Tarea #21

Demostrar todos los momentos de inercia notables siguientes:

(a) Barra uniforme, eje en el centro de masa y perpendicular a su longitud.

$$I = \frac{1}{12}\,M\,L^2$$

(b) Barra uniforme, eje por un extremo y perpendicular a su longitud.

$$I = \frac{1}{3}\,M\,L^2$$

(c) Disco uniforme, eje en el centro de masa y perpendicular al disco.

$$I = \frac{1}{2}\,M\,R^2$$

(d) Disco uniforme, eje con el centro de masa y paralelo al disco.

$$I = \frac{1}{4}\,M\,R^2$$

(e) Aro o anillo uniforme, eje en el centro de masa y perpendicular al aro.

$$I = M\,R^2$$

(f) Cilindro macizo uniforme, eje de simetría en el centro de masa.

$$I = \frac{1}{2}\,M\,R^2$$

(g) Esfera maciza uniforme, eje en el centro de masa.

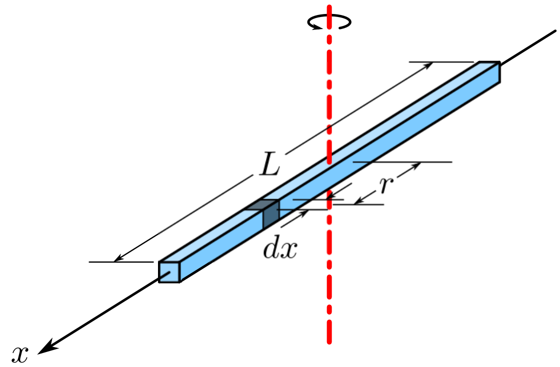
$$I = \frac{2}{5}\,M\,R^2$$

(h) Cascarón esférico uniforme, eje en el centro de masa.

$$I = \frac{2}{3}\,M\,R^2$$

Solución:

a) Barra uniforme, eje en el centro de masa y perpendicular a su longitud.



Dada la ecuación del momento de inercia:

$$I = \int_M r^2 \, dm \tag{1}$$

Siendo r equivalente al valor de $|x|$, por tanto:

$$r^2 = x^2$$

Asumiendo la distribución homogénea de la masa:

$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$

Por tanto:

$$dm = \lambda \, dx \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 \, \lambda \, dx = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \, dx = \lambda \, \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \lambda \left(\frac{(\frac{L}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{L}{2})^3}{3} \right)$$

$$I = \lambda \, \frac{L^3}{12} \tag{3}$$

A partir de la ecuación (2) sabemos que:

$$M = \lambda \, L$$

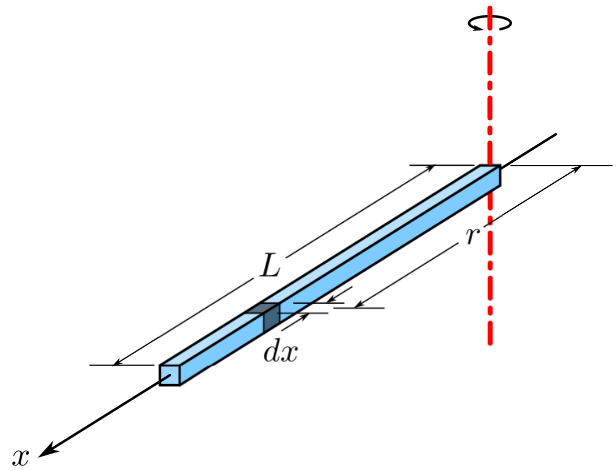
Despejando λ y reemplazando en la ecuación (3), obtenemos:

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{M}{L} \right) L^3$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{12} \, M \, L^2 \tag{4}$$

b) Barra uniforme, eje por un extremo y perpendicular a su longitud.



