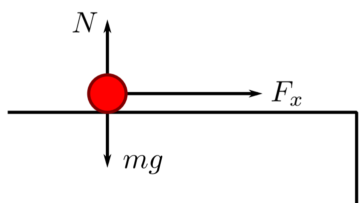
Primer parcial

Estudiante: CABALLERO BURGOA, Carlos Eduardo
Carrera: Ingeniería Electromecánica
Correo: cijkb.j@gmail.com

1. En una mesa libre de fricción, se liberan una carga puntual de masa m y carga Q, y otra carga puntual también de masa m pero carga igual a $2Q$. Si la carga Q tiene una aceleración inicial A_0, la aceleración de $2Q$ será:

   - A_0.
   - $2\,A_0$.
   - $4\,A_0$.
   - $A_0/2$.
   - $A_0/4$.

   Solución:

   A partir del diagrama de cuerpo libre, sabemos:

   $$\sum F_y = 0$$
   $$\sum F_x = m\,a$$

   Desarrollando F_x, y considerando que la aceleración A_0 es debido a un campo eléctrico E_x:

   $$E_x\,Q = m\,A_0$$
   $$E_x = \frac{m}{Q}\,A_0$$

   Considerando la segunda carga $2Q$:

   $$E_x\,2Q = m\,A_1$$

   Por tanto:

   $$A_1 = E_x\,\frac{2Q}{m} = \frac{m}{Q}\,A_0\frac{2Q}{m} = 2\,A_0$$

2. Usted tiene un anillo de oro puro con masa de $10.8[g]$. El oro tiene una masa atómica de $197[g/mol]$ y un número atómico de 79. Calcular la cantidad de protones que tiene el anillo.

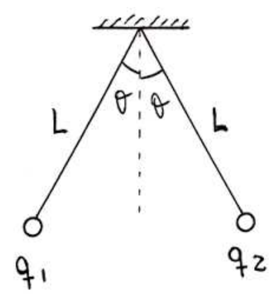
   - 8.54×10^{24}.
   - 4.27×10^{24}.
   - 3.41×10^{22}.
   - 5.64×10^{22}.

   Solución:

   Haciendo las conversiones, obtenemos:

$$10.8[g] \cdot \frac{1[mol]}{197[g]} \cdot \frac{1.023 \times 10^{23}[átomo]}{1[mol]} \cdot \frac{79[protón]}{1[átomo]} = 2.61 \times 10^{24}$$

3. Dos esferas idénticas están atadas a cordones de seda de longitud $L = 0.5[m]$ y cuelgan de un punto común. Cada esfera tiene masa $m = 8[g]$. El radio de cada esfera es muy pequeño por lo que pueden considerarse masas puntuales. Se dan cargas positivas de magnitudes diferentes Q_1 y Q_2, lo que hace que las esferas se separen, de manera que cuando están en equilibrio cada cordón forma un ángulo de 20° con la vertical. Ahora se conecta un alambre pequeño entre las esferas, lo cual permite que se transfiera carga de una a otra, hasta que ambas esferas tengan la misma carga; entonces se quita el alambre. Ahora cada cordón forma un ángulo de 30° con la vertical. Determine las cargas originales.

