymbol{T}_{ab}\boldsymbol{T}_{bv}$

姿态

- 例子：2D车辆
  - 世界参考系为I系，车辆系为V系；
  - 车辆的位置表达为I到V的向量在I系下取坐标：$r_i^{vi} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$
  - 而方向可以取I到V的旋转矩阵或其逆：

$$C_{vi} = C_3(\theta_{vi}) = \begin{bmatrix} \cos\theta_{vi} & \sin\theta_{vi} & 0 \\ -\sin\theta_{vi} & \cos\theta_{vi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{iv} = C_{vi}^{\mathrm{T}} = C_3(-\theta_{vi}) = C_3(\theta_{iv})$$



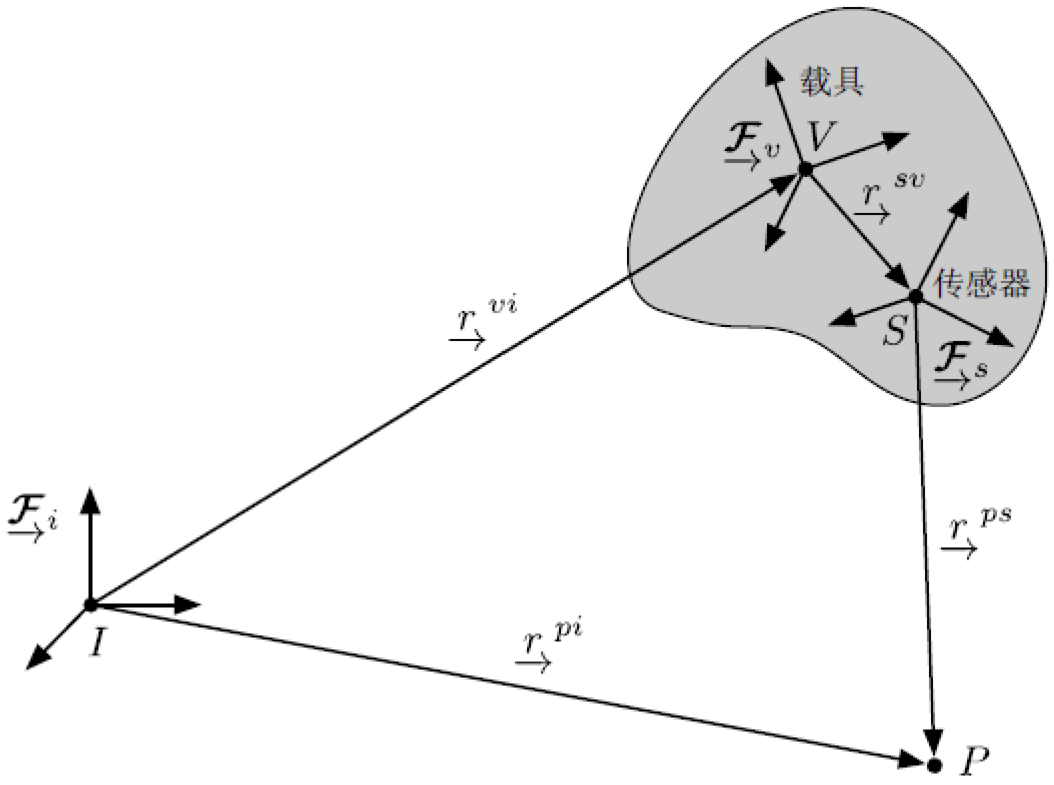
  - 那么用于表示车辆姿态的变换矩阵可以取：

$$T_{iv} = \begin{bmatrix} C_{iv} & r_i^{vi} \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{vi} & -\sin\theta_{vi} & 0 & x \\ \sin\theta_{vi} & \cos\theta_{vi} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

姿态

- Frenet标架（略）
- 传感器模型
    - 传感器安装于载具上，有自己的参考系
    - 传感器系到载具系的相对姿态称为外参：T_{sv}
    - 传感器自身还有测量模型，构成观测方程

    - 各种相机模型请参考VSLAM相关课程
    - IMU传感器参见VIO课程
    - 激光点云模型参见激光课程
    - 本课程不作展开



习题

- 课后习题1,2,3,4.