

# Informe 5: Variación de la presión con la profundidad

Carlos Eduardo Caballero Burgoa

200201226@est.umss.edu

19 de mayo de 2021

**Grupo:** J2 (Miércoles)

**Docente:** Ing. Milka Mónica Torrico Troche

**Carrera:** Ing. Electromecánica

## Resumen

Este documento detalla el experimento realizado en simulador para hallar la relación funcional entre la presión y la profundidad en un fluido en reposo, además del cálculo de la densidad, para esto se realizó la medición de la presión en un fluido a diferentes variaciones de profundidad; posteriormente se calculó la relación funcional con el método de mínimos cuadrados, finalmente se determinó el valor de la densidad, resultando ser:  $(1701.5 \pm 5.8)[kg/m^3]$ ; 0.34 %.

## 1. Introducción

Cuando un fluido (ya sea líquido o gaseoso) está en reposo, este ejerce una fuerza perpendicular a cualquier superficie, en contacto con este. Considerando una superficie pequeña de área  $dA$  centrada en un punto en el fluido; la fuerza normal que el fluido ejerce sobre cada lado es  $dF_{\perp}$ . Se define la **presión** ( $P$ ) en ese punto como la fuerza normal por unidad de área, es decir, la razón entre  $dF_{\perp}$  y  $dA$  [1].

$$P = \frac{dF_{\perp}}{dA} \quad (1)$$

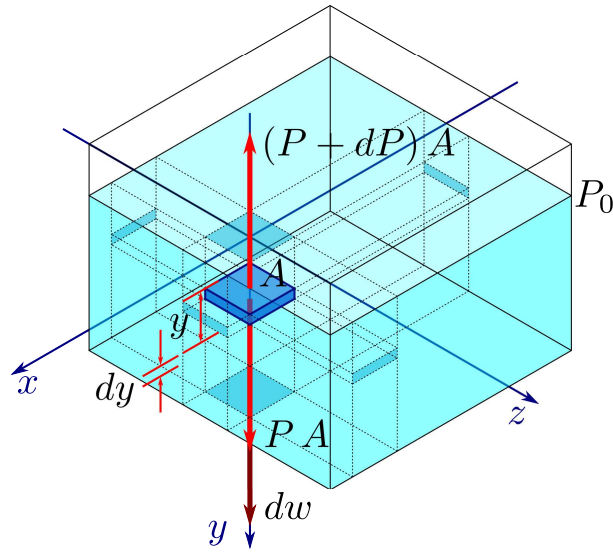
Es posible deducir una relación general entre la presión  $P$  en cualquier punto de un fluido de reposo y la profundidad  $y$  del punto; si la densidad  $\rho$  tiene el mismo valor en todo el fluido (es decir, la densidad es uniforme), al igual que la aceleración debida a la gravedad  $g$ .

Considerando un elemento de espesor  $dy$ , como puede verse en la **Figura 1**; la superficie inferior y superior tiene un área  $A$ , y están a distancias  $y + dy$  y  $y$  respectivamente.

El volumen ( $dV$ ) del elemento es:

$$dV = A dy$$

Su masa ( $dm$ ) y peso ( $dw$ ) son:



**Figura 1:** Fuerzas sobre un elemento de fluido en equilibrio.

**Nota:** Física Universitaria Volumen I (p. 376),  
Young, Hugh D. y Freedman, Roger A., 2013, Pearson.

$$\begin{aligned} dm &= \rho dV = \rho A dy \\ dw &= dm g = \rho g A dy \end{aligned} \quad (2)$$

