第3章 暂态电路的分析

- 重点

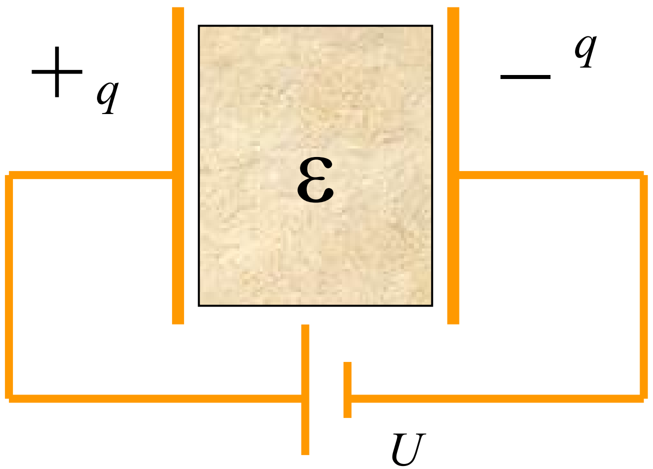
1.动态电路方程的建立及初始条件的确定;

2. 一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应的概念及求解;

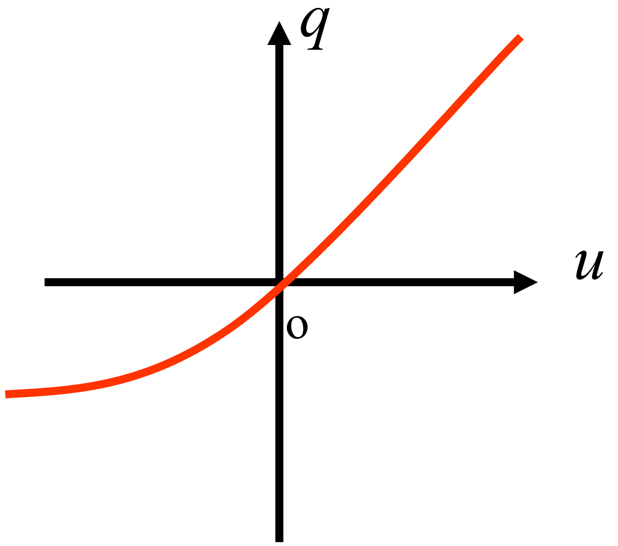
电容元件

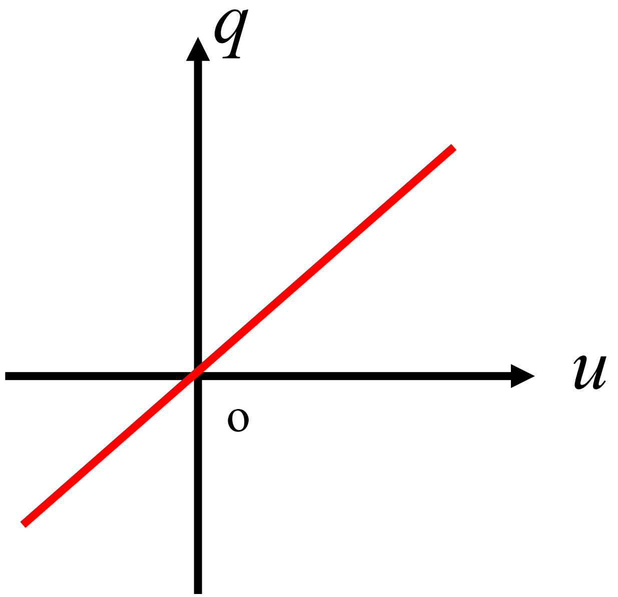
电容器　　电导体由绝缘材料分开就可以产生电容。

在外电源作用下，正负电极上分别带上等量异号电荷，撤去电源，电极上的电荷仍可长久地聚集下去，是一种储存电能的部件。



电容元件：储存电能的两端元件。任何时刻其储存的电荷 q 与其两端的电压 u能用$q\sim u$ 平面上的一条曲线来描述。



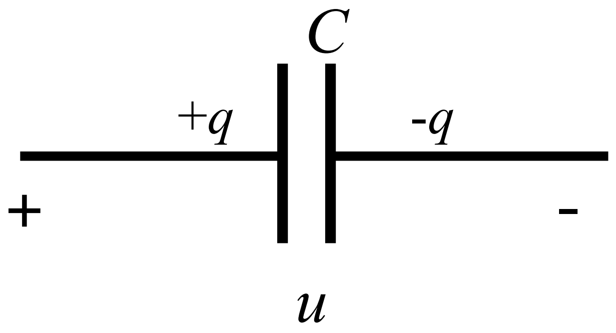


任何时刻，电容元件极板上的电荷q与电压 u 成正比。

q~u 特性曲线是过原点的直线。

$$q = Cu$$ ——线性时不变电容

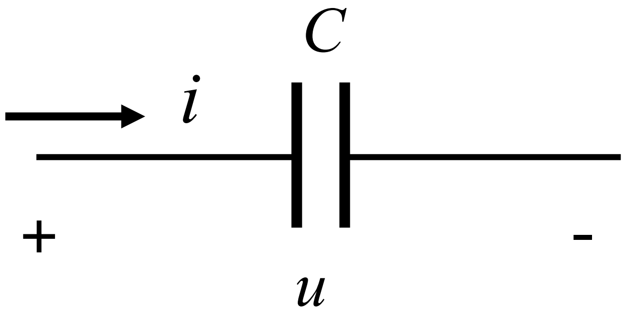
- 电路符号



$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

单位：F (法拉), μF， pF　　1F=10^6 μF, 1 μF =10^6pF

- 伏安特性



当 u、i 取关联参考方向

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Cu}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

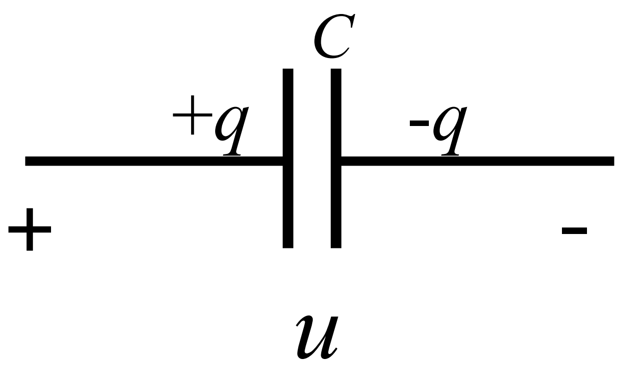
表明

①某一时刻电容电流 i 的大小取决于电容电压 u 的变化率,而与该时刻电压 u 的大小无关。电容是动态元件;

②当 u 为常数(直流)时，$i=0$。电容相当于开路，电容有隔断直流作用;

③实际电路中通过电容的电流 i 为有限值，则电容电压 u 必定是时间的连续函数。

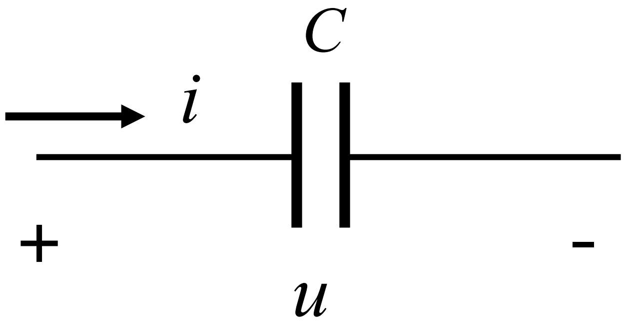
- 电路符号



$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

单位：F (法拉), μF， pF　　$1\mathrm{F}=10^6\ \mu\mathrm{F}$, $1\ \mu\mathrm{F}=10^6\mathrm{pF}$

- 伏安特性



$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Cu}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

当 u、i 取关联参考方向

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\xi$$

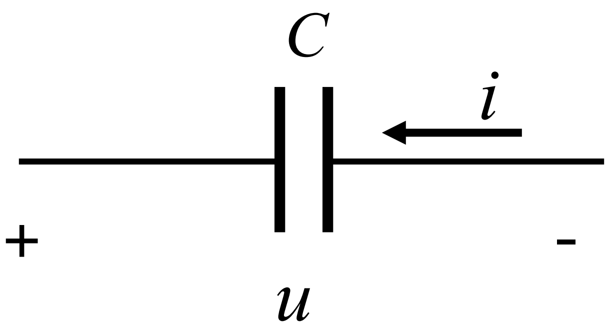
表明

①某一时刻的电容电压值与-∞到该时刻的所有电流值有关，即电容元件有记忆电流的作用，故称电容元件为记忆元件。

②研究某一初始时刻t_0以后的电容电压，需要知道t_0时刻开始作用的电流 i 和t_0时刻的电压 u（t_0）。

③上式中$u(\mathrm{t}_0)$称为电容电压的初始值，它反映电容初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

当电容的 u，i 为非关联方向时：



$$i = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t) = -\left(u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\xi\right)$$

- 功率

u、 i 关联参考时，

$$p = ui = u \cdot C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

①当电压增加， $p>0$, 电容吸收功率。

②当电压减小， $p<0$, 电容发出功率。

- 能量

$$W_{C(t)} = \int_{-\infty}^{t} Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}Cu^2(\xi)\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \cancel{\frac{1}{2}Cu^2(-\infty)}$$

$$= \frac{1}{2}Cu^2(t) \geq 0$$

从 t_0 到 t 电容储能的变化量： $$W_C = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(t_0)$$

电容能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为电场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电容元件是储能元件，它本身不消耗能量。

表明

① 电容的储能只与当时的电压值有关，电容电压不能跃变，反映了储能不能跃变；

② 电容储存的能量一定大于或等于零。

电容器主要参数:

