

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

LABORATORIO DE FÍSICA BÁSICA I
PRACTICA No. 2

**MEDICIONES INDIRECTAS Y PROPAGACIÓN DE
ERRORES**

Estudiante:

Caballero Burgoa, Carlos Eduardo.

Docente:

Msc. Guzmán Saavedra, Rocio.

Grupo: N5.

Fecha de realización: 28 de Octubre del 2020.

Fecha de entrega: 29 de Octubre del 2020.

1. Objetivo

Que el estudiante se familiarice con la representación de las medidas indirectas.

2. Marco teórico

Las mediciones indirectas son mediciones donde no es posible obtener un valor directamente con el instrumento de medición. Para determinar el valor de la medición es necesaria una función matemática que relacione las magnitudes.

Para la determinación del error de las mediciones indirectas, se utiliza el método de propagación de errores, es decir, la propagación o efecto que producen los errores de las mediciones directas al error de la función.

Consideremos el calculo del valor de una magnitud y , que es función de una serie de magnitudes x_1, x_2, \dots, x_n , cuyos valores se pueden obtener de una manera directa en el laboratorio, es decir que:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

donde x_i , son los resultados de mediciones directas, ellas son conocidas como variables independientes:

$$x_1 = (\bar{x}_1 \pm e_1)[u], \quad (2)$$

$$x_2 = (\bar{x}_2 \pm e_2)[u], \quad (3)$$

$$x_n = (\bar{x}_n \pm e_n)[u], \quad (4)$$

La mejor estimación de y se obtiene sustituyendo en la expresión 1 los valores obtenidos de \bar{x}_i :

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (5)$$

Para la estimación del error de \bar{y} se utiliza la siguiente formula:

$$e_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_i} e_i \right)^2} \quad (6)$$

finalmente el resultado de la medición indirecta es:

$$y = (\bar{y} \pm e_y)[u], E\% \quad (7)$$

3. Materiales

- Calibrador *Vernier* (precisión 0.05[mm]).
- Calibrador *Vernier* (precisión 0.1[mm]).
- Tornillo micrométrico (precisión 0.01[mm]).
- Regla de 15 cm (precisión 1[mm]).

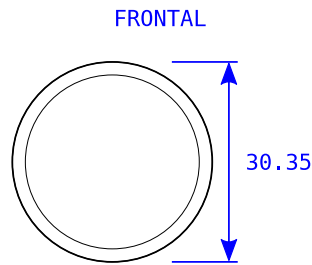


Figura 1: Datos del círculo

4. Procedimiento

A continuación se describen los procedimientos experimentales de medición que se llevarán a cabo.

4.1. Cálculo del área del círculo

- Dado el círculo de la figura 1, calcular la fórmula del área en función de su diámetro.
- Calcular el valor del área utilizando la fórmula hallada.
- Hallar la derivada parcial de la función con respecto al diámetro.
- Calcular el error estimado según el criterio pitagórico.

4.2. Cálculo del volumen del perno

- Dado el perno de la figura 2, calcular la fórmula del volumen en función de sus parámetros.
- Calcular el valor del volumen utilizando la fórmula hallada.
- Hallar las derivadas parciales de la función con respecto a sus parámetros.
- Calcular el error estimado según el criterio pitagórico.

4.3. Cálculo del área de la pieza

- Dada la pieza de la figura 3, calcular la fórmula del área en función de sus parámetros.
- Calcular el valor del área utilizando la fórmula hallada.
- Hallar las derivadas parciales de la función con respecto a sus parámetros.
- Calcular el error estimado según el criterio pitagórico.

