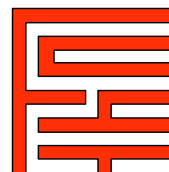


**UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
CARRERA DE ELECTROMECAÁNICA**



FÍSICA BÁSICA II

Tarea de Investigación

MOMENTO DE INERCIA

Estudiante:

Caballero Burgoa, Carlos Eduardo.

Docente:

Ing. Moreira Calizaya, René.

Grupo: J.

Fecha de entrega: 1 de Mayo del 2021.

Índice

1. Introducción	2
2. Sistema discreto de partículas [2]	2
3. Teorema de los ejes paralelos [2]	7
4. Sistema continuo de partículas [2]	8
5. Calculo de momentos de inercia	9
5.1. Varilla delgada horizontal	9
5.2. Anillo delgado horizontal	11
5.3. Anillo delgado vertical	12
5.4. Placa rectangular horizontal	14
5.5. Placa rectangular vertical	15
5.6. Disco circular horizontal	17
5.7. Disco circular vertical	18
5.8. Esfera hueca	19
5.9. Bloque rectangular	21
5.10. Cilindro horizontal	23
5.11. Cilindro vertical	24
5.12. Esfera solida	26
6. Piezas compuestas	28
Referencias	30

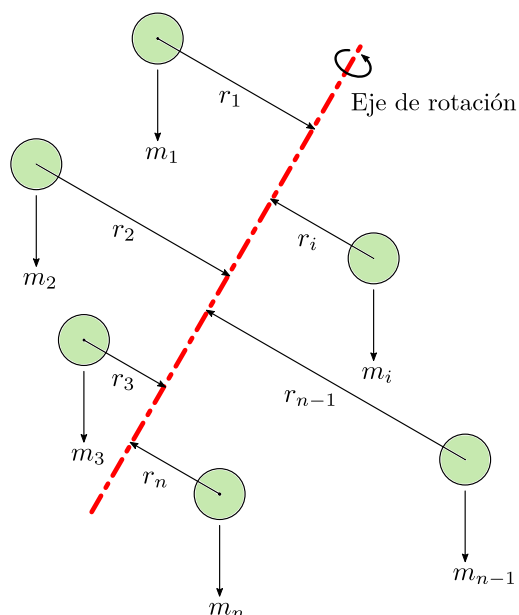


Figura 1: Sistema de partículas girando alrededor de un eje.

1. Introducción

Cuando se analiza un movimiento traslacional y rectilíneo se considera a la masa del objeto como una medida de su inercia. Por lo tanto, la masa es una medida de la inercia de un cuerpo y es en este sentido, una medida de su resistencia al cambio de velocidad.

Análogamente, al hacer que un objeto sólido rote o se mueva en trayectoria curva, se observa una resistencia al cambio del movimiento rotacional. Esta oposición del objeto al cambio de su rotación se conoce como inercia rotacional o **momento de inercia**. En otras palabras, en el movimiento circular el momento de inercia cumple el mismo rol que la masa juega en el movimiento rectilíneo [1].

2. Sistema discreto de partículas [2]

Se tiene un cuerpo formado por un sistema de partículas (véase la **Figura 1**), con masas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots, m_{n-1}, m_n$, a distancias perpendiculares $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i, \dots, r_{n-1}, r_n$ del eje de rotación.

Cuando este sistema de partículas gira alrededor de un eje fijo, la rapidez v_i de cada partícula esta dada por:

$$v = r\omega$$

Donde ω es la magnitud de la velocidad angular del sistema de partículas medida en rad/s . Cada partícula tiene un r_i diferente, pero todas comparten el mismo valor de ω (si es que

consideramos el sistema de partículas como un cuerpo rígido), por tanto la energía cinética de cada partícula es:

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

La energía cinética total del sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \omega^2 + \dots + \frac{1}{2}m_n r_n^2 \omega^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

Sacando el factor común $\omega^2/2$ de la expresión, se obtiene:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + \dots + m_n r_n^2) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se denota con I , y es el **momento de inercia** del cuerpo para este eje de rotación:

$$I = m_1 r_1^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (1)$$

Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total determinada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia.

En términos del momento de inercia I , la **energía cinética de rotación** K de un cuerpo rígido es:

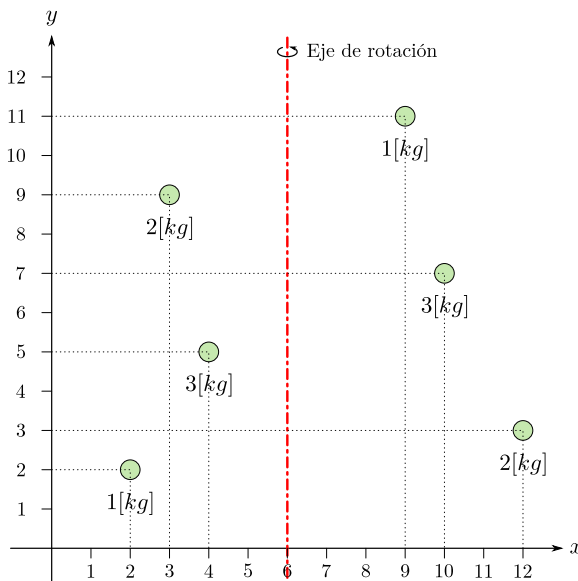
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2)$$

Entonces, cuanto mayor sea el momento de inercia, mayor será la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una rapidez angular ω . Y sabiendo que la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo efectuado para acelerar ese cuerpo desde el reposo, podemos asumir que cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo, más difícil será ponerlo a girar si está en reposo, y más difícil será detener su rotación si ya está girando.

Ejemplo 1:

Se tiene un sistema de 6 partículas como se muestra en la figura.

- a) Calcular el momento de inercia del sistema para el eje de rotación $y = 6$,
 b) Calcular la energía cinética rotacional si el sistema gira con una rapidez angular $\omega = 4.0[\text{rad/s}]$.

