

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

LABORATORIO DE FÍSICA BÁSICA I
PRACTICA No. 4

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Estudiante:

Caballero Burgoa, Carlos Eduardo.

Docente:

Msc. Guzmán Saavedra, Rocio.

Grupo: N5.

Fecha de realización: 08 de Diciembre del 2020.

Fecha de entrega: 11 de Diciembre del 2020.

1. Objetivo

Desarrollar la destreza de los alumnos en el ajuste de una línea recta por el método de los mínimos cuadrados.

2. Marco teórico

Para obtener la ecuación de la línea recta de los pares de valores (x, y) en forma analítica, se recurre al método de los mínimos cuadrados.

Considerando el caso de que estos pares de valores se ajustan a una línea recta y cuando el error de x es pequeño comparado con el error de y :

Sea:

$$Y = A + BX \quad (1)$$

Para la ecuación de la mejor línea recta que pasa por los n puntos del gráfico: $y = f(x)$, se debe cumplir la condición que $\sum d_i^2$ sea mínima.

A partir de esta condición podemos determinar los valores de los parámetros A y B de la ecuación para la recta.

Definimos d_i como la discrepancia de las ordenadas, entre los valores experimentales y_i , y los valores obtenidos por la ecuación de la recta y_i para cada uno de los valores de x_i .

$$d_i = y_i - y'_i = y_i - (A + Bx_i) \quad (2)$$

Para determinar los valores de A y B derivamos la $\sum d_i^2$ respecto de A y B , y obtenemos el siguiente par de ecuaciones:

$$\sum y_i = An + B \sum x_i \quad (3)$$

$$\sum x_i y_i = A \sum x_i + B \sum x_i^2 \quad (4)$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones para A y B :

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (5)$$

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6)$$

Se define Δ como:

$$\Delta = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \quad (7)$$

Los errores estimados para A y B están dados por las ecuaciones:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta}} \quad (8)$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta}} \quad (9)$$

Donde:

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n-2} \quad (10)$$

En el caso de las relaciones no lineales, se debe previamente linealizar por medio de una transformación matemática y luego aplicar el método de mínimos cuadrados.

3. Materiales

- Luxómetro.
- Flexometro.
- Simulador «bajo presión 1.1.18».
- Simulador «Lab de Péndulo».

4. Procedimiento

A continuación se describen los procedimientos experimentales que se llevarán a cabo.

4.1. Intensidad lumínica

1. Armar un trípode para establecer una posición fija para la medición.
2. Establecer una fuente lumínica con intensidad moderada.
3. Medir la intensidad lumínica lo mas próximo a la fuente como sea posible.
4. Repetir la medición para diferentes distancias de la fuente hasta 20 veces.

4.2. Presión vs profundidad

1. Iniciar el simulador de presión.
2. Llenar el tanque de agua.
3. Posicionar una regla para la medición de profundidad.
4. Con el sensor de presión, medir la presión a 0 metros de profundidad.
5. Repetir la medición por cada unidad mínima de la regla hasta 15 veces.

4.3. Resistencia vs temperatura

1. A partir de los datos provistos en la tabla, realizar la graficación, y el calculo de la ecuación de su gráfica.

4.4. Péndulo

1. Iniciar el simulador de péndulo simple.
2. Fijar un cronometro en el simulador.
3. Establecer una masa fija para el experimento.
4. Para cada variación de la longitud del péndulo, medir el tiempo de una oscilación que no exceda los 10° de inclinación inicial.
5. Repetir la medición anterior hasta 30 veces.

5. Tablas de datos y resultados

5.1. Intensidad lumínica

Instrumento utilizado: Luxómetro.

Precisión del instrumento: $1[lx]$

Instrumento utilizado: Flexometro.

Precisión del instrumento: $0.01[m]$

5.1.1. Datos obtenidos

i	$x_i[m]$	$I_i[lux]$
1	0.00	300
2	0.20	287
3	0.30	230
4	0.42	182
5	0.45	167
6	0.54	132
7	0.64	110
8	0.73	93
9	0.80	81
10	0.88	71
11	0.94	64
12	0.98	60
13	1.06	53
14	1.11	50
15	1.18	45
16	1.24	42
17	1.31	39
18	1.39	37
19	1.44	34
20	1.57	32

5.2. Presión vs profundidad

Instrumento utilizado: Regla.

Precisión del instrumento: $0.2[m]$

Instrumento utilizado: Medidor de presión.

Precisión del instrumento: $1[kPa]$

5.2.1. Datos obtenidos

i	$h_i[m]$	$P_i[kPa]$
1	0.0	101
2	0.2	103
3	0.4	105
4	0.6	107
5	0.8	109
6	1.0	111
7	1.2	113
8	1.4	115
9	1.6	117
10	1.8	119
11	2.0	121
12	2.2	123
13	2.4	125
14	2.6	127
15	2.8	129

5.3. Resistencia vs temperatura**5.3.1. Datos obtenidos**

i	$T_i[^\circ C]$	$R_i[\Omega]$
1	30	109.82
2	35	111.71
3	40	113.60
4	45	115.49
5	50	117.38
6	55	119.27
7	60	121.16
8	65	123.05
9	70	124.94
10	75	126.83
11	80	128.72
12	85	130.61
13	90	132.50

5.4. Péndulo

Instrumento utilizado: Cronometro.