Dada la ecuación del momento de inercia:

$$I = \int_M r^2 \, dm \tag{5}$$

Siendo r equivalente al valor de $|x|$, por tanto:

$$r^2 = x^2$$

Asumiendo la distribución homogénea de la masa:

$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$

Por tanto:

$$dm = \lambda \, dx \tag{6}$$

Reemplazando (6) en (5):

$$I = \int_0^L r^2 \, \lambda \, dx = \lambda \int_0^L x^2 \, dx = \lambda \, \frac{x^3}{3} \bigg|_0^L$$

$$I = \lambda \, \frac{L^3}{3} \tag{7}$$

A partir de la ecuación (6) sabemos que:

$$M = \lambda \, L$$

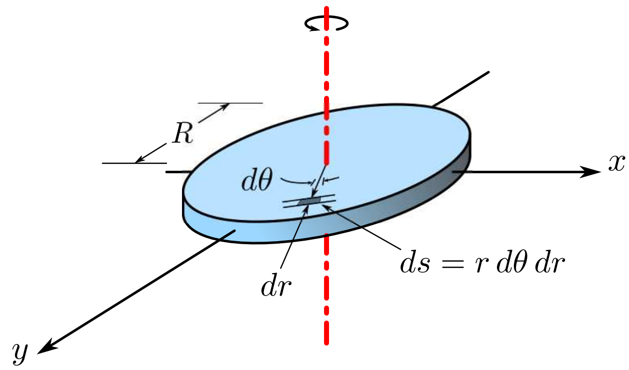
Despejando λ y reemplazando en la ecuación (7), obtenemos:

$$I = \frac{1}{3} \left(\frac{M}{L} \right) L^3$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{3} \, M \, L^2 \tag{8}$$

c) Disco uniforme, eje en el centro de masa y perpendicular al disco.



Dada la ecuación del momento de inercia:

$$I = \int_M r^2\, dm \tag{9}$$

Asumiendo la distribución homogénea de la masa:

$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

Usando un diferencial en coordenadas polares obtenemos:

$$ds = r\, d\theta\, dr$$

Por tanto:

$$dm = \sigma\, ds = \sigma\, r\, d\theta\, dr \tag{10}$$

Reemplazando (10) en (9):

$$I = \int_S r^2\, \sigma\, ds = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\, \sigma\, r\, d\theta\, dr = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3\, d\theta\, dr = \sigma \int_0^R (r^3\, \theta \Big|_0^{2\pi})\, dr$$

$$I = \sigma \int_0^R 2\pi\, r^3\, dr = 2\pi\, \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\, \sigma\, \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = 2\pi\, \sigma\, \frac{R^4}{4}$$

$$I = \pi\, \sigma\, \frac{R^4}{2} \tag{11}$$

A partir de la ecuación (10) sabemos que:

$$M = \sigma\, S = \sigma\, \pi\, R^2$$

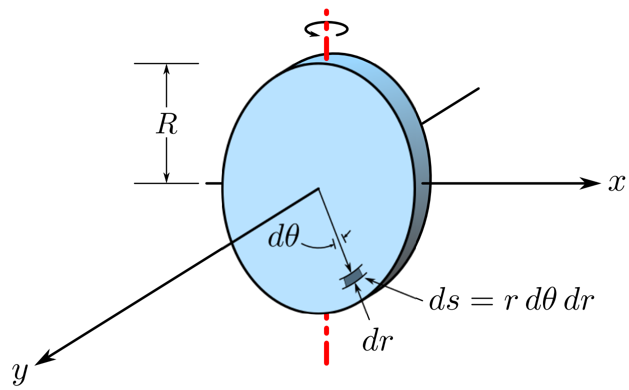
Despejando σ y reemplazando en la ecuación (11), obtenemos:

$$I = \pi \left(\frac{M}{\pi\, R^2}\right) \frac{R^4}{2}$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{2}\, M\, R^2 \tag{12}$$

d) Disco uniforme, eje con el centro de masa y paralelo al disco.



Dada la ecuación del momento de inercia:

$$I = \int_M r^2 \, dm \tag{13}$$

Asumiendo la distribución homogénea de la masa:

$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

Usando un diferencial en coordenadas polares obtenemos:

$$ds = a \, d\theta \, da$$

Por tanto:

$$dm = \sigma \, ds = \sigma \, a \, d\theta \, da \tag{14}$$

Considerando la relación trigonometrica entre las variables r y a:

$$cos(\theta) = \frac{r}{a}$$

Entonces:

$$r = a \, cos(\theta) \tag{15}$$

Reemplazando (14) y (15) en (13):

$$I = \int_S r^2 \, \sigma \, ds = \int_0^R \int_0^{2\pi} a^2 \, cos^2(\theta) \, \sigma \, a \, d\theta \, da = \sigma \int_0^R a^3 \int_0^{2\pi} cos^2(\theta) \, d\theta \, da$$