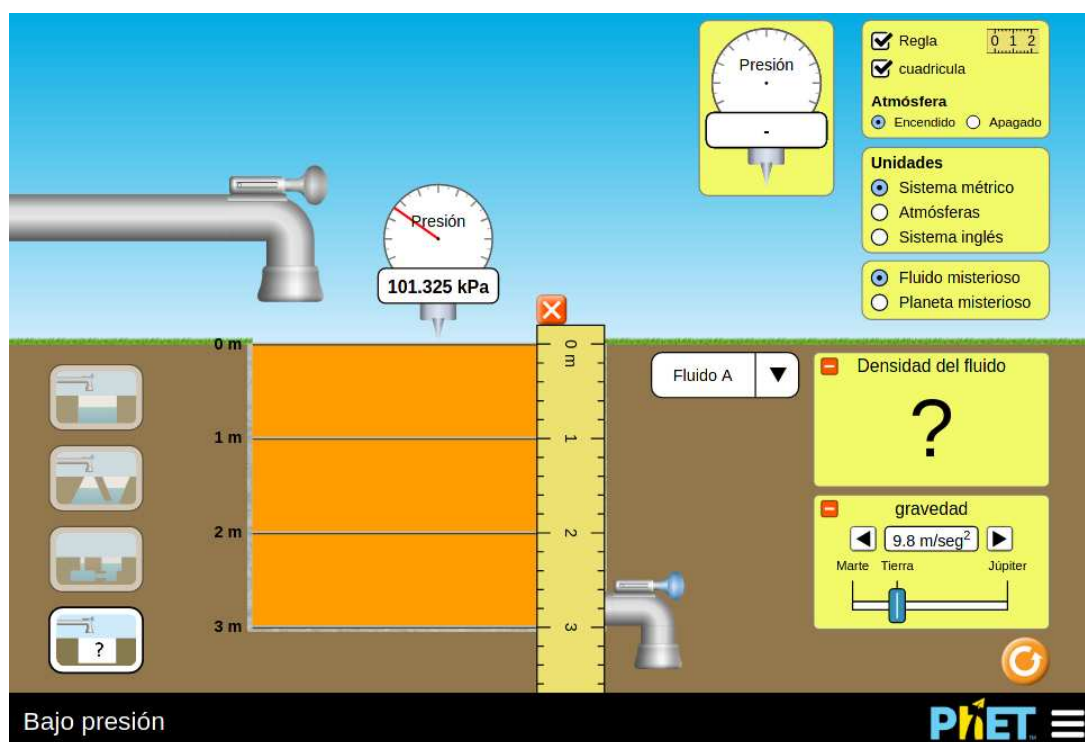
Considerando que las fuerzas que actúan sobre el elemento están en equilibrio, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ P A - (P + dP) A + dw &= 0 \\ P A - (P + dP) A + \rho g A dy &= 0 \\ P A - P A - dP A + \rho g A dy &= 0 \\ -dP A + \rho g A dy &= 0 \\ -dP + \rho g dy &= 0 \\ dP &= \rho g dy \\ \frac{dP}{dy} &= \rho g \end{aligned} \quad (3)$$

La **Ecuación 3** indica que si  $y$  aumenta,  $P$  aumenta.

Integrando la **Ecuación 3** desde la superficie hasta el valor de profundidad  $y$ , resulta:

$$\begin{aligned} dP &= \rho g dy \\ \int_{P_0}^P dP &= \int_0^h \rho g dy \end{aligned}$$



**Figura 2:** Simulador de presión.

**Nota:** Captura propia.

$$\begin{aligned}
 P \Big|_{P_0}^P &= \rho g y \Big|_0^h \\
 P - P_0 &= \rho g h \\
 P &= P_0 + \rho g h
 \end{aligned} \tag{4}$$

Por tanto, la presión es la misma en todos los puntos situados a una misma profundidad, independiente de la forma del recipiente.

Para el experimento se verificará la **Ecuación 4**. A partir de una profundidad establecida ( $h$ ), se medirá la presión ( $P$ ). Finalmente se determinará el valor de la densidad ( $\rho$ ) despejándola de la misma ecuación.

## 2. Método experimental

Para la realización del experimento, se emplea el simulador *PhET* «Bajo presión», ubicado en la dirección web: [https://phet.colorado.edu/sims/html/under-pressure/latest/under-pressure\\_es.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/under-pressure/latest/under-pressure_es.html), tal como se presenta en la **Figura 2**.

Para el simulador, se registrarán diferentes valores de profundidad ( $h$ ) para medir su variación de presión ( $P$ ).

Una vez medidos los datos, se procederá a graficar la relación profundidad vs. presión del recipiente, y con la ayuda del método de los mínimos cuadrados, se halla la relación funcional entre las variables.