Precisión del instrumento: $0.01[s]$

i	$L_i[m]$	$T_i[s]$
1	0.12	0.70
2	0.15	0.77
3	0.18	0.84
4	0.21	0.91
5	0.24	0.98
6	0.27	1.04
7	0.30	1.10
8	0.33	1.15
9	0.36	1.20
10	0.39	1.26
11	0.42	1.30
12	0.45	1.34
13	0.48	1.39
14	0.51	1.43
15	0.54	1.47
16	0.57	1.51
17	0.60	1.56
18	0.63	1.59
19	0.66	1.63
20	0.69	1.66
21	0.72	1.70
22	0.75	1.75
23	0.78	1.77
24	0.81	1.80
25	0.84	1.84
26	0.87	1.87
27	0.90	1.90
28	0.93	1.94
29	0.96	1.97
30	0.99	2.00

6. Gráficas

6.1. Intensidad lumínica

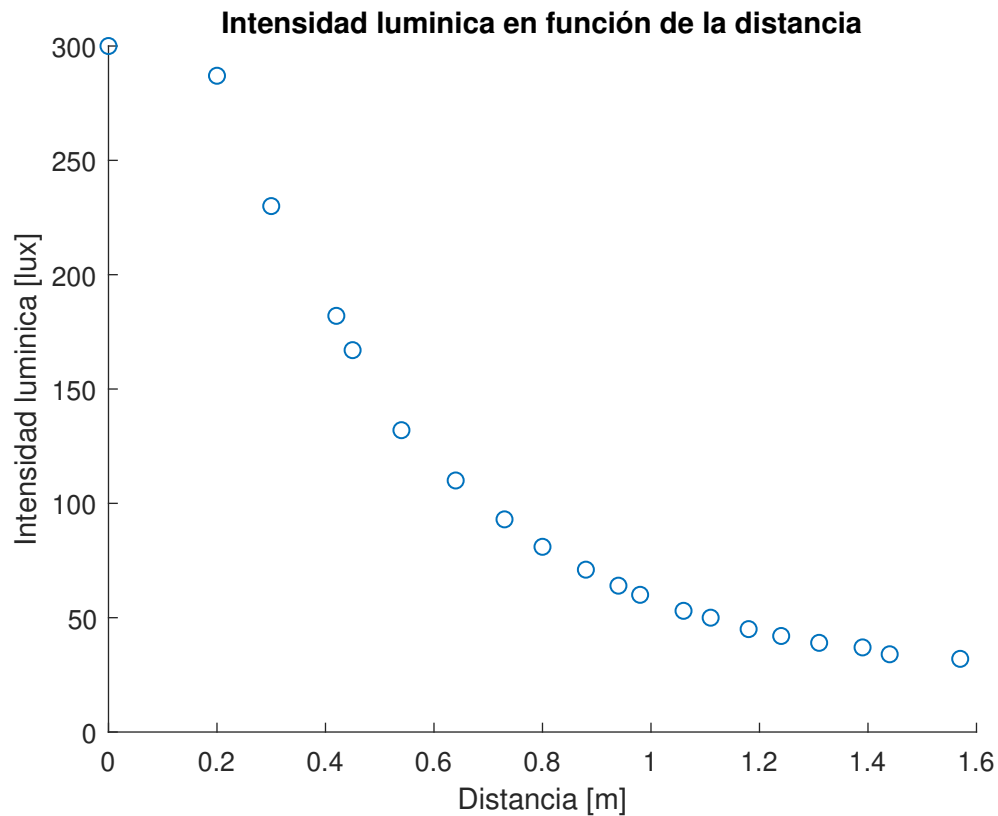


Figura 1: Gráfica de intensidad lumínica

La figura 1 sugiere un modelo no lineal, así que se aplicara el método de logaritmos. La función tiene la forma general:

$$y = ax^b$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\log y = \log a + b \log x$$

Haciendo los siguientes cambios de variables:

$$Y' = \log y$$

$$A = \log a$$

$$B = b$$

$$X' = \log x$$

Se obtiene:

$$Y' = A + BX'$$

i	$\log(x_i)$	$\log(I_i)$
1	-	-
2	-0.6990	2.4579
3	-0.5229	2.3617
4	-0.3768	2.2601
5	-0.3468	2.2227
6	-0.2676	2.1206
7	-0.1938	2.0414
8	-0.1367	1.9685
9	-0.0969	1.9085
10	-0.0555	1.8513
11	-0.0269	1.8062
12	-0.0088	1.7782
13	0.0253	1.7243
14	0.0453	1.6990
15	0.0719	1.6532
16	0.0934	1.6232
17	0.1173	1.5911
18	0.1430	1.5682
19	0.1584	1.5315
20	0.1959	1.5051

La gráfica de los datos con el cambio de variable logarítmica pueden verse en la figura 2. Calculando los valores de la recta por el método de los mínimos cuadrados, se obtiene:

$$A = (1.76 \pm 0.01)[u]; 0.65 \% \quad (11)$$

$$B = (-1.18 \pm 0.04)[u]; 3.76 \% \quad (12)$$

La ecuación de la recta es:

$$Y = 1.76 - 1.18x \quad (13)$$

A partir de los parámetros de recta A y B , calculamos los parámetros a y b , de la curva original y sus errores por el método de propagación de errores:

$$a = \text{antilog}(A) = \text{antilog}(4.05) = 57.6575$$

$$b = B = -1.1782$$

$$e_a = 10^A \ln(10) e_A = 1.5250$$

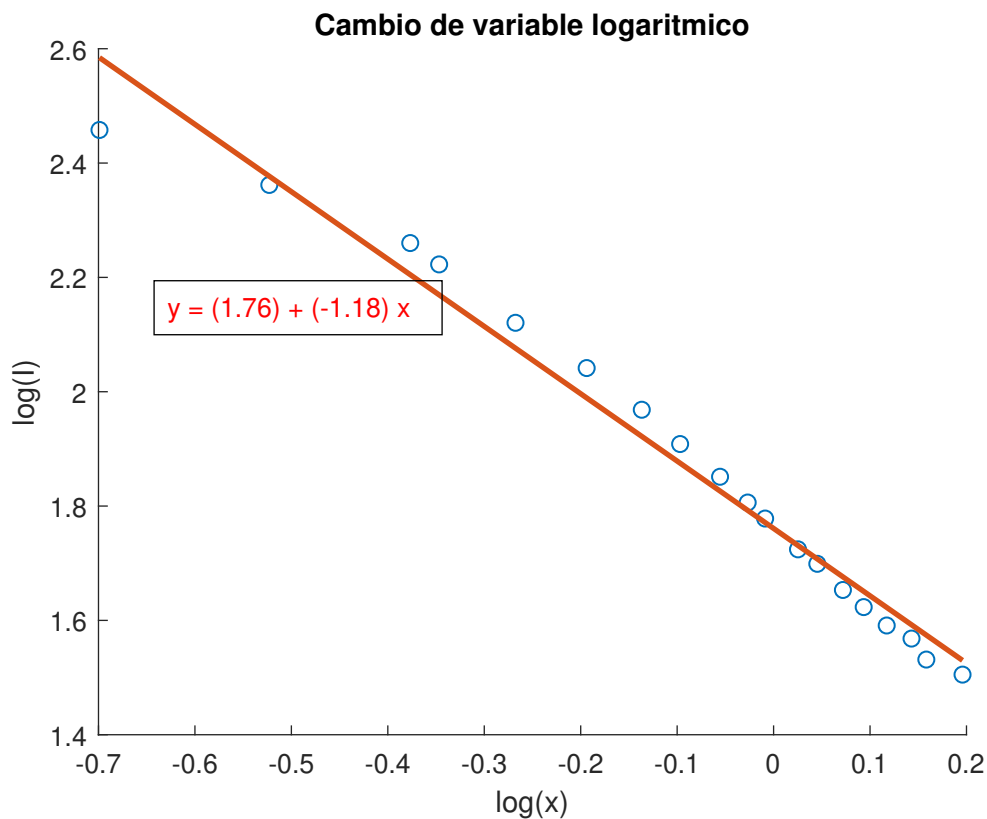


Figura 2: Gráfica linealizada por el método de logaritmos

$$e_b = e_B = 0.0443$$

Obteniendo finalmente los valores de la curva:

$$a = (57.7 \pm 1.5)[u]; 2.64 \% \quad (14)$$

$$b = (-1.18 \pm 0.04)[u]; 3.76 \% \quad (15)$$

La ecuación de la curva resultante es:

$$y = 57.7x^{-1.18} \quad (16)$$

6.1.1. Memoria de calculo

Comandos del programa

```
% leer datos previamente formateados
table = readtable('i3_1.csv')

% cambio de variable y remover el primer elemento
x = log10(table.Var1(2:end))
y = log10(table.Var2(2:end))
```

```
% tamaño de la muestra
n = length(x)

% calculo de las sumatorias
sx = sum(x)
sy = sum(y)
sxx = sum(x.*x)
sxy = sum(x.*y)

% Calculo de los valores de la recta
D = (n * sxx) - (sx)^2
A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D
B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D

% Calculo del error
Y = A + (B * x)
d = y - Y

sdd = sum(d.*d)
s2 = sdd / ( n - 2)

sA = sqrt( (s2 * sxx) / D )
sB = sqrt( (s2 * n) / D )

%calculando el error porcentual
EA = (sA / A) * 100
EB = (sB / B) * 100

%calculando los valores originales
a = 10^A
b = B

sa = (10^A) * log(10) * sA
sb = sB

%calculando el error porcentual
Ea = (sa / a) * 100
Eb = (sb / b) * 100
```

Salida del programa

```
» p4_1_2
```

```
table =  
20x2 table
```

Var1	Var2
0	300
0.2	287
0.3	230
0.42	182

0.45	167
0.54	132
0.64	110
0.73	93
0.8	81
0.88	71
0.94	64
0.98	60
1.06	53
1.11	50
1.18	45
1.24	42
1.31	39
1.39	37
1.44	34
1.57	32

x =

-0.6990
-0.5229
-0.3768
-0.3468
-0.2676
-0.1938
-0.1367
-0.0969
-0.0555
-0.0269
-0.0088
0.0253
0.0453
0.0719
0.0934
0.1173
0.1430
0.1584
0.1959

y =

2.4579
2.3617
2.2601
2.2227
2.1206
2.0414
1.9685
1.9085
1.8513
1.8062
1.7782
1.7243
1.6990
1.6532
1.6232
1.5911
1.5682
1.5315

1.5051

n = 19

sx = -1.8811

sy = 35.6725

sxx = 1.2795

sxy = -4.8199

D = 20.7729

A = 1.7609

B = -1.1782

Y =

2.5844

2.3769

2.2047

2.1694

2.0761

1.9892

1.9219

1.8750

1.8263

1.7925

1.7712

1.7310

1.7075

1.6762

1.6508

1.6227

1.5924

1.5743

1.5300

d =

-0.1265

-0.0152

0.0553

0.0533

0.0444

0.0522

0.0466

0.0335

0.0250

0.0137

0.0070

-0.0068

-0.0085

-0.0230

-0.0275

-0.0316

-0.0242

-0.0428

-0.0249

sdd = 0.0364

s2 = 0.0021

sA = 0.0115

sB = 0.0443

EA = 0.6523
EB = -3.7569
a = 57.6575
b = -1.1782
sa = 1.5250
sb = 0.0443
Ea = 2.6449
Eb = -3.7569

