Informe 3: Péndulo simple

Carlos Eduardo Caballero Burgoa
200201226@est.umss.edu

27 de abril de 2021

Grupo: J2
Docente: Ing. Milka Mónica Torrico Troche
Carrera: Ing. Electromecánica

Resumen

Este documento detalla el experimento realizado en simulador para hallar la relación funcional entre el periodo de oscilación (T) y la longitud (L) de un péndulo simple, además de calcular el valor de la aceleración de la gravedad; para esto se realizó la medición de 10 oscilaciones de un péndulo con una longitud determinada; y posteriormente se calculó la relación funcional después de linealizar la cuerva y ajustarla con el método de mínimos cuadrados, finalmente se determinó el valor de la gravedad (g) con su respectivo error.

1. Introducción

Un péndulo simple es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de una cuerda no expansible y de masa despreciable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio vertical descendente, oscilará alrededor de dicha posición [1].

En la **Figura 1** se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa (m) en cualquier instante del movimiento, estas fuerzas son: La tensión (F) de la cuerda y la fuerza de gravedad (mg), que se descompone en función del ángulo desplazado (θ), en una componente normal ($mg\,cos\,\theta$) y una componente tangencial ($mg\,sen\,\theta$) [2].

Aplicando la segunda ley de *Newton* en la dirección tangencial, se obtiene:

$$-mg\,sen\,(\theta) = m\,a_t$$

La aceleración en la dirección tangencial es:

$$a_t = \frac{d^2S}{dt^2}$$

Donde S es la longitud del arco o trayectoria circular, cuya relación con el ángulo θ y la longitud de la cuerda L es:

$$S = \theta\,L$$

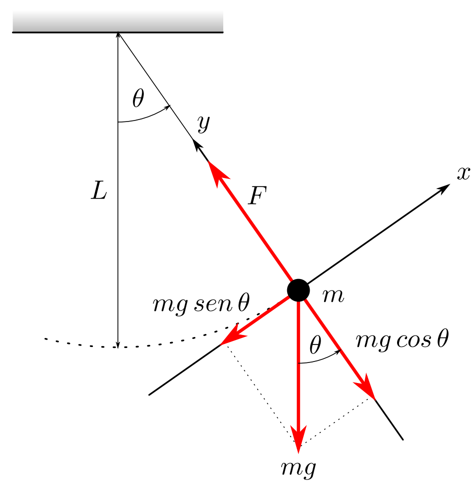

Figura 1: Péndulo simple idealizado.
Fuente: 2013. Sears y Zemansky. Física Universitaria Volumen I. Pagina 454.

Por tanto:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\,(\theta) = 0$$

Si consideramos tan solo oscilaciones de pequeña amplitud, de modo que el ángulo θ sea siempre suficientemente pequeño, entonces el valor del $sen\,(\theta)$ será muy próximo al valor de θ expresado en radianes ($sen\,(\theta) \cong \theta$, para θ suficientemente pequeño), como podemos apreciar en el **Cuadro 1** [3], y la ecuación anterior se reduce a:

$\theta[°]$	$\theta[rad]$	$sen\,\theta$	Dif. (%)	$\theta[°]$	$\theta[rad]$	$sen\,\theta$	Dif. (%)
0	0.00000	0.00000	0.00	15	0.26180	0.25882	1.15
2	0.03491	0.03490	0.02	20	0.34907	0.34202	2.06
5	0.08727	0.08716	0.13	25	0.43633	0.42262	3.25
10	0.17453	0.17365	0.51	30	0.52360	0.50000	4.72

Cuadro 1: Comparación entre el valor de un ángulo (rad) y su seno.
Fuente: Wikipedia: Péndulo simple.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