**Solución:**

- a) Para calcular el momento de inercia se utilizara la **ecuación (1)**, y se calculará la distancia perpendicular aprovechando que el eje es vertical.

$$I = \sum_{i=1}^6 m_i r_i^2 = 1(4)^2 + 2(3)^2 + 3(2)^2 + 1(3)^2 + 3(4)^2 + 2(6)^2 = 175[\text{kg m}^2]$$

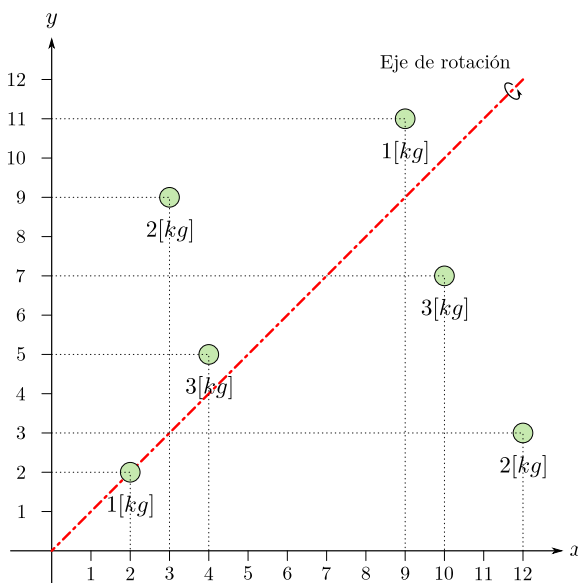
- b) Una vez calculado el momento de inercia para el eje propuesto, se puede calcular la energía cinética con la **ecuación (2)**:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (175[\text{kg m}^2]) \left(4.0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \right)^2 = 350[\text{J}]$$

Ejemplo 2:

Se tiene el sistema de 6 partículas anteriormente citado como se muestra en la figura.

- a) Calcular el momento de inercia del sistema para el eje de rotación $y = x$,
 b) Calcular la energía cinética rotacional si el sistema gira con una rapidez angular $\omega = 4.0[\text{rad/s}]$.



Solución:

a) Para calcular el momento de inercia se utilizará la **ecuación (1)**, y considerando que el eje es diagonal al sistema de referencia, se debe calcular la distancia perpendicular a tal eje:

Ecuación de la recta:

$$x - y = 0$$

Distancia de una recta a un punto:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} d_1(2, 2) &= \frac{|1(2) - 1(2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 - 2|}{\sqrt{2}} = 0 \\ d_2(3, 9) &= \frac{|1(3) - 1(9)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - 9|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \\ d_3(4, 2) &= \frac{|1(4) - 1(2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ d_4(9, 11) &= \frac{|1(9) - 1(11)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|9 - 11|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ d_5(10, 7) &= \frac{|1(10) - 1(7)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|10 - 7|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ d_6(12, 3) &= \frac{|1(12) - 1(3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|12 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Con las distancias determinadas, se calcula el momento de inercia:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^6 m_i r_i^2 = 1(0) + 2\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ I &= 2\left(\frac{36}{2}\right) + 3\left(\frac{4}{2}\right) + 1\left(\frac{4}{2}\right) + 3\left(\frac{9}{2}\right) + 2\left(\frac{81}{2}\right) = \frac{277}{2} [kg \cdot m^2] \end{aligned}$$

b) Una vez calculado el momento de inercia para el eje propuesto, se puede calcular la energía cinética con la **ecuación (2)**:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{277}{2} [kg \cdot m^2] \right) \left(4.0 \left[\frac{rad}{s^2} \right] \right) = 277 [J]$$

Ejemplo 3:

Se tiene el sistema de 4 partículas como se muestra en la figura cuyas masas y posiciones son:

$$m_1 = 1[kg] \quad p_1 = (2, 5, 3)$$

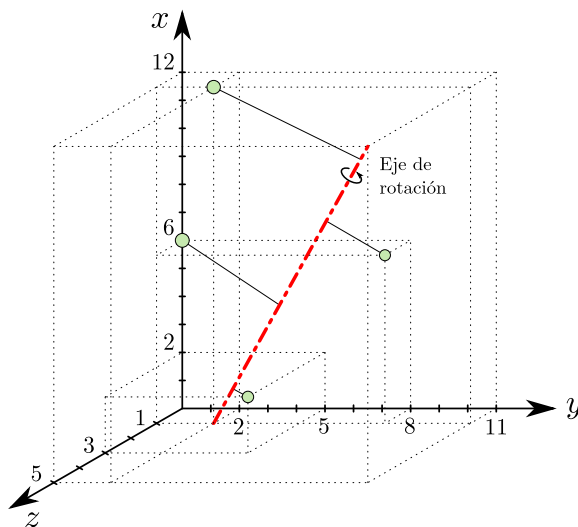
$$m_2 = 2[kg] \quad p_2 = (6, 0, 0)$$

$$m_3 = 3[kg] \quad p_3 = (6, 8, 1)$$

$$m_4 = 4[kg] \quad p_4 = (12, 2, 1)$$

a) Calcular el momento de inercia del sistema para el eje de rotación que pasa por los puntos $A = (0, 2, 1)$ y $B = (12, 11, 5)$.

b) Calcular la energía cinética rotacional si el sistema gira con una rapidez angular $\omega = 4.0[rad/s]$.

**Solución:**

a) Para calcular el momento de inercia se utilizará la **ecuación (1)**, y se usaran operaciones vectoriales para facilitar el trabajo con tres dimensiones:

Vector posición del eje:

$$\vec{r}_{AB} = B - A = (12, 11, 5) - (0, 2, 1) = (12, 9, 4)$$

Distancia mínima de un punto P_i a la línea de A a B :

$$d = |\vec{r}_{AP_i}| \left(\frac{|\vec{r}_{AP_i} \times \vec{r}_{AB}|}{|\vec{r}_{AP_i}| |\vec{r}_{AB}|} \right)$$

Por tanto:

$$d_1(2, 5, 3) = |(2, 3, 2)| \left(\frac{|(2, 3, 2) \times (12, 9, 4)|}{|(2, 3, 2)| |(12, 9, 4)|} \right) = 1.5988$$

$$d_2(6, 0, 0) = |(6, -2, -1)| \left(\frac{|(6, -2, -1) \times (12, 9, 4)|}{|(6, -2, -1)| |(12, 9, 4)|} \right) = 5.5341$$

$$d_3(6, 8, 1) = |(6, 6, 0)| \left(\frac{|(6, 6, 0) \times (12, 9, 4)|}{|(6, 6, 0)| |(12, 9, 4)|} \right) = 2.4748$$

$$d_4(12, 2, 1) = |(12, 0, 0)| \left(\frac{|(12, 0, 0) \times (12, 9, 4)|}{|(12, 0, 0)| |(12, 9, 4)|} \right) = 7.6130$$