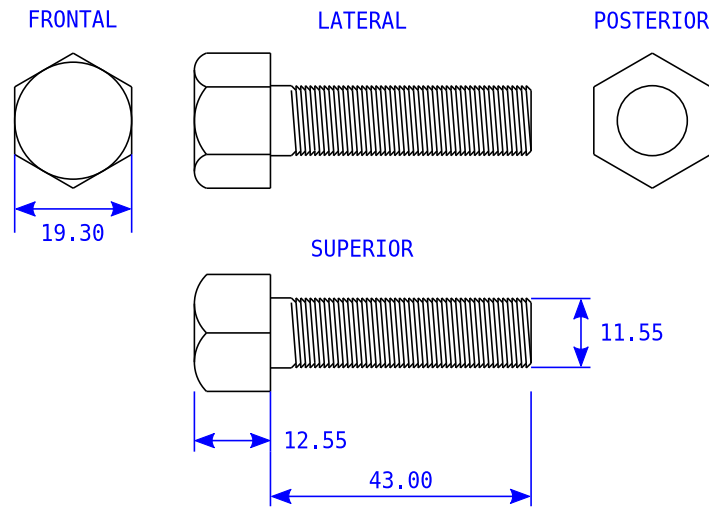


Figura 2: Datos del perno

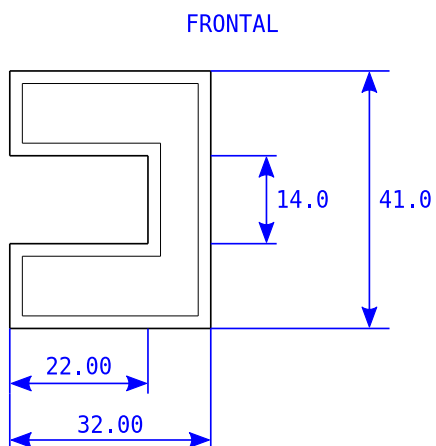


Figura 3: Datos de la pieza

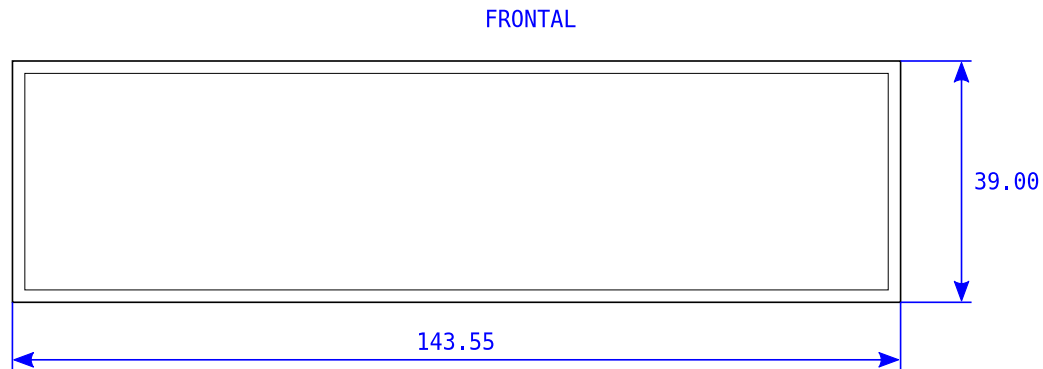


Figura 4: Datos de la caja

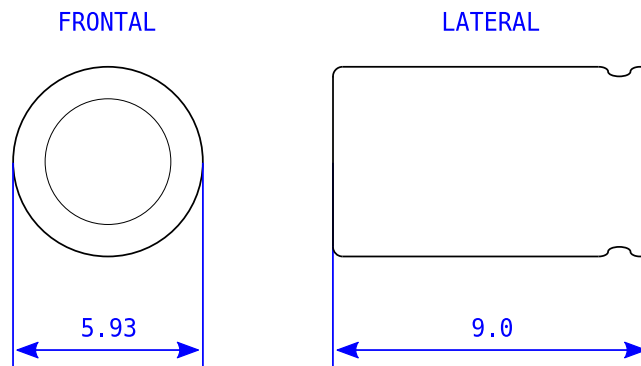


Figura 5: Datos del capacitor

4.4. Cálculo del área de la caja

- Dada la caja de la figura 4, calcular la fórmula del área en función de su base y su altura.
- Calcular el valor del área utilizando la fórmula hallada.
- Hallar las derivadas parciales de la función con respecto a sus parámetros.
- Calcular el error estimado según el criterio pitagórico.

4.5. Cálculo del volumen del capacitor

- Dado el capacitor de la figura 5, calcular la fórmula del volumen en función de sus parámetros.
- Calcular el valor del volumen utilizando la fórmula hallada.
- Hallar las derivadas parciales de la función con respecto a sus parámetros.
- Calcular el error estimado según el criterio pitagórico.

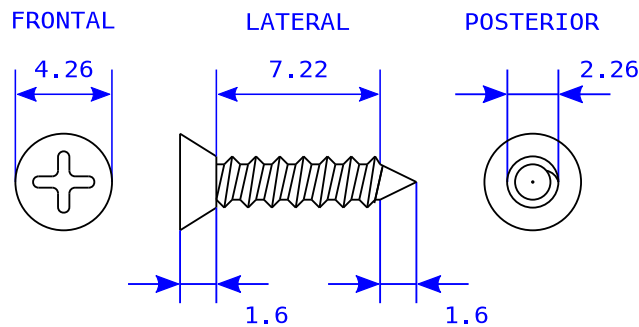


Figura 6: Datos del tornillo

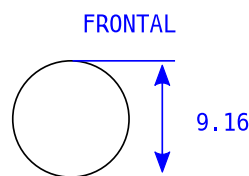


Figura 7: Datos de la esfera

4.6. Cálculo del volumen del tornillo

- Dado el tornillo de la figura 6, calcular la fórmula del volumen en función de sus parámetros.
- Calcular el valor del volumen utilizando la fórmula hallada.
- Hallar las derivadas parciales de la función con respecto a sus parámetros.
- Calcular el error estimado según el criterio pitagórico.

4.7. Cálculo del volumen de la esfera

- Dada la esfera de la figura 7, calcular la fórmula del volumen en función de su diámetro.
- Calcular el valor del volumen utilizando la fórmula hallada.
- Hallar la derivada parcial de la función con respecto a su diámetro.
- Calcular el error estimado según el criterio pitagórico.