La ecuación anterior corresponde a un **oscilador armónico simple** cuya solución general es:

$$\theta(t) = A\,cos\,(\omega\,t + \phi)$$

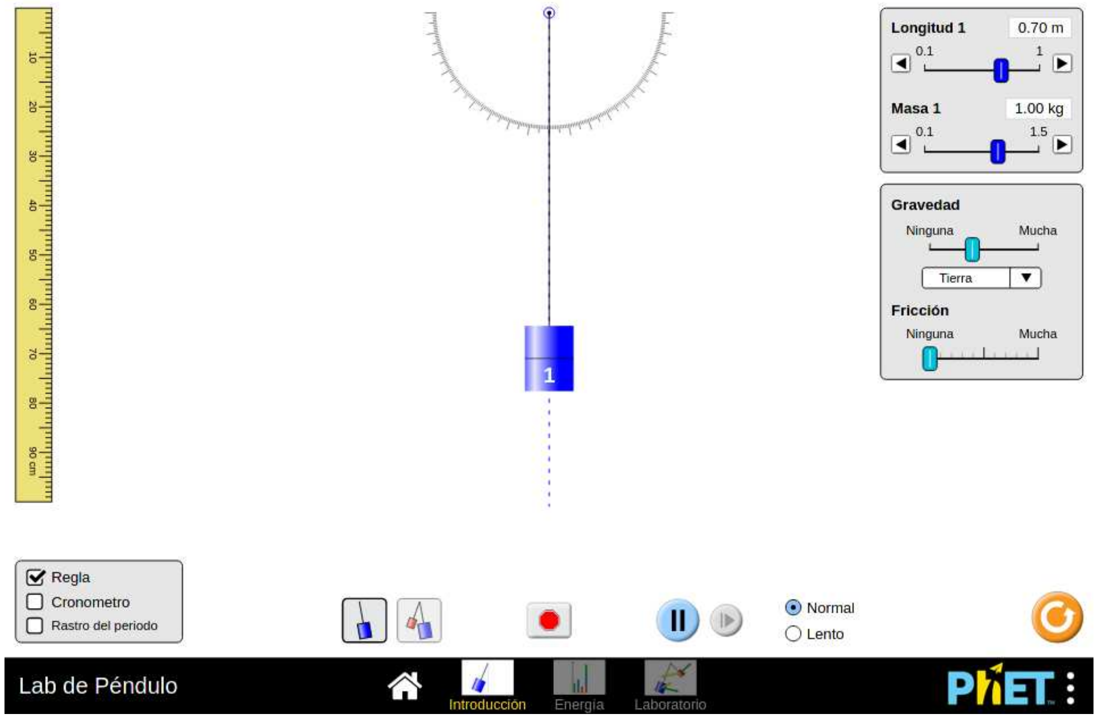

Figura 2: Simulador de péndulo simple.
Fuente: Fotografía propia.

Donde A representa el máximo desplazamiento angular de θ, ω es la frecuencia angular, y ϕ el desfase. Tanto la magnitud A, como ϕ son dos constantes determinadas por las condiciones iniciales.

La frecuencia angular (ω) esta determinado por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Considerando que $\omega = 2\pi/T$, el periodo de oscilación para el péndulo simple es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L} \tag{1}$$

Para el experimento se verificará la **Ecuación 1**, a partir de la toma de datos del tiempo de oscilación del péndulo para hallar el periodo (T) a partir de una longitud de cuerda establecida (L). Finalmente se determinará el valor de la gravedad (g) despejándola de la misma ecuación.

2. Método experimental

Para la realización del experimento, se utilizará el simulador de péndulo simple de *PHET*, ubicado en la dirección web: `https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_es.html`, esté se muestra en la **Figura 2**.

Para el simulador se escoge un valor de longitud (L), que se mantendrá constante durante la medición, y se registrarán 2 veces la cantidad de tiempo que requiere el péndulo para hacer 10 oscilaciones completas, todas las mediciones con una inclinación de 8°.

Una vez medidos los datos para 10 valores distintos de longitud (L), se procederá a calcular el periodo (T) con la siguiente ecuación:

$$T = \frac{\bar{t}}{10} \tag{2}$$

Donde $\bar{t}$, es el valor representativo para una serie de mediciones realizadas.

Luego se procederá a graficar la relación longitud (L) vs. periodo (T), para realizar primeramente la linealización de la curva por logaritmos, y luego el calculo de la recta por el método de los mínimos cuadrados, para posteriormente hallar la relación funcional entre las variables.

Finalizando con el calculo del valor de la gravedad, a partir de la **Ecuación 1**:

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$
$$g = \frac{4\pi^2}{a^2} \tag{3}$$

Donde a es uno de los parámetros de la curva hallada.