Finalizando con el calculo del valor de la densidad ( $\rho$ ), a partir de la **Ecuación 4**:

$$B = \rho g$$

Despejando  $\rho$ , se obtiene:

$$\rho = \frac{B}{g} \quad (5)$$

### Datos necesarios para el experimento:

Aceleración de la gravedad local:

$$g = (9.78 \pm 0.02)[m/s^2]$$

### Datos tomados en el experimento:

En el **Cuadro 1**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto la profundidad como la presión medida.

| $i$ | $h_i[m]$ | $P_i[kPa]$ | $i$ | $h_i[m]$ | $P_i[kPa]$ |
|-----|----------|------------|-----|----------|------------|
| 1   | 0.0      | 101.325    | 9   | 1.6      | 128.007    |
| 2   | 0.2      | 104.969    | 10  | 1.8      | 131.184    |
| 3   | 0.4      | 108.306    | 11  | 2.0      | 134.680    |
| 4   | 0.6      | 111.642    | 12  | 2.2      | 138.175    |
| 5   | 0.8      | 114.820    | 13  | 2.4      | 141.671    |
| 6   | 1.0      | 117.997    | 14  | 2.6      | 145.007    |
| 7   | 1.2      | 121.493    | 15  | 2.8      | 148.185    |
| 8   | 1.4      | 124.829    | 16  | 3.0      | 151.203    |

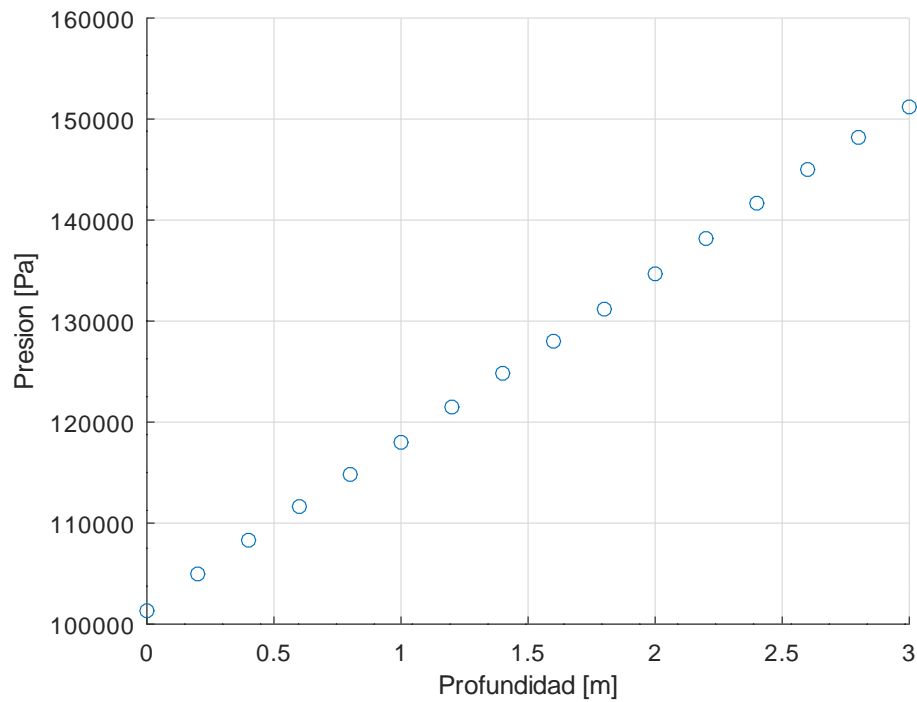
**Cuadro 1:** Mediciones de presión en función de la profundidad.

**Nota:** Elaboración propia.

## 3. Resultados

A partir de los datos obtenidos se genera la gráfica de la **Figura 3**.