4.8. Cálculo del volumen de la chapa de puerta

- Dada la chapa de puerta que se muestra en la imagen 8, cuyas medidas se presentan en la figura 9, calcular la fórmula del volumen en función de sus parámetros.
- Calcular el valor del volumen utilizando la fórmula hallada.
- Hallar las derivadas parciales de la función con respecto a sus parámetros.
- Calcular el error estimado según el criterio pitagórico.



Figura 8: Chapa de puerta a calcular

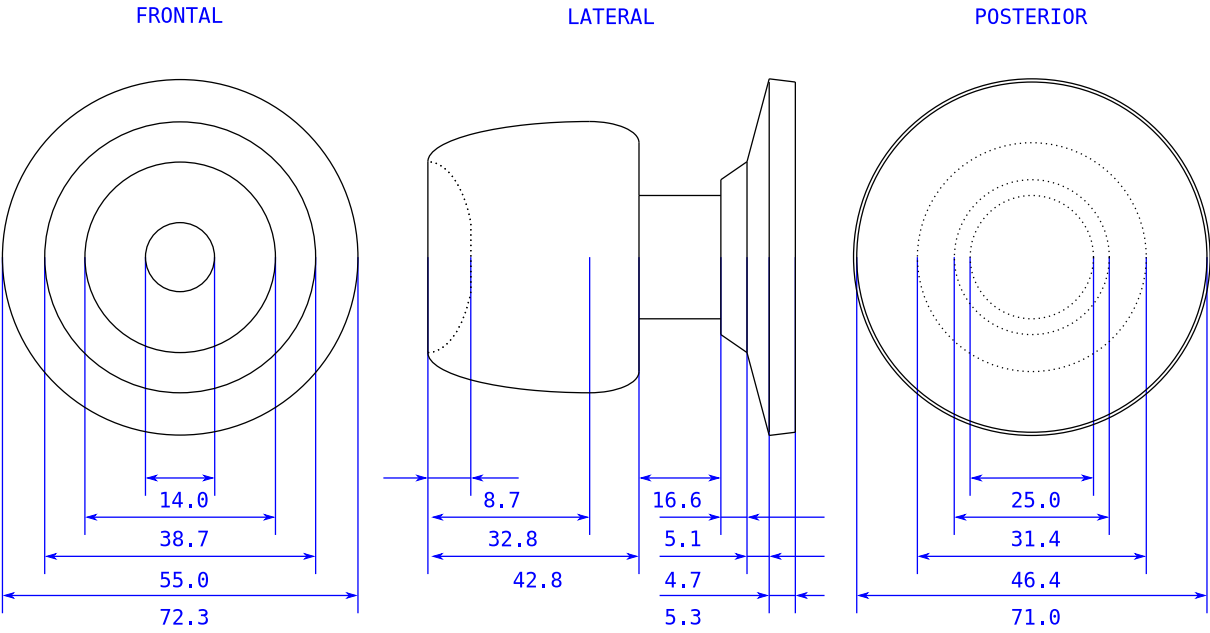


Figura 9: Datos de la chapa

5. Tablas de datos y resultados

5.1. Cálculo del área del círculo

Medidas directas del círculo	
Diámetro (d)	$30.35 \pm 0.05[mm]; 0.16 \%$

Dada la ecuación para el cálculo del área de un círculo en función de su diámetro:

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{círculo})$$

Calculando el valor representativo:

$$A = \frac{(3.1415)(30.35)^2}{4} = 723.45$$

La derivada parcial es:

$$\frac{\partial A}{\partial d} = \frac{\pi d}{2} \quad (8)$$

Siendo el error de la medición:

$$e_A = \frac{\pi d}{2} e_d \quad (9)$$

Calculando el error representativo:

$$e_A = \frac{(3.1415)(30.35)}{2} (0.05) = 2.38$$

Resultado	
Área (A)	$723.45 \pm 2.38[mm^2]; 0.33 \%$

5.2. Cálculo del volumen del perno

Medidas directas del perno	
Diámetro de la circunferencia inscrita (d_i)	$19.30 \pm 0.05[mm]; 0.26 \%$
Longitud de la cabeza (l_h)	$12.55 \pm 0.05[mm]; 0.40 \%$
Longitud del vástago (l_v)	$43.00 \pm 0.05[mm]; 0.12 \%$
Diámetro externo (d_e)	$11.55 \pm 0.05[mm]; 0.43 \%$

Dadas las ecuaciones para el cálculo del volumen de un prisma hexagonal y un cilindro, se halla el volumen total del perno:

$$V_h = 2\sqrt{3}r^2h = \frac{\sqrt{3}}{2}d^2h \quad (\text{prisma})$$

$$V_b = \pi r^2h = \frac{\pi}{4}d^2h \quad (\text{cilindro})$$

$$V = V_h + V_b = \frac{\sqrt{3}}{2} d_i^2 l_h + \frac{\pi}{4} d_e^2 l_v \quad (10)$$

Calculando el valor representativo:

$$V = \frac{1.7321}{2} (19.30^2)(12.55) + \frac{3.1415}{4} (11.55^2)(43.00) = 8553.7$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial V}{\partial d_i} = \sqrt{3} d_i l_h \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_h} = \frac{\sqrt{3}}{2} d_i^2 \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_e} = \frac{\pi}{2} d_e l_v \quad (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_v} = \frac{\pi}{4} d_e^2 \quad (14)$$

