UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

UNICODE

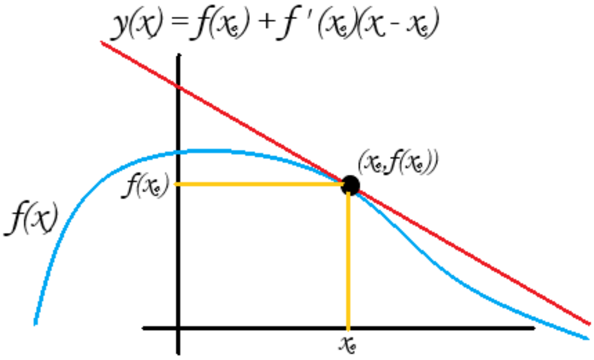
Cálculo Diferencial

Solucionario

PC1 25-2

Realizado por:

Jesús Paucar



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

CURSO :	Cálculo Diferencial	**CICLO :**	2025-II
CÓDIGO :	BMA-01	**FECHA :**	10-09-2025
DOCENTE :	J. Cernades, R. Vásquez, V. Huanca, A. Huamán, O. Bermeo, R. Chung, J. Echeandía		

PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA

Tiempo de duración: 110 minutos

1. Dadas las proposiciones P y Q. Determine si la proposición $P \wedge Q$ es una tautología,[5,0 puntos] donde

$$P \equiv \Big\{[(p \to q) \wedge {\sim}(p \to {\sim}r)] \to {\sim}(r \to {\sim}q)\Big\} \ \wedge \ \Big\{[(q \to p) \wedge ({\sim}p) \wedge ({\sim}s)] \to {\sim}(q \vee s)\Big\}$$

$$Q \equiv \Big\{[(p \to q) \vee (q \wedge r)] \ \vee \ {\sim}[(q \to r) \wedge (p \vee (p \wedge m))]\Big\} \ \vee \ {\sim}\Big\{(p \to q) \wedge (r \to {\sim}p)\Big\}$$

2. Sean A, B, C y D subconjuntos no vacíos de U.

a) Si $A \subset B$, simplifique. [3,0 puntos]

$$\Big\{\Big\{A \cap [(B \cap D) \cup (D \cap A)] \ \cup \ [(B \cup A) \cap D']\Big\} \cap (B \triangle C)\Big\} \cup \Big\{(A \cap C) \cap ((A \cap C) \triangle (A' \cup C'))\Big\}$$

b) Simplifique. [2,0 puntos]

$$\Big\{[\,A' \cup (B \cap C)'\,] \cap [\,A \cap (B' \cup C)\,]\Big\} \ \cup \ \Big\{[\,(A \cap B) \cap (A \cup B)\,] \ \cup \ [\,C \cap ((C' \cup B) \cap A)\,]\Big\}$$

3. Sean A, B, C y D subconjuntos no vacíos de U. Demostrar por elementos.

a) [3,0 puntos]

$$\Big\{[\,(A' \cup B) \cap (A' \cup C')\,]' \ \cup \ (C' \cup B')'\Big\} \ \subset \ \Big\{[\,(B' \cup A) \cap (A' \cap C')\,]' \ \cup \ (B \cup D)'\Big\}$$

b) [2,0 puntos]

$$A - B \subset (A - C) \ \cup \ (C - B).$$

1) Determinar si $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ es una tautología.

$$\mathcal{P} \equiv \Big\{[(p \to q) \wedge \sim(p \to \sim r)] \to \sim(r \to \sim q)\Big\} \wedge \Big\{[(q \to p) \wedge (\sim p) \wedge (\sim s)] \to \sim(q \vee s)\Big\}$$

$$\underbrace{[(\sim p \vee q) \wedge (p}_{\text{Semi-absorción}} \wedge r)] \to (r \wedge q) \wedge \underbrace{[(\sim q \vee p) \wedge (\sim p}_{\text{Semi-absorción}}) \wedge (\sim s)] \to (\sim q \wedge \sim s)$$

$$[(\underbrace{(p \wedge q) \wedge r}_{\text{Ley Asociativa}})] \to (r \wedge q) \wedge [\underbrace{(\sim p \wedge \sim q) \wedge (\sim s}_{\text{Ley Asociativa}})] \to (\sim q \wedge \sim s)$$

$$\underbrace{\{p \wedge (q \wedge r) \to (r \wedge q)\}}_{\text{Ley de Exportación}} \wedge \underbrace{\{[\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim s)] \to (\sim q \wedge \sim s)\}}_{\text{Ley de Exportación}}$$

$$\{p \to [(q \wedge r) \to (r \wedge q)]\} \wedge \{[\sim p \to [(\sim q \wedge \sim s) \to (\sim q \wedge \sim s)]]\}$$

$$\{p \to (V)\} \wedge \{\sim p \to V\} \equiv \{V\} \wedge \{V\} \equiv V$$

$$\mathcal{Q} \equiv \{[(p \to q) \vee (q \wedge r)] \vee \sim[(q \to r) \wedge \underbrace{(p \vee (p \wedge m))}_{\text{Absorción}}]\} \vee \sim\{(p \to q) \wedge (r \to \sim p)\}$$

$$\{[(\sim p \vee q) \vee (q \wedge r)] \vee \sim[(\sim q \vee r) \wedge (p)]\} \vee \sim\{(\sim p \vee q) \wedge (\sim r \vee \sim p)\}$$

$$\{[\sim p \vee q] \vee [\sim p \vee (q \wedge \sim r)]\} \vee \{(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r)\}$$

$$\{[\sim p \vee q] \vee [\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \vee \{p \wedge (\sim q \vee r)\}\}$$