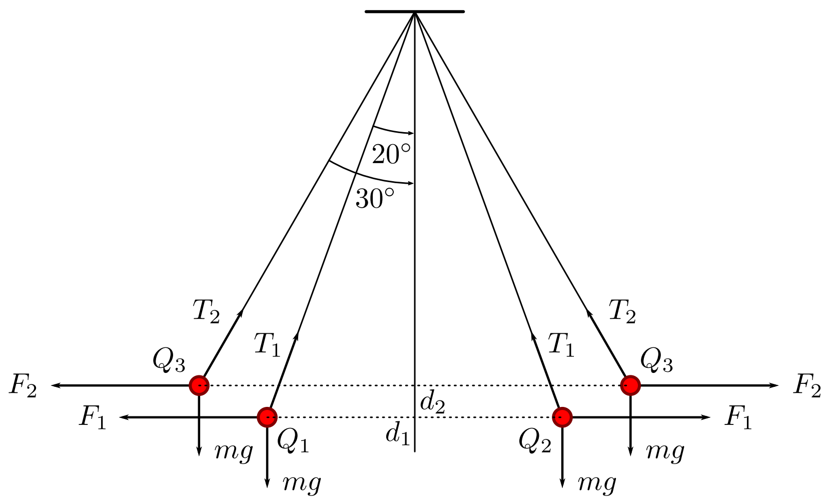


   - $4.03 \times 10^{-6}[C]$ y $2.21 \times 10^{-6}[C]$.
   - $1.81 \times 10^{-7}[C]$ y $3.07 \times 10^{-7}[C]$.
   - $1.03 \times 10^{-7}[C]$ y $2.23 \times 10^{-6}[C]$.
   - $1.80 \times 10^{-7}[C]$ y $2.06 \times 10^{-6}[C]$.

   Solución:

   A partir del diagrama de cuerpo libre, sabemos:

$$\sum F_y = 0$$



$$\sum F_x = 0$$

Para el primer escenario:

$$\begin{cases} T_1\, cos(20°) - mg = 0 \\ T_1\, sen(20°) - \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q_1\, Q_2}{d_1^2} = 0 \end{cases}$$

Para el segundo escenario:

$$\begin{cases} T_2\, cos(30°) - mg = 0 \\ T_2\, sen(30°) - \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q_3^2}{d_2^2} = 0 \\ Q_1 + Q_2 = 2\, Q_3 \end{cases}$$

Para el calculo de d_1^2 y d_2^2, se usan la ley de cosenos:

$$d_1^2 = L^2 + L^2 - 2(L)(L)\, cos(40°)$$
$$d_1^2 = 2L^2\,(1 - cos(40°))$$
$$d_2^2 = 2L^2\,(1 - cos(60°))$$

Calculando Q_3:

$$T_2 = \frac{mg}{cos(30°)}$$
$$\frac{mg}{cos(30°)}\, sen(30°) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_3^2}{d_2^2}$$
$$Q_3^2 = mg\, tan(30°)\, 4\pi\epsilon_0\, d_2^2$$
$$Q_3^2 = mg\, tan(30°)\, 4\pi\epsilon_0\, 2L^2\,(1 - cos(60°))$$

$$Q_3^2 = 8\pi\epsilon_0\, mg\, L^2\, tan(30°)\,(1 - cos(60°))$$
$$Q_3^2 = 1.2599 \times 10^{-12}$$
$$Q_3 = 1.1225 \times 10^{-6}[C]$$

Calculando $Q_1\, Q_2$:

$$T_1 = \frac{mg}{cos(20°)}$$
$$\frac{mg}{cos(20°)}\, sen(20°) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1\, Q_2}{d_1^2}$$
$$Q_1\, Q_2 = mg\, tan(20°)\, 4\pi\epsilon_0\, d_1^2$$
$$Q_1\, Q_2 = mg\, tan(20°)\, 4\pi\epsilon_0\, 2L^2\,(1 - cos(40°))$$
$$Q_1\, Q_2 = 8\pi\epsilon_0\, mg\, L^2\, tan(20°)\,(1 - cos(40°))$$

Considerando la conservación de la carga para calcular Q_1:

$$Q_2 = 2Q_3 - Q_1$$
$$Q_1\,(2Q_3 - Q_1) = 8\pi\epsilon_0\, mg\, L^2\, tan(20°)\,(1 - cos(40°))$$
$$Q_1^2 - 2Q_3Q_1 + 8\pi\epsilon_0\, mg\, L^2\, tan(20°)\,(1 - cos(40°)) = 0$$

Cuyas raíces son:

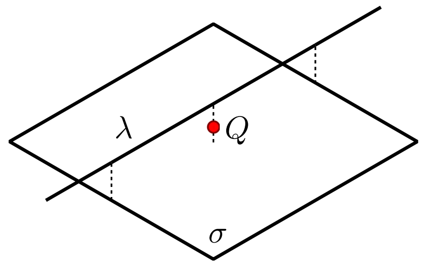
$$\begin{cases} Q1 = 2.0650 \times 10^{-6}[C] \\ Q1 = 1.7998 \times 10^{-7}[C] \end{cases}$$

Para los cuales Q_2 son:

$$\begin{cases} Q2 = 1.7998 \times 10^{-7}[C] \\ Q2 = 2.0650 \times 10^{-6}[C] \end{cases}$$

4. Una línea larga tiene una densidad lineal de carga uniforme de $50 \times 10^{-6}[C/m]$ que es paralela y está a $10[cm]$ de la superficie de una lámina de plástico plana y grande que tiene una densidad superficial de carga uniforme de $-100 \times 10^{-6}[C/m2]$ en un lado. Encuentre la ubicación de una carga puntual Q donde la fuerza resultante sea cero debido a este arreglo de objetos con carga.