Siendo el error de la medición:

$$e_V = \sqrt{\left(\sqrt{3} d_i l_h\right)^2 e_{d_i}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d_i^2\right)^2 e_{l_h}^2 + \left(\frac{\pi}{2} d_e l_v\right)^2 e_{d_e}^2 + \left(\frac{\pi}{4} d_e^2\right)^2 e_{l_v}^2} \quad (15)$$

Calculando el error representativo:

$$\begin{aligned} e_V^2 &= ((1.7321)(19.30)(12.55))^2 (0.05^2) + \left(\frac{1.7321}{2} (19.30)^2\right)^2 (0.05^2) \\ &+ \left(\frac{3.1415}{2} (11.55)(43.00)\right)^2 (0.05^2) + \left(\frac{3.1415}{4} (11.55)^2\right)^2 (0.05^2) \\ e_V^2 &= 440.01 + 260.15 + 1521.5 + 27.444 = 2249.1 \\ e_V &= 47.425 \end{aligned}$$

Resultado	
Volumen (V)	$8553.7 \pm 47.43[mm^3]; 0.55 \%$

5.3. Calculo del área de la pieza

Medidas directas de la pieza	
Base externa (b_e)	$32.00 \pm 0.05[mm]; 0.16 \%$
Base interna (b_i)	$22.00 \pm 0.05[mm]; 0.23 \%$
Altura externa (h_e)	$41 \pm 1[mm]; 2.44 \%$
Altura interna (h_i)	$14 \pm 1[mm]; 7.14 \%$

Dadas las ecuaciones para el calculo del área de un rectángulo, se halla el área total de la pieza:

$$A_r = bh \quad (\text{rectangulo})$$

$$A = b_e h_e - b_i h_i \quad (16)$$

Calculando el valor representativo:

$$A = (32.00)(41) - (22.00)(14) = 1004$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial A}{\partial b_e} = h_e \quad (17)$$

$$\frac{\partial A}{\partial h_e} = b_e \quad (18)$$

$$\frac{\partial A}{\partial b_i} = -h_i \quad (19)$$

$$\frac{\partial A}{\partial h_i} = -b_i \quad (20)$$

Siendo el error de la medición:

$$e_A = \sqrt{(h_e)^2 e_{b_e}^2 + (b_e)^2 e_{h_e}^2 + (-h_i)^2 e_{b_i}^2 + (-b_i)^2 e_{h_i}^2} \quad (21)$$

Calculando el error representativo:

$$e_A = \sqrt{(41)^2 (0.05)^2 + (32.0)^2 (1)^2 + (-14)^2 (0.05)^2 + (-22.0)^2 (1)^2}$$

$$e_A = \sqrt{4.2025 + 1024 + 0.4900 + 484}$$

$$e_A = 38.893$$

Resultado	
Área (A)	$1004 \pm 38.89[mm^2]; 3.87 \%$

5.4. Calculo del área de la caja

Medidas directas de la caja	
Base (b)	$143.55 \pm 0.05[mm]; 0.03 \%$
Altura (h)	$39 \pm 1[mm]; 2.56 \%$

Dadas las ecuaciones para el calculo del área de un rectángulo, se halla el área total de la caja:

$$A = bh \quad (\text{rectangulo})$$

Calculando el valor representativo:

$$A = (143.55)(39) = 5598.5$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial A}{\partial b} = h \quad (22)$$

$$\frac{\partial A}{\partial h} = b \quad (23)$$

Siendo el error de la medición:

$$e_A = \sqrt{(h)^2 e_b^2 + (b)^2 e_h^2} \quad (24)$$

Calculando el error representativo:

$$e_A = \sqrt{(39)^2 (0.05)^2 + (143.55)^2 (1)^2}$$

$$e_A = \sqrt{3.8025 + 20610.4050}$$

$$e_A = 143.56$$

Resultado	
Área (A)	$5598.5 \pm 143.56[mm^2]; 2.56 \%$

5.5. Cálculo del volumen del capacitor

Medidas directas del capacitor	
Diámetro (d)	$5.93 \pm 0.01[mm]; 0.17 \%$
Altura (h)	$9 \pm 1[mm]; 11.11 \%$

Dada la ecuación para el cálculo del volumen de un cilindro en función de su altura y el diámetro de su base:

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4} \quad (\text{cilindro})$$

Calculando el valor representativo:

$$V = \frac{(3.1415)(5.93)^2(9)}{4} = 248.57$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi d h}{2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi d^2}{4} \quad (26)$$

Siendo el error de la medición:

$$e_V = \sqrt{\left(\frac{\pi h d}{2}\right)^2 e_d^2 + \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^2 e_h^2} \quad (27)$$