(1)标称电容量：标志在电容器上的电容量。

(2)额定电压：在最低环境温度和额定环境温度下可连续加在电容器的最高直流电压。

(3)绝缘电阻：直流电压加在电容上，产生漏电电流，两者之比称为绝缘电阻。

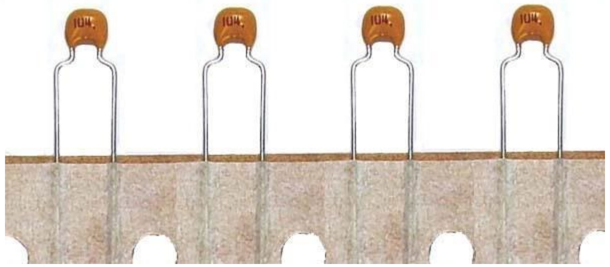
(4)损耗：单位时间内因发热所消耗的能量称做损耗。

(5)频率特性：随着频率的上升，一般电容器的电容量呈现下降的规律。

电解电容

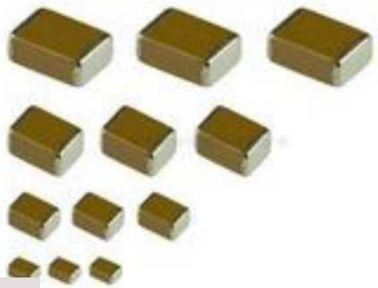
金属化聚丙烯膜电容

独石电容器

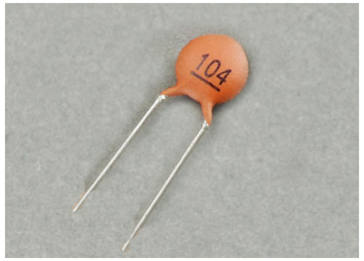


高频瓷介电容

贴片电容



陶瓷电容器



启动电容：

电力电容

冲击电压发生器

广泛应用于电源滤波、信号滤波、信号耦合、谐振、滤波、补偿、充放电、储能、隔直流等电路中

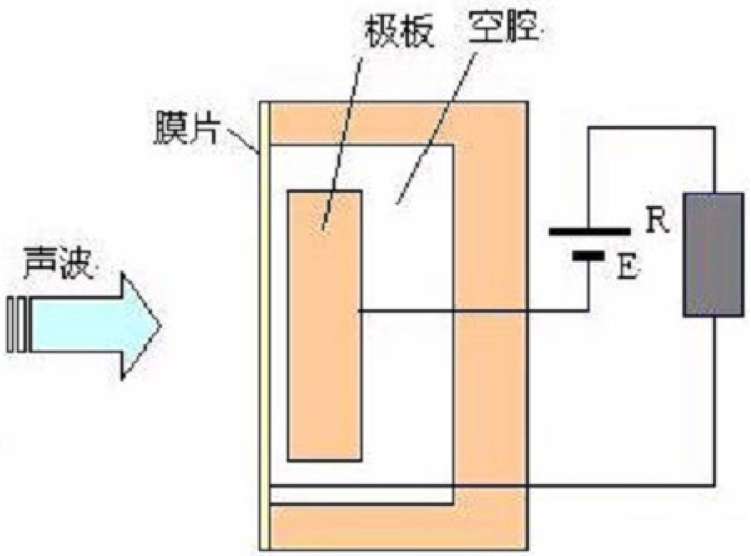
分布电容：两个存在电压差而又相互绝缘的导体间。

寄生电容（杂散电容）：本来没有在那个地方设计电容，但由于布线之间总是有互容，就好像是寄生在布线之间的一样。

常规的键盘有机械按键和电容按键两种。

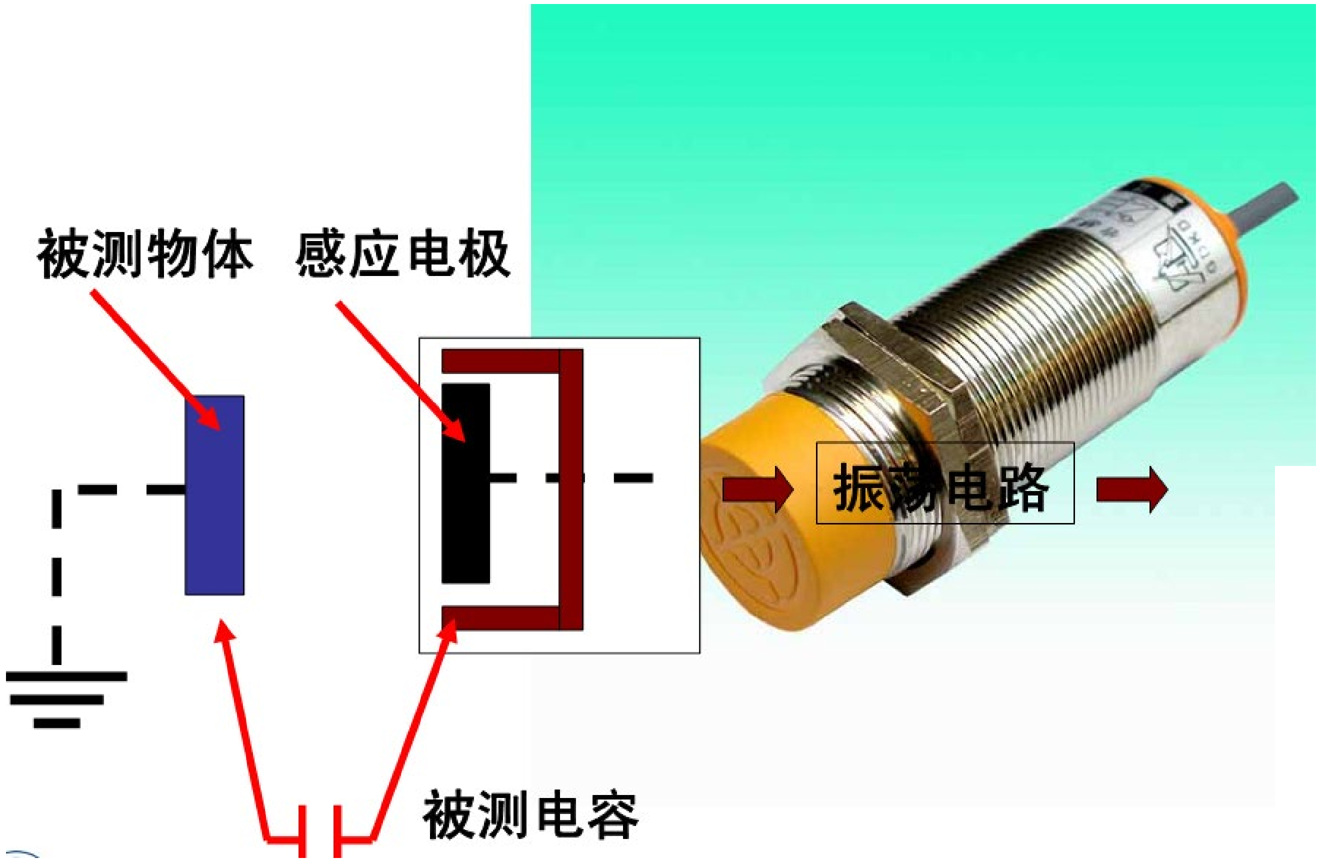
电容式键盘是基于电容式开关的键盘，原理是通过按键改变电极间的距离产生电容量的变化，暂时形成震荡脉冲允许通过的条件。这种开关是无触点非接触式的，磨损率极小。

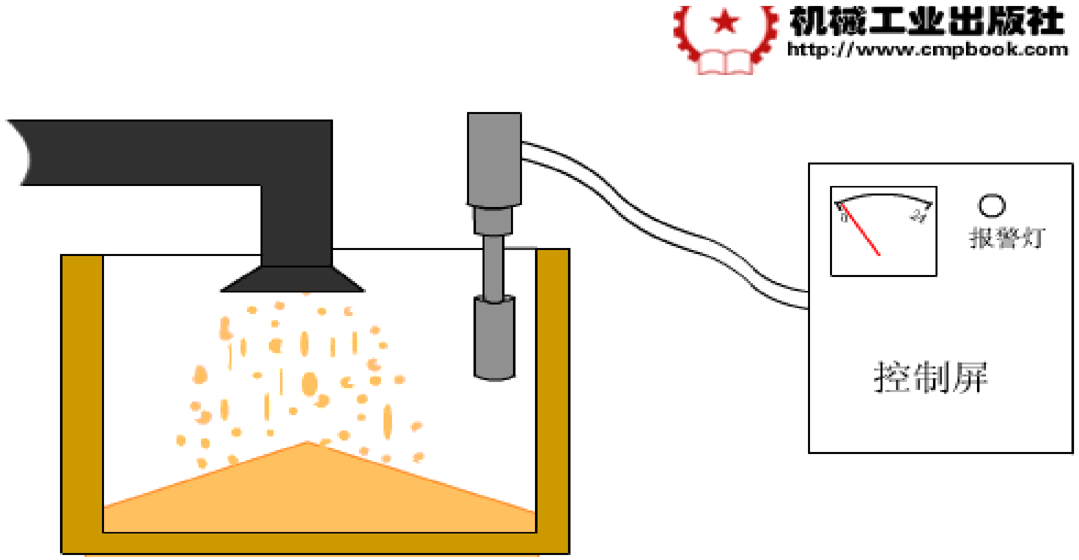
驻极体电容传声器



大膜片电容传声器

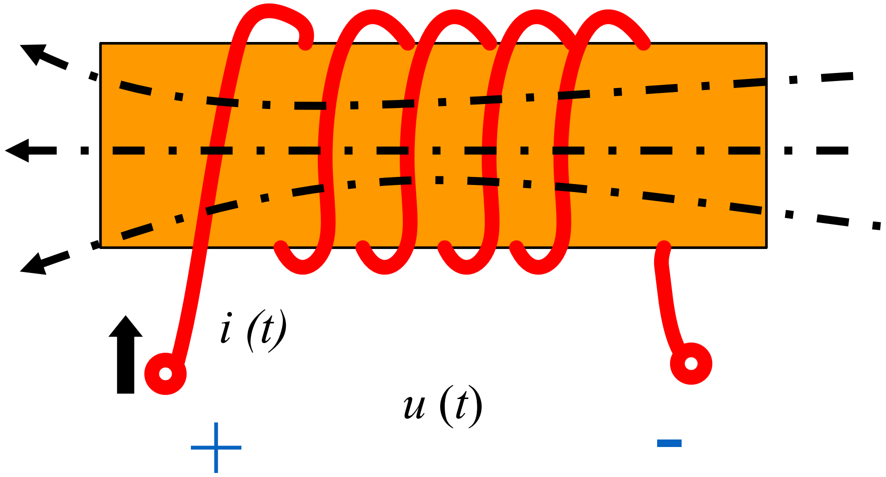
电容式接近开关





电感元件

电感线圈



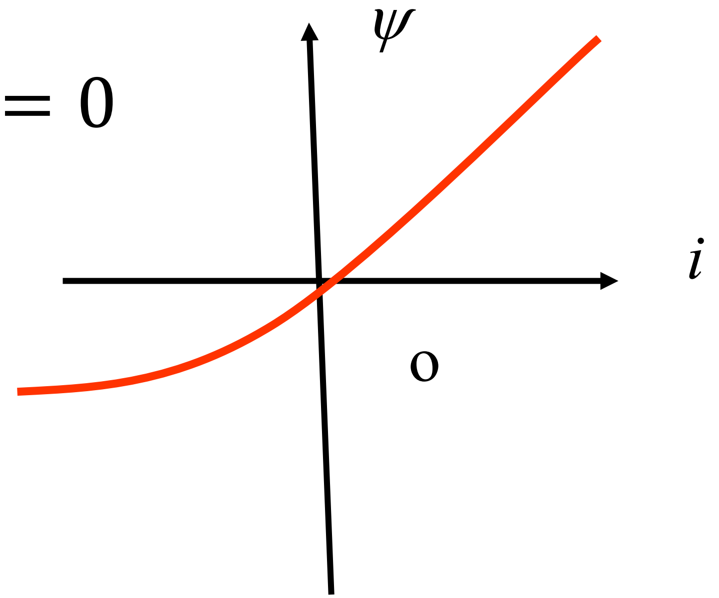
$$\psi(t) = N\,\Phi(t)$$

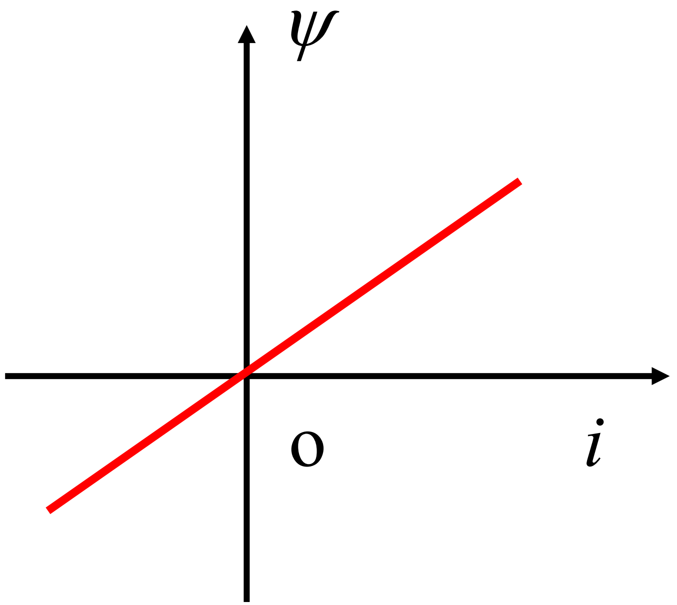
把金属导线绕在一骨架上构成一实际电感线圈，当电流通过线圈时，将产生磁通，是一种抵抗电流变化、储存磁能的部件。

电感元件

储存磁能的两端元件。任何时刻，其特性可用$\psi \sim i$ 平面上的一条曲线来描述。

$$f(\psi, i) = 0$$

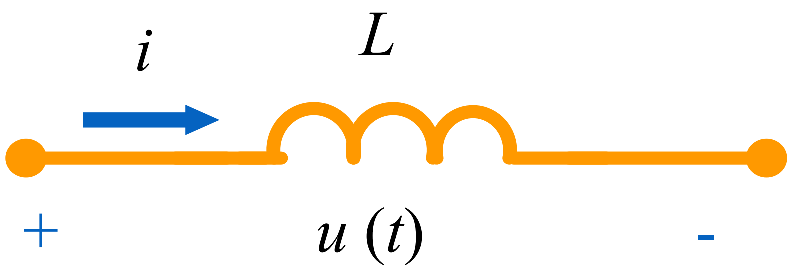




线性时不变电感元件：

$$L = \frac{\psi}{i}$$

任何时刻，通过电感元件的电流 i 与其磁链ψ 成正比。 $\psi \sim i$ 特性为过原点的直线。



H (亨利)，常用μH，mH表示。

1H=10^3 mH

1 mH =10^3 μ H

根据电磁感应定律与楞次定律

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\,t} = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

$$i(t) = i(t0) + \frac{1}{L}\int_{t0}^{t} u\mathrm{d}\xi$$

当电感的 u，i 为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号；

$$u = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad i(t) = -\left(i(t0) + \frac{1}{L}\int_{t0}^{t} u\mathrm{d}\xi\right)$$

表明

①电感电压u 的大小取决于i 的变化率, 与 i 的大小无关，电感是动态元件;

②当i为常数(直流)时， $u=0$。电感相当于短路;

③实际电路中电感的电压 u为有限值，则电感电流 i 不能跃变，必定是时间的连续函数.