6.2. Presión vs profundidad

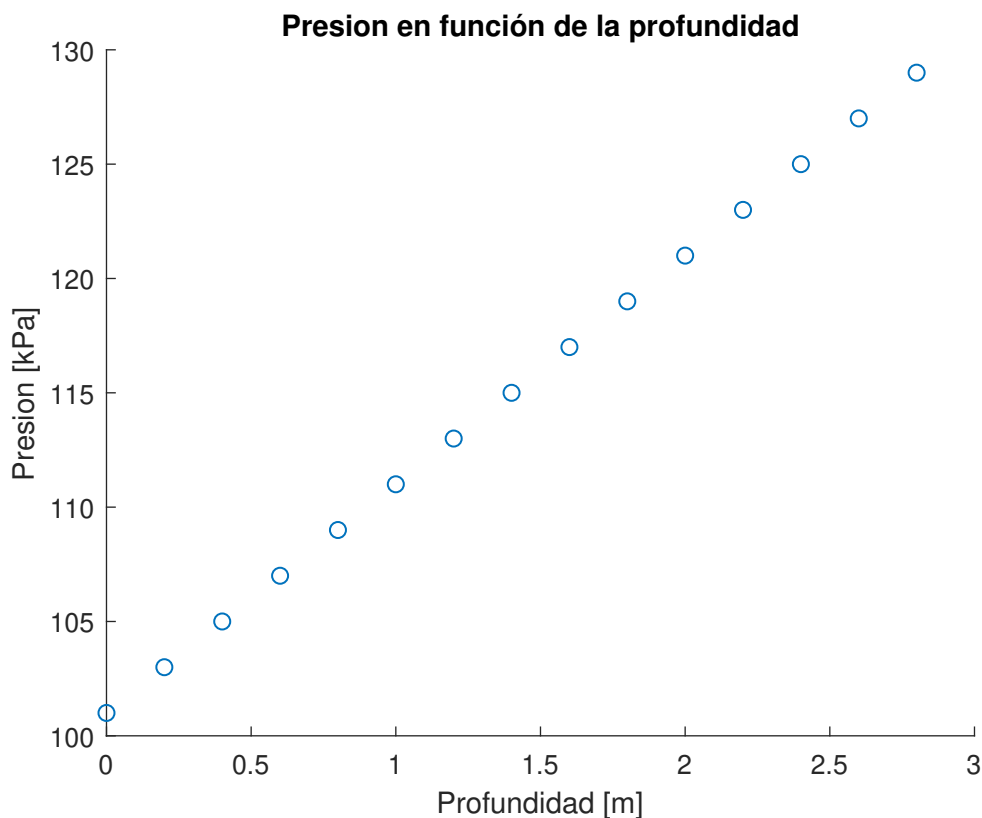


Figura 3: Gráfica de presión vs profundidad

La figura 3 sugiere un modelo lineal, así que se calcularán los valores de la recta por el método de los mínimos cuadrados.

Calculando los parámetros con *Matlab* se obtienen los siguientes valores:

$$A = 101[u] \quad (17)$$

$$B = 10[u] \quad (18)$$

con los valores de *sigma* muy próximos a cero.

La ecuación de la recta es:

$$y = 101 + 10x \quad (19)$$

6.2.1. Memoria de calculo

Comandos del programa

```
% leer datos previamente formateados
```

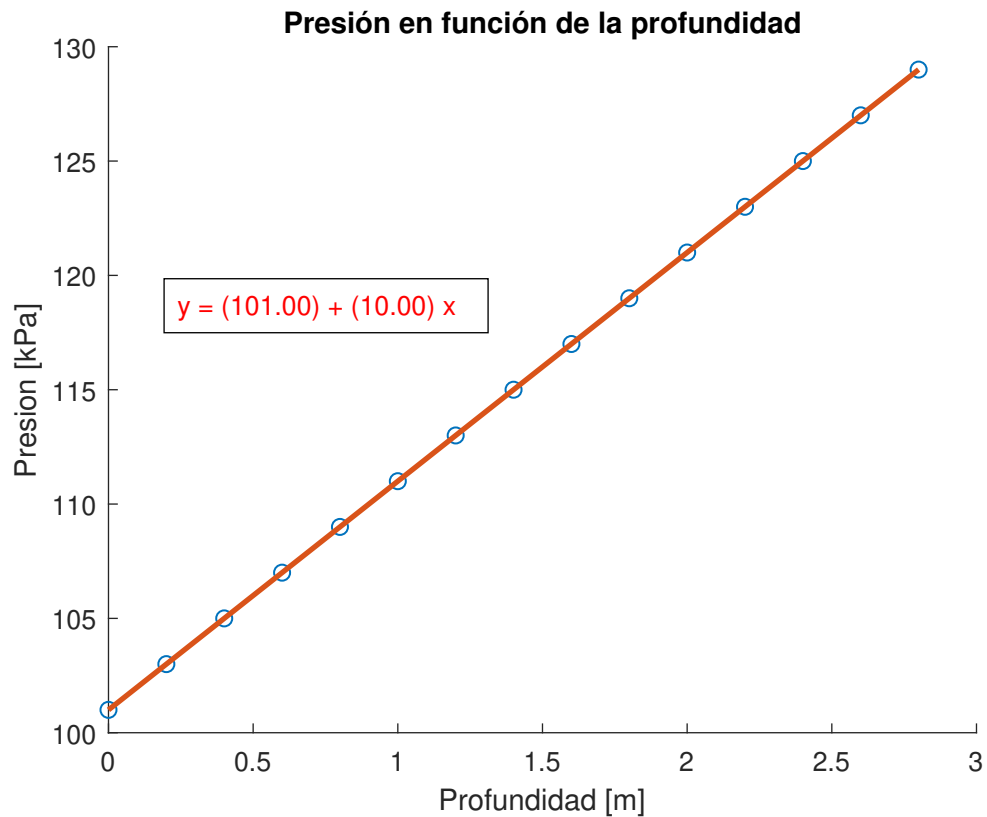



Figura 4: Ecuación de presión vs profundidad

```

table = readtable('i3_2.csv')

x=table.Var1
y=table.Var2

% tamaño de la muestra
n = length(x)

% calculo de las sumatorias
sx = sum(x)
sy = sum(y)
sxx = sum(x.*x)
sxy = sum(x.*y)

% Calculo de los valores de la recta
D = (n * sxx) - (sx)^2
A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D
B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D

% Calculo del error
Y = A + (B * x)
d = y - Y

sdd = sum(d.*d)