Calculando el error representativo:

$$e_V = \sqrt{\left(\frac{(3.1415)(9)(5.93)}{2}\right)^2 0.01^2 + \left(\frac{(3.1415)(5.93)^2}{4}\right)^2 1^2}$$

$$e_A = \sqrt{0.7028 + 762.78}$$

$$e_A = 27.631$$

Resultado	
Volumen (V)	$248.57 \pm 27.63[mm^3]; 11.12 \%$

5.6. Cálculo del volumen del tornillo

Medidas directas del tornillo	
Diámetro de la cabeza (d_h)	$4.26 \pm 0.01[mm]; 0.23 \%$
Longitud de la cabeza (l_h)	$1.60 \pm 0.01[mm]; 0.62 \%$
Longitud del cuerpo (l_b)	$7.22 \pm 0.01[mm]; 0.14 \%$
Longitud de la punta (l_t)	$1.60 \pm 0.01[mm]; 0.62 \%$
Diámetro externo (d_e)	$2.26 \pm 0.01[mm]; 0.44 \%$

Dadas las ecuaciones para el cálculo del volumen de un cono truncado, cilindro, y cono, se halla el volumen total del tornillo:

$$V_1 = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi}{12}h(D^2 + d^2 + Dd) \quad (\text{cono truncado})$$

$$V_2 = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4}d^2 h \quad (\text{cilindro})$$

$$V_3 = \frac{\pi}{3}r^2 h = \frac{\pi}{12}d^2 h \quad (\text{cono})$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{\pi}{12}l_h(d_h^2 + d_e^2 + d_h d_e) + \frac{\pi}{4}d_e l_b + \frac{\pi}{12}d_e l_t \quad (28)$$

Calculando el valor representativo:

$$V = \frac{3.1415}{12}(1.60)(4.25^2 + 2.26^2 + (4.26)(2.26))$$

$$+ \frac{3.1415}{4}(2.26)(7.22) + \frac{3.1415}{12}(2.26)(1.60)$$

$$V = 13.774 + 12.815 + 0.9467 = 27.536$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial V}{\partial l_h} = \frac{\pi}{12}(d_h^2 + d_e^2 + d_h d_e) \quad (29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_h} = \frac{\pi}{6}l_h(d_h + \frac{d_e}{2}) \quad (30)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_e} = \frac{\pi}{6} l_h \left(d_e + \frac{d_h}{2} \right) + \frac{\pi}{4} l_b + \frac{\pi}{12} l_t \quad (31)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_b} = \frac{\pi}{4} d_e \quad (32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_t} = \frac{\pi}{12} d_e \quad (33)$$

Siendo el error de la medición:

$$\begin{aligned} e_V^2 = & \left(\frac{\pi}{12} (d_h^2 + d_e^2 + d_h d_e) \right)^2 e_{lh}^2 + \left(\frac{\pi}{6} l_h \left(d_h + \frac{d_e}{2} \right) \right)^2 e_{dh}^2 \\ & + \left(\frac{\pi}{6} l_h \left(d_e + \frac{d_h}{2} \right) + \frac{\pi}{4} l_b + \frac{\pi}{12} l_t \right)^2 e_{de}^2 \\ & + \left(\frac{\pi}{4} d_e \right)^2 e_{lb}^2 + \left(\frac{\pi}{12} d_e \right)^2 e_{lt}^2 \end{aligned} \quad (34)$$

Calculando el error representativo:

$$\begin{aligned} e_V^2 = & \left(\frac{3.1415}{12} ((4.26)^2 + (2.26)^2 + (4.26)(2.26)) \right)^2 0.01^2 \\ & + \left(\frac{3.1415}{6} (1.60) \left((4.26) + \frac{2.26}{2} \right) \right)^2 0.01^2 \\ & + \left(\frac{3.1415}{6} (1.60) \left(2.26 + \frac{4.26}{2} \right) + \frac{3.1415}{4} (7.22) + \frac{3.1415}{12} (1.60) \right)^2 0.01^2 \\ & + \left(\frac{3.1415}{4} (2.26) \right)^2 0.01^2 + \left(\frac{3.1415}{12} (2.26) \right)^2 0.01^2 \\ e_V^2 = & 0.007 + 0.002 + 0.009 + 0.0003 + 0.00003 = 0.0193 \\ e_V = & 0.14 \end{aligned}$$

Resultado	
Volumen (V)	$27.54 \pm 0.14 [mm^3]; 0.50 \%$

5.7. Cálculo del volumen de la esfera

Medidas directas de la esfera	
Diámetro de la esfera (d)	$9.16 \pm 0.01 [mm]; 0.11 \%$

Dada la ecuación para el cálculo del volumen de la esfera en función de su diámetro:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6} \quad (\text{esfera})$$

Calculando el valor representativo:

$$V = \frac{3.1415}{6} 9.16^3 = 402.43$$

La derivada parcial es:

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi}{2} d^2 \quad (35)$$

Siendo el error de la medición:

$$e_V = \frac{\pi}{2} d^2 e_d \quad (36)$$

Calculando el error representativo:

$$e_V = \frac{3.1415}{2} (9.16)^2 (0.01) = 1.3180$$

Resultado	
Volumen (V)	$402.43 \pm 1.32 [mm^3]; 0.33 \%$

5.8. Calculo del volumen de la chapa de puerta

Medidas directas de la chapa	
Diámetro cilindro (d_1)	$14.0 \pm 0.1 [mm]; 0.71 \%$
Diámetro mínimo pomo (d_2)	$38.7 \pm 0.1 [mm]; 0.26 \%$
Diámetro máximo pomo (d_3)	$55.0 \pm 0.1 [mm]; 0.18 \%$
Diámetro máximo roseta (d_4)	$72.3 \pm 0.1 [mm]; 0.14 \%$
Diámetro cuello (d_5)	$25.0 \pm 0.1 [mm]; 0.40 \%$
Diámetro mínimo roseta (d_6)	$31.4 \pm 0.1 [mm]; 0.32 \%$
Diámetro intermedio roseta (d_7)	$46.4 \pm 0.1 [mm]; 0.22 \%$
Diámetro borde roseta (d_8)	$71.0 \pm 0.1 [mm]; 0.14 \%$
Profundidad pomo (l_1)	$8.7 \pm 0.1 [mm]; 1.15 \%$
Longitud barriga pomo (l_2)	$32.8 \pm 0.1 [mm]; 0.30 \%$
Longitud pomo (l_3)	$42.8 \pm 0.1 [mm]; 0.23 \%$
Longitud cuello (l_4)	$16.6 \pm 0.1 [mm]; 0.60 \%$
Grosor cuello roseta (l_5)	$5.1 \pm 0.1 [mm]; 1.96 \%$
Grosor intermedio roseta (l_6)	$4.7 \pm 0.1 [mm]; 2.13 \%$
Grosor base roseta (l_7)	$5.3 \pm 0.1 [mm]; 1.89 \%$

Dadas las ecuaciones para el calculo del volumen de un cono truncado, un cilindro, y un tonel; se halla el volumen total de la chapa:

$$V_a(h, D, d) = \frac{\pi}{12} h(D^2 + d^2 + Dd) \quad (\text{cono truncado})$$

$$V_b(h, d) = \frac{\pi}{4} h d^2 \quad (\text{cilindro})$$

$$V_c(h, D, d) = \frac{\pi}{12} h(2D^2 - d^2) \quad (\text{tonel})$$

$$\begin{aligned}
V &= V_a(l_7, d_4, d_8) + V_a(l_6, d_4, d_2) + V_a(l_5, d_2, d_6) + V_b(l_4, d_5) \\
&\quad + \frac{V_c(2(l_3 - l_2), d_3, d_7)}{2} + \frac{V_c(2l_2, d_3, d_2)}{2} - \frac{V_c(2l_1, d_2, d_1)}{2} \\
V &= \frac{\pi}{12}l_7(d_4^2 + d_4d_8 + d_8^2) + \frac{\pi}{12}l_6(d_4^2 + d_4d_2 + d_2^2) + \frac{\pi}{12}l_5(d_2^2 + d_2d_6 + d_6^2) + \frac{\pi}{4}l_4d_5^2 \\
&\quad + \frac{\pi}{12}(2l_3d_3^2 + l_3d_7^2 - 2l_2d_3^2 + l_2d_7^2) + \frac{\pi}{6}l_2(2d_3^2 - d_2^2) - \frac{\pi}{6}l_1(2d_2^2 - d_1^2) \\
V &= \frac{\pi}{12}l_7d_4^2 + \frac{\pi}{12}l_7d_4d_8 + \frac{\pi}{12}l_7d_8^2 \\
&\quad + \frac{\pi}{12}l_6d_4^2 + \frac{\pi}{12}l_6d_4d_2 + \frac{\pi}{12}l_6d_2^2 \\
&\quad + \frac{\pi}{12}l_5d_2^2 + \frac{\pi}{12}l_5d_2d_6 + \frac{\pi}{12}l_5d_6^2 \\
&\quad + \frac{\pi}{4}l_4d_5^2 \\
&\quad + \frac{\pi}{6}l_3d_3^2 + \frac{\pi}{12}l_3d_7^2 \\
&\quad + \frac{\pi}{6}l_2d_3^2 + \frac{\pi}{12}l_2d_7^2 - \frac{\pi}{3}l_2d_2^2 \\
&\quad - \frac{\pi}{3}l_1d_2^2 + \frac{\pi}{6}l_1d_1^2
\end{aligned} \tag{37}$$

Calculando el valor representativo:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{3.1415}{12}(5.3)(72.3)^2 + \frac{3.1415}{12}(5.3)(72.3)(71) + \frac{3.1415}{12}(5.3)(71)^2 \\
&\quad + \frac{3.1415}{12}(4.7)(72.3)^2 + \frac{3.1415}{12}(4.7)(72.3)(38.7) + \frac{3.1415}{12}(4.7)(38.7)^2 \\
&\quad + \frac{3.1415}{12}(5.1)(38.7)^2 + \frac{3.1415}{12}(5.1)(38.7)(31.4) + \frac{3.1415}{12}(5.1)(31.4)^2 \\
&\quad + \frac{3.1415}{4}(16.6)(25)^2 \\
&\quad + \frac{3.1415}{6}(42.8)(55)^2 + \frac{3.1415}{12}(42.8)(46.4)^2 \\
&\quad + \frac{3.1415}{6}(32.8)(55)^2 + \frac{3.1415}{12}(32.8)(46.4)^2 - \frac{3.1415}{3}(32.8)(38.7)^2 \\
&\quad - \frac{3.1415}{3}(8.7)(38.7)^2 + \frac{3.1415}{6}(8.7)(14)^2
\end{aligned}$$

