Informe 5: Variación de la presión con la profundidad

Carlos Eduardo Caballero Burgoa
200201226@est.umss.edu

17 de mayo de 2021

Grupo: J2
Docente: Ing. Milka Mónica Torrico Troche
Carrera: Ing. Electromecánica

Resumen

Este documento detalla el experimento realizado en simulador para hallar la relación funcional entre la presión y la profundidad en un fluido en reposo, además del calculo de la densidad, para esto se realizó la medición de la presión en un fluido a diferentes variaciones de profundidad; posteriormente se calculó la relación funcional con el método de mínimos cuadrados, finalmente se determinó el valor de la densidad, resultando ser: $(1701.5 \pm 5.8)[kg/m^3]; 0.34\,\%$.

1. Introducción

Cuando un fluido (ya sea liquido o gaseoso) esta en reposo, este ejerce una fuerza perpendicular a cualquier superficie, en contacto con este. Considerando una superficie pequeña de área dA centrada en un punto en el fluido; la fuerza normal que el fluido ejerce sobre cada lado es $dF_\perp$. Se define la **presión** (P) en ese punto como la fuerza normal por unidad de área, es decir, la razón entre $dF_\perp$ y dA [1].

$$P = \frac{dF_\perp}{dA} \tag{1}$$

Es posible deducir una relación general entre la presión P en cualquier punto de un fluido de reposo y la profundidad y del punto; si la densidad ρ tiene el mismo valor en todo el fluido (es decir, la densidad es uniforme), al igual que la aceleración debida a la gravedad g.

Considerando un elemento de espesor dy, como puede verse en la **Figura 1**; la superficie inferior y superior tiene un área A, y están a distancias $y + dy$ y y respectivamente.

El volumen (dV) del elemento es:

$$dV = A\,dy$$

Su masa (dm) y peso (dw) son:

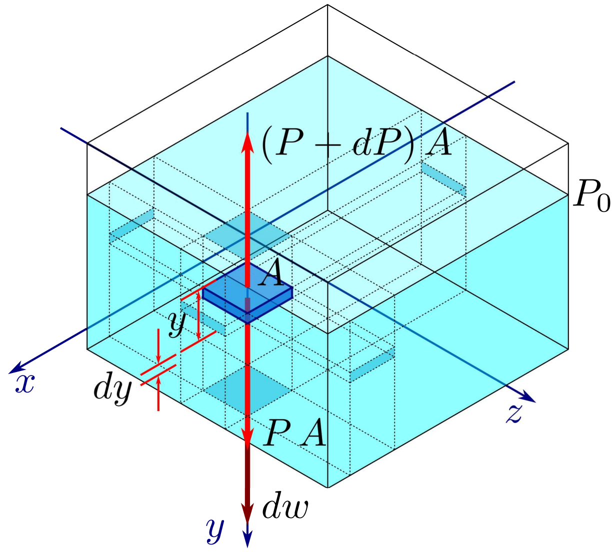

Figura 1: Fuerzas sobre un elemento de fluido en equilibrio.
Nota: Física Universitaria Volumen I (p. 376),
Young, Hugh D. y Freedman, Roger A., 2013, Pearson.

$$
\begin{aligned}
dm &= \rho\, dV = \rho\, A\, dy \\
dw &= dm\, g = \rho g\, A\, dy
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Considerando que las fuerzas que actúan sobre el elemento están en equilibrio, tenemos:

$$
\begin{gathered}
\sum F_y = 0 \\
P\,A - (P + dP)\,A + dw = 0 \\
P\,A - (P + dP)\,A + \rho g\, A\, dy = 0 \\
P\,A - P\,A - dP\,A + \rho g\, A\, dy = 0 \\
-dP\,A + \rho g\, A\, dy = 0 \\
-dP + \rho g\, dy = 0 \\
dP = \rho g\, dy \\
\frac{dP}{dy} = \rho g
\end{gathered}
\tag{3}
$$