   - $5.08[cm]$ de la línea.
   - $20.39[cm]$ del plano.
   - $10.22[cm]$ de la línea.
   - $15.92[cm]$ de la línea.



Solución:

Sabiendo que el campo eléctrico de una linea continua es:

$$E_L = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

Y que el campo eléctrico de una superficie continua es:

$$E_S = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Aplicando la condición de la carga puntual Q:

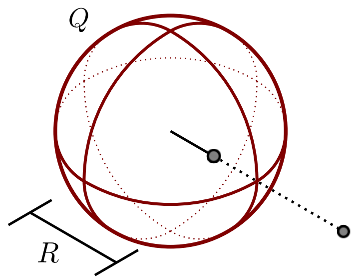
$$E_L - E_S = 0$$
$$\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0$$
$$\frac{\lambda}{\pi\, r} = \sigma$$

Por tanto r es:

$$r = \frac{\lambda}{\pi\,\sigma} = -0.1592[m] = -15.92[cm]$$

5. Una carga Q está distribuida uniformemente en el volumen de una esfera aislante de radio $R = 4[cm]$. A una distancia de $r = 8[cm]$ desde el centro de la esfera, el campo eléctrico debido a esta carga, tiene una magnitud de $E = 940[N/C]$. Calcular el campo eléctrico a una distancia de $2[cm]$ del centro de la esfera.

   - $1880[N/C]$.
   - $1760[N/C]$.
   - $2025[N/C]$.
   - $1539[N/C]$.



Solución:

El campo eléctrico de una esfera aislante es:

$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r > R \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Qr}{R^3} & r < R \end{cases}$$

Se calcula la carga Q a partir de la medición a $r = 8[cm]$:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$
$$Q = 4\pi\epsilon_0\, E\, r^2 = 1.2112 \times 10^{-17}[C]$$

Con el valor de la carga Q, podemos calcular el campo eléctrico dentro la esfera:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3} = 1880[N/C]$$

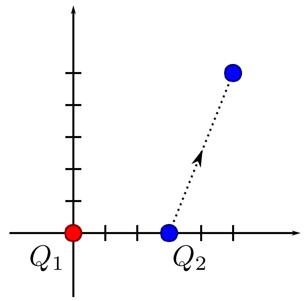
6. Una carga puntual $Q_1 = 2.4[\mu C]$ se mantiene estacionaria en el origen. Una segunda carga puntual $Q_2 = -4.3[\mu C]$ se mueve del punto $x = 0.15[m]$, $y = 0$ al punto $x = 0.25[m]$, $y = 0.25[m]$. Calcular el trabajo que realiza la fuerza eléctrica sobre Q_2.

   - $0.265[J]$.
   - $-0.265[J]$.
   - $0.356[J]$.
   - $-0.356[J]$.

Solución:

El trabajo W sobre la carga Q_2 es:

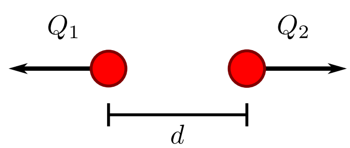
$$W_{1\to 2} = U_1 - U_2$$
$$W_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_2}$$
$$W_{1\to 2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -0.3560[J]$$



7. Dos protones se liberan, a partir del reposo, cuando están separados $0.75[nm]$. Calcular la rapidez máxima que alcanzan.

   - $13.56[km/s]$.
   - $12.63[km/s]$.
   - $11.25[km/s]$.
   - $10.93[km/s]$.