$$V = 21370.27 + 11717.63 + 4938.60 + 8148.5 + 91914.28 + 18996.20 - 12752.04$$

$$V = 144333.44$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial V}{\partial d_1} = \frac{\pi}{3}l_1d_1 \tag{38}$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_2} = \frac{\pi}{12}l_6d_4 + \frac{\pi}{6}l_6d_2 + \frac{\pi}{6}l_5d_2 + \frac{\pi}{12}l_5d_6 - \frac{2\pi}{3}l_2d_2 - \frac{2\pi}{3}l_1d_2 \tag{39}$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_3} = \frac{\pi}{3}l_3d_3 + \frac{\pi}{3}l_2d_3 \tag{40}$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_4} = \frac{\pi}{6} l_7 d_4 + \frac{\pi}{12} l_7 d_8 + \frac{\pi}{6} l_6 d_4 + \frac{\pi}{12} l_6 d_2 \quad (41)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_5} = \frac{\pi}{2} l_4 d_5 \quad (42)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_6} = \frac{\pi}{12} l_5 d_2 + \frac{\pi}{6} l_5 d_6 \quad (43)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_7} = \frac{\pi}{6} l_3 d_7 + \frac{\pi}{6} l_2 d_7 \quad (44)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_8} = \frac{\pi}{12} l_7 d_4 + \frac{\pi}{6} l_7 d_8 \quad (45)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_1} = -\frac{\pi}{3} d_2^2 + \frac{\pi}{6} d_1^2 \quad (46)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_2} = \frac{\pi}{6} d_3^2 + \frac{\pi}{12} d_7^2 - \frac{\pi}{3} d_2^2 \quad (47)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_3} = \frac{\pi}{6} d_3^2 + \frac{\pi}{12} d_7^2 \quad (48)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_4} = \frac{\pi}{4} d_5^2 \quad (49)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_5} = \frac{\pi}{12} d_2^2 + \frac{\pi}{12} d_2 d_6 + \frac{\pi}{12} d_6^2 \quad (50)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_6} = \frac{\pi}{12} d_4^2 + \frac{\pi}{12} d_4 d_2 + \frac{\pi}{12} d_2^2 \quad (51)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_7} = \frac{\pi}{12} d_4^2 + \frac{\pi}{12} d_4 d_8 + \frac{\pi}{12} d_8^2 \quad (52)$$

Siendo el error de la medición:

$$\begin{aligned} e_V^2 = & \left(\frac{\pi}{3} l_1 d_1 \right)^2 e_{d1}^2 + \left(\frac{\pi}{12} l_6 d_4 + \frac{\pi}{6} l_6 d_2 + \frac{\pi}{6} l_5 d_2 + \frac{\pi}{12} l_5 d_6 - \frac{2\pi}{3} l_2 d_2 - \frac{2\pi}{3} l_1 d_2 \right)^2 e_{d2}^2 \\ & + \left(\frac{\pi}{3} l_3 d_3 + \frac{\pi}{3} l_2 d_3 \right)^2 e_{d3}^2 + \left(\frac{\pi}{6} l_7 d_4 + \frac{\pi}{12} l_7 d_8 + \frac{\pi}{6} l_6 d_4 + \frac{\pi}{12} l_6 d_2 \right)^2 e_{d4}^2 \\ & + \left(\frac{\pi}{2} l_4 d_5 \right)^2 e_{d5}^2 + \left(\frac{\pi}{12} l_5 d_2 + \frac{\pi}{6} l_5 d_6 \right)^2 e_{d6}^2 + \left(\frac{\pi}{6} l_3 d_7 + \frac{\pi}{6} l_2 d_7 \right)^2 e_{d7}^2 \\ & + \left(\frac{\pi}{12} l_7 d_4 + \frac{\pi}{6} l_7 d_8 \right)^2 e_{d8}^2 + \left(-\frac{\pi}{3} d_2^2 + \frac{\pi}{6} d_1^2 \right)^2 e_{l1}^2 + \left(\frac{\pi}{6} d_3^2 + \frac{\pi}{12} d_7^2 - \frac{\pi}{3} d_2^2 \right)^2 e_{l2}^2 \\ & + \left(\frac{\pi}{6} d_3^2 + \frac{\pi}{12} d_7^2 \right)^2 e_{l3}^2 + \left(\frac{\pi}{4} d_5^2 \right)^2 e_{l4}^2 + \left(\frac{\pi}{12} d_2^2 + \frac{\pi}{12} d_2 d_6 + \frac{\pi}{12} d_6^2 \right)^2 e_{l5}^2 \\ & + \left(\frac{\pi}{12} d_4^2 + \frac{\pi}{12} d_4 d_2 + \frac{\pi}{12} d_2^2 \right)^2 e_{l6}^2 + \left(\frac{\pi}{12} d_4^2 + \frac{\pi}{12} d_4 d_8 + \frac{\pi}{12} d_8^2 \right)^2 e_{l7}^2 \end{aligned} \quad (53)$$