La **Ecuación 3** indica que si y aumenta, P aumenta.
Integrando la **Ecuación 3** desde la superficie hasta el valor de profundidad y, resulta:

$$
\begin{gathered}
dP = \rho g\, dy \\
\int_{P_0}^{P} dP = \int_0^h \rho g\, dy
\end{gathered}
$$

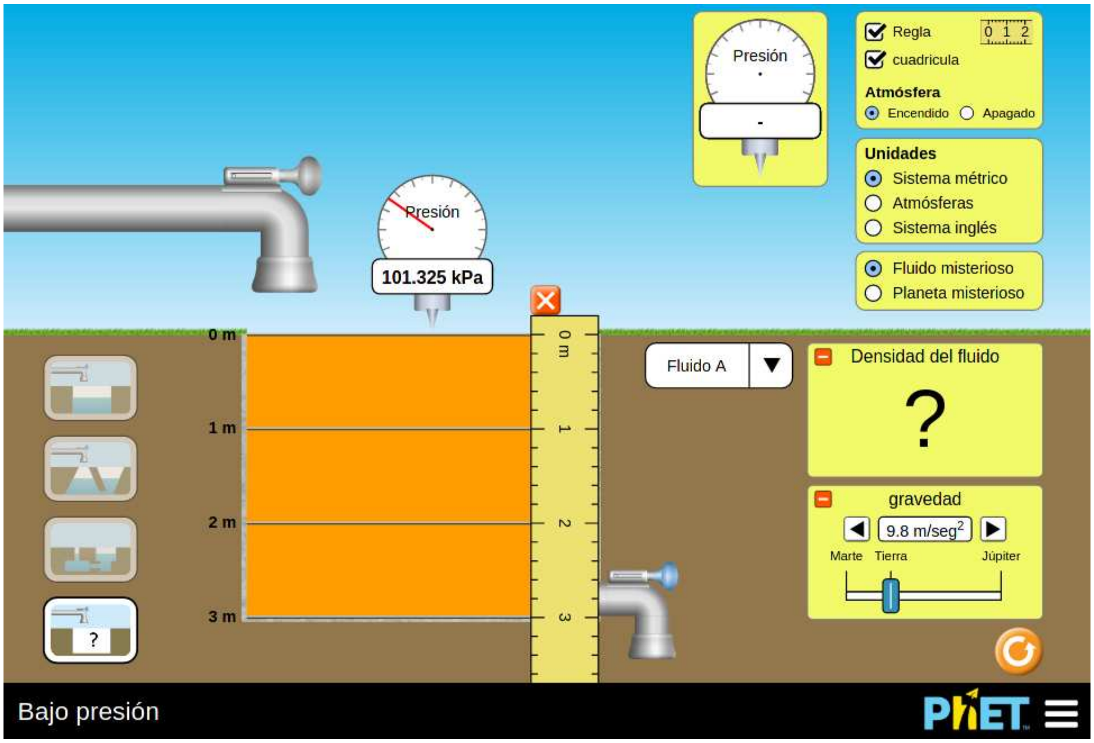

Figura 2: Simulador de presión.
Nota: Fotografía propia.

$$
\begin{aligned}
P\Big|_{P_0}^{P} &= \rho g y\Big|_{0}^{h} \\
P - P_0 &= \rho g h \\
P &= P_0 + \rho g h \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Por tanto, la presión es la misma en todos los puntos situados a una misma profundidad, independiente de la forma del recipiente.

Para el experimento se verificará la **Ecuación 4**. A partir de una profundidad establecida (h), se medirá la presión (P). Finalmente se determinará el valor de la densidad (ρ) despejándola de la misma ecuación.

2. Método experimental

Para la realización del experimento, se emplea el simulador *PhET* «Bajo presión», ubicado en la dirección web: `https://phet.colorado.edu/sims/html/under-pressure/latest/under-pressure_es.html`, tal como se presenta en la **Figura 2**.

Para el simulador, se registrarán diferentes valores de profundidad (h) para medir su variación de presión (P).

Una vez medidos los datos, se procederá a graficar la relación profundidad vs. presión del recipiente, y con la ayuda del método de los mínimos cuadrados, se halla la relación funcional entre las variables.