Datos necesarios para el experimento:

Masa del peso a oscilar por el péndulo:

$$m = 1.50[kg]$$

Precisión de la regla:

$$P_L = 0.01[m]$$

Precisión de la balanza:

$$P_m = 0.01[kg]$$

Precisión del cronometro:

$$P_t = 0.01[s]$$

3. Resultados

En el **Cuadro 2**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto la longitud como el tiempo de 10 oscilaciones tomados 2 veces, además del valor del periodo resultante.

A partir de los datos obtenidos se calculó el periodo de oscilación (T) para los valores de longitud (L), de los cuales se genera la gráfica de la **Figura 4**.

Posteriormente se linealizó la curva por logaritmos, y luego se realizó el ajuste de la curva, por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores, con su coeficiente de correlación (r):

$$A = (0.6941 \pm 0.0016)[u]; 0.2354\,\%$$

i	$L_i[m]$	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	$T[s]$
1	0.55	14.85	14.81	1.4830
2	0.60	15.42	15.45	1.5435
3	0.65	16.09	16.14	1.6115
4	0.70	16.88	16.76	1.6820
5	0.75	17.35	17.37	1.7360
6	0.80	17.87	17.92	1.7895
7	0.85	18.37	18.41	1.8390
8	0.90	19.01	18.94	1.8975
9	0.95	19.53	19.62	1.9575
10	1.00	20.02	19.92	1.9970

Cuadro 2: Mediciones de tiempo en función de la longitud del péndulo.
Fuente: Elaboración propia.

$$B = (0.5022 \pm 0.0049)[u]; 0.9791\,\%$$
$$r = 0.9996$$

Con los valores hallados, se procedió a calcular los valores originales de la curva, resultando:

$$a = (2.0019 \pm 0.0033)[s/\sqrt{m}]; 0.1634\,\%$$
$$b = (0.5022 \pm 0.0049)[u]; 0.9791\,\%$$

Resultando el modelo de ajuste:

$$T = 2.0019L^{0.5022}$$

Por tanto la relación funcional entre T y L, es:

$$T \propto \sqrt{L}$$

Verificándose el comportamiento establecido por la **Ecuación 1**.
Para el calculo de la gravedad (g) se utiliza la **Ecuación 3**, resultando:

$$g = (9.8508 \pm 0.0322)[m/s^2]; 0.3268\,\%$$

4. Discusión

La gráfica obtenida de la longitud vs. periodo, visualmente aparenta ser una relación lineal entre las variables, esto se debe al intervalo de la medición de la longitud $[0.55, 1.00]$, se recomienda tener datos mas dispersos para evitar una posible confusión de este tipo.

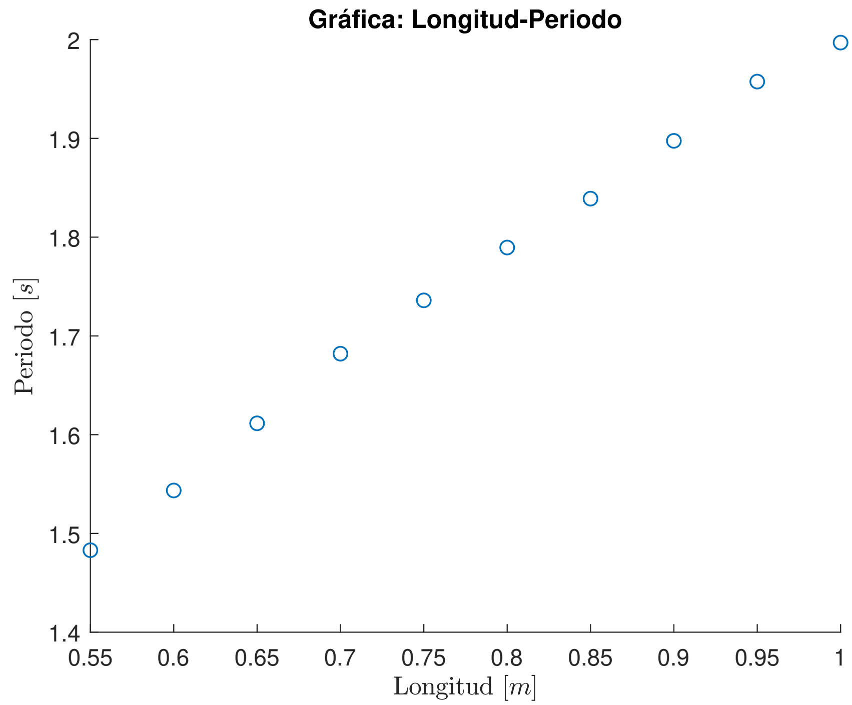

Figura 3: Gráfica de longitud vs periodo.
Fuente: Elaboración propia.