Con las distancias determinadas, se calcula el momento de inercia:

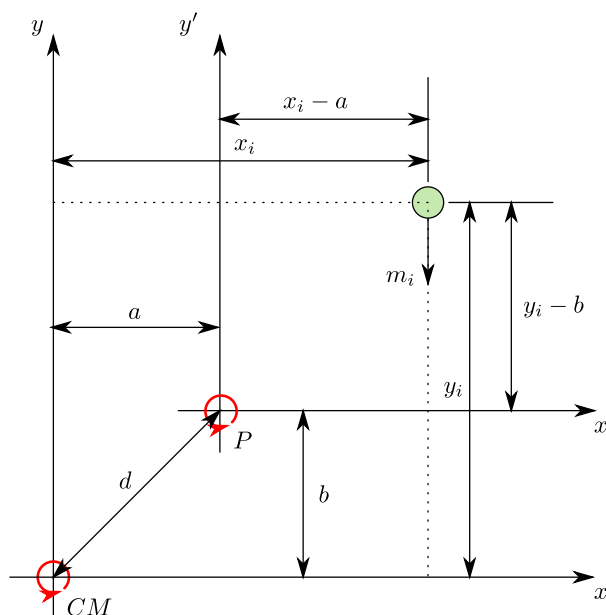


Figura 2: Dos ejes paralelos y su relación con una partícula de un sistema discreto.

$$I = \sum_{i=1}^4 m_i r_i^2 = 1(1.5988)^2 + 2(5.5341)^2 + 3(2.4748)^2 + 4(7.6130)^2 = 314.02 [kg \cdot m^2]$$

b) Una vez calculado el momento de inercia para el eje propuesto, se puede calcular la energía cinética con la **ecuación (2)**:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (314.02 [kg \cdot m^2]) \left(4.0 \left[\frac{rad}{s^2} \right] \right) = 628.03 [J]$$

3. Teorema de los ejes paralelos [2]

Considérese dos ejes de rotación paralelos en un sistema discreto de partículas (véase la **Figura 2**), uno de estos ejes ubicado en el centro de masa $O = (0, 0)$ y otro en un punto $P = (a, b)$.

El momento de inercia para el centro de masa es:

$$I_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Mientras que el momento de inercia para el punto P es:

$$I_P = \sum_{i=1}^n m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

Expandiendo los cuadrados y reagrupando los términos, se obtiene:

$$I_P = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum_{i=1}^n m_i x_i - 2b \sum_{i=1}^n m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum_{i=1}^n m_i$$

Considerando que el centro de masa del sistema se encuentra en el origen $(0, 0)$, sabemos que:

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i = 0$$

Por tanto el momento de inercia I_P , resulta:

$$I_P = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) + (a^2 + b^2) \sum_{i=1}^n m_i$$

$$I_P = I_{CM} + (a^2 + b^2) \sum_{i=1}^n m_i$$

$$I_P = I_{CM} + (a^2 + b^2)M$$

Considerando la relación pitagórica entre las variables a , b , y d :

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Por tanto:

$$I_P = I_{CM} + M d^2 \quad (3)$$

Este es el teorema de los ejes paralelos, también conocido como teorema de *Huygens–Steiner*, o simplemente como teorema de *Steiner*, puede utilizarse para determinar el momento de inercia o segundo momento de área de un cuerpo rígido respecto a cualquier eje, a partir del momento de inercia del cuerpo respecto a un eje paralelo al anterior que pase a través del centro de masas del objeto, de la masa del objeto y de la distancia medida perpendicularmente entre ambos ejes [3].

4. Sistema continuo de partículas [2]

Para el calculo de momentos de inercia en distribuciones continuas de masa, se transforma la masa m_i a un diferencial de masa dm y la sumatoria de las partículas a una integral, la **Ecuación 1** se transforma en:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Para la resolución de esta integral, se debe representar r y dm en términos de la variable de integración. Para eso puede usarse el concepto de densidad:

$$\rho = \frac{dm}{dv} \quad (5)$$

Por tanto:

$$dm = \rho dv$$

Y reemplazando en la **Ecuación 4**, obtenemos:

$$I = \int_V r^2 \rho dv$$

Si es que la densidad del objeto es uniforme, ρ puede salir de la integral:

$$I = \rho \int_V r^2 dv \quad (6)$$

Dependiendo del tipo de objeto pueden usarse tres diferentes tipos de densidad, en el cambio de variable de la integral.

Por ejemplo en coordenadas cartesianas se tienen:

- Densidad lineal de masa:

$$dm = \lambda dx$$

- Densidad superficial de masa:

$$dm = \sigma dx dy$$

- Densidad volumétrica de masa:

$$dm = \rho dx dy dz$$

5. Cálculo de momentos de inercia

5.1. Varilla delgada horizontal

El procedimiento para hallar el momento de inercia de una varilla delgada (véase la **Figura 3**) con eje en el centro de masa y perpendicular a su longitud (L), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

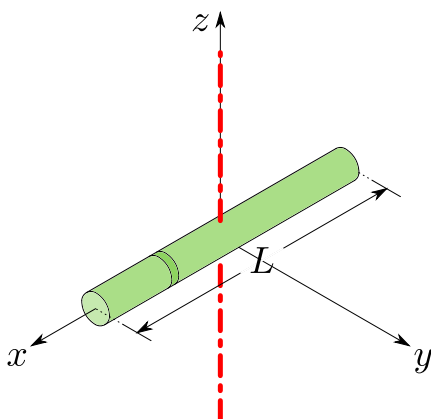


Figura 3: Varilla delgada horizontal.