Por Asociativa y porque $[\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \equiv a, \quad [p \wedge (\sim q \vee r)] \equiv \sim a$

$\Rightarrow$ Quedaría $\{[\sim p \vee q] \vee (V)\} \equiv V$

Hallando $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \equiv (V) \wedge (V) \equiv V$ tautología.

2) a) Si $A \subset B$, simplificar. *Nota:* $A \subset B \Rightarrow A \cap B' \neq \varnothing$

$$\left\{ A\cap[\,(B\cap D)\cup(D\cap A)\,\cup\,((B\cup A)\cap D')\,]\cap(B\triangle C) \right\} \cup \left\{ (A\cap C)\cap((A\cap C)\triangle(A'\cup C')) \right\}$$

$$\left\{ A\cap[\,D\cap(B\cup A)\,\cup\,(B\cup A)\cap D'\,]\cap(B\triangle C) \right\} \cup \left\{ (A\cap C)\cap(A\cap C)\triangle\varnothing \right\}$$

$$\left\{ A\cap[(B\cup A)\cap\underbrace{(D\cup D')}_{D\cup D'}]\cap(B\triangle C) \right\} \cup \left\{ A\cap C \right\}$$

$$\left\{ A\cap(B\cup A)\cap(B\triangle C) \right\} \cup \left\{ A\cap C \right\} = \left\{ A\cap(B\triangle C) \right\} \cup \left\{ A\cap C \right\}$$

$$\left\{ (A\cap B)\triangle(A\cap C) \right\} \cup \left\{ A\cap C \right\}$$

$$\equiv \left\{ ((A\cap B)-(A\cap C))\,\cup\,((A\cap C)-(A\cap B)) \right\} \cup \left\{ A\cap C \right\}$$

$$\equiv \left\{ (A\cap B)\cap(A'\cup C')\,\cup\,(A\cap C)\cap(A'\cup B') \right\} \cup \left\{ A\cap C \right\}$$

$$\left\{ B\cap(A\cap C)'\,\cup\,(C\cap(\underbrace{A\cap B'}_{\varnothing}) \right\} \cup \left\{ A\cap C \right\}$$

$$\equiv \left\{ A\cap B\cap C' \right\} \cup \left\{ A\cap C \right\} \equiv A\cap((\underbrace{B\cap C')\cup C}_{\text{semi-absorción}}) \equiv A\cap(C\cup B) \equiv A\cap(B\cup C).$$

2) b)

$$\left\{ [A'\cup(B\cap C')]\cap[A\cap(B'\cup C)] \right\} \cup \left\{ \underbrace{[(A\cap B)\cap(A\cup B)]}_{\text{Absorción}} \cup \underbrace{[C\cap((C'\cup B)\cap A)]}_{\substack{\text{Ley Asociativa}\\ \text{y Semi-absorción}}} \right\}$$

$$\left\{ [A'\cup(B\cap C')]\cap[A'\cup(B\cap C')]' \right\} \cup \left\{ [A\cap B]\,\cup\,[A\cap(C\cap B)] \right\}$$

$$\left\{ \varnothing \right\} \cup \left\{ \underbrace{[A\cap B]\,\cup\,[(A\cap B)\cap C]}_{\text{Absorción}} \right\}$$

$$\equiv \varnothing \cup \left\{ A\cap B \right\} \equiv A\cap B.$$

3) a) Demostración por elementos.

$$\underbrace{\Big\{\,[\,(A'\cup B)\cap(A'\cup C')\,]'\ \cup\ (C'\cup B')'\Big\}}_{\mathcal{Y}}\ \subseteq\ \underbrace{\Big\{\,[\,(B'\cup A)\cap(A'\cap C')\,]'\ \cup\ (B\cup D)'\Big\}}_{\mathcal{Z}}$$

$$x\in\mathcal{Y}\qquad\Rightarrow\qquad x\in\mathcal{Z}$$

$$\Big\{\,[\,x\in(A'\cup B)\wedge x\in(A'\cup C')\,]'\vee x\in(C'\cup B')'\Big\}\Rightarrow\Big\{\,[\,x\in(B'\cup A)\wedge x\in(A'\cap C')\,]'\vee x\in(B\cup D)'\Big\}$$

$$\Big\{\,[\,(x\in A'\vee x\in B)\ \wedge\ (x\in A'\vee x\in C')\,]'\ \vee\ (x\in C'\vee x\in B')'\Big\}\ \Rightarrow$$