④ $i(t_0)$称为电感电压的初始值，它反映电感初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

电感的功率和储能

$$p = ui = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\cdot i \qquad u、i\text{ 取关联参方向}$$

①当电流增大，$p>0$, 电感吸收功率。

②当电流减小，$p<0$, 电感发出功率。

电感能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为磁场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电感元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

电感的储能

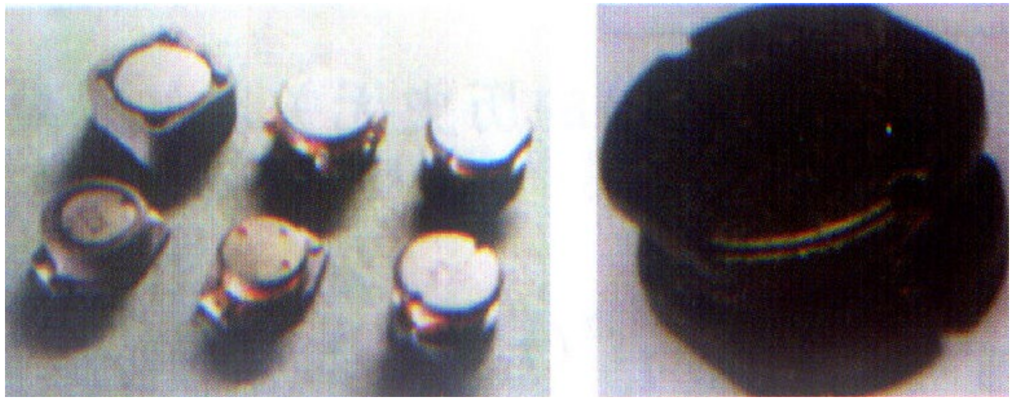
$$W_L=\int_{-\infty}^{t} Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}Li^2(\xi)\Big|_{-\infty}^{t}$$

$$=\frac{1}{2}Li^2(t)-\frac{1}{2}Li^2(-\infty)\qquad=\frac{1}{2}Li^2(t)$$

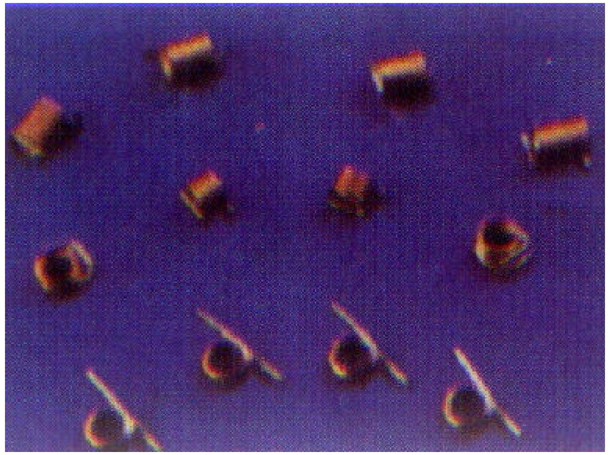
从t_0到 t 电感储能的变化量： $W_L=\frac{1}{2}Li^2(t)-\frac{1}{2}Li^2(t_0)$

①电感的储能只与当时的电流值有关，电感电流不能跃变，反映了储能不能跃变。

②电感储存的能量一定大于或等于零。

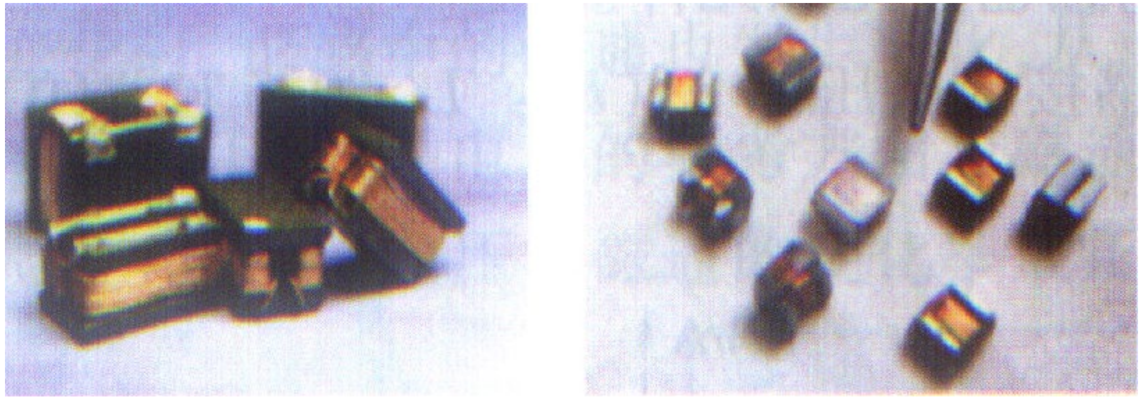


贴片型功率电感

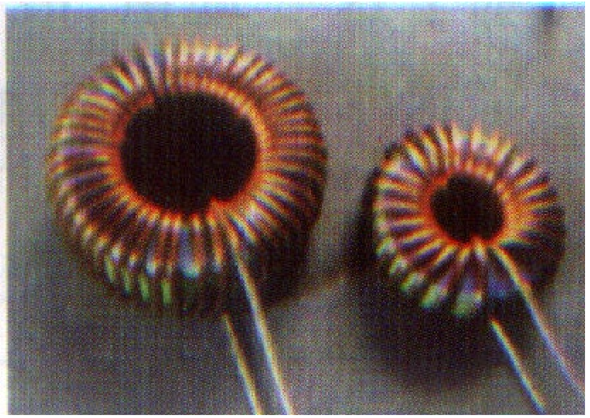


贴片型空心线圈

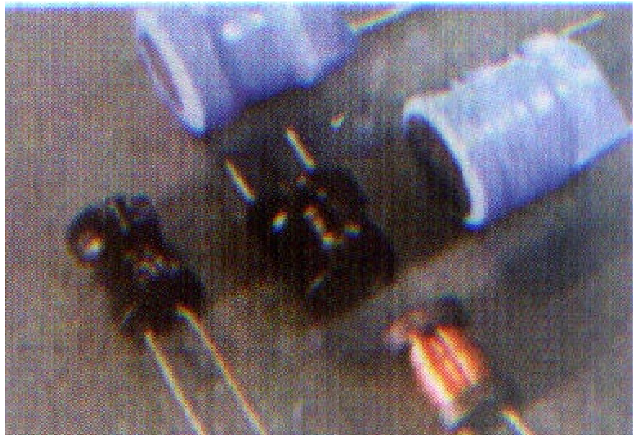
可调式电感



贴片电感



环形线圈



立式功率型电感

电抗器

动态电路的方程及其初始条件

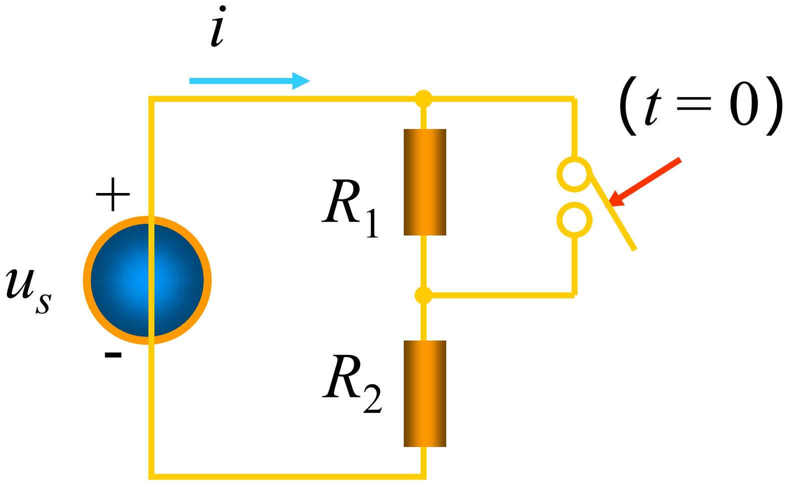
1. 动态电路

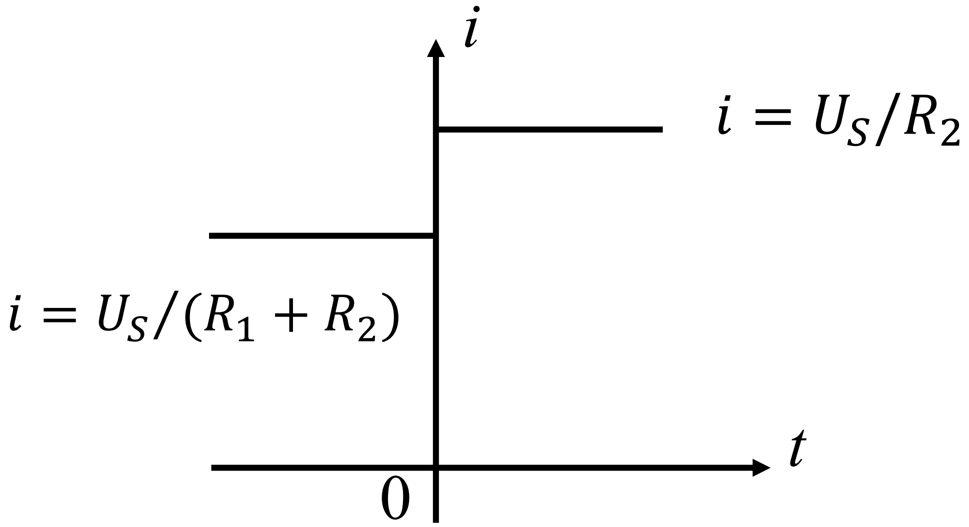
含有动态元件电容和电感的电路称动态电路。

特 点

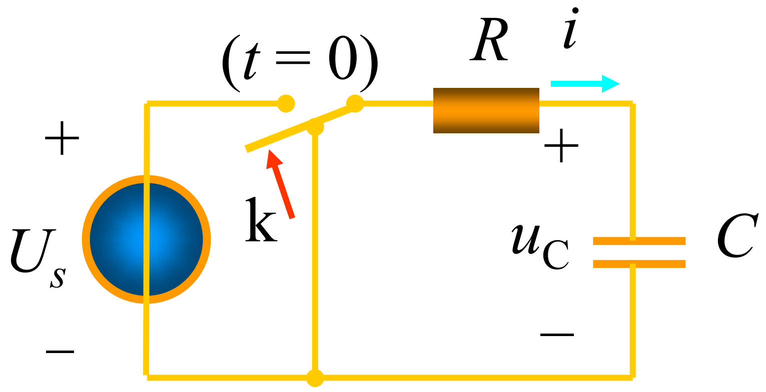
当动态电路状态发生改变时（换路）需要经历一个变化过程才能达到新的稳定状态。这个变化过程称为电路的过渡过程。