Considerando las siguientes propiedades trigonometricas:

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$
$$cos^2(x) - sen^2(x) = cos(2x)$$

Obtenemos:

$$2 \, cos^2(x) = 1 + cos(2x)$$

$$cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,cos(2x) \tag{16}$$

Reemplazando (16) en la integral:

$$I = \sigma \int_0^R a^3 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos(2\theta)\, d\theta \right) da = \sigma \int_0^R a^3 \left(\frac{1}{2}\,\theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} sen(2\theta) \Big|_0^{2\pi} \right) da$$

$$I = \sigma \int_0^R a^3 \left(\pi + \frac{1}{4} sen(4\pi) - \frac{1}{4} sen(0) \right) da = \sigma \int_0^R a^3 \pi da = \pi\,\sigma \int_0^R a^3 da = \pi\,\sigma \left(\frac{a^4}{4} \Big|_0^R \right)$$

$$I = \pi\,\sigma\,\frac{R^4}{4} \tag{17}$$

A partir de la ecuación (14) sabemos que:

$$M = \sigma\,S = \sigma\,\pi\,R^2$$

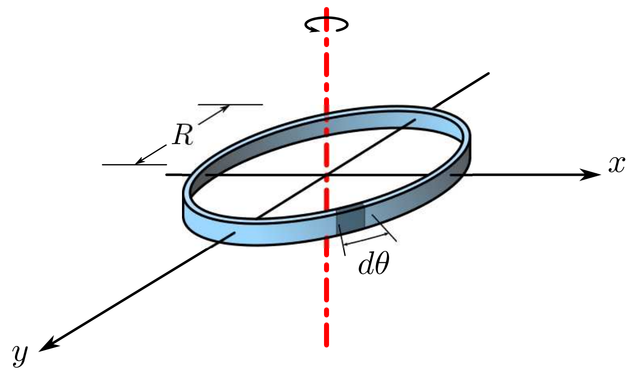
Despejando σ y reemplazando en la ecuación (17), obtenemos:

$$I = \pi\,\left(\frac{M}{\pi\,R^2} \right) \frac{R^4}{4}$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{4}\,M\,R^2 \tag{18}$$

e) Aro o anillo uniforme, eje en el centro de masa y perpendicular al aro.



Dada la ecuación del momento de inercia:

$$I = \int_M r^2 \, dm \tag{19}$$

Asumiendo la distribución homogénea de la masa:

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{dm}{R\,d\theta}$$

Por tanto:

$$dm = \lambda \, R \, d\theta \tag{20}$$

Reemplazando (20) en (19):

$$I = \int_0^{2\pi} R^2 \, \lambda \, R \, d\theta = R^3 \, \lambda \int_0^{2\pi} d\theta = R^3 \, \lambda (\theta \Big|_0^{2\pi})$$

$$I = \lambda \, R^3 \, 2\pi \tag{21}$$

A partir de la ecuación (20) sabemos que:

$$M = \lambda \, l = \lambda \, 2\pi \, R$$

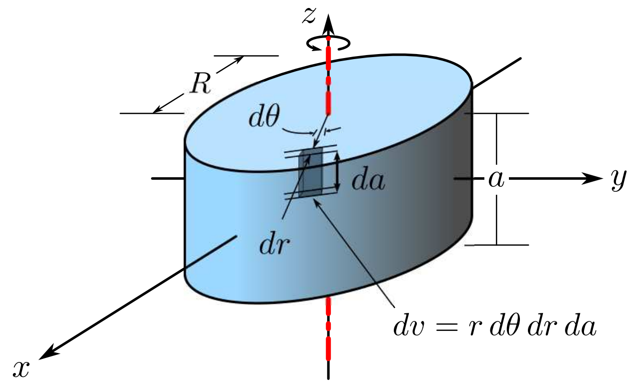
Despejando λ y reemplazando en la ecuación (21), obtenemos:

$$I = \left(\frac{M}{2\pi \, R} \right) R^3 \, 2\pi$$

Resultando finalmente:

$$I = M \, R^2 \tag{22}$$

f) Cilindro macizo uniforme, eje de simetría en el centro de masa.