Finalizando con el calculo del valor de la densidad (ρ), a partir de la **Ecuación 4**:

$$B = \rho g$$

Despejando ρ, se obtiene:

$$\rho = \frac{B}{g} \tag{5}$$

Datos necesarios para el experimento:

Aceleración de la gravedad local:

$$g = (9.78 \pm 0.02)[m/s^2]$$

Datos tomados en el experimento:

En el **Cuadro 1**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto la profundidad como la presión medida.

i	$h_i[m]$	$P_i[kPa]$	i	$h_i[m]$	$P_i[kPa]$
1	0.0	101.325	9	1.6	128.007
2	0.2	104.969	10	1.8	131.184
3	0.4	108.306	11	2.0	134.680
4	0.6	111.642	12	2.2	138.175
5	0.8	114.820	13	2.4	141.671
6	1.0	117.997	14	2.6	145.007
7	1.2	121.493	15	2.8	148.185
8	1.4	124.829	16	3.0	151.203

Cuadro 1: Mediciones de presión en función de la profundidad.
Nota: Elaboración propia.

3. Resultados

A partir de los datos obtenidos se genera la gráfica de la **Figura 3**.

Posteriormente se calculo la recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores:

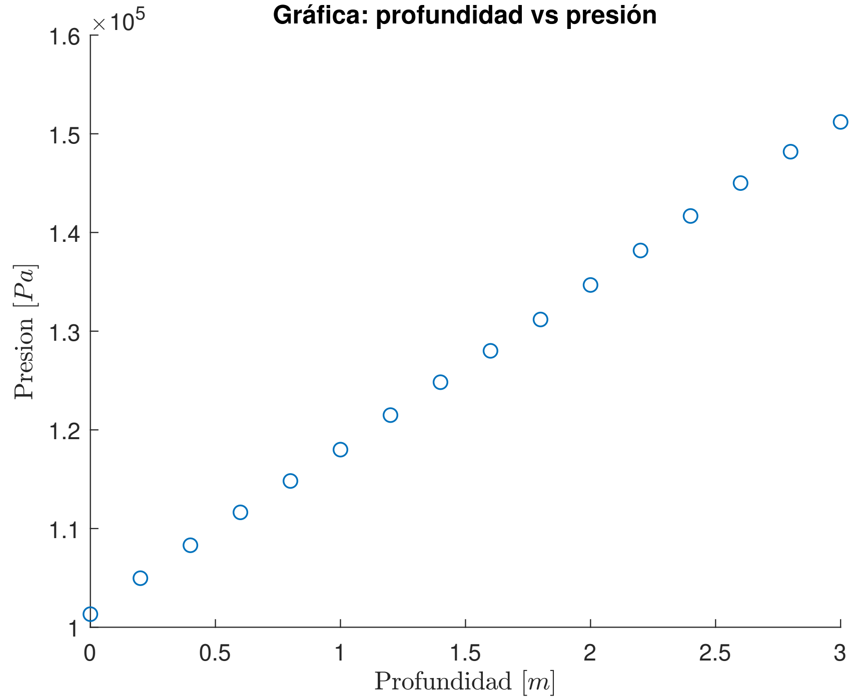

Figura 3: Gráfica de longitud vs fuerza.
Nota: Elaboración propia.

$$A = (101.51 \pm 0.08)[kPa]; 0.08\,\%$$
$$B = (16.64 \pm 0.04)[kPa/m]; 0.27\,\%$$

Siendo su coeficiente de correlación (r):

$$r = 0.9999$$

Considerando que el modelo de ajuste es:

$$P = A + Bh$$

Por tanto la relación funcional entre P y h, es:

$$P \propto h$$

Para el calculo de la densidad (ρ) se utiliza la **Ecuación 5**, resultando:

$$\rho = (1701.5 \pm 5.8)[kg/m^3]; 0.34\,\%$$

4. Conclusiones

Se halló la relación funcional entre el incremento de la profundidad y la presión, confirmándose la **Ecuación 4**.