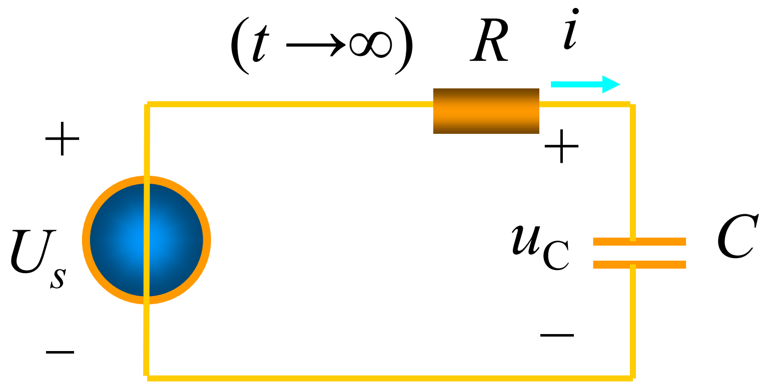
例　　电阻电路





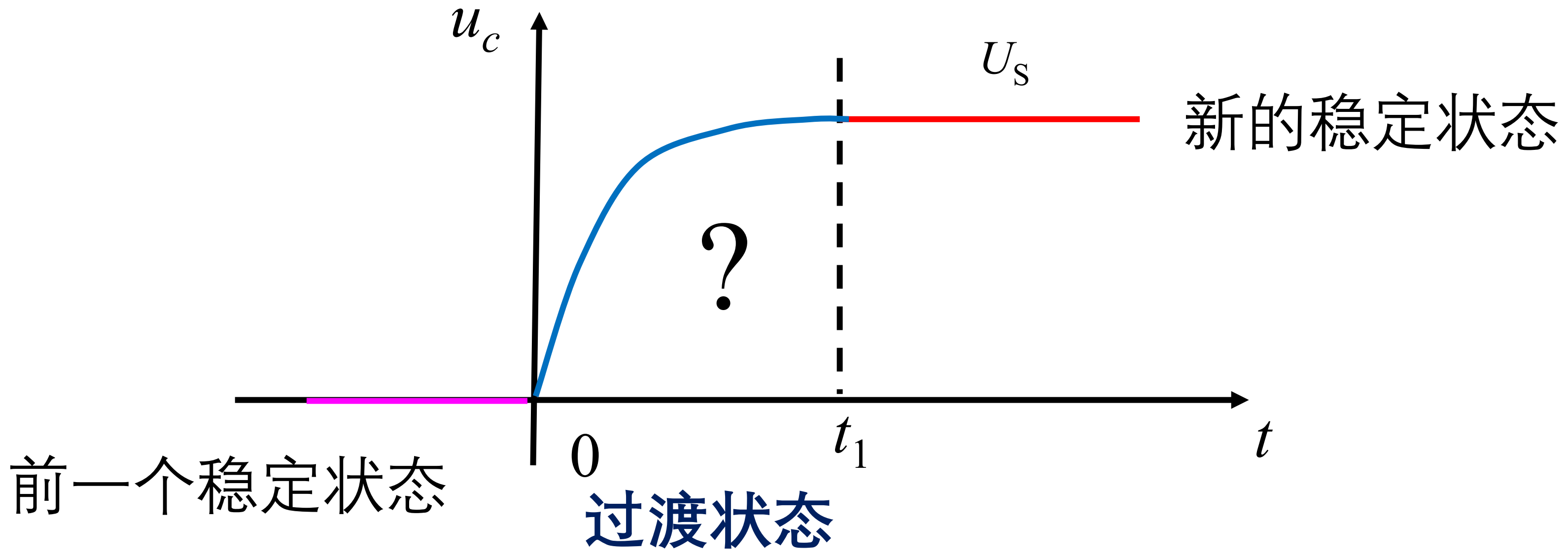
电容电路





k未动作前，电路处于稳定状态： $i=0$ ， $u_C=0$

k接通电源后很长时间，电容充电完毕，电路达到新的稳定状态： $i=0$ ， $u_C=U_s$



过渡过程产生的原因

电路内部含有储能元件 L、C，电路在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。

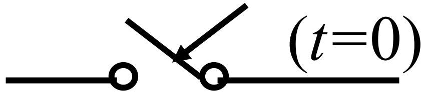
只有一个动态元件，根据KVL、KCL和VCR，描述电路的方程是一阶线性微分方程—— 一阶电路。

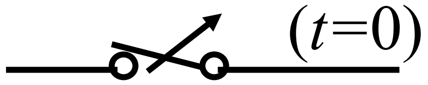
有二个动态元件，根据KVL、KCL和VCR，描述电路的方程是二阶线性微分方程—— 二阶电路。

电路的初始条件

换路：电路结构、状态发生变化，如电路参数变化，支路接入或断开。

认为换路在t=0时刻进行。





① $t=0_+$与$t=0_-$的概念

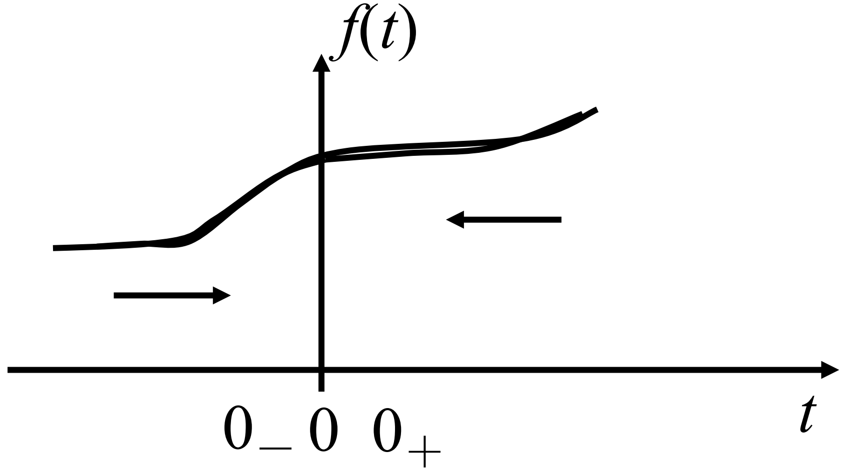
$$f(0_-)=f(0_+)$$

0_-　换路前一瞬间

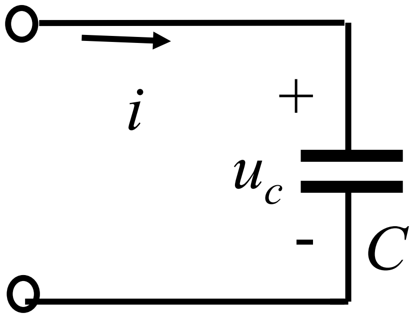
$$f(0_-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t)$$

0_+　换路后一瞬间

$$f(0_+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$



② 电容的初始条件



$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0_-} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

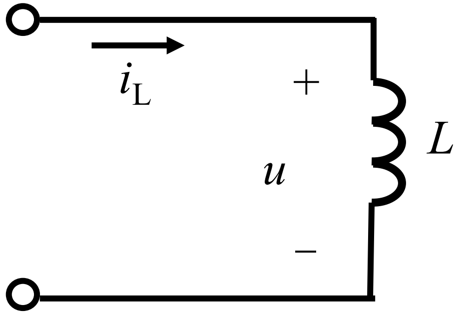
$$=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$t=0_+$ 时刻 $$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\cancelto{0}{\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

当$i(\xi)$为有限值时

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)$$ （ $q(0_+)=q(0_-)$ ）

③ 电感的初始条件



$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0_-}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{t}u(\xi))\mathrm{d}\xi$$

$$=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$t=0_+$时刻

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\cancelto{0}{\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+}u(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

当u为有限值时

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

$$\psi_L(0_+)=\psi_L(0_-)$$

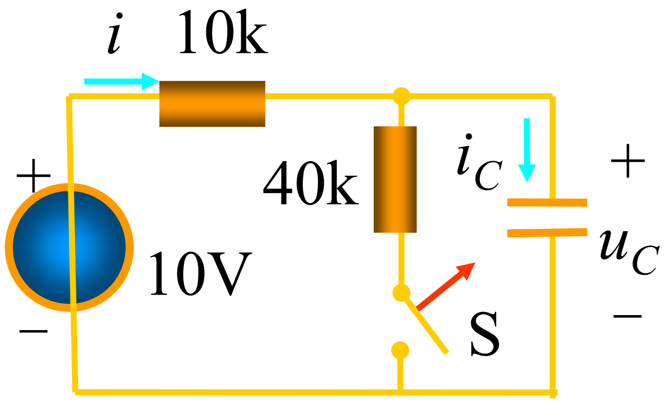
④换路定律（换路定则）

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

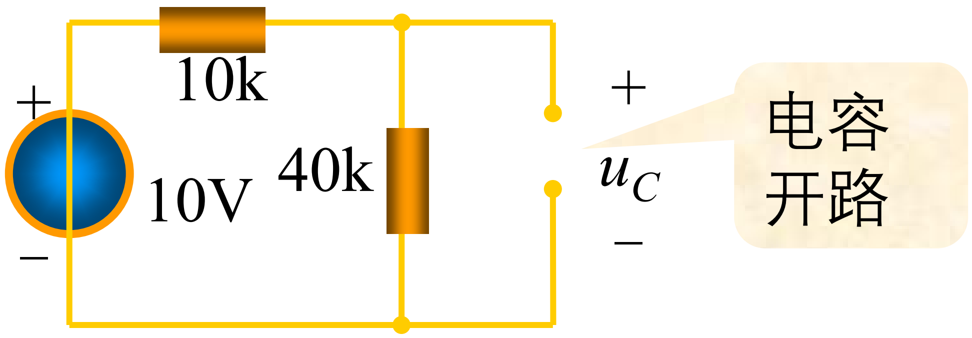
$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

- 电容电流和电感电压为有限值是换路定律成立的条件。
- 换路定律反映了能量不能跃变。

例1　求 $i_C(0_+)$



(1) 由0₋电路求 $u_C(0_-)$

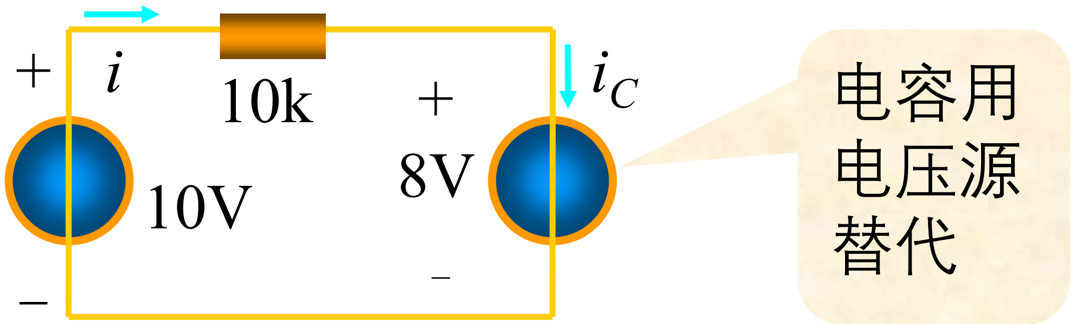


$u_C(0_-)=8\text{V}$

(2)由换路定律

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=8\text{V}$$

(3) 由0_+等效电路求 $i_C(0_+)$

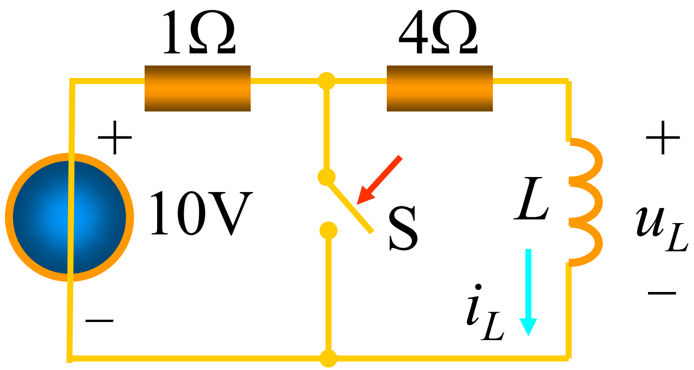


0_+等效电路

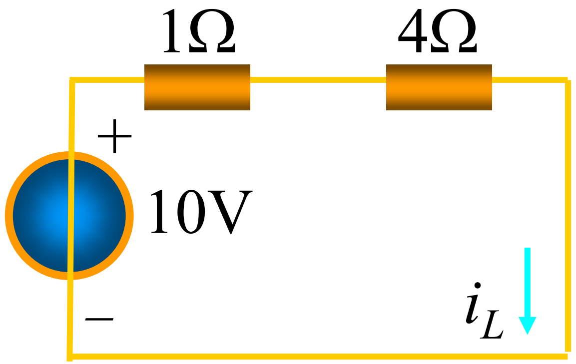
$$i_C(0_+)=\frac{10-8}{10}=0.2\text{mA}$$