Dada la ecuación del momento de inercia:

$$I = \int_M r^2\,dm \tag{23}$$

Asumiendo la distribución homogénea de la masa:

$$\rho = \frac{dm}{dv} = \frac{dm}{r\,d\theta\,dr\,da}$$

Por tanto:

$$dm = \rho\,dv = \rho\,r\,d\theta\,dr\,da \tag{24}$$

Reemplazando (24) en (23):

$$I = \int_V r^2\,\rho\,dv = \int_{-a/2}^{a/2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\,\rho\,r\,d\theta\,dr\,da = \rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^3\,d\theta\,dr\,da$$

$$I = \rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_0^R (r^3\,\theta\Big|_0^{2\pi})\,dr\,da = \rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_0^R 2\pi\,r^3\,dr\,da = 2\pi\,\rho\int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right)da$$

$$I = 2\pi\,\rho\int_{-a/2}^{a/2}\frac{R^4}{4}\,da = 2\pi\,\rho\left(\frac{R^4}{4}a\Big|_{-a/2}^{a/2}\right) = 2\pi\,\rho\left(\frac{R^4}{4}\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)\right) = 2\pi\,\rho\,\frac{R^4}{4}\,a$$

$$I = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho\,R^4\,a \tag{25}$$

A partir de la ecuación (24) sabemos que:

$$M = \rho\,V = \rho\,\pi\,R^2\,a$$

Despejando ρ y reemplazando en la ecuación (25), obtenemos:

$$I = \frac{1}{2}\pi\,(\frac{M}{\pi\,R^2\,a})\,R^4\,a$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{1}{2}\,M\,R^2 \tag{26}$$

g) Esfera maciza uniforme, eje en el centro de masa.
Dada la ecuación del momento de inercia:

$$I = \int_M r^2 \, dm \tag{27}$$

Asumiendo la distribución homogénea de la masa:

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

Usando un diferencial en coordenadas esfericas obtenemos:

$$dv = da \, a \, d\phi \, a \, sen(\phi) \, d\theta$$
$$dv = a^2 \, sen(\phi) \, da \, d\phi \, d\theta$$

Por tanto:

$$dm = \rho \, dv = \rho \, a^2 \, sen(\phi) \, da \, d\phi \, d\theta \tag{28}$$

Considerando la relación trigonometrica entre las variables r y a:

$$r = a \, sen(\phi) \tag{29}$$

Reemplazando (28) y (29) en (27):

$$I = \int_V r^2 \, \rho \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} a^2 \, sen^2(\phi) \, \rho \, a^2 \, sen(\phi) \, da \, d\phi \, d\theta$$

$$I = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} a^4 \, sen^3(\phi) \, da \, d\phi \, d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{a^5}{5} \bigg|_0^R \right) sen^3(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

$$I = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^5}{5} \, sen^3(\phi) \, d\phi \, d\theta = \rho \, \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} sen^3(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

$$I = \rho \, \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} sen^2(\phi) \, sen(\phi) \, d\phi \, d\theta = \rho \, \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - cos^2(\phi)) \, sen(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

$$I = \rho \, \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} sen(\phi) \, d\phi - \int_0^{\pi} cos^2(\phi) \, sen(\phi) \, d\phi \right) d\theta$$

$$I = \rho \, \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(-cos(\phi) \bigg|_0^{\pi} + \frac{cos^3(\phi)}{3} \bigg|_0^{\pi} \right) d\theta$$

$$I = \rho \, \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(-cos(\pi) + cos(0) + \frac{cos^3(\pi)}{3} - \frac{cos^3(0)}{3} \right) d\theta$$

$$I = \rho \, \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) d\theta = \rho \, \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \rho \, \frac{4 \, R^5}{15} \int_0^{2\pi} d\theta = \rho \, \frac{4 \, R^5}{15} (\theta \bigg|_0^{2\pi})$$

$$I = \rho \, \frac{8\pi \, R^5}{15} \tag{30}$$

A partir de la ecuación (28) sabemos que:

$$M = \rho\, V = \rho\, \frac{4\pi}{3} R^3$$

Despejando ρ y reemplazando en la ecuación (30), obtenemos:

$$I = (\frac{3\, M}{4\pi\, R^3})\, \frac{8\pi\, R^5}{15}$$

Resultando finalmente:

$$I = \frac{2}{5}\, M\, R^2 \tag{31}$$

h) Cascarón esférico uniforme, eje en el centro de masa.