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Asumiendo la distribución homogénea y longitudinal de la masa:

$$\lambda = \frac{dm}{dl}$$

Por tanto:

$$dm = \lambda dl \quad (7)$$

Para cada diferencial, se sabe que r es equivalente al valor de $|l|$:

$$r^2 = l^2 \quad (8)$$

Reemplazando (8) y (7) en (4):

$$I = \int_M r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} l^2 \lambda dl = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} l^2 dl = \lambda \left. \frac{l^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \lambda \left(\frac{(\frac{L}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{L}{2})^3}{3} \right)$$

$$I = \lambda \frac{L^3}{12} \quad (9)$$

A partir de la ecuación (7) sabemos que:

$$M = \lambda L$$

Despejando λ y reemplazando en la ecuación (9):

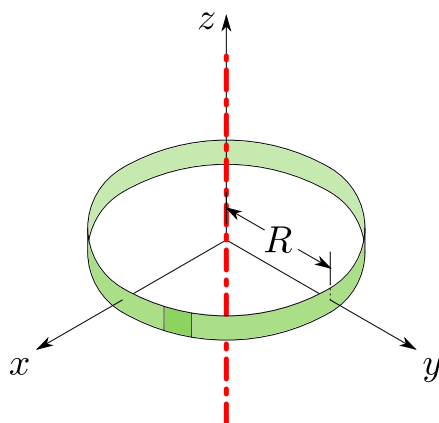


Figura 4: Anillo delgado horizontal.

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{M}{L} \right) L^3$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{12} M L^2 \quad (10)$$

5.2. Anillo delgado horizontal

El procedimiento para hallar el momento de inercia de un anillo delgado (véase la **Figura 4**) con eje en el centro de masa y perpendicular a su radio (R), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Asumiendo la distribución homogénea y longitudinal de la masa, y usando un sistema de referencia polar:

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{dm}{R d\theta}$$

Por tanto:

$$dm = \lambda R d\theta \quad (11)$$

Para cada diferencial, se sabe que r es equivalente al valor de R :

$$r = R \quad (12)$$

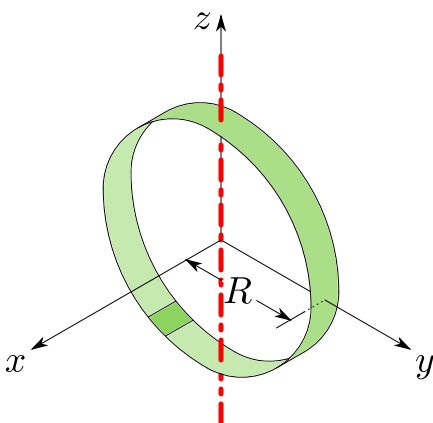


Figura 5: Anillo delgado vertical.

Reemplazando (12) y (11) en (4):

$$I = \int_M r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d\theta = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \lambda R^3 \left(\theta \right)_0^{2\pi}$$

$$I = \lambda R^3 2\pi \quad (13)$$

A partir de la ecuación (11) sabemos que:

$$M = \lambda R 2\pi$$

Despejando λ y reemplazando en la ecuación (13):

$$I = \left(\frac{M}{2\pi R} \right) R^3 2\pi$$

Resultando finalmente:

$$I = M R^2 \quad (14)$$

5.3. Anillo delgado vertical

El procedimiento para hallar el momento de inercia de un anillo delgado (véase la **Figura 5**) con eje en el centro de masa y paralelo a su radio (R), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Asumiendo la distribución homogénea y longitudinal de la masa, y usando un sistema de referencia polar:

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{dm}{R d\theta}$$

Por tanto:

$$dm = \lambda R d\theta \quad (15)$$

Considerando la relación trigonométrica entre R y r :

$$\cos(\theta) = \frac{r}{R}$$

Por tanto:

$$r = R \cos(\theta) \quad (16)$$

Reemplazando (16) y (15) en (4):

$$\begin{aligned} I &= \int_M r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2(\theta) \lambda R d\theta = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \\ I &= \lambda R^3 \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) \right) \Big|_0^{2\pi} = \lambda R^3 \left(\pi + \frac{1}{4}\sin(4\pi) - \frac{1}{4}\sin(0) \right) \\ I &= \lambda R^3 \pi \end{aligned} \quad (17)$$

A partir de la ecuación (15) sabemos que:

$$M = \lambda R 2\pi$$

Despejando λ y reemplazando en la ecuación (17):

$$I = \left(\frac{M}{2\pi R} \right) R^3 \pi$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \quad (18)$$

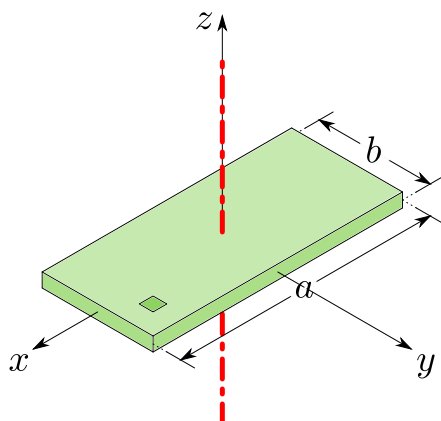


Figura 6: Placa rectangular horizontal.

5.4. Placa rectangular horizontal

El procedimiento para hallar el momento de inercia de una placa rectangular delgada (véase la **Figura 6**) con eje en el centro de masa y perpendicular a sus medidas (a, b) , es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Asumiendo la distribución homogénea y superficial de la masa:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{dx dy}$$

Por tanto:

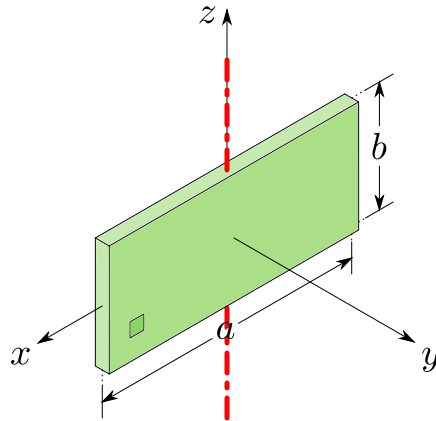
$$dm = \sigma dx dy \quad (19)$$

Considerando la relación trigonométrica entre r, x, y :

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (20)$$

Reemplazando (20) y (19) en (4):

$$\begin{aligned} I &= \int_M r^2 dm = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) \sigma dx dy = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) dx dy \\ I &= \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx + \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dx \right) dy = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} + y^2 x \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) dy \end{aligned}$$