注意　$i_C(0_-)=0 \neq i_C(0_+)$

例 2　　$t=0$时闭合开关k， 求 $u_L(0_+)$



解　①先求　$i_L(0_-)$



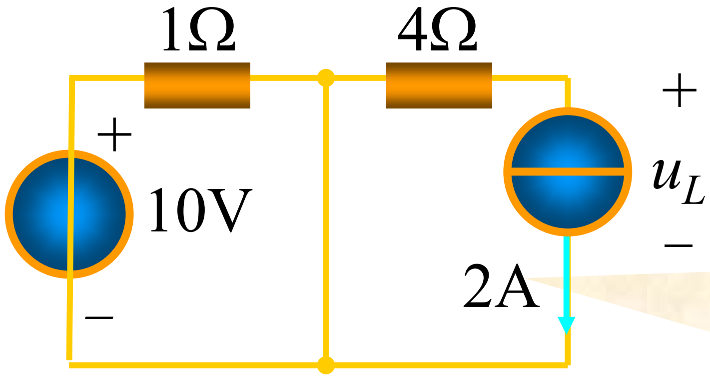
电感短路

$$i_L(0_-)=\frac{10}{1+4}=2\text{A}$$

②应用换路定律:

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\text{A}$$

③由0_+等效电路求 $u_L(0_+)$



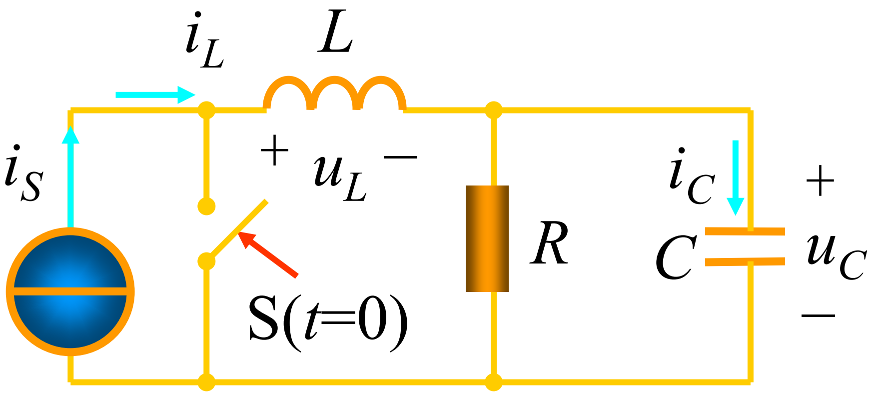
电感用电流源替代

$$u_L(0_+)=-2\times4=-8\text{V}$$

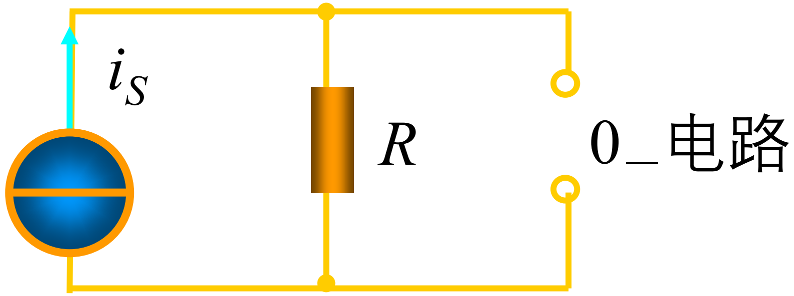
注意

$$u_L(0_-)\neq u_L(0_+)$$

例3　求 $i_C(0_+)$ ， $u_L(0_+)$



解　(1)由 0_- 电路得：



$$i_L(0_-) = i_S$$

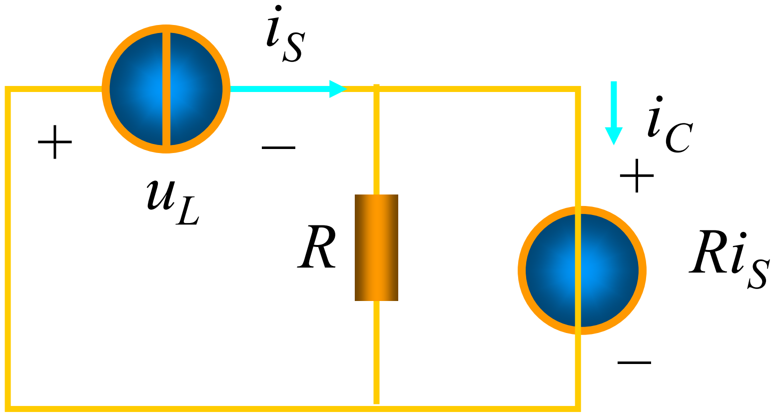
$$u_C(0_-) = Ri_S$$

(2)换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_S$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = Ri_S$$

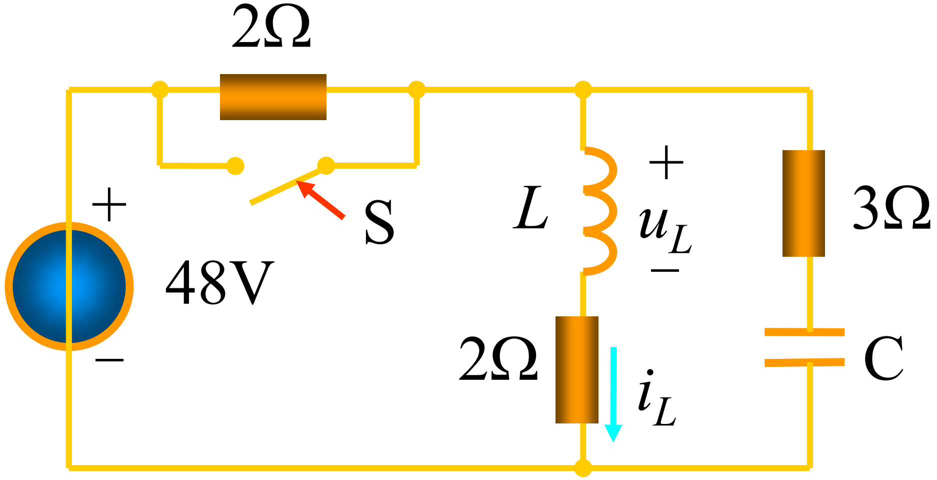
(3)由 0_+ 电路得：



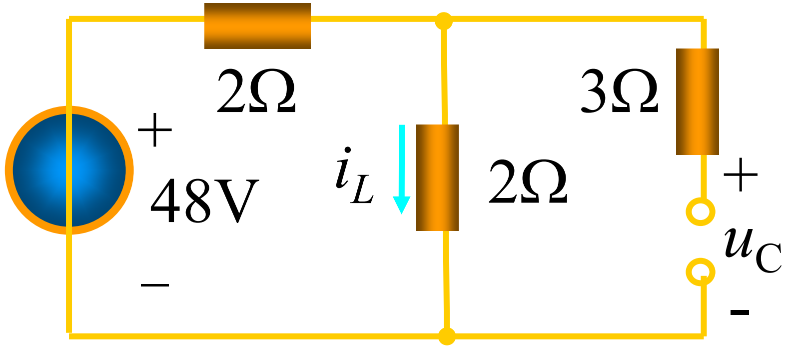
$$i_C(0_+) = i_s - \frac{Ri_S}{R} = 0$$

$$u_L(0_+) = -Ri_S$$

例4　求k闭合瞬间各支路电流和电感电压



解　(1)由0_-电路得:



$$i_L(0_-) = 48/4 = 12\text{A}$$

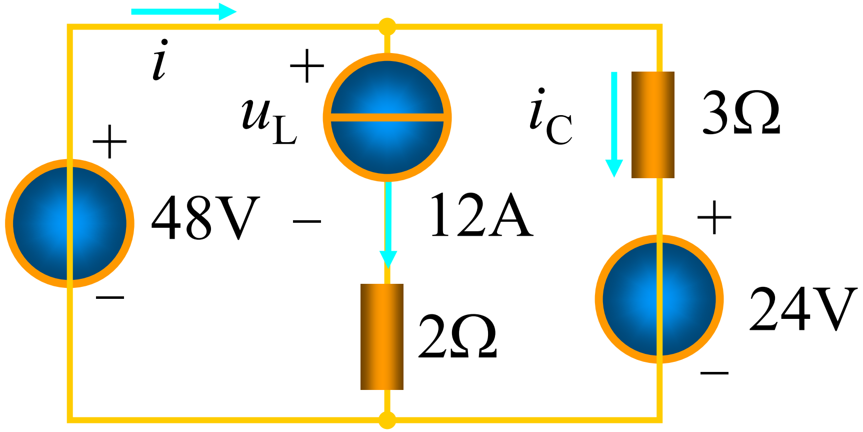
$$u_C(0_-) = 2 \times 12 = 24\text{V}$$

(2)由换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 12\text{A}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 24\text{V}$$

(3)由0_+电路得:



$$i_C(0_+) = (48 - 24)/3 = 8\text{A}$$

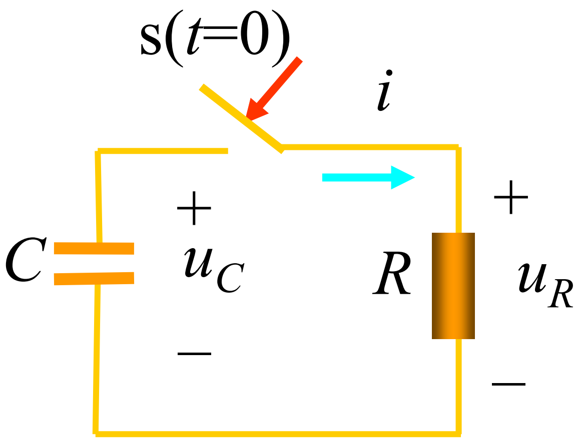
$$i(0_+) = 12 + 8 = 20\text{A}$$

$$u_L(0_+) = 48 - 2 \times 12 = 24\text{V}$$

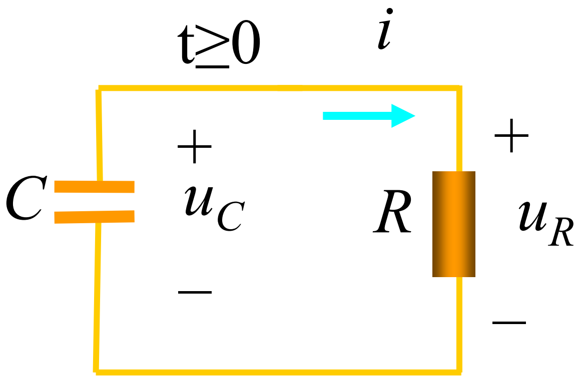
一阶电路的零输入响应

零输入响应： 换路后外加激励为零，仅由动态元件初始储存的能量产生的电压和电流。

1. RC电路的零输入响应



已知 $u_C(0_-)=U_0$



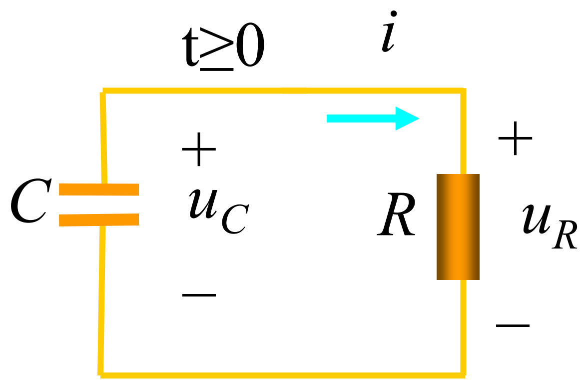
$$-u_R+u_C=0$$

$$i=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$u_R=Ri$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \\ u_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$