```

```
s2 = sdd / ( n - 2)

sA = sqrt( (s2 * sxx) / D )
sB = sqrt( (s2 * n) / D )

%calculando el error porcentual
EA = (sA / A) * 100
EB = (sB / B) * 100
```

Salida del programa

```
» p4_2_2
```

```
table =
    15x2 table

    Var1    Var2
    ----    ----
         0     101
        0.2     103
        0.4     105
        0.6     107
        0.8     109
         1     111
        1.2     113
        1.4     115
        1.6     117
        1.8     119
         2     121
        2.2     123
        2.4     125
        2.6     127
        2.8     129
```

```
x =
         0
    0.2000
    0.4000
    0.6000
    0.8000
    1.0000
    1.2000
    1.4000
    1.6000
    1.8000
    2.0000
    2.2000
    2.4000
    2.6000
    2.8000
```

```
y =
    101
```

```
103
105
107
109
111
113
115
117
119
121
123
125
127
129

n = 15
sx = 21
sy = 1725
sxx = 40.6000
sxy = 2.5270e+03
D = 168.0000
A = 101.0000
B = 10.0000

Y =
101.0000
103.0000
105.0000
107.0000
109.0000
111.0000
113.0000
115.0000
117.0000
119.0000
121.0000
123.0000
125.0000
127.0000
129.0000

d =
1.0e-13 *

-0.2842
-0.1421
-0.1421
0
0
0.1421
0.1421
0.2842
0.2842
0.4263
0.4263
0.5684
0.5684
```

0.7105
0.8527

sdd = 2.5647e-26
s2 = 1.9729e-27
sA = 2.1835e-14
sB = 1.3272e-14
EA = 2.1619e-14
EB = 1.3272e-13

6.3. Resistencia vs temperatura

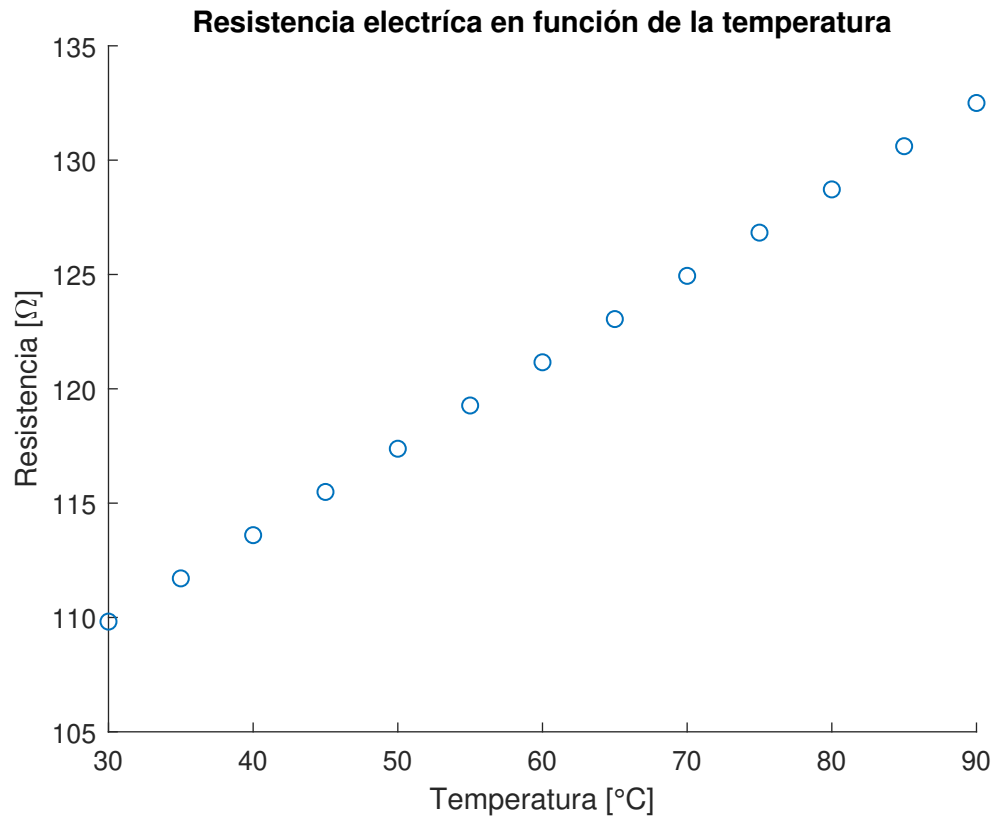


Figura 5: Gráfica de resistencia vs temperatura

La figura 5 sugiere un modelo lineal, así que se calcularán los valores de la recta por el método de los mínimos cuadrados.

Calculando los parámetros con *Matlab* se obtienen los siguientes valores:

$$A = 98.4800[u] \quad (20)$$

$$B = 0.3780[u] \quad (21)$$

con los valores de *sigma* muy próximos a cero.