Posteriormente se calculo la recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores:



**Figura 3:** Gráfica de longitud vs fuerza.

**Nota:** Elaboración propia.

$$A = (101.51 \pm 0.08)[kPa]; 0.08 \%$$

$$B = (16.64 \pm 0.04)[kPa/m]; 0.27 \%$$

Siendo su coeficiente de correlación ( $r$ ):

$$r = 0.9999$$

Considerando que el modelo de ajuste es:

$$P = A + Bh$$

Por tanto la relación funcional entre  $P$  y  $h$ , es:

| Resultado     |
|---------------|
| $P \propto h$ |

Para el calculo de la densidad ( $\rho$ ) se utiliza la **Ecuación 5**, resultando:

| Resultado                                  |
|--|
| $\rho = (1701.5 \pm 5.8)[kg/m^3]; 0.34 \%$ |

#### 4. Conclusiones

Se halló la relación funcional entre el incremento de la profundidad y la presión, confirmando la **Ecuación 4**.

También se calculó el valor de la densidad del fluido.

#### Referencias

- [1] Young, Hugh D. y Freedman, Roger A. (2013).  
Física Universitaria. Volumen 1.  
13va Edición.  
Capítulo 12.
- [2] Departamento de Física - UMSS.  
Laboratorio de Física Básica II.  
Guía - Cartilla de laboratorio.  
Gestión I/2020.

## Apéndice A: Cálculos adicionales

### 4.1. Método de mínimos cuadrados

Se calculan los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados, con la ayuda de los datos presentados en el **Cuadro 2**.

| $i$ | $x_i^2$ | $y_i^2 (10^{10})$ | $x_i y_i (10^5)$ | $Y_i (10^5)$ | $d_i$     | $d_i^2 (10^4)$ |
|-----|---------|-------------------|------------------|--------------|-----------|----------------|
| 1   | 0       | 1.0267            | 0                | 1.0151       | -182.6397 | 3.3357         |
| 2   | 0.0400  | 1.1018            | 0.2099           | 1.0484       | 133.2706  | 1.7761         |
| 3   | 0.1600  | 1.1730            | 0.4332           | 1.0816       | 142.1809  | 2.0215         |
| 4   | 0.3600  | 1.2464            | 0.6699           | 1.1149       | 150.0912  | 2.2527         |
| 5   | 0.6400  | 1.3184            | 0.9186           | 1.1482       | 0.0015    | 0.0000         |
| 6   | 1.0000  | 1.3923            | 1.1800           | 1.1815       | -151.0882 | 2.2828         |
| 7   | 1.4400  | 1.4761            | 1.4579           | 1.2148       | 16.8221   | 0.0283         |
| 8   | 1.9600  | 1.5582            | 1.7476           | 1.2480       | 24.7324   | 0.0612         |
| 9   | 2.5600  | 1.6386            | 2.0481           | 1.2813       | -125.3574 | 1.5714         |
| 10  | 3.2400  | 1.7209            | 2.3613           | 1.3146       | -276.4471 | 7.6423         |
| 11  | 4.0000  | 1.8139            | 2.6936           | 1.3479       | -108.5368 | 1.1780         |
| 12  | 4.8400  | 1.9092            | 3.0398           | 1.3812       | 58.3735   | 0.3407         |
| 13  | 5.7600  | 2.0071            | 3.4001           | 1.4144       | 226.2838  | 5.1204         |
| 14  | 6.7600  | 2.1027            | 3.7702           | 1.4477       | 234.1941  | 5.4847         |
| 15  | 7.8400  | 2.1959            | 4.1492           | 1.4810       | 84.1044   | 0.7074         |
| 16  | 9.0000  | 2.2862            | 4.5361           | 1.5143       | -225.9853 | 5.1069         |

**Cuadro 2:** Valores para el método de mínimos cuadrados.

**Nota:** Elaboración propia.

$$n = 16$$

$$\sum x_i = 24$$

$$\sum y_i = 2023493$$

$$\sum x_i^2 = 49.6000$$

$$\sum y_i^2 = 2.5967 \times 10^{11}$$

$$\sum x_i y_i = 3.2615 \times 10^6$$

$$\Delta_1 = n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2 = 217.6000$$

$$\Delta_2 = n \sum y_i^2 - \left( \sum y_i \right)^2 = 6.0261 \times 10^{10}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta_1} = 1.0151 \times 10^5 \\
B &= \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta_1} = 1.6640 \times 10^4 \\
\sum d^2 &= 3.8910 \times 10^5 \\
\sigma^2 &= \frac{\sum d_i^2}{n-2} = 2.7793 \times 10^4 \\
\sigma_A &= \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta_1}} = 79.5938 \\
\sigma_B &= \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta_1}} = 45.2063
\end{aligned}$$