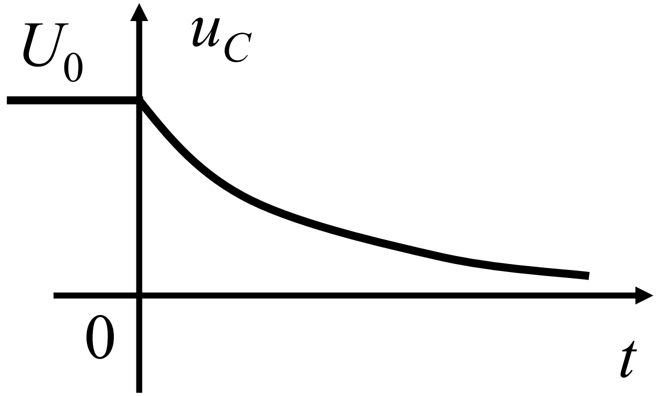
$$u_c=U_0e^{-\frac{t}{RC}} \quad t\geq 0$$

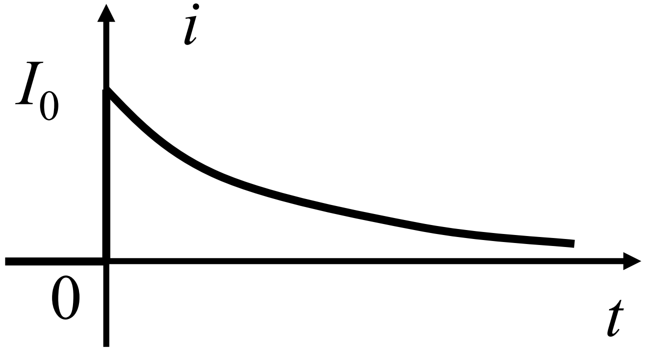


$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

或 $$i = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -CU_0 e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



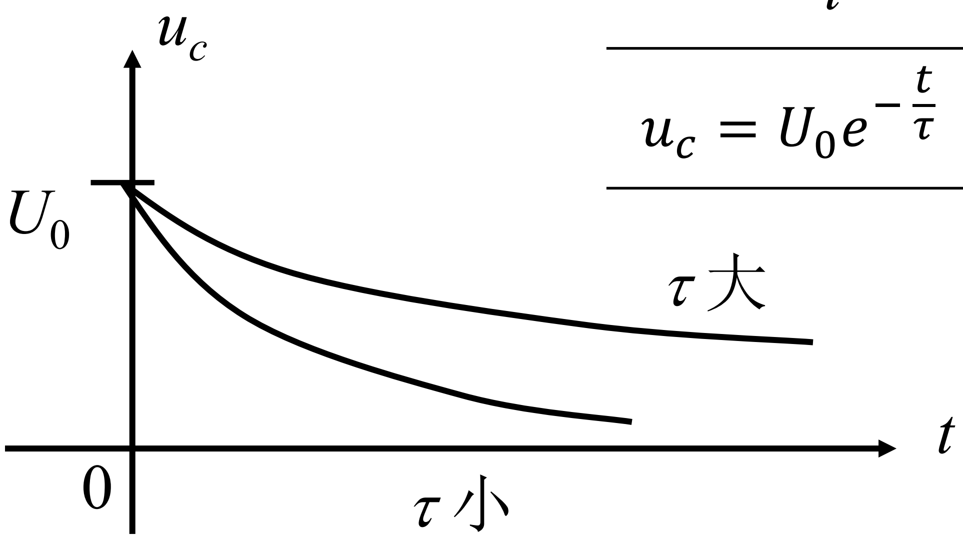


响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与*RC*有关;

令 τ =*RC*， 称τ为一阶电路的时间常数

$$[\tau] = [RC] = [欧][法] = [欧]\left[\frac{库}{伏}\right] = [欧]\left[\frac{安秒}{伏}\right] = [秒]$$

$\tau = RC$　时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短



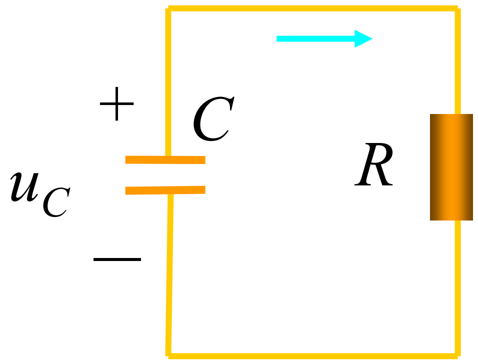
t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
τ大	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.007U_0$

τ大→过渡过程时间长　　　　τ小→过渡过程时间短

时间常数τ的物理含义：　当电压初值一定：

$$\left.\begin{array}{lll} C\text{大（}R\text{一定）} & W=Cu^2/2 & \text{储能大} \\ R\text{大（}C\text{一定）} & i=u/R & \text{放电电流小} \end{array}\right\} \text{放电时间长}$$

能量关系　电容不断释放能量被电阻吸收，　直到全部消耗完毕.



设　$u_C(0_+)=U_0$

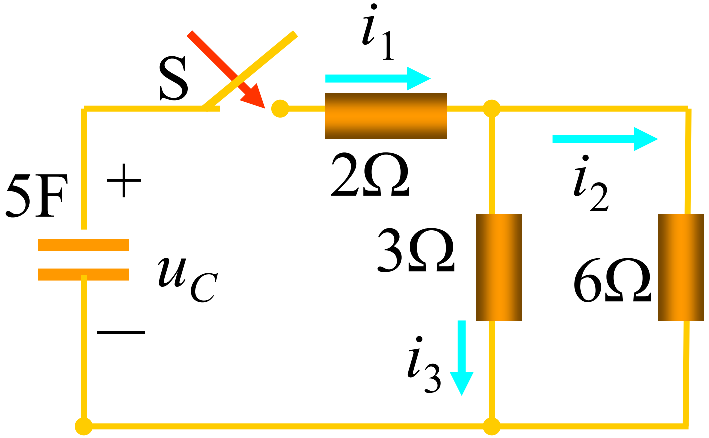
电容放出能量：　$\longrightarrow$　$\frac{1}{2}CU_0^2$

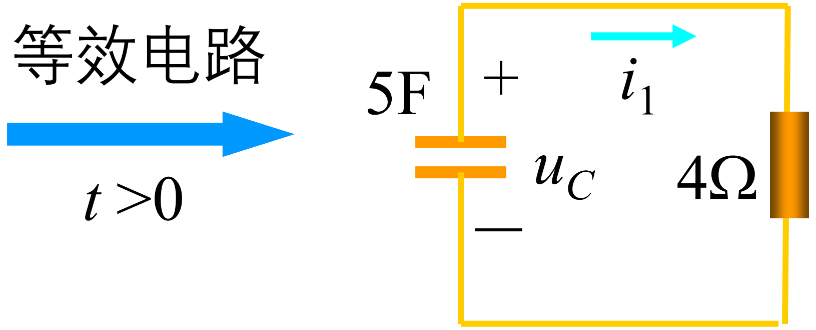
电阻吸收（消耗）能量：　$\longrightarrow$

$$W_R = \int_0^\infty i^2\,R\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t$$

$$= \frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}CU_0{}^2$$

例1　图示电路中的电容原充有24V电压，求k闭合后，电容电压和各支路电流随时间变化的规律。





解　这是一个求一阶RC零输入响应问题，有：

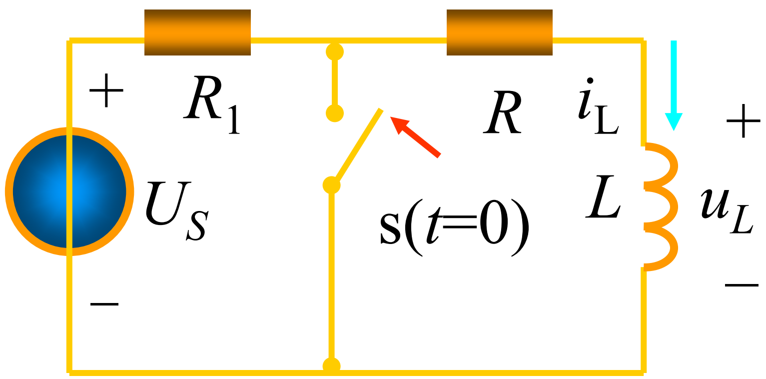
$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

$$U_0 = 24\ \mathrm{V} \qquad \tau = RC = 5 \times 4 = 20\ \mathrm{s}$$

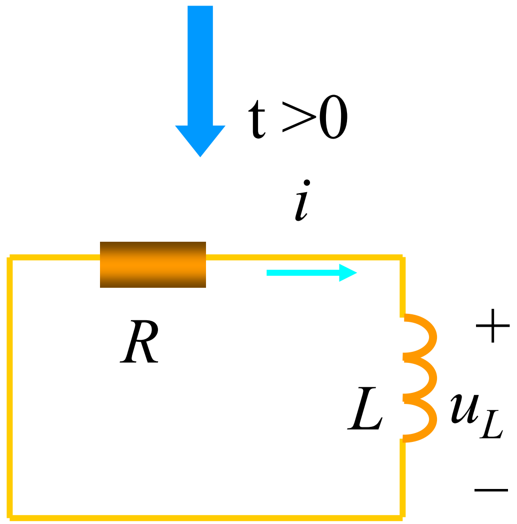
$$u_c = 24e^{-\frac{t}{20}}\mathrm{V} \qquad t \geq 0$$

$$i_1 = u_C/4 = 6\,e^{-\frac{t}{20}}\mathrm{A} \qquad i_2 = \frac{2}{3}i_1 = 4e^{-\frac{t}{20}}\mathrm{A} \qquad i_3 = \frac{1}{3}i_1 = 2e^{-\frac{t}{20}}\mathrm{A}$$

2. *RL*电路的零输入响应



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R1 + R} = I_0$$

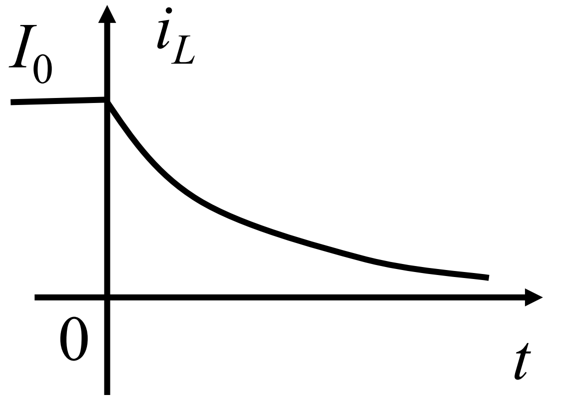


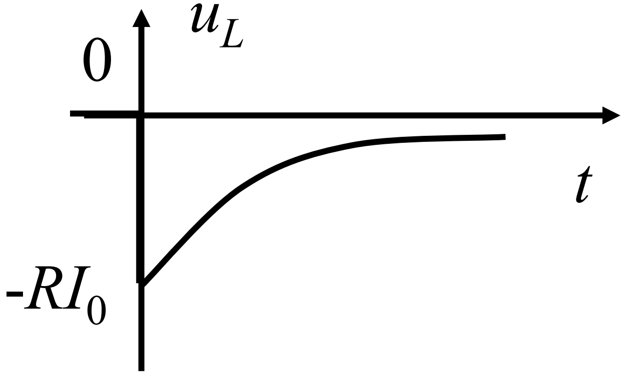
$$L\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t} + Ri_\mathrm{L} = 0 \quad t \geq 0$$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0$$