La ecuación de la recta es:

$$y = 98.48 + 0.38x \quad (22)$$

6.3.1. Memoria de calculo

Comandos del programa

```
% leer datos previamente formateados
```

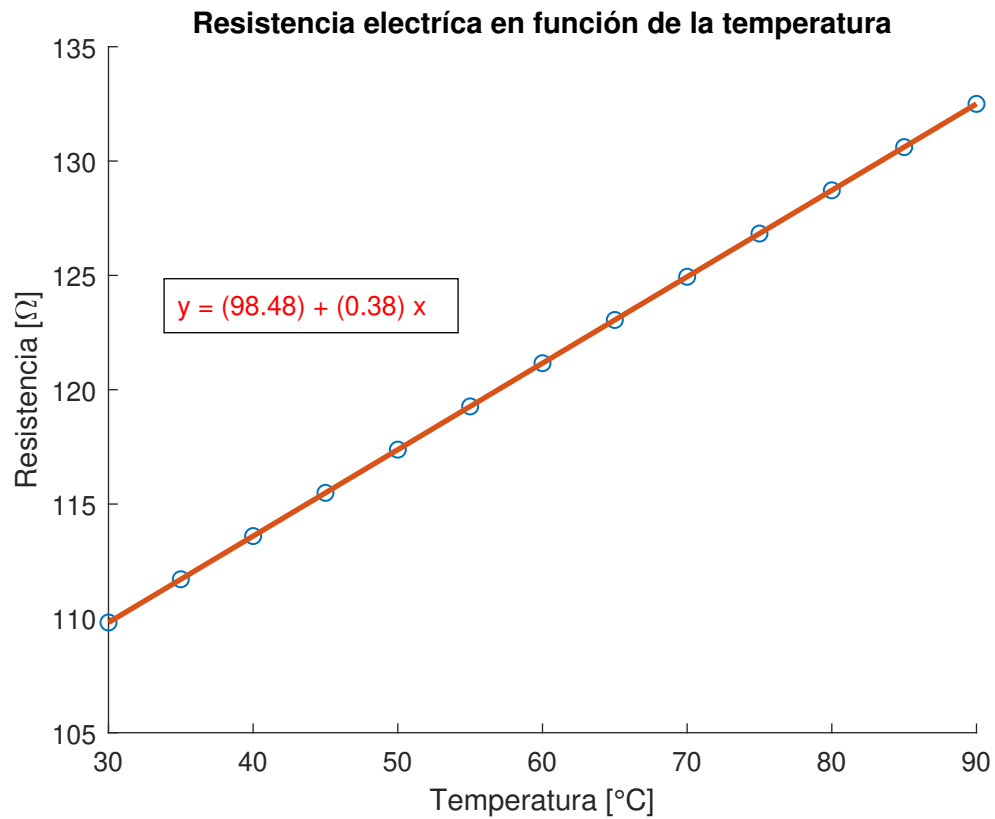


Figura 6: Ecuación de la resistencia vs temperatura

```

table = readtable('i3_3.csv')

x=table.Var1
y=table.Var2

% tamaño de la muestra
n = length(x)

% calculo de las sumatorias
sx = sum(x)
sy = sum(y)
sxx = sum(x.*x)
sxy = sum(x.*y)

% Calculo de los valores de la recta
D = (n * sxx) - (sx)^2
A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D
B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D

% Calculo del error
Y = A + (B * x)
d = y - Y

sdd = sum(d.*d)

```

```
s2 = sdd / ( n - 2)

sA = sqrt( (s2 * sxx) / D )
sB = sqrt( (s2 * n) / D )

%calculando el error porcentual
EA = (sA / A) * 100
EB = (sB / B) * 100
```

Salida del programa

```
» p4_3_2
```

```
table =
```

```
13x2 table
```

Var1	Var2
----	-----
30	109.82
35	111.71
40	113.6
45	115.49
50	117.38
55	119.27
60	121.16
65	123.05
70	124.94
75	126.83
80	128.72
85	130.61
90	132.5

```
x =
```

```
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
```

```
y =
```

```
109.8200
111.7100
113.6000
115.4900
```

```
117.3800
119.2700
121.1600
123.0500
124.9400
126.8300
128.7200
130.6100
132.5000

n = 13
sx = 780
sy = 1.5751e+03
sxx = 51350
sxy = 9.6225e+04
D = 59150
A = 98.4800
B = 0.3780

Y =
109.8200
111.7100
113.6000
115.4900
117.3800
119.2700
121.1600
123.0500
124.9400
126.8300
128.7200
130.6100
132.5000

d =
1.0e-12 *

0.1421
0.1279
0.1137
0.0995
0.0853
0.0711
0.0568
0.0426
0.0284
0.0142
0
0
-0.0284

sdd = 7.8558e-26
s2 = 7.1416e-27
sA = 7.8739e-14
sB = 1.2528e-15
EA = 7.9955e-14
EB = 3.3144e-13
```