$$\Big\{\,[\,(x\in B'\vee x\in A)\ \wedge\ (x\in A'\wedge x\in C')\,]'\ \vee\ (x\in B\vee x\in D)'\Big\}$$

$$\Big\{\,[\,x\in A'\vee(x\in B\wedge x\in C')\,]'\vee(x\in C\wedge x\in B)\Big\}\Rightarrow\Big\{\,[\,x\in A'\wedge x\in B'\wedge x\in C'\,]'\vee(x\in B'\wedge x\in D')\Big\}$$

$$\Big\{\,[\,x\in A\wedge(x\in B'\vee x\in C)\,]\vee(x\in C\wedge x\in B)\Big\}\Rightarrow\Big\{(x\in A\vee x\in B\vee x\in C)\vee(x\in B'\wedge x\in D')\Big\}$$

$$\Big\{(x\in A\ \vee\ (x\in C\wedge x\in B))\ \wedge\ ((x\in B'\vee \underbrace{x\in C)\vee(x\in C\wedge x\in B)}_{\text{Absorción}})\Big\}$$

$$\Rightarrow\ \Big\{x\in A\ \vee\ x\in C\ \vee\ (x\in B\ \vee\ x\in D')\Big\}$$

$$\Big\{(x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in B'\vee x\in C)\Big\}\Rightarrow\Big\{x\in A\vee x\in B\vee x\in C\vee x\in B'\vee x\in D'\Big\}$$

$$\Big\{(x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in A\vee x\in B)\wedge(\sim(x\in B)\vee x\in C)\Big\}\Rightarrow\Big(x\in A\vee x\in B\vee x\in C\vee\sim(x\in D)\Big)$$

Utilizando Álgebra de Boole. $x\in A\equiv p,\ x\in B\equiv q,\ x\in C\equiv r,\ x\in D\equiv s.$

$$\Big\{(p\vee r)\ \wedge\ (p\vee q)\ \wedge\ (\sim q\vee r)\Big\}\ \Rightarrow\ \Big\{p\vee q\vee r\vee\sim s\Big\}$$

Por Asociativa y ordenando de forma conveniente

$$\Big(\underbrace{(\sim p\wedge\sim q)\ \vee\ (p\vee q)}_{V\ \text{(independiente al valor)}}\Big)\ \vee\ \Big((\sim p\wedge\sim r)\ \vee\ (q\wedge\sim r)\Big)\ \vee\ (r\vee\sim s)\ \equiv\ V\ \ \text{(tautología).}$$

Por lo tanto, si $\forall x\in\mathcal{Y}\Rightarrow x\in\mathcal{Z}\equiv V$, concluimos

$$\boxed{\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{Z}}.$$

3) b) $A - B \subset (A - C) \cup (C - B)$

$$x \in (A - B) \Rightarrow x \in (A - C) \vee x \in (C - B)$$

$$x \in (A \cap B') \Rightarrow x \in (A \cap C') \vee x \in (C \cap B')$$

$$x \in A \wedge x \in B' \Rightarrow (x \in A \wedge x \in C') \vee (x \in C \wedge x \in B')$$

$$x \in A \wedge x \in B' \Rightarrow \underbrace{((x \in A \wedge x \in C') \vee (x \in C))}_{\text{Semi absorción}} \wedge ((x \in A \wedge x \in C') \vee (x \in B'))$$

$$x \in A \wedge x \in B' \Rightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in A \vee x \in B') \wedge (x \in C' \vee x \in B')$$

$$x \in A \wedge {\sim}(x \in B) \Rightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in A \vee {\sim}(x \in B)) \wedge ({\sim}(x \in C) \vee {\sim}(x \in B))$$

Utilizando Álgebra de Boole. $x \in A \equiv p,\ x \in B \equiv q,\ x \in C \equiv r.$

$$\text{Tenemos} \quad (p \wedge {\sim}q) \Rightarrow ((p \vee r) \wedge (p \vee {\sim}q) \wedge ({\sim}r \vee {\sim}q))$$

$$({\sim}p \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge (p \vee {\sim}q) \wedge ({\sim}q \vee {\sim}r))$$

$$\sim p \vee \Big((q \vee (p \vee r)) \wedge \underbrace{(q \vee (p \vee \sim q))}_{V} \wedge \underbrace{(q \vee ({\sim}q \vee \sim r))}_{V}\Big)$$

$$\equiv \sim p \vee (q \vee (p \vee r)) \qquad \text{Aplicando Asociativo.}$$

$$\equiv (\sim p \vee p) \vee q \vee r$$

$$\equiv V \vee (q \vee r)$$

$$\equiv V \quad \text{o tautología.}$$

$\Rightarrow \forall x \in (A - B) :\ x \in (A - C) \vee x \in (C - B)$. Por lo tanto,

$$\boxed{A - B \subset (A - C) \cup (C - B)} \quad \text{Demostrado.}$$