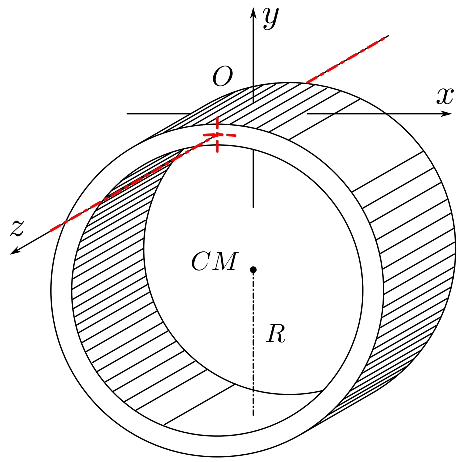
Tarea #19

Un anillo (aro) uniforme y delgado de $R = 0.5[m]$ y masa $m = 0.4[kg]$ esta suspendido verticalmente por uno de sus extremos.



Si $\phi_0 = 10°$ y $\Omega_0 = \dot{\psi}_0 = 0[rad/s]$ para $t = 0[s]$, calcular:

a) La frecuencia angular de oscilación, el periodo de oscilación y la frecuencia de oscilación.

b) La ecuación $\psi = \psi(t)$.

c) La ecuación $\Omega = \dot{\psi} = \dot{\psi}(t)$.

d) La ecuación $\alpha = \ddot{\psi} = \ddot{\psi}(t)$.

e) Las ecuaciones paramétricas del movimiento en XY.

Solución:

(a)

Sabemos que el momento de inercia en el centro de masa de un cilindro hueco de pared delgada es:

$$I_{CM} = MR^2$$

y con ayuda del teorema de los ejes paralelos:

$$I_P = I_{CM} + Md^2$$

Calculamos el momento de inercia sobre el eje de rotación en un extremo:

$$I_O = MR^2 + MR^2 = 2MR^2 \tag{1}$$

Sabiendo que:

$$\ddot{\psi} + \frac{mgd}{I_O}\psi = 0$$

y comparando con la ecuación de un oscilador armónico simple:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Obtenemos la frecuencia angular de oscilación (ω):

$$\omega = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{I_O}} = \sqrt{\frac{mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} = \sqrt{\frac{9.8}{2(0.5)}} = 3.1305[rad/s] \tag{2}$$

El periodo de oscilación (T):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.1305} = 2.0071[s] \tag{3}$$

Y la frecuencia de oscilación (ν):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.0071} = 0.4982[Hz] \tag{4}$$

(b)

La solución general de un oscilador armónico simple es:

$$\psi = A \cdot cos(\omega t - \phi)$$

Considerando las condiciones iniciales para $t = 0$:

$$\psi_0 = 10^\circ \cdot \frac{\pi[rad]}{180^\circ} = \frac{\pi}{18}[rad]$$
$$\dot{\psi}_0 = 0$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{18} = A \cdot cos(-\phi) \\ 0 = -A \cdot 3.1305 \cdot sen(-\phi) \end{cases} \tag{5}$$

Despejando ϕ de la segunda ecuación:

$$0 = sen(-\phi)$$
$$0 = sen(\phi)$$
$$\phi = arcsen(0) = 0 \tag{6}$$

Y se calcula A de la primera ecuación:

$$A = \frac{\pi}{18 \cdot cos(0)} = \frac{\pi}{18} = 0.1745[rad] \tag{7}$$

Por tanto:

$$\psi = A \cdot cos(\omega \cdot t - \phi)$$

$$\psi = 0.1745 \cdot cos(3.1305 \cdot t) \tag{8}$$

(c)

Derivando la función ψ:

$$\dot{\psi} = -A\,\omega \cdot sen(\omega \cdot t - \phi)$$
$$\dot{\psi} = -0.1745 \cdot 3.1305 \cdot sen(3.1305 \cdot t)$$
$$\Omega = \dot{\psi} = -0.5464 \cdot sen(3.1305 \cdot t) \tag{9}$$

(d)

Derivando la función $\dot{\psi}$:

$$\ddot{\psi} = -A\,\omega^2 \cdot cos(\omega \cdot t - \phi)$$
$$\ddot{\psi} = -0.1745 \cdot (3.1305)^2 \cdot cos(3.1305 \cdot t)$$
$$\alpha = \ddot{\psi} = -1.7104 \cdot cos(3.1305 \cdot t) \tag{10}$$

(e)

A partir de las relaciones trigonométricas, sabemos:

$$x(t) = R \cdot sen(\psi) = R \cdot sen(\psi) = R \cdot sen(A \cdot cos(\omega t))$$
$$x(t) = 0.5 \cdot sen(0.1745 \cdot cos(3.1305\,t))[m] \tag{11}$$

$$y(t) = -R \cdot cos(\psi) = -R \cdot cos(\psi) = -R \cdot cos(A \cdot cos(\omega t))$$
$$y(t) = -0.5 \cdot cos(0.1745 \cdot cos(3.1305\,t))[m] \tag{12}$$

Por tanto:

$$\vec{r}(t) = 0.5 \cdot sen(0.1745 \cdot cos(3.1305\,t))\,\hat{\imath} - 0.5 \cdot cos(0.1745 \cdot cos(3.1305\,t))\,\hat{\jmath} \tag{13}$$

Derivando las funciones de posición se hallan las ecuaciones de velocidad, con la ayuda de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}\left[f(g(t))\right] = f'(g(t))\,g'(t)$$

$$x'(t) = R \cdot cos(A \cdot cos(\omega t))\,(A(-sen(\omega t)))\,\omega$$
$$x'(t) = -R\,A\omega \cdot cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen(\omega t)$$
$$x'(t) = -0.2732 \cdot cos(0.1745 \cdot cos(3.1305\,t)) \cdot sen(3.1305\,t) \tag{14}$$

$$y'(t) = -R \cdot (-sen(A \cdot cos(\omega t)))\,(A(-sen(\omega t)))\,\omega$$
$$y'(t) = -R\,A\omega \cdot sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen(\omega t)$$

$$y'(t) = -0.2732 \cdot sen(0.1745 \cdot cos(3.1305\,t)) \cdot sen(3.1305\,t) \tag{15}$$

Derivando las funciones de velocidad se hallan las ecuaciones de aceleración, con la ayuda de la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dt}\left[f(t) \cdot g(t)\right] = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

$$x''(t) = -R\,A\omega\left[A\omega \cdot sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen^2(\omega t) + \omega \cdot cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot cos(\omega t)\right]$$

$$x''(t) = -R\,A\omega^2\left[A \cdot sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen^2(\omega t) + cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot cos(\omega t)\right]$$

$$\begin{aligned} x''(t) = &-0.1493 \cdot sen(0.1745 \cdot cos(3.1305t)) \cdot sen^2(3.1305t) \\ &-0.8552 \cdot cos(0.1745 \cdot cos(3.1305t)) \cdot cos(3.1305t) \end{aligned} \tag{16}$$

$$y''(t) = -R\,A\omega\left[-A\omega \cdot cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen^2(\omega t) + \omega \cdot sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot cos(\omega t)\right]$$

$$y''(t) = R\,A\omega^2\left[A \cdot cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen^2(\omega t) - sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot cos(\omega t)\right]$$

$$\begin{aligned} y''(t) = &\ 0.1493 \cdot cos(0.1745 \cdot cos(3.1305t)) \cdot sen^2(3.1305t) \\ &-0.8552 \cdot sen(0.1745 \cdot cos(3.1305t)) \cdot cos(3.1305t) \end{aligned} \tag{17}$$