6.4. Péndulo

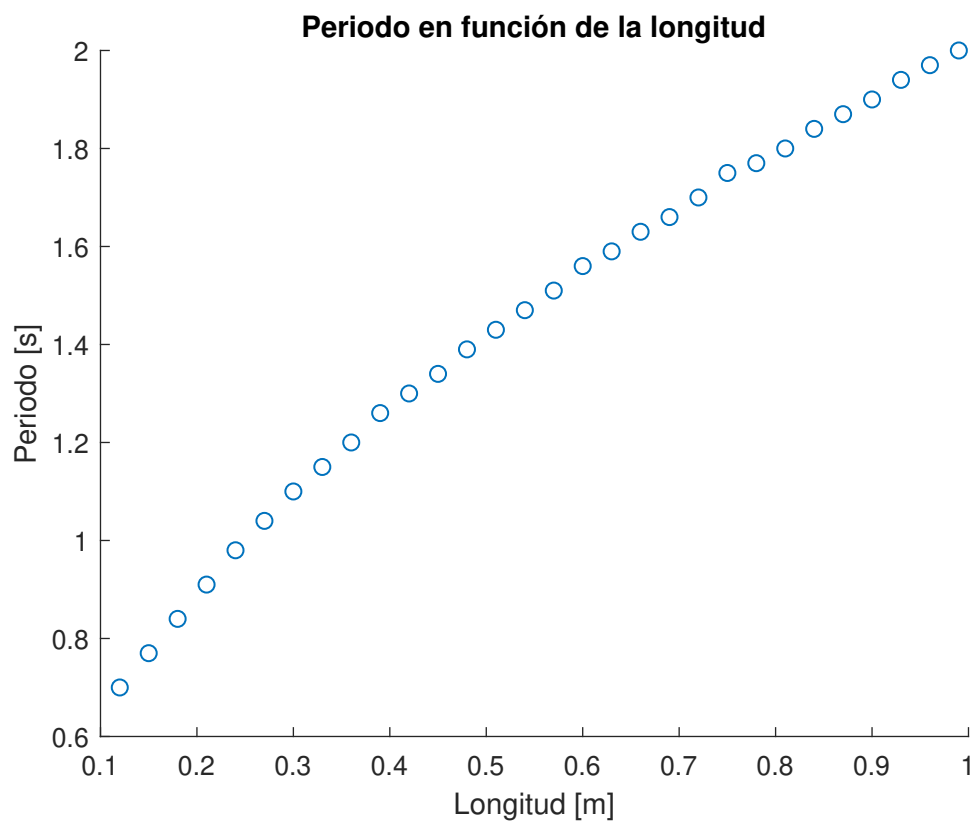


Figura 7: Gráfica del péndulo

La figura 7 sugiere un modelo no lineal, así que se aplicara el método de logaritmos. La función tiene la forma general:

$$y = ax^b$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\log y = \log a + b \log x$$

Haciendo los siguientes cambios de variables:

$$Y' = \log y$$

$$A = \log a$$

$$B = b$$

$$X' = \log x$$

Se obtiene:

$$Y' = A + BX'$$

i	$\log(L_i)$	$\log(T_i)$
1	-	-
2	-0.8239	-0.1135
3	-0.7447	-0.0757
4	-0.6778	-0.0410
5	-0.6198	-0.0088
6	-0.5686	0.0170
7	-0.5229	0.0414
8	-0.4815	0.0607
9	-0.4437	0.0792
10	-0.4089	0.1004
11	-0.3768	0.1139
12	-0.3468	0.1271
13	-0.3188	0.1430
14	-0.2924	0.1553
15	-0.2676	0.1673
16	-0.2441	0.1790
17	-0.2218	0.1931
18	-0.2007	0.2014
19	-0.1805	0.2122
20	-0.1612	0.2201
21	-0.1427	0.2304
22	-0.1249	0.2430
23	-0.1079	0.2480
24	-0.0915	0.2553
25	-0.0757	0.2648
26	-0.0605	0.2718
27	-0.0458	0.2788
28	-0.0315	0.2878
29	-0.0177	0.2945
30	-0.0044	0.3010

La gráfica de los datos con el cambio de variable logarítmica pueden verse en la figura 8. Calculando los valores de la recta por el método de los mínimos cuadrados, se obtiene:

$$A = (0.3032 \pm 0.0004)[u]; 0.15 \% \quad (23)$$

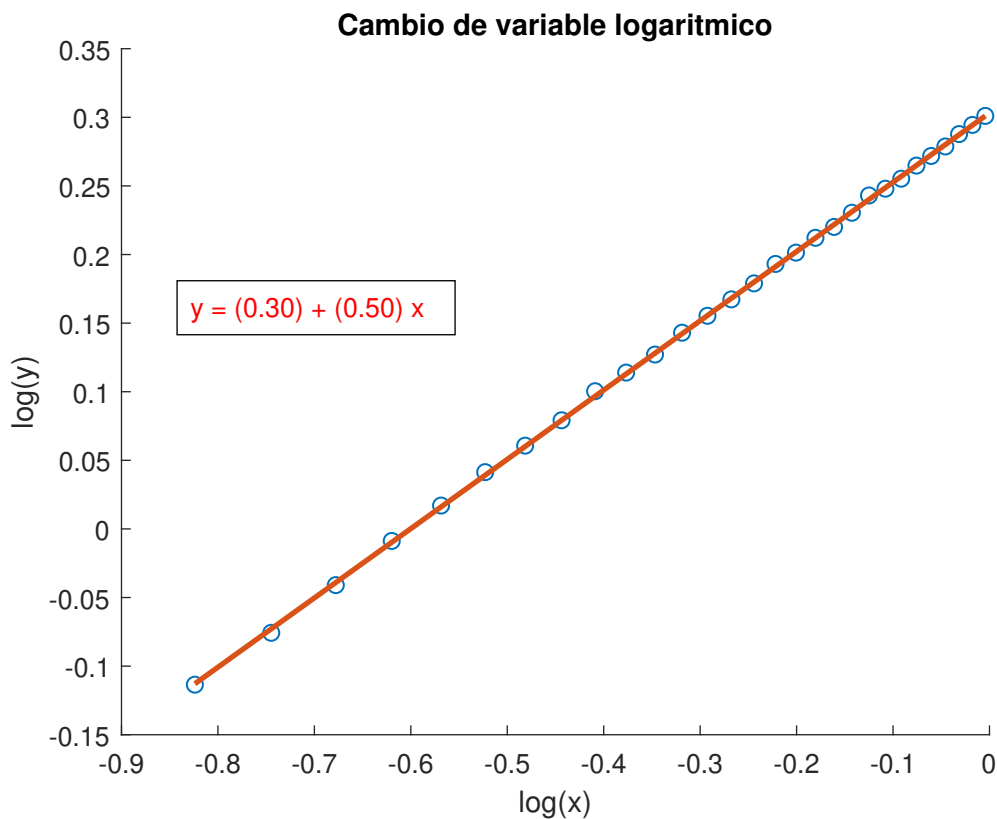


Figura 8: Gráfica linealizada por el método de logaritmos

$$B = (0.505 \pm 0.001)[u]; 0.24 \% \quad (24)$$

La ecuación de la recta es:

$$Y = 0.3032 - 0.505x \quad (25)$$

A partir de los parámetros de recta A y B , calculamos los parámetros a y b , de la curva original y sus errores por el método de propagación de errores:

$$a = \text{antilog}(A) = \text{antilog}(4.05) = 2.0101$$

$$b = B = 0.5050$$

$$e_a = 10^A \ln(10) e_A = 0.0021$$

$$e_b = e_B = 0.0012$$

Obteniendo finalmente los valores de la curva:

$$a = (2.010 \pm 0.002)[u]; 0.10 \% \quad (26)$$

$$b = (0.505 \pm 0.001)[u]; 0.24 \% \quad (27)$$

La ecuación de la curva resultante es:

$$y = 2.01x^{0.505} \quad (28)$$

6.4.1. Memoria de calculo

Comandos del programa

```
% leer datos previamente formateados
table = readtable('i3_4.csv')

% cambio de variable y remover el primer elemento
x = log10(table.Var1(2:end))
y = log10(table.Var2(2:end))

% tamaño de la muestra
n = length(x)

% calculo de las sumatorias
sx = sum(x)
sy = sum(y)
sxx = sum(x.*x)
sxy = sum(x.*y)

% Calculo de los valores de la recta
D = (n * sxx) - (sx)^2
A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D
B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D

% Calculo del error
Y = A + (B * x)
d = y - Y

sdd = sum(d.*d)
s2 = sdd / ( n - 2)

sA = sqrt( (s2 * sxx) / D )
sB = sqrt( (s2 * n) / D )

%calculando el error porcentual
EA = (sA / A) * 100
EB = (sB / B) * 100

%calculando los valores originales
a = 10^A
b = B

sa = (10^A) * log(10) * sA
sb = sB

%calculando el error porcentual
Ea = (sa / a) * 100
Eb = (sb / b) * 100
```

Salida del programa

» p4_4_2

table =

30x2 table

Var1	Var2
----	----
0.12	0.7
0.15	0.77
0.18	0.84
0.21	0.91
0.24	0.98
0.27	1.04
0.3	1.1
0.33	1.15
0.36	1.2
0.39	1.26
0.42	1.3
0.45	1.34
0.48	1.39
0.51	1.43
0.54	1.47
0.57	1.51
0.6	1.56
0.63	1.59
0.66	1.63
0.69	1.66
0.72	1.7
0.75	1.75
0.78	1.77
0.81	1.8
0.84	1.84
0.87	1.87
0.9	1.9
0.93	1.94
0.96	1.97
0.99	2

x =

-0.8239
-0.7447
-0.6778
-0.6198
-0.5686
-0.5229
-0.4815
-0.4437
-0.4089
-0.3768
-0.3468
-0.3188
-0.2924
-0.2676

-0.2441
-0.2218
-0.2007
-0.1805
-0.1612
-0.1427
-0.1249
-0.1079
-0.0915
-0.0757
-0.0605
-0.0458
-0.0315
-0.0177
-0.0044

y =

-0.1135
-0.0757
-0.0410
-0.0088
0.0170
0.0414
0.0607
0.0792
0.1004
0.1139
0.1271
0.1430
0.1553
0.1673
0.1790
0.1931
0.2014
0.2122
0.2201
0.2304
0.2430
0.2480
0.2553
0.2648
0.2718
0.2788
0.2878
0.2945
0.3010

n = 29

sx = -8.6050

sy = 4.4477

sxx = 4.0670

sxy = -0.5553

D = 43.8965

A = 0.3032

B = 0.5050

Y =

-0.1129
-0.0729
-0.0391
-0.0098
0.0161
0.0392
0.0601
0.0791
0.0967
0.1130
0.1281
0.1422
0.1555
0.1681
0.1799
0.1912
0.2019
0.2121
0.2218
0.2312
0.2401
0.2487
0.2570
0.2650
0.2727
0.2801
0.2873
0.2943
0.3010

d =

-0.0007
-0.0029
-0.0019
0.0010
0.0010
0.0022
0.0006
0.0000
0.0037
0.0010
-0.0010
0.0008
-0.0002
-0.0008
-0.0010
0.0019
-0.0005
0.0001
-0.0017
-0.0007
0.0029
-0.0007
-0.0017
-0.0002
-0.0008
-0.0014

0.0005
0.0002
0.0000

sdd = 5.9406e-05
s2 = 2.2002e-06
sA = 4.5150e-04
sB = 0.0012
EA = 0.1489
EB = 0.2387
a = 2.0101
b = 0.5050
sa = 0.0021
sb = 0.0012
Ea = 0.1040
Eb = 0.2387

7. Conclusiones

Se aprendió a graficar diferentes relaciones entre variables sean lineales o no lineales, como también calcular la ecuación que rige su comportamiento.

7.1. Resultados obtenidos

Intensidad lumínica $y = 57.7x^{-1.18}$
Presión vs profundidad $y = 101 + 10x$
Resistencia vs temperatura $y = 98.48 + 0.38x$
Péndulo $y = 2.01x^{0.505}$