**Figura 7:** Placa rectangular vertical.

$$\begin{aligned}
 I &= \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{a}{2}\right)^3}{3} + y^2 \left(\frac{a}{2}\right) - y^2 \left(-\frac{a}{2}\right) \right) dy = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{a^3}{12} + a y^2 \right) dy \\
 I &= \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \frac{a^3}{12} dy + \int_{-b/2}^{b/2} a y^2 dy = \sigma \left(\frac{a^3}{12} y \Big|_{-b/2}^{b/2} + a \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} \right) \\
 I &= \sigma \left(\frac{a^3}{12} \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) + a \left(\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{b}{2}\right)^3}{3} \right) \right) = \sigma \left(\frac{b a^3}{12} + \frac{b^3 a}{12} \right) \\
 I &= \frac{\sigma}{12} (b a^3 + b^3 a) \tag{21}
 \end{aligned}$$

A partir de la ecuación (19) sabemos que:

$$M = \sigma a b$$

Despejando σ y reemplazando en la ecuación (21):

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{M}{a b} \right) (b a^3 + b^3 a) = \frac{1}{12} M \left(\frac{a b^3}{a b} + \frac{a^3 b}{a b} \right)$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \tag{22}$$

5.5. Placa rectangular vertical

El procedimiento para hallar el momento de inercia de una placa rectangular delgada (véase la **Figura 7**) con eje en el centro de masa, paralelo a su medida (b) y perpendicular a su medida (a), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Asumiendo la distribución homogénea y superficial de la masa:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{dx dz}$$

Por tanto:

$$dm = \sigma dx dz \quad (23)$$

Considerando la relación entre r , x , y :

$$r = x \quad (24)$$

Reemplazando (24) y (23) en (4):

$$\begin{aligned} I &= \int_M r^2 dm = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \sigma dx dz = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx dz \\ I &= \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) dz = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{(\frac{a}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{a}{2})^3}{3} \right) dz = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \frac{a^3}{12} dz \\ I &= \sigma \frac{a^3}{12} \int_{-b/2}^{b/2} dz = \sigma \frac{a^3}{12} z \Big|_{-b/2}^{b/2} = \sigma \frac{a^3}{12} \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) \\ I &= \sigma \frac{1}{12} a^3 b \end{aligned} \quad (25)$$

A partir de la ecuación (23) sabemos que:

$$M = \sigma a b$$

Despejando σ y reemplazando en la ecuación (25):

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{M}{ab} \right) a^3 b$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{12} M a^2 \quad (26)$$

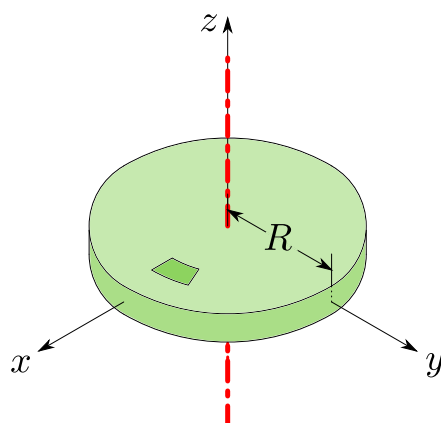


Figura 8: Disco circular horizontal.

5.6. Disco circular horizontal

El procedimiento para hallar el momento de inercia de un disco circular delgado (véase la **Figura 8**) con eje en el centro de masa y perpendicular a su radio (R), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Asumiendo la distribución homogénea y superficial de la masa, y usando un sistema de referencia polar:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{r d\theta dr}$$

Por tanto:

$$dm = \sigma r d\theta dr \quad (27)$$

Reemplazando (27) en (4):

$$\begin{aligned} I &= \int_M r^2 dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sigma r d\theta dr = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = \sigma \int_0^R (r^3 \theta \Big|_0^{2\pi}) dr \\ I &= \sigma \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \sigma \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = 2\pi \sigma \frac{R^4}{4} \\ I &= \pi \sigma \frac{R^4}{2} \end{aligned} \quad (28)$$

A partir de la ecuación (27) sabemos que:

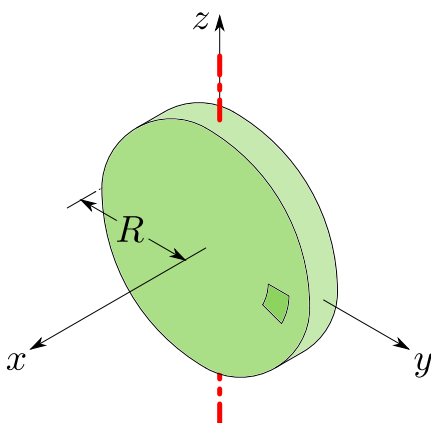


Figura 9: Disco circular vertical.

$$M = \sigma S = \sigma \pi R^2$$

Despejando σ y reemplazando en la ecuación (36), obtenemos:

$$I = \pi \left(\frac{M}{\pi R^2} \right) \frac{R^4}{2}$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \quad (29)$$

5.7. Disco circular vertical

El procedimiento para hallar el momento de inercia de un disco circular delgado (véase la **Figura 9**) con eje en el centro de masa y paralelo a su radio (R), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Asumiendo la distribución homogénea y superficial de la masa, y usando un sistema de referencia polar:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{r d\theta dr}$$

Por tanto:

$$dm = \sigma r d\theta dr \quad (30)$$

Considerando la relación trigonométrica entre la distancia perpendicular (d) y el radio (r) del diferencial.

$$\cos(\theta) = \frac{d}{r}$$

Por tanto:

$$d = r \cos(\theta) \quad (31)$$

Reemplazando (47) y (30) en (4):

$$\begin{aligned} I &= \int_M r^2 dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(\theta) \sigma r d\theta dr = \sigma \int_0^R r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta dr \\ I &= \sigma \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) d\theta \right) dr = \sigma \int_0^R r^3 \left(\frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \Big|_0^{2\pi} \right) dr \\ I &= \sigma \int_0^R r^3 \left(\pi + \frac{1}{4} \sin(4\pi) - \frac{1}{4} \sin(0) \right) dr = \sigma \int_0^R r^3 \pi dr = \pi \sigma \int_0^R r^3 dr = \pi \sigma \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) \\ I &= \pi \sigma \frac{R^4}{4} \quad (32) \end{aligned}$$