5. Conclusiones

Se realizó la gráfica de longitud vs periodo, se linealizó y realizó el ajuste de la curva por el método de mínimos cuadrados y se halló la relación funcional entre estas dos variables, confirmándose la ecuación teórica de un oscilador armónico simple.

También se halló el valor de la gravedad, siendo está la misma que el simulador establecía.

Referencias

[1] Sears y Zemansky (2013).
Física Universitaria. Volumen 1.
13va Edición.
Capitulo 11.

[2] Departamento de Física - UMSS.
Laboratorio de Física Básica II.
Guía - Cartilla de laboratorio.
Gestión I/2020.

[3] Péndulo simple
Extraído el 27 de Abril del 2021, de:
https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_simple.

Anexo: Cálculos adicionales

Conociendo t_{1i}, t_{2i}, se detallan los valores del valor representativo ($\bar{t}$), y el periodo de oscilación (T) en el **Cuadro 3**.

i	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	$\bar{t}[s]$	$T[s]$
1	(14.85 ± 0.01)	(14.81 ± 0.01)	(14.8300 ± 0.0200)	(1.4830 ± 0.0020)
2	(15.42 ± 0.01)	(15.45 ± 0.01)	(15.4350 ± 0.0150)	(1.5435 ± 0.0015)
3	(16.09 ± 0.01)	(16.14 ± 0.01)	(16.1150 ± 0.0250)	(1.6115 ± 0.0025)
4	(16.88 ± 0.01)	(16.76 ± 0.01)	(16.8200 ± 0.0600)	(1.6820 ± 0.0060)
5	(17.35 ± 0.01)	(17.37 ± 0.01)	(17.3600 ± 0.0100)	(1.7360 ± 0.0010)
6	(17.87 ± 0.01)	(17.92 ± 0.01)	(17.8950 ± 0.0250)	(1.7895 ± 0.0025)
7	(18.37 ± 0.01)	(18.41 ± 0.01)	(18.3900 ± 0.0200)	(1.8390 ± 0.0020)
8	(19.01 ± 0.01)	(18.94 ± 0.01)	(18.9750 ± 0.0350)	(1.8975 ± 0.0035)
9	(19.53 ± 0.01)	(19.62 ± 0.01)	(19.5750 ± 0.0450)	(1.9575 ± 0.0045)
10	(20.02 ± 0.01)	(19.92 ± 0.01)	(19.9700 ± 0.0500)	(1.9970 ± 0.0050)

Cuadro 3: Calculo del periodo de oscilación.
Fuente: Elaboración propia.

En el **Cuadro 4**, se detallan los valores logaritmizados de T y L:

i	$ln(L)$	$ln(T)$
1	-0.5978	0.3941
2	-0.5108	0.4341
3	-0.4308	0.4772
4	-0.3567	0.5200
5	-0.2877	0.5516
6	-0.2231	0.5819
7	-0.1625	0.6092
8	-0.1054	0.6405
9	-0.0513	0.6717
10	0	0.6916

Cuadro 4: Valores logaritmizados de L y T.
Fuente: Elaboración propia.

Los valores del **Cuadro 4**, pueden verse gráficamente en la figura

Se calculan los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados, con la ayuda de los datos presentados en el **Cuadro 5**.

