CÁLCULO - Ciência da Computação

FISCHER STEFAN

EMGE - Escola de Engenharia de Minas Gerais

8 de fevereiro de 2024

Dom Helder
ESCOLA SUPERIOR

Nesta seção estudaremos Integrais. Integrais são o terceiro e último tópico principal que serão abordados neste curso. Assim como as derivadas, este capítulo será dedicado quase exclusivamente para encontrar e calcular Integrais. As aplicações serão apresentadas posteriormente neste curso. Estudaremos dois tipos de integrais: Integrais Indefinidas e Integrais Definidas. A primeira metade deste capítulo é dedicada às Integrais Indefinidas e a última metade é dedicada às Integrais Definidas. Como veremos na última metade do capítulo, se não soubermos Integrais Indefinidas, não seremos capazes de fazer Integrais Definidas.

- Integrais Indefinidas.
- Cálculo das Integrais.
- Propriedades.
- Regra Substituição simples.
- Regra Integração por Partes.
- Aplicações.

fischer.stefan@emge.edu.br

Definição

Definition

Se f é uma função definida em um intervalo $a \leq x \leq b$, dividiremos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de iguais comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0(= a), x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n(= b)$ os extremos destes subintervalos e $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ quaisquer pontos nestes subintervalos, então x_i^* está no *ith* subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Assim a Integral definida de f de a até b é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

dado que este limite existe e fornece o mesmo valor para todos as possíveis escolhas dos pontos no intervalo mencionado acima. Se ele existe, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ [1]

[1] Definição extraída do livro de Cálculo 8^a Edição, James Stweart.

Definição

O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é chamado do sinal da Integral. Apresenta-se como um S alongado e foi escolhido porque uma Integral é um limite de somas. Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ é chamada de integrando e a e b são chamados de limites de integração; a é o limite inferior e b é o limite superior. Por enquanto, o símbolo dx terá em si nenhum significado; $\int_a^b f(x)\,dx$ é toda uma notação. O dx simplesmente indica que a variável a ser integrada é x. O procedimento de cálculo de uma Integral é chamado de integração.

Soma de Riemann

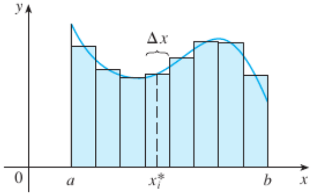

FIGURE 1
If $f(x) \geqslant 0$, the Riemann sum $\Sigma f(x_i^*)\,\Delta x$ is the sum of areas of rectangles.

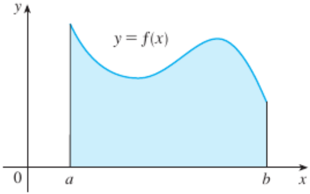

FIGURE 2
If $f(x) \geqslant 0$, the integral $\int_a^b f(x)\,dx$ is the area under the curve $y = f(x)$ from a to b.

Figura: Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b

Dom Helder
ESCOLA SUPERIOR

Propriedades

- $\displaystyle\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$
- $\displaystyle\int_a^b cf(x) \pm g(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, onde c é uma constante.

Fórmula para Integração

- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
- $\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$
- $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x) + C$

Exemplos

Example

1. $\int 5t^3 - 10t^{-6} + 4\,dt = 5\frac{t^4}{4} + 10\frac{t^{-5}}{5} + 4t + C$ Lembre-se de que quando integramos potências (que não são da forma t^{-1}), apenas adicionamos 1 no expoente e dividimos pelo novo expoente.
2. $\int x^8 + x^{-8}\,dx = \frac{x^9}{9} - \frac{x^{-7}}{7} + C$ Tenha cuidado ao integrar expoentes negativos. Um dos erros mais comuns que os alunos acabam cometendo quando integram expoentes negativos é adicionar 1 e retornar com expoente $'-9'$ ao invés de retornar com o expoente correto que é $'-7'$. Preste bastante atenção com as divisões por números negativos: a fração apresentará um denominador negativo.
3. $\int \sqrt[4]{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{6\sqrt{x}}\,dx$. Tal qual fazemos com as derivadas, nós podemos escrever todos estes termos de tal forma que estejam no numerador, assim todos eles terão um expoente. Isto deve sempre ser seu primeiro passo quando se deparar com este tipo de Integral, da mesma forma que fazia com o processo de derivação. **Não se esqueça de transformar as raízes em expoentes fracionados!**

Exemplos

Vejamos,

$$\int x^{\frac{3}{4}} + 7x^{-5} + \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$\frac{1}{7/4}x^{\frac{7}{4}} - \frac{7}{4}x^{-4} + \frac{1}{6}\frac{1}{1/2}x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{7}{4}x^{-4} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} + C$$

Exemplos

Dadas as seguintes informações, determine a função $f(x)$:

$$1)\ f'(x) = 4x^3 - 9 + 2\sin(x) + 7e^x,\ f(0) = 15$$

In both of these we will need to remember that

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

Also note that because we are giving values of the function at specific points we are also going to be determining what the constant of integration will be in these problems.

(a) $f'(x) = 4x^3 - 9 + 2\sin x + 7\mathbf{e}^x,\ f(0) = 15$

The first step here is to integrate to determine the most general possible $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int 4x^3 - 9 + 2\sin x + 7\mathbf{e}^x\,dx \\ &= x^4 - 9x - 2\cos x + 7\mathbf{e}^x + c \end{aligned}$$

Now we have a value of the function so let's plug in $x = 0$ and determine the value of the constant of integration c.

$$\begin{aligned} 15 = f(0) &= 0^4 - 9(0) - 2\cos(0) + 7\mathbf{e}^0 + c \\ &= -2 + 7 + c \\ &= 5 + c \end{aligned}$$

So, from this it looks like $c = 10$. This means that the function is,

$$f(x) = x^4 - 9x - 2\cos x + 7\mathbf{e}^x + 10$$

Figura: Solução da questão #1

Exemplos

$$2)\ f'(x) = x^4 + 3x - 9$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int x^4 + 3x - 9dx$$

$$\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^2}{2} - 9x + C$$

Reference