A partir de la ecuación (30) sabemos que:

$$M = \sigma \pi R^2$$

Despejando σ y reemplazando en la ecuación (32):

$$I = \pi \left(\frac{M}{\pi R^2} \right) \frac{R^4}{4}$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{4} M R^2 \quad (33)$$

5.8. Esfera hueca

El procedimiento para hallar el momento de inercia de una esfera hueca (véase la **Figura 10**) con eje en el centro de masa y con radio (R), es el siguiente:

Asumiendo la distribución homogénea y longitudinal de la masa, y usando un sistema de referencia esférico:

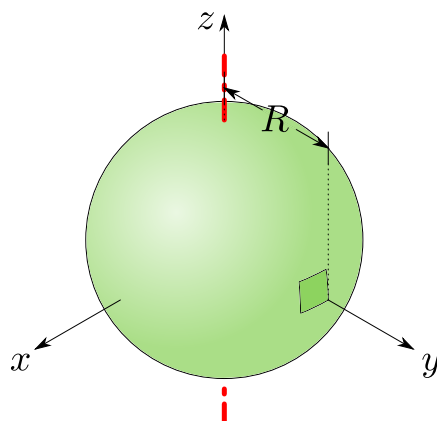


Figura 10: Esfera hueca.

$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

$$ds = R d\phi R \sin(\phi) d\theta$$

$$ds = R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta$$

Por tanto:

$$dm = \sigma ds = \sigma R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta \quad (34)$$

Considerando la relación trigonométrica entre R y r :

$$r = R \sin(\phi) \quad (35)$$

Reemplazando (35) y (34) en (4):

$$I = \int_S r^2 \sigma ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin^2(\phi) \sigma R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma R^4 \sin^3(\phi) d\phi d\theta$$

$$I = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi d\theta = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2(\phi) \sin(\phi) d\phi d\theta$$

$$I = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2(\phi)) \sin(\phi) d\phi d\theta$$

$$I = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin(\phi) d\phi - \int_0^\pi \cos^2(\phi) \sin(\phi) d\phi \right) d\theta$$

$$I = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \left(-\cos(\phi) \Big|_0^\pi + \frac{\cos^3(\phi)}{3} \Big|_0^\pi \right) d\theta$$

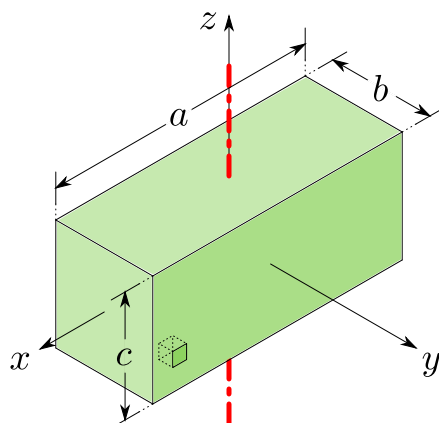


Figura 11: Bloque rectangular.

$$\begin{aligned}
 I &= \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \left(-\cos(\pi) + \cos(0) + \frac{\cos^3(\pi)}{3} - \frac{\cos^3(0)}{3} \right) d\theta \\
 I &= \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \left(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) d\theta = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \sigma \frac{4 R^4}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma \frac{4 R^4}{3} \left(\theta \right)_0^{2\pi} \\
 I &= \sigma \frac{8\pi}{3} R^4
 \end{aligned} \tag{36}$$

A partir de la ecuación (34) sabemos que:

$$M = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$$

Despejando σ y reemplazando en la ecuación (??):

$$I = \left(\frac{M}{4\pi R^2} \right) \frac{8\pi R^4}{3}$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{2}{3} M R^2 \tag{37}$$

5.9. Bloque rectangular

El procedimiento para hallar el momento de inercia de un bloque rectangular (véase la **Figura 11**) con eje en el centro de masa, perpendicular a sus medidas (a , b) y paralelo a su medida (c), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \tag{4}$$

Asumiendo la distribución homogénea y volumétrica de la masa:

$$\rho = \frac{dm}{dv} = \frac{dm}{dx dy dz}$$

Por tanto:

$$dm = \rho dx dy dz \quad (38)$$

Considerando la relación trigonométrica entre r , x , y , z :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (39)$$

Reemplazando (39) y (38) en (4):

$$\begin{aligned} I &= \int_M r^2 dm = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2 + z^2) \rho dx dy dz \\ I &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy \\ I &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx + \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dx + \int_{-a/2}^{a/2} z^2 dx \right) dy dz \\ I &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} + y^2 x \Big|_{-a/2}^{a/2} + z^2 x \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) dy dz \\ I &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{(\frac{a}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{a}{2})^3}{3} + y^2 \left(\frac{a}{2} \right) - y^2 \left(-\frac{a}{2} \right) + z^2 \left(\frac{a}{2} \right) - z^2 \left(-\frac{a}{2} \right) \right) dy dz \\ I &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{a^3}{12} + a y^2 + a z^2 \right) dy dz \\ I &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} \frac{a^3}{12} dy + \int_{-b/2}^{b/2} a y^2 dy + \int_{-b/2}^{b/2} a z^2 dy \right) dz \\ I &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{a^3}{12} y \Big|_{-b/2}^{b/2} + a \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} + a z^2 y \Big|_{-b/2}^{b/2} \right) dz \\ I &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{a^3}{12} \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) + a \left(\frac{(\frac{b}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{b}{2})^3}{3} \right) + a z^2 \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) \right) dz \\ I &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{a^3 b}{12} + \frac{a b^3}{12} + a b z^2 \right) dz = \rho \left(\frac{a^3 b z}{12} \Big|_{-c/2}^{c/2} + \frac{a b^3 z}{12} \Big|_{-c/2}^{c/2} + \frac{a b z^3}{3} \Big|_{-c/2}^{c/2} \right) \end{aligned}$$