表明

①电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；





②响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与L/R有关；

令$\tau = L/R$　称为一阶RL电路时间常数　$[\tau] = [\frac{L}{R}] = [秒]$

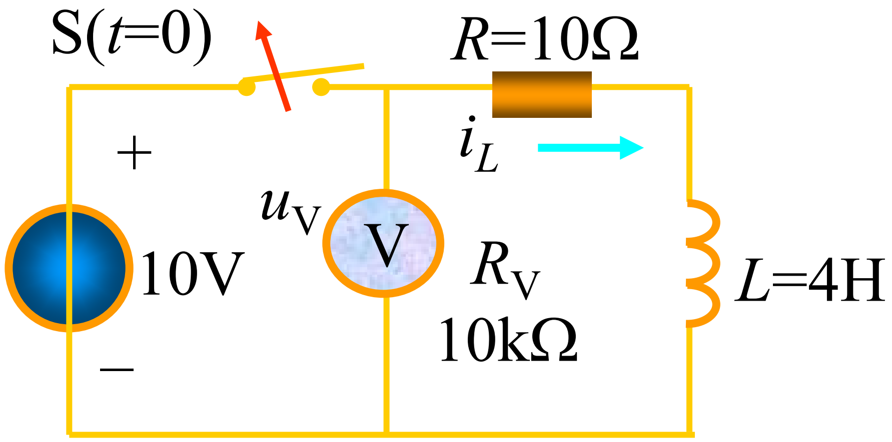
物理含义 → 电流初值$i_L(0)$一定：

L大　$W=Li_L^2/2$　起始能量大

R小　$P=Ri^2$　放电过程消耗能量小

放电慢，τ大

例1　t=0时,打开开关S，求u_v。电压表量程：50V



解　$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\ \text{A}$

$$i_L = e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$$

$$\tau = \frac{L}{R+RV} = \frac{4}{10000} = 4 \times 10^{-4} s$$

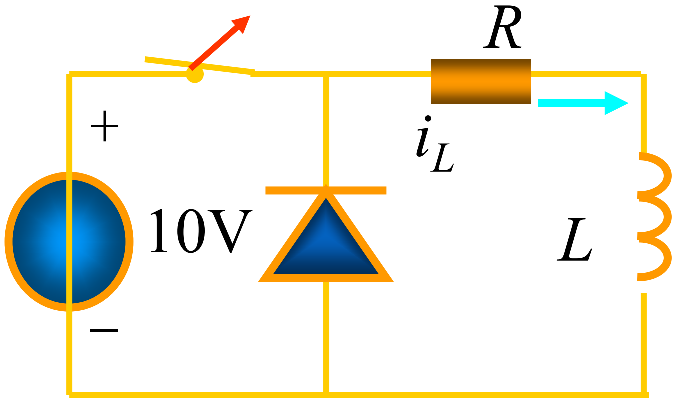
$$i_L = 1e^{-2500t} \quad t \geq 0$$

$$u_V = -R_V i_L = -10000e^{-2500t} \quad t \geq 0$$

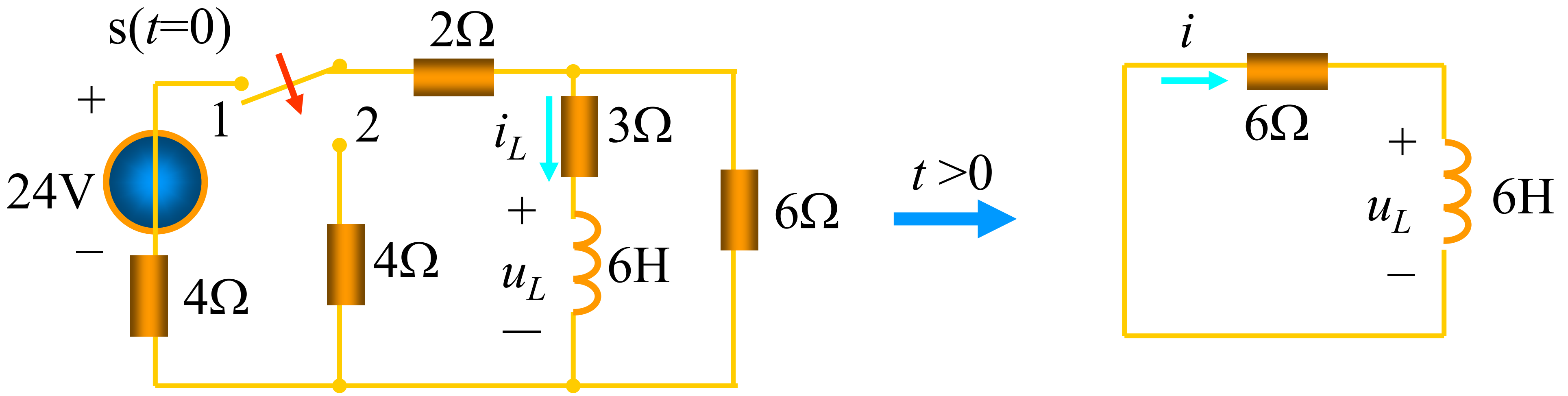
$u_V(0_+)$=— 10000V

造成 

损坏。



例2　t=0时，开关S由1→2，求电感电压和电流及开关两端电压u_{12}。

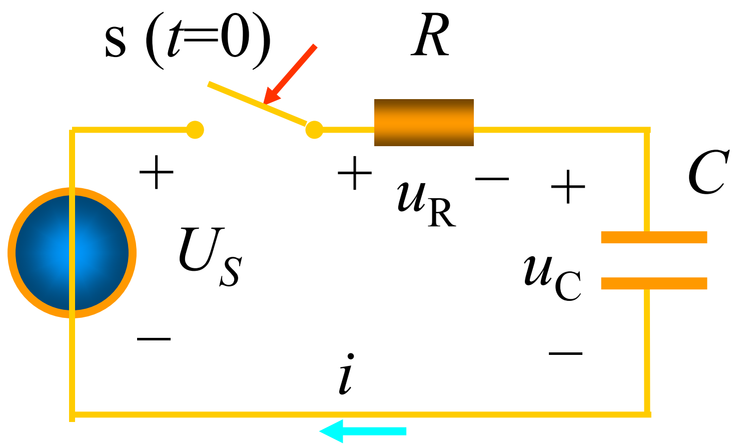


解　$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{24}{4+2+3//6} \times \frac{6}{3+6} = 2\text{A}$$

$$R = 3 + (2+4)//6 = 6\Omega \qquad \tau = \frac{L}{R} = \frac{6}{6} = 1\text{s}$$

$$i_L = 2e^{-t}\text{V} \qquad u_{12} = 24 + 4 \times \frac{i_L}{2} = 24 + 4e^{-t}\text{V}$$

一阶电路的零状态响应和全响应



方程: $$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

零状态响应: $u_C(0_-)=0$ $u_s\neq 0$

$$u_C=U_S-U_Se^{-\frac{t}{RC}}=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\quad (t\geq 0)$$

全响应: $u_C(0_-)=U_0$ $u_s\neq 0$

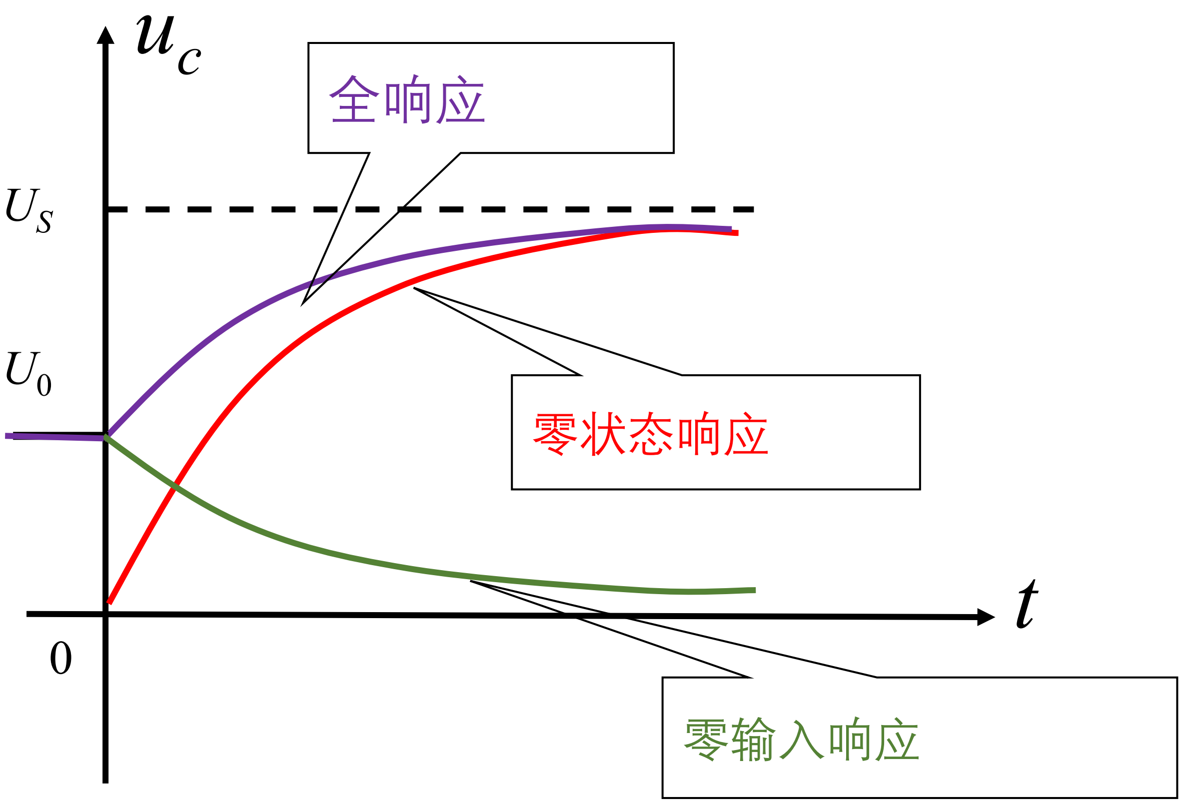
$$u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}\ (t\geq 0)$$

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应

零输入响应

全响应 = 零状态响应 + 零输入响应



三要素法分析一阶电路

一阶电路的数学模型是一阶线性微分方程：

$$a\frac{df}{dt}+bf=c$$

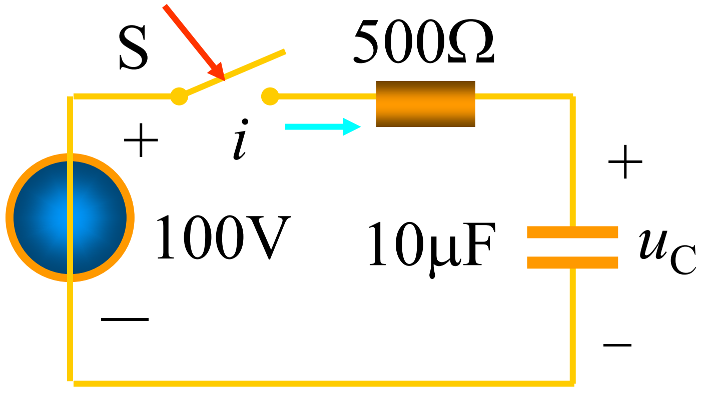
其解答一般形式为： $f(t)=f'(\mathrm{t})+\mathrm{A}e^{-\frac{t}{\tau}}$