   Solución:

   Considerando la conservación de la energía:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

   Y sabiendo que cuando toda la energía potencial se ha convertido en energía cinética, se da la velocidad máxima:

$$U_1 = K_2$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r} = \frac{1}{2}mv^2$$

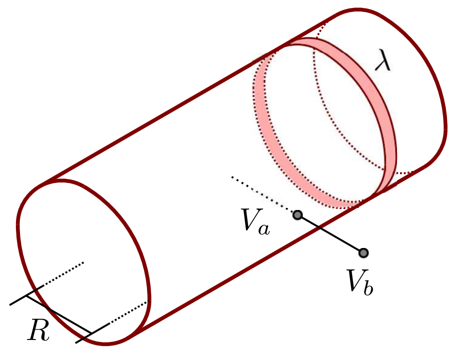
$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r}\frac{2}{m}} = 19178.5854[m/s] = 19.18[km/s]$$

8. Un cascarón cilíndrico aislante muy largo con radio de $6[cm]$ tiene una densidad de carga lineal de $8.5 \times 10^{-6}[C/m]$ distribuida de manera uniforme en su superficie exterior. Calcular la lectura de un voltímetro si se conectara entre la superficie del cilindro y un punto a $4[cm]$ por arriba de la superficie.

   - $87.43[kV]$.

- 78.09[kV].
- 69.23[kV].
- 55.66[kV].

Solución:



El campo eléctrico de un cascaron cilíndrico aislante es:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

Por tanto, el potencial eléctrico entre los puntos a y b, es:

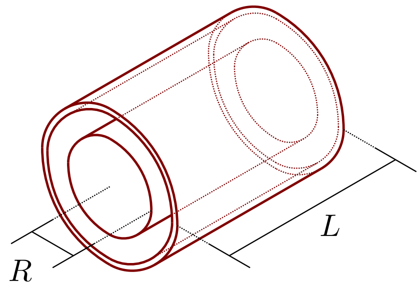
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_a^b E_r \, dr = \int_a^b \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r} dr$$

$$V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \, ln(r)\Big|_a^b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(ln\, b - ln\, a)$$

$$V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \, ln\left(\frac{b}{a}\right) = 78048.2197[V] = 78.05[kV]$$

9. Un capacitor cilíndrico consiste en un núcleo interior sólido de un conductor con radio de 0.25[cm], rodeado por un tubo conductor exterior hueco. Los dos conductores están separados por aire, y la longitud del cilindro es de 12[cm]. La capacitancia es de 36.7[pF]. Calcule el radio interior del tubo hueco.

   - 3[mm].
   - 3.5[mm].
   - 4[mm].
   - 4.5[mm].



Solución:

Se conoce que el potencial eléctrico de un cilindro es:

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\, ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Según la definición de capacitancia:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

Y la definición de densidad lineal:

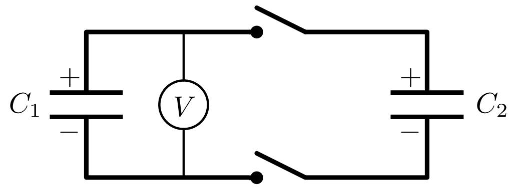
$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

Se puede calcular el radio r_b:

$$V_{ab}\, C = Q$$
$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\, ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)\, C = \lambda\, L$$
$$ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) = 2\pi\epsilon_0\, \left(\frac{L}{C}\right)$$
$$r_b = r_a\, e^{2\pi\epsilon_0\left(\frac{L}{C}\right)} = 2.9987\times 10^{-3}[m] = 2.9987[mm]$$

10. Un capacitor de $20[\mu F]$ está cargado con una diferencia de potencial de $800[V]$. Las terminales del capacitor cargado se conectan entonces a las de un capacitor descargado de $10[\mu F]$. Calcule la energía total de esta nueva configuración.

- $6.45[J]$.
- $5.27[J]$.
- $4.27[J]$.
- $3.33[J]$.



Solución:

Se calcula la carga Q_0 del primer escenario:

$$C_1 = \frac{Q_0}{V_0}$$

$$Q_0 = C_1\,V_0 = 0,016[C]$$

Al conectarse los dos capacitores, la carga Q_0 se conserva:

$$C_1 + C_2 = \frac{Q_0}{V_1}$$

$$V_1 = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = 533.33[V]$$

La energía total es la suma de la energía en cada capacitor:

$$U_T = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}C_1\,V_1^2 + \frac{1}{2}C_2\,V_1^2 = 4.2667[J]$$