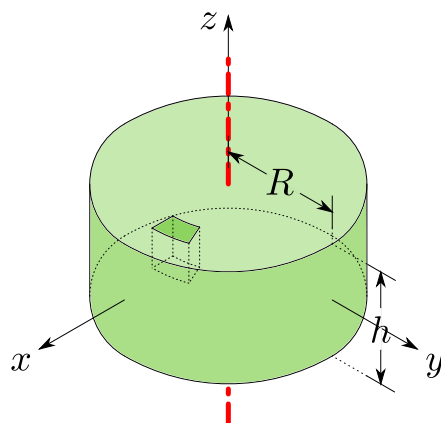


Figura 12: Cilindro horizontal.

$$I = \rho \left(\frac{a^3 b}{12} \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{2} \right) + \frac{a b^3}{12} \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{2} \right) + a b \left(\frac{(\frac{c}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{c}{2})^3}{3} \right) \right) = \rho \left(\frac{a^3 b c}{12} + \frac{a b^3 c}{12} + \frac{a b c^3}{12} \right)$$

$$I = \frac{\rho}{12} (a^3 b c + a b^3 c + a b c^3) \quad (40)$$

A partir de la ecuación (38) sabemos que:

$$M = \rho a b c$$

Despejando ρ y reemplazando en la ecuación (40):

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{M}{a b c} \right) (a^3 b c + a b^3 c + a b c^3) = \frac{1}{12} M \left(\frac{a^3 b c}{a b c} + \frac{a b^3 c}{a b c} + \frac{a b c^3}{a b c} \right)$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2 + c^2) \quad (41)$$

5.10. Cilindro horizontal

El procedimiento para hallar el momento de inercia de un cilindro sólido (véase la **Figura 12**) con eje en el centro de masa, perpendicular a su radio (R) y paralelo a su altura (h), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Asumiendo la distribución homogénea y volumétrica de la masa, y usando un sistema de referencia cilíndrico:

$$\rho = \frac{dm}{dv} = \frac{dm}{r d\theta dr dz}$$

Por tanto:

$$dm = \rho r d\theta dr dz \quad (42)$$

Reemplazando (42) en (4):

$$\begin{aligned} I &= \int_M r^2 dm = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho r d\theta dr dz = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr dz \\ I &= \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R (r^3 \theta \Big|_0^{2\pi}) dr dz = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R 2\pi r^3 dr dz = 2\pi \rho \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) dz \\ I &= 2\pi \rho \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^4}{4} dz = 2\pi \rho \left(\frac{R^4}{4} z \Big|_{-h/2}^{h/2} \right) = 2\pi \rho \left(\frac{R^4}{4} \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} h \\ I &= \frac{1}{2} \pi \rho R^4 h \end{aligned} \quad (43)$$

A partir de la ecuación (42) sabemos que:

$$M = \rho V = \rho \pi R^2 h$$

Despejando ρ y reemplazando en la ecuación (43), obtenemos:

$$I = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{M}{\pi R^2 h} \right) R^4 h$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \quad (44)$$

5.11. Cilindro vertical

El procedimiento para hallar el momento de inercia de un disco circular delgado (véase la **Figura 13**) con eje en el centro de masa, paralelo a su radio (R) y perpendicular a su altura (h), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

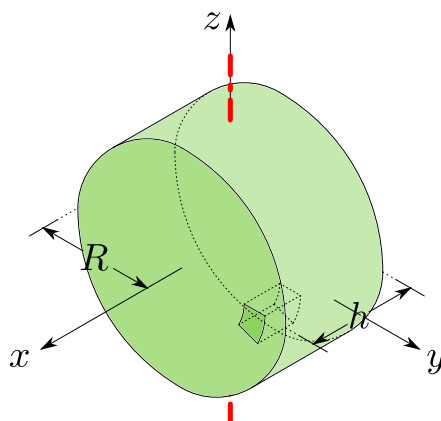


Figura 13: Cilindro vertical.

Asumiendo la distribución homogénea y volumétrica de la masa, y usando un sistema de referencia cilíndrico:

$$\rho = \frac{dm}{dv} = \frac{dm}{r d\theta dr dz}$$

Por tanto:

$$dm = \rho r d\theta dr dz \quad (45)$$

Considerando la relación trigonométrica entre la distancia perpendicular (d) y el radio (r) del diferencial.

$$\cos(\theta) = \frac{d}{r}$$

Por tanto:

$$d = r \cos(\theta) \quad (46)$$

Considerando la relación trigonométrica entre la distancia perpendicular (d) y el radio (r) del diferencial.

$$\cos(\theta) = \frac{d}{r}$$

Por tanto:

$$d = r \cos(\theta) \quad (47)$$

Reemplazando (47) y (30) en (4):

$$\begin{aligned}
I &= \int_M r^2 dm = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(\theta) \rho r d\theta dr dz = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta dr dz \\
I &= \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) d\theta \right) dr dz \\
I &= \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R r^3 \left(\frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \Big|_0^{2\pi} \right) dr dz \\
I &= \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R r^3 \left(\pi + \frac{1}{4} \sin(4\pi) - \frac{1}{4} \sin(0) \right) dr dz = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R r^3 \pi dr dz \\
I &= \pi \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R r^3 dr dz = \pi \rho \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) dz = \pi \rho \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^4}{4} dz \\
I &= \pi \rho \frac{R^4}{4} z \Big|_{-h/2}^{h/2} = \pi \rho \frac{R^4}{4} \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) \\
I &= \pi \rho \frac{R^4}{4} h
\end{aligned} \tag{48}$$

A partir de la ecuación (45) sabemos que:

$$M = \rho V = \rho \pi R^2 h$$

Despejando ρ y reemplazando en la ecuación (48), obtenemos:

$$I = \pi \left(\frac{M}{\pi R^2 h} \right) \frac{R^4}{4} h$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{4} M R^2 \tag{49}$$

5.12. Esfera solida

El procedimiento para hallar el momento de inercia de una esfera solida (véase la **Figura 14**) con eje en el centro de masa y con radio (R), es el siguiente:

Considerando la **Ecuación (4)**:

$$I = \int_M r^2 dm \tag{4}$$

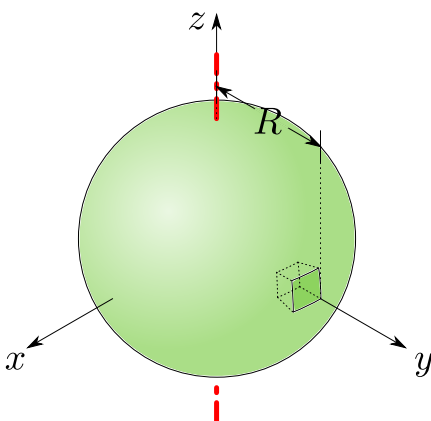


Figura 14: Esfera sólida.