Calculando el error representativo:

$$\begin{aligned}
e_V^2 = & \left(\frac{3.1415}{3}(8.7)(14) \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{12}(4.7)(72.3) + \frac{3.1415}{6}(4.7)(38.7) + \frac{3.1415}{6}(5.1)(38.7) \right. \\
& \left. + \frac{3.1415}{12}(5.1)(31.4) - \frac{2(3.1415)}{3}(32.8)(38.7) - \frac{2(3.1415)}{3}(8.7)(38.7) \right)^2 0.1^2 \\
& + \left(\frac{3.1415}{3}(42.8)(55) + \frac{3.1415}{3}(32.8)(55) \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{6}(5.3)(72.3) + \frac{3.1415}{12}(5.3)(71) \right. \\
& \left. + \frac{3.1415}{6}(4.7)(72.3) + \frac{3.1415}{12}(4.7)(38.7) \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{2}(16.6)(25) \right)^2 0.1^2 \\
& + \left(\frac{3.1415}{12}(5.1)(38.7) + \frac{3.1415}{6}(5.1)(31.4) \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{6}(42.8)(46.4) \right. \\
& \left. + \frac{3.1415}{6}(32.8)(46.4) \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{12}(5.3)(72.3) + \frac{3.1415}{6}(5.3)(71) \right)^2 0.1^2 \\
& + \left(-\frac{3.1415}{3}(38.7)^2 + \frac{3.1415}{6}(14)^2 \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{6}(55)^2 + \frac{3.1415}{12}(46.4)^2 - \frac{3.1415}{3}(38.7)^2 \right)^2 0.1^2 \\
& + \left(\frac{3.1415}{6}(55)^2 + \frac{3.1415}{12}(46.4)^2 \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{4}(25)^2 \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{12}(38.7)^2 \right. \\
& \left. + \frac{3.1415}{12}(38.7)(31.4) + \frac{3.1415}{12}(31.4)^2 \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{12}(72.3)^2 + \frac{3.1415}{12}(72.3)(38.7) \right. \\
& \left. + \frac{3.1415}{12}(38.7)^2 \right)^2 0.1^2 + \left(\frac{3.1415}{12}(72.3)^2 + \frac{3.1415}{12}(72.3)(71) + \frac{3.1415}{12}(71)^2 \right)^2 0.1^2 \\
e_V^2 = & (127.55)^2(0.01) + (-3034.2)^2(0.01) + (24075.07)^2(0.01) \\
& + (524.70)^2(0.01) + (651.88)^2(0.01) + (135.52)^2(0.01) \\
& + (1836.7)^2(0.01) + (297.35)^2(0.01) + (-1465.8)^2(0.01) \\
& + (579.15)^2(0.01) + (2147.5)^2(0.01) + (490.87)^2(0.01) \\
& + (968.35)^2(0.01) + (2493.1)^2(0.01) + (4032.1)^2(0.01) \\
e_V^2 = & 6237604.95 \\
e_V = & 2497.5
\end{aligned}$$

Resultado	
Volumen (V)	$144333.44 \pm 2497.5[mm^3]; 1.73 \%$

6. Conclusiones

Puede notarse que las mediciones indirectas agrandan el error que las mediciones directas ya tienen, se ha considerado mejorar la precisión de los instrumentos para objetos que son pequeños.

6.1. Resumen de mediciones

A continuación se resumen las medidas obtenidas:

Área del círculo	$723.45 \pm 2.38[mm^2]; 0.33 \%$
Volumen del perno	$8553.7 \pm 47.43[mm^3]; 0.55 \%$
Área de la pieza	$1004 \pm 38.89[mm^2]; 3.87 \%$
Área de la caja	$5598.5 \pm 143.56[mm^2]; 2.56 \%$
Volumen del capacitor	$248.57 \pm 27.63[mm^3]; 11.12 \%$
Volumen del tornillo	$27.54 \pm 0.14[mm^3]; 0.50 \%$
Volumen de esfera	$402.43 \pm 1.32[mm^3]; 0.33 \%$
Volumen de chapa	$144333.44 \pm 2497.5[mm^3]; 1.73 \%$

7. Referencias bibliográficas

- Errores de medición y su propagación
<http://www.tplaboratorioquimico.com/2008/08/errores-de-medicion-y-su-propagacion.html>
- Tratamiento y propagación de errores
<http://www.lawebdefisica.com/apuntsfis/errores/>
- Informe de propagación de errores
<http://www.slideshare.net/cdloor/informe-de-propagacion-de-errores-laboratorio-de-fisica-c>
- Guía práctica para la realización de la medida y el cálculo de errores
http://bacterio.uc3m.es/docencia/laboratorio/guiones_esp/errores/guiondeerrores.pdf