$$n = 10$$

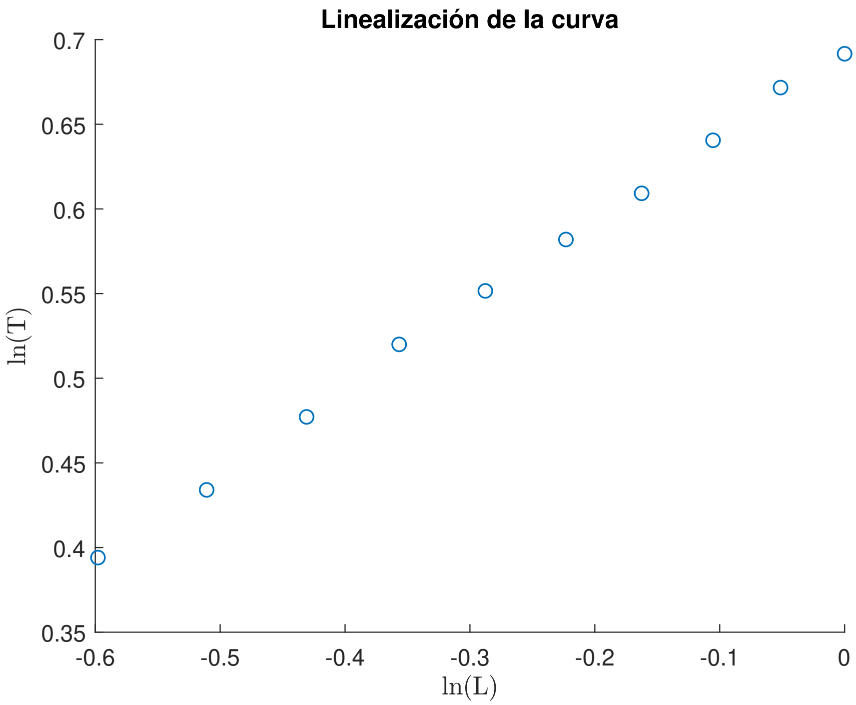

Figura 4: Gráfica de $ln(L)$ vs. $ln(T)$.
Fuente: Elaboración propia.

i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2	Y	d_i	$d_i^2 (1 \times 10^{-4})$
1	-0.2356	0.3574	0.1553	0.3938	0.0002	0.0005
2	-0.2217	0.2609	0.1884	0.4375	-0.0035	0.1222
3	-0.2056	0.1856	0.2277	0.4777	-0.0006	0.0034
4	-0.1855	0.1272	0.2704	0.5150	0.0050	0.2516
5	-0.1587	0.0828	0.3042	0.5496	0.0020	0.0387
6	-0.1299	0.0498	0.3386	0.5820	-0.0001	0.0001
7	-0.0990	0.0264	0.3712	0.6125	-0.0033	0.1060
8	-0.0675	0.0111	0.4103	0.6412	-0.0006	0.0042
9	-0.0345	0.0026	0.4511	0.6683	0.0033	0.1109
10	0	0	0.4784	0.6941	-0.0025	0.0602

Cuadro 5: Valores para el método de mínimos cuadrados.
Fuente: Elaboración propia.

$$\sum x_i = -2.7261$$

$$\sum y_i = 5.5719$$

$$\sum x_i^2 = 1.1038$$

$$\sum y_i^2 = 3.1956$$
$$\sum x_i y_i = -1.3378$$
$$\Delta_1 = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = 3.6067$$
$$\Delta_2 = n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2 = 0.9104$$
$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta_1} = 0.6941$$
$$B = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta_1} = 0.5022$$
$$\sum d^2 = 6.9772 \times 10^{-5}$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n-2} = 8.7215 \times 10^{-6}$$
$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta_1}} = 0.0016$$
$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta_1}} = 0.0049$$

$$A = (0.6941 \pm 0.0016)[u]; 0.2354\,\%$$
$$B = (0.5022 \pm 0.0049)[u]; 0.9791\,\%$$

Siendo el coeficiente de correlación:

$$R = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} = 0.9996$$

La ecuación de la recta resultante es:

$$y = 0.6941 + 0.5022x$$

A partir de los parámetros de recta A y B, se calculan los parámetros a y b de la curva original y sus errores por el método de propagación de errores:

$$a = e^A = e^{0.6941} = 2.0019$$
$$b = B = 0.5022$$
$$e_a = e^A e_A = e^{0.6941} 0.0016 = 0.0033$$
$$e_b = e_B = 0.0049$$

Obteniendo finalmente los valores de la curva:

$$a = (2.0019 \pm 0.0033)[u]; 0.1634\,\%$$
$$b = (0.5022 \pm 0.0049)[u]; 0.9791\,\%$$

La ecuación de la curva resultante es:

$$T = aL^b = 2.0019d^{0.5022} = 2.0019\sqrt{d}$$