Asumiendo la distribución homogénea y volumétrica de la masa, y usando un sistema de referencia esférico:

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

$$dv = da \, a \, d\phi \, a \, \text{sen}(\phi) \, d\theta$$

$$dv = a^2 \, \text{sen}(\phi) \, da \, d\phi \, d\theta$$

Por tanto:

$$dm = \rho \, r \, d\theta \, dr \, dz \quad (50)$$

Considerando la relación trigonométrica entre las variables r y a :

$$r = a \, \text{sen}(\phi) \quad (51)$$

Reemplazando (51) y (50) en (4):

$$I = \int_V r^2 \rho \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R a^2 \, \text{sen}^2(\phi) \, \rho \, a^2 \, \text{sen}(\phi) \, da \, d\phi \, d\theta$$

$$I = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R a^4 \, \text{sen}^3(\phi) \, da \, d\phi \, d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{a^5}{5} \Big|_0^R \right) \text{sen}^3(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

$$I = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^5}{5} \text{sen}^3(\phi) \, d\phi \, d\theta = \rho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}^3(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

$$I = \rho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2(\phi) \, \text{sen}(\phi) \, d\phi \, d\theta = \rho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2(\phi)) \, \text{sen}(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

$$I = \rho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \text{sen}(\phi) \, d\phi - \int_0^\pi \cos^2(\phi) \, \text{sen}(\phi) \, d\phi \right) d\theta$$

$$\begin{aligned}
 I &= \rho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\cos(\phi) \Big|_0^\pi + \frac{\cos^3(\phi)}{3} \Big|_0^\pi \right) d\theta \\
 I &= \rho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\cos(\pi) + \cos(0) + \frac{\cos^3(\pi)}{3} - \frac{\cos^3(0)}{3} \right) d\theta \\
 I &= \rho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) d\theta = \rho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \rho \frac{4R^5}{15} \int_0^{2\pi} d\theta = \rho \frac{4R^5}{15} (\theta \Big|_0^{2\pi}) \\
 I &= \rho \frac{8\pi}{15} R^5
 \end{aligned} \tag{52}$$

A partir de la ecuación (50) sabemos que:

$$M = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$$

Despejando ρ y reemplazando en la ecuación (52):

$$I = \left(\frac{3M}{4\pi R^3} \right) \frac{8\pi R^5}{15}$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{2}{5} M R^2 \tag{53}$$

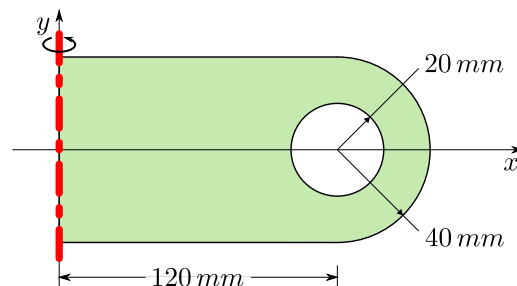
6. Piezas compuestas

Los teoremas de los ejes paralelos hacen posible determinar los momentos de una pieza compuesta en términos de un sistema coordenado específico, xyz , cuando se conocen los momentos de cada parte del área compuesta en términos de un sistema coordenado paralelo, con su origen en el centro de masa de la parte. Los valores de los momentos de las partes en términos del sistema coordenado xyz pueden sumarse (o restarse en el caso de un recorte) para obtener los valores del área compuesta [4].

Ejemplo 4:

Dada la pieza de la figura, determinar el momento de inercia en el eje presentado.

Peso de la pieza: 1 [kg].



Solución:

Para el calculo del momento de inercia de la pieza, esta será dividida en: un rectángulo sin recorte, un semicírculo sin recorte, y un recorte circular.

Se usará la **ecuación (3)** para determinar el momento de inercia en el eje para cada pieza. Y posteriormente se sumaran los resultados.

Pieza 1 (Rectángulo):

Centro de masa:

$$CM = (60, 0)$$

Momento de inercia:

$$I_{CM} = \frac{1}{12}Ma^2 = \frac{1}{12}M(120)^2$$

Momento de inercia en el eje:

$$I_1 = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}M(120)^2 + M(60)^2 = 4800M$$

Pieza 2 (Semicírculo):

Centro de masa:

$$CM = \left(120 + \frac{4R}{3\pi}, 0\right) = \left(120 + \frac{4(40)}{3\pi}, 0\right) = (136.98, 0)$$

Momento de inercia:

$$I_{CM} = \frac{2}{\pi}MR^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$$

Momento de inercia en el eje:

$$I_2 = I_{CM} + Md^2 = \frac{2}{\pi}M(40)^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) + M(136.98)^2 = 1.8874 \times 10^4 M$$

Pieza 3 (Círculo):

Centro de masa:

$$CM = (120, 0)$$

Momento de inercia:

$$I_{CM} = \frac{1}{4}MR^2$$

Momento de inercia en el eje:

$$I_3 = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{4}MR^2 + M(120)^2 = \frac{1}{4}M(20)^2 + M(120)^2 = 14500M$$

El momento de inercia total es la suma de las partes:

$$I = I_1 + I_2 - I_3 = 9174.4M = 9174.4[kg\ mm^2]$$

Referencias

- [1] Momento de Inercia
Extraído el 21 de Abril del 2021, de:
<https://www.fisic.ch/contenidos/din%C3%A1mica-rotacional/momento-de-inercia/>.
- [2] Sears y Zemansky (2013).
Física Universitaria. Volumen 1.
13va Edición.
Capítulo 9: Rotación de cuerpos rígidos.
- [3] Teorema del eje paralelo
Extraído el 25 de Abril del 2021, de:
https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_eje_paralelo.
- [4] Berford, Anthony; Fowler, Wallacet (2008).
Mecánica para Ingeniería. Estática.
5ta Edición.
Capítulo 8: Momentos de inercia.