Projeto 2

TI327 - Tópicos em Inteligência Artificial
Prof. Guilherme Macedo
COTUCA - Unicamp

Os problemas de otimização linear têm sido objeto de intensas pesquisas nos últimos anos, devido à sua importância econômica e ao seu interesse teórico. Estes problemas são geralmente declarados na seguinte forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Todo problema de otimização linear pode ser escrito na forma padrão. Por exemplo, dado o problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

podemos converter as restrições de desigualdade em igualdade adicionando variáveis de folga para compensar a diferença entre o lado esquerdo e direito. Portanto,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{y} \geq 0.$$

Também podemos converter um objetivo de maximização em minimização negando $\boldsymbol{c}$.

Atividades

- Implementar o método simplex em `Python 3.12.3` para resolver problemas de otimização linear. O código-fonte deverá ser claro, eficiente e bem documentado.

- Testar o método simplex implementado anteriormente com os seguintes problemas de otimização linear:

  Problema 1

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar } & 5x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a } & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\
& x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 + 5x_2 \geq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

  A solução ótima deste problema é $x^* = (0, 6)$ com $f(x^*) = 6$.

  Problema 2

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar } & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{sujeito a } & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

  A solução ótima deste problema é $x^* = (4, 0)$ com $f(x^*) = 8$.

Problema 3

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } 15(x_1 + 2x_2) + 11(x_2 - x_3) \\ &\quad \text{sujeito a } 3x_1 \geq x_1 + x_2 + x_3 \\ &\qquad\qquad 0 \leq x_j \leq 1 \qquad\qquad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

A solução ótima deste problema é $x^* = (1, 1, 0)$ com $f(x^*) = 56$.

Problema 4

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } 10(x_3 + x_4) \\ &\quad \text{sujeito a } \sum_{j=1}^{4} x_j = 400 \\ &\qquad\qquad x_j - 2x_{j+1} \geq 0 \qquad\qquad j = 1, 2, 3 \\ &\qquad\qquad x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

A solução ótima deste problema é $x^* = (400, 0, 0, 0)$ com $f(x^*) = 0$.

Problema 5

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } -5x_1 + 3(x_1 + x_3) \\ &\quad \text{sujeito a } x_j + 1 \leq x_{j+1} \qquad\qquad j = 1, 2 \\ &\qquad\qquad \sum_{j=1}^{3} x_j = 12 \\ &\qquad\qquad x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

A solução ótima deste problema é $x^* = (0, 1, 11)$ com $f(x^*) = 36$.

Problema 7

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } 9x_1 + 5x_2 \\ &\quad \text{sujeito a } \operatorname{sen}\left(\frac{k}{13}\right)x_1 + \cos\left(\frac{k}{13}\right)x_2 \leq 7 \qquad\qquad j = 1, \ldots, 13 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução ótima deste problema é $x^* = (0, 1, 11)$ com $f(x^*) = 36$.

- Escrever um relatório de 5 à 7 páginas com as suas descobertas. O modelo do relatório está disponível em `https://bit.ly/43QpBkv`.

Prazo de entrega

Quarta-feira, 19 de junho de 2024, até às 23h59. Não é aconselhável que este projeto seja entregue fora do prazo estabelecido. Contudo, no caso de a fazer, a sua nota será penalizada da seguinte maneira:

20/06/2024 23h59	$0,75 \times$ nota
21/06/2024 23h59	$0,50 \times$ nota
22/06/2024 23h59	$0,25 \times$ nota

Submissão

O código-fonte e o relatório deverão ser submetidos pelo GitHub Classroom até os prazos de entrega estabelecidos.

Referência

Dantzig, G. B. 1963. Linear programming and extensions. Princeton, NJ. Princeton University Press.