Parámetros de la recta obtenida:

$$\begin{aligned}
A &= (1.0151 \times 10^5 \pm 79.5938)[Pa]; 0.0784 \% \\
B &= (1.6640 \times 10^4 \pm 45.2063)[N/m]; 0.2717 \%
\end{aligned}$$

Siendo el coeficiente de correlación:

$$R = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} = 0.9999$$

La ecuación de la recta resultante es:

$$y = 1.0151 \times 10^5 + 1.6640 \times 10^4 x$$

#### 4.2. Cálculo de la densidad

Para el cálculo de la densidad, se utiliza la **Ecuación 5**:

$$\rho = \frac{B}{g} = \frac{1.6640 \times 10^4}{9.78} = 1.7015 \times 10^3$$

Y el error de la medición es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial B} &= \frac{1}{g} \\
\frac{\partial \rho}{\partial g} &= -\frac{B}{g^2} \\
e_\rho &= \sqrt{\left(\frac{1}{g}\right)^2 e_B^2 + \left(-\frac{B}{g^2}\right)^2 e_g^2} = 2.0910 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$



Resultando:

$$\rho = (1.7015 \times 10^3 \pm 2.0910 \times 10^{-4})[kg/m^3]; 1.2289 \times 10^{-5} \%$$

## Apéndice B: Cálculos realizados en *Octave*

A continuación se presenta los cálculos realizados en el programa *Octave* para la generación de las gráficas, el calculo de los mínimos cuadrados, el valor de la densidad.

```
# Datos importados (i1.csv):
0.0,101.325
0.2,104.969
0.4,108.306
0.6,111.642
0.8,114.820
1.0,117.997
1.2,121.493
1.4,124.829
1.6,128.007
1.8,131.184
2.0,134.680
2.2,138.175
2.4,141.671
2.6,145.007
2.8,148.185
3.0,151.203

# Comandos ejecutados (o1.m):
function graficar(t,_x,_y,eps,x,y)
    f = figure()

    title(t)
    xlabel(_x)
    ylabel(_y)

    hold on
    grid on
    plot(x, y, 'o')

    print(f,eps,'-color')
    hold off
end

function [A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)
    xx = x.*x
    yy = y.*y
    xy = x.*y

    % tamaño de la muestra
    n = length(x)

    % calculo de las sumatorias
    sx = sum(x)
    sy = sum(y)

    sxx = sum(xx)
```

```
syy = sum(yy)
sxy = sum(xy)

D1 = (n * sxx) - (sx)^2
D2 = (n * syy) - (sy)^2

% calculo de los valores de la recta
A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D1
B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D1

% calculo del error
Y = A + (B * x)
d = y - Y

dd = d.*d
sdd = sum(dd)
s2 = sdd / ( n - 2)

sA = sqrt( (s2 * sxx) / D1 )
sB = sqrt( (s2 * n) / D1 )

% calculando el error porcentual
EA = abs(sA / A) * 100
EB = abs(sB / B) * 100

% calculo de correlacion
R = ((n * sxy) - (sx * sy)) / sqrt( D1 * D2 )
end

clear
close all
clc

addpath('.../.../octave')

% leer datos previamente formateados
table = csvread('i1.csv')

h = table(:,1) % [m]
P = table(:,2) % [kPa]

% conversion a SI
P = P * 1000

graficar(
    '',
    'Profundidad [m]',
    'Presion [Pa]',
    'o1.eps',
    h,
    P
)

x = h
y = P
```

```

[A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)

% conversion de unidades
mA = A / 1000
eA = sA / 1000
mB = B / 1000
eB = sB / 1000

% calculo de la densidad
g = 9.78
e_g = 0.02

p = B / g
e_p = sqrt( ((-B/g^2)^2 * (e_g)^2) + ((1/g)^2 * (sB)^2) )
E_p = abs(e_p / p) * 100

# Salida del programa (o1.out):
table =

      0    101.3250
    0.2000    104.9690
    0.4000    108.3060
    0.6000    111.6420
    0.8000    114.8200
    1.0000    117.9970
    1.2000    121.4930
    1.4000    124.8290
    1.6000    128.0070
    1.8000    131.1840
    2.0000    134.6800
    2.2000    138.1750
    2.4000    141.6710
    2.6000    145.0070
    2.8000    148.1850
    3.0000    151.2030

h =

      0
    0.2000
    0.4000
    0.6000
    0.8000
    1.0000
    1.2000
    1.4000
    1.6000
    1.8000
    2.0000
    2.2000
    2.4000
    2.6000
    2.8000