直流激励时： $f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

注意　分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题。

例　t=0时,开关S闭合，已知 $u_C(0_-)=0$，求(1)电容电压和电流；

(2) u_C＝80V时的充电时间t 。



解　(1)这是一个RC电路零状态响应问题，有：

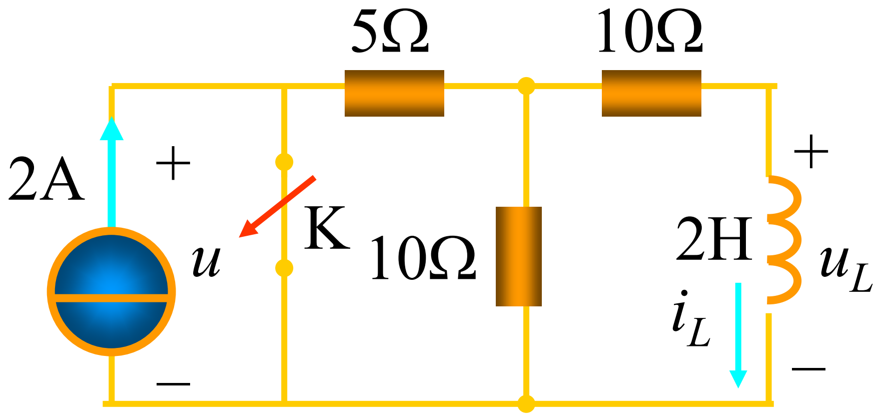
$$\tau = RC = 500 \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-3}\text{s}$$

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1 - e^{-200t})\text{V} \ \ (t \geq 0)$$

$$i = C\frac{du_c}{dt} = 0.2e^{-200t} \ \text{A} \ \ (t \geq 0)$$

(2)设经过t_1秒，u_C＝80V　$80 = 100(1 - e^{-200t_1})$　$t_1 = 8.045\text{ms}$

例2　t=0开关k打开，求t >0后 i_L、u_L及电流源的电压。



解　这是RL电路零状态响应问题

$$i_L(0+) = 0$$

$$i_L(\infty) = \frac{10}{10+10} \times 2 = 1\text{A}$$

$$R_{\text{eq}} = 10 + 10 = 20\Omega$$

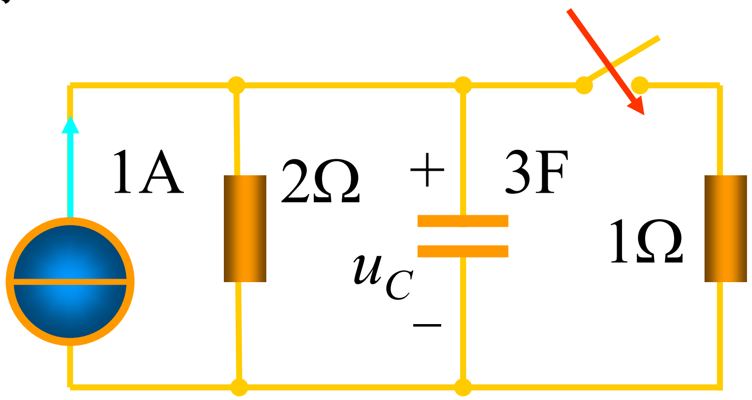
$$\tau = L/R_{\text{eq}} = 2/20 = 0.1\text{s}$$

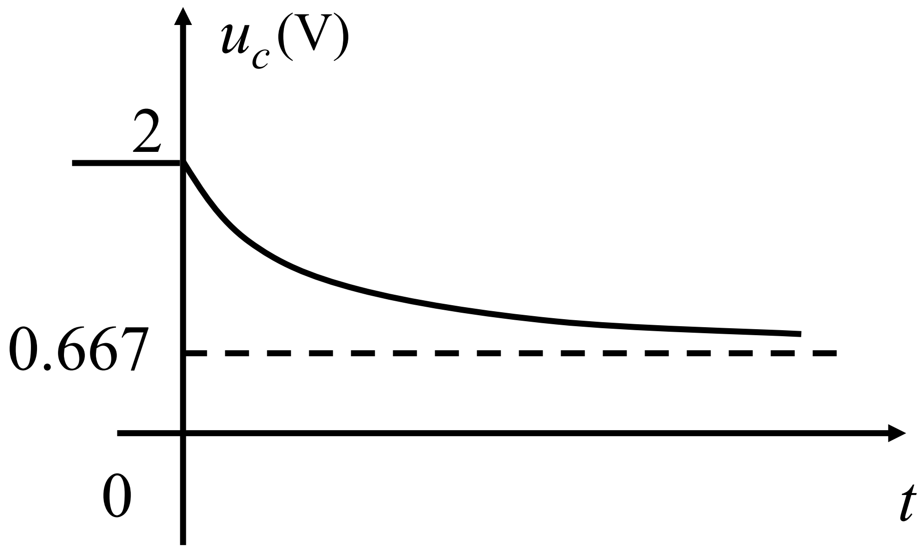
$$i_L(t) = (1 - e^{-10t})\text{A}$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = U_0 e^{-10t} = 20e^{-10t}\text{V}$$

$$u = 5I_S + 10i_L + u_L = (20 + 10e^{-10t})\text{V}$$

例3 已知：t=0 时合开关，求换路后的$u_C(t)$





解 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$

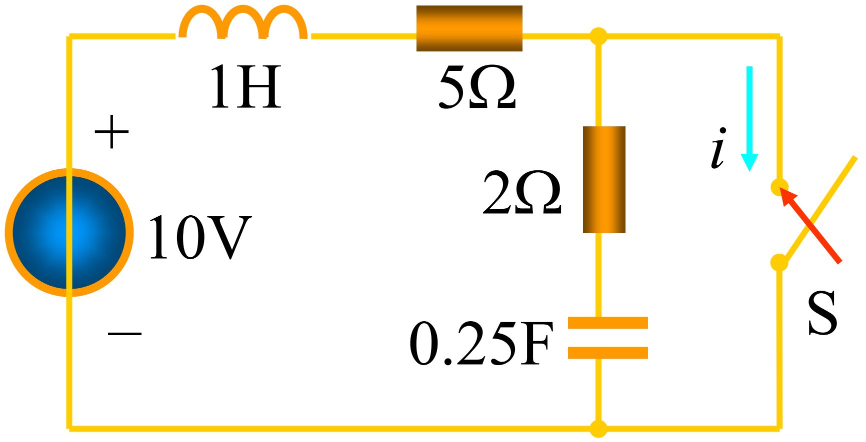
$$u_C(\infty) = (2//1) \times 1 = 0.667\text{V}$$

$$\tau = R_{\text{eq}}C = \frac{2}{3} \times 3 = 2\ \text{s}$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C = 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t} = 0.667 + 1.33e^{-0.5t} \quad t \geq 0$$

例4　已知：t=0时开关闭合，求换路后的电流$i(t)$。



$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

$$u_C(\infty) = 0 \qquad i_L(\infty) = 10/5 = 2\text{A}$$

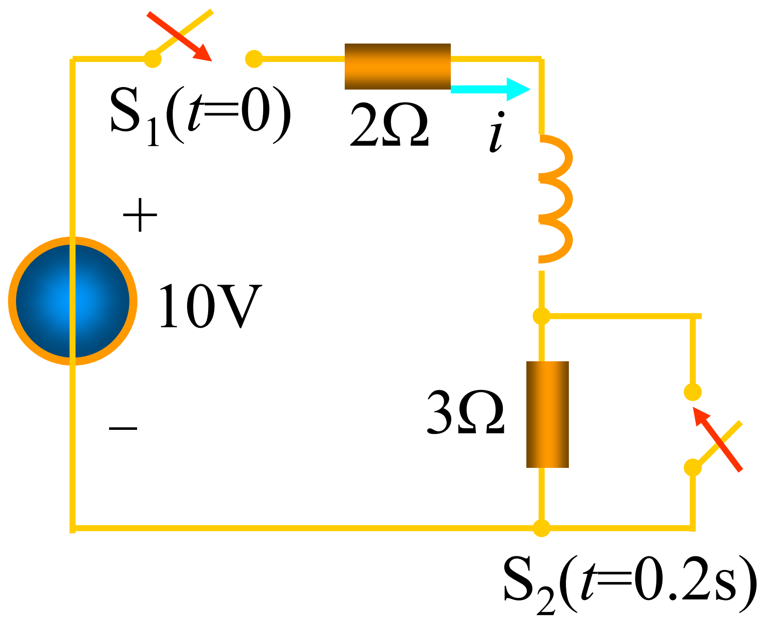
$$\tau_{RC} = R_{\text{eq}}C = 2 \times 0.25 = 0.5\text{s} \qquad \tau_{RL} = L/R_{eq} = 1/5 = 0.2\text{s}$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-2t}\text{V}$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2(1 - e^{-5t})\text{A}$$

$$i(t) = i_L(t) + \frac{u_C(t)}{2} = (2(1 - e^{-5t}) + 5e^{-2t})\text{A}$$

例5　已知：电感无初始储能$t=0$ 时合S_1，$t=0.2$s时合S_2， 求两次换路后的电感电流$i(t)$。



解　$0 < t < 0.2$s

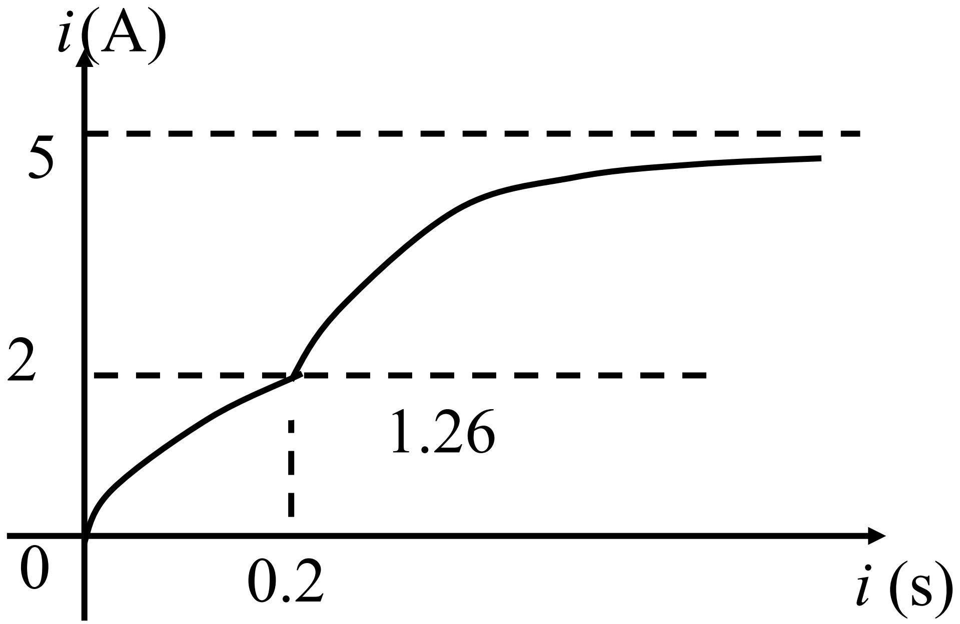
$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

$$\tau_1 = L/R = 1/5 = 0.2 \text{ s}$$

$$i(\infty) = 10/5 = 2\text{A}$$

$$i(t) = 2 - 2e^{-5t} \text{ A}$$

$$i(0.2) = 2 - 2e^{-5\times 0.2} = 1.26$$



$t > 0.2$s

$$i(0.2_+) = 1.26\text{A}$$

$$\tau_2 = L/R = 1/2 = 0.5$$

$$i(\infty) = 10/2 = 5\text{A}$$

$$i(t) = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} \text{ A}$$