

## Tarea #17

En un péndulo simple de longitud  $l = 3[m]$ . Si  $\psi_0 = 10^\circ$  y  $\Omega_0 = \dot{\psi}_0 = -\frac{\pi}{10}[rad/s]$  para  $t = 0$ , calcular:

- a) La frecuencia angular de oscilación, el periodo de oscilación y la frecuencia de oscilación.
- b) La ecuación  $\psi = \psi(t)$ .
- c) La ecuación  $\Omega = \dot{\psi} = \dot{\psi}(t)$ .
- d) La ecuación  $\alpha = \ddot{\psi} = \ddot{\psi}(t)$ .

### Solución:

#### (a)

Sabiendo que:

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l}\psi = 0 \quad (1)$$

y comparando con la ecuación de un oscilador armónico simple:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

Obtenemos la frecuencia angular de oscilación ( $\omega_0$ ):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.8}{3}} = 1.8074[rad/s] \quad (3)$$

El periodo de oscilación ( $T$ ):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{9.8}} = 3.4764[s] \quad (4)$$

Y la frecuencia de oscilación ( $\nu$ ):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3.4764} = 0.2877[Hz] \quad (5)$$

#### (b)

La solución general de un oscilador armónico simple es:

$$\psi = A \cdot \cos(\omega_0 t - \phi)$$

Considerando las condiciones iniciales para  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 10^\circ \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} = \frac{\pi}{18}[rad] \\ \dot{\psi}_0 &= -\frac{\pi}{10}[rad/s] \end{aligned}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{18} = A \cdot \cos(1.8074 \cdot t - \phi) \\ \frac{\pi}{10} = 1.8074 \cdot A \cdot \sin(1.8074 \cdot t - \phi) \end{cases} \quad (6)$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumándolas:

$$\frac{\pi^2}{18^2} + \frac{\pi^2}{(10 \cdot 1.8074)^2} = A^2 \cdot \cos^2(1.8074 \cdot t - \phi) + A^2 \cdot \sin^2(1.8074 \cdot t - \phi)$$

$$A^2 = \frac{\pi^2}{18^2} + \frac{\pi^2}{(18.074)^2} = 0.060675$$

$$A = \sqrt{0.060675} = 0.2463[\text{rad}]$$

Despejando  $\phi$ :

$$\frac{\pi}{18} = 0.2463 \cdot \cos(-\phi)$$

$$\cos(\phi) = \frac{\pi}{18 \cdot 0.2463} = 0.7086$$

$$\phi = \arccos(0.7086) = 0.7833$$

Por tanto:

$$\psi = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - \phi)$$

$$\psi = 0.2463 \cdot \cos(1.8074 \cdot t - 0.7833) \quad (7)$$

(c)

Derivando la función  $\psi$ :

$$\dot{\psi} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t - \phi)$$

$$\dot{\psi} = -0.2463 \cdot 1.8074 \cdot \sin(1.8074 \cdot t - 0.7833)$$

$$\Omega = \dot{\psi} = -0.4452 \cdot \sin(1.8074 \cdot t - 0.7833) \quad (8)$$

(d)

Derivando la función  $\dot{\psi}$ :

$$\ddot{\psi} = -A\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - \phi)$$

$$\ddot{\psi} = -0.2463 \cdot (1.8074)^2 \cdot \cos(1.8074 \cdot t - 0.7833)$$

$$\alpha = \ddot{\psi} = -0.8047 \cdot \cos(1.8074 \cdot t - 0.7833) \quad (9)$$