```

3.0000

P =

101.33  
104.97  
108.31  
111.64  
114.82  
118.00  
121.49  
124.83  
128.01  
131.18  
134.68  
138.18  
141.67  
145.01  
148.19  
151.20

P =

101325  
104969  
108306  
111642  
114820  
117997  
121493  
124829  
128007  
131184  
134680  
138175  
141671  
145007  
148185  
151203

f = 1

x =

0  
0.2000  
0.4000  
0.6000  
0.8000  
1.0000  
1.2000  
1.4000  
1.6000  
1.8000  
2.0000  
2.2000  
2.4000

2.6000  
2.8000  
3.0000

y =

101325  
104969  
108306  
111642  
114820  
117997  
121493  
124829  
128007  
131184  
134680  
138175  
141671  
145007  
148185  
151203

xx =

0  
0.0400  
0.1600  
0.3600  
0.6400  
1.0000  
1.4400  
1.9600  
2.5600  
3.2400  
4.0000  
4.8400  
5.7600  
6.7600  
7.8400  
9.0000

yy =

1.0267e+10  
1.1018e+10  
1.1730e+10  
1.2464e+10  
1.3184e+10  
1.3923e+10  
1.4761e+10  
1.5582e+10  
1.6386e+10  
1.7209e+10  
1.8139e+10  
1.9092e+10

```
2.0071e+10
2.1027e+10
2.1959e+10
2.2862e+10

xy =

0
2.0994e+04
4.3322e+04
6.6985e+04
9.1856e+04
1.1800e+05
1.4579e+05
1.7476e+05
2.0481e+05
2.3613e+05
2.6936e+05
3.0398e+05
3.4001e+05
3.7702e+05
4.1492e+05
4.5361e+05

n = 16
sx = 24
sy = 2023493
sxx = 49.600
syy = 2.5967e+11
sxy = 3.2615e+06
D1 = 217.60
D2 = 6.0261e+10
A = 1.0151e+05
B = 1.6640e+04
Y =

1.0151e+05
1.0484e+05
1.0816e+05
1.1149e+05
1.1482e+05
1.1815e+05
1.2148e+05
1.2480e+05
1.2813e+05
1.3146e+05
1.3479e+05
1.3812e+05
1.4144e+05
1.4477e+05
1.4810e+05
1.5143e+05

d =

-1.8264e+02
```

```
1.3327e+02
1.4218e+02
1.5009e+02
1.4706e-03
-1.5109e+02
1.6822e+01
2.4732e+01
-1.2536e+02
-2.7645e+02
-1.0854e+02
5.8374e+01
2.2628e+02
2.3419e+02
8.4104e+01
-2.2599e+02

dd =

3.3357e+04
1.7761e+04
2.0215e+04
2.2527e+04
2.1626e-06
2.2828e+04
2.8298e+02
6.1169e+02
1.5714e+04
7.6423e+04
1.1780e+04
3.4075e+03
5.1204e+04
5.4847e+04
7.0736e+03
5.1069e+04

sdd = 3.8910e+05
s2 = 2.7793e+04
sA = 79.594
sB = 45.206
EA = 0.078412
EB = 0.2717
R = 0.9999
A = 1.0151e+05
sA = 79.594
B = 1.6640e+04
sB = 45.206
R = 0.9999
mA = 101.51
eA = 0.079594
mB = 16.640
eB = 0.045206
g = 9.7800
e_g = 0.020000
p = 1701.5
e_p = 5.7856
E_p = 0.3400
```