También se calculó el valor de la densidad del fluido.

Referencias

[1] Young, Hugh D. y Freedman, Roger A. (2013).
Física Universitaria. Volumen 1.
13va Edición.
Capitulo 12.

[2] Departamento de Física - UMSS.
Laboratorio de Física Básica II.
Guía - Cartilla de laboratorio.
Gestión I/2020.

Apéndice: Cálculos adicionales

4.1. Método de mínimos cuadrados

Se calculan los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados, con la ayuda de los datos presentados en el **Cuadro 2**.

i	$x_i y_i\,(10^5)$	x_i^2	$y_i^2\,(10^{10})$	$Y_i\,(10^5)$	d_i	$d_i^2\,(10^4)$
1	0	0	1.0267	1.0151	-182.6397	3.3357
2	0.2099	0.0400	1.1018	1.0484	133.2706	1.7761
3	0.4332	0.1600	1.1730	1.0816	142.1809	2.0215
4	0.6699	0.3600	1.2464	1.1149	150.0912	2.2527
5	0.9186	0.6400	1.3184	1.1482	0.0015	0.0000
6	1.1800	1.0000	1.3923	1.1815	-151.0882	2.2828
7	1.4579	1.4400	1.4761	1.2148	16.8221	0.0283
8	1.7476	1.9600	1.5582	1.2480	24.7324	0.0612
9	2.0481	2.5600	1.6386	1.2813	-125.3574	1.5714
10	2.3613	3.2400	1.7209	1.3146	-276.4471	7.6423
11	2.6936	4.0000	1.8139	1.3479	-108.5368	1.1780
12	3.0398	4.8400	1.9092	1.3812	58.3735	0.3407
13	3.4001	5.7600	2.0071	1.4144	226.2838	5.1204
14	3.7702	6.7600	2.1027	1.4477	234.1941	5.4847
15	4.1492	7.8400	2.1959	1.4810	84.1044	0.7074
16	4.5361	9.0000	2.2862	1.5143	-225.9853	5.1069

Cuadro 2: Valores para el método de mínimos cuadrados.
Nota: Elaboración propia.

$$n = 16$$
$$\sum x_i = 24$$
$$\sum y_i = 2023493$$
$$\sum x_i^2 = 49.6000$$
$$\sum y_i^2 = 2.5967 \times 10^{11}$$
$$\sum x_i y_i = 3.2615 \times 10^{6}$$
$$\Delta_1 = n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = 217.6000$$
$$\Delta_2 = n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2 = 6.0261 \times 10^{10}$$

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta_1} = 1.0151 \times 10^5$$

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta_1} = 1.6640 \times 10^4$$

$$\sum d^2 = 3.8910 \times 10^5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n-2} = 2.7793 \times 10^4$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta_1}} = 79.5938$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta_1}} = 45.2063$$

Parámetros de la recta obtenida:

$$A = (1.0151 \times 10^5 \pm 79.5938)[Pa]; 0.0784\,\%$$

$$B = (1.6640 \times 10^4 \pm 45.2063)[N/m]; 0.2717\,\%$$

Siendo el coeficiente de correlación:

$$R = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} = 0.9999$$

La ecuación de la recta resultante es:

$$y = 1.0151 \times 10^5 + 1.6640 \times 10^4\, x$$

4.2. Calculo de la densidad

Para el calculo de la densidad, se utiliza la **Ecuación 5**:

$$\rho = \frac{B}{g} = \frac{1.6640 \times 10^4}{9.78} = 1.7015 \times 10^3$$

Y el error de la medición es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial B} = \frac{1}{g}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial g} = -\frac{B}{g^2}$$

$$e_\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{g}\right)^2 e_B^2 + \left(-\frac{B}{g^2}\right)^2 e_g^2} = 2.0910 \times 10^{-4}$$

Resultando:

$$\rho = (1.7015 \times 10^3 \pm 2.0910 \times 10^{-4})[kg/m^3]; 1.2289 \times 10^{-5}\,\%$$