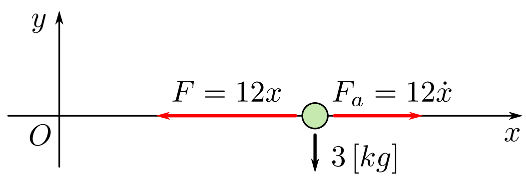
Tarea #24

Una partícula de masa igual a $3\,[kg]$ se mueve a lo largo del eje x atraída hacia el origen por una fuerza cuya magnitud es numéricamente igual a $12x$. La partícula también se somete a una fuerza de amortiguación cuya magnitud es numéricamente igual a 12 veces la velocidad instantánea. Si inicialmente está en reposo en $x = 10\,[m]$.

a) Encuentre la posición en función del tiempo.

b) Encuentre la velocidad en función del tiempo.

Solución:



Considerando la segunda ley de *Newton*:

$$\sum F = m\,a$$
$$-F - F_a = m\,a$$
$$-12x - 12\dot{x} = 3\,\ddot{x}$$

Por tanto:

$$3\ddot{x} + 12\dot{x} + 12x = 0$$
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0 \tag{1}$$

Resultando una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, realizando el siguiente cambio de variable:

$$x = e^{\alpha t}$$
$$\dot{x} = \alpha\, e^{\alpha t}$$
$$\ddot{x} = \alpha^2\, e^{\alpha t}$$

Por tanto:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 4\alpha e^{\alpha t} + 4e^{\alpha t} = 0$$
$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 4\alpha + 4) = 0$$

Considerando que $e^{\alpha t}$ no puede ser cero:

$$\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$$

Resolviendo con la ecuación general de segundo grado:

$$\alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{(4^2) - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

Se obtienen las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} x_1 = e^{-2t} \\ x_2 = te^{-2t} \end{cases}$$

La solución general es:

$$x = A_1 x_1 + A_2 x_2 = e^{-2t}(A_1 + A_2 t) \tag{2}$$

Que representa un movimiento no oscilatorio en el cual la partícula se acerca al punto de equilibrio estable lentamente.

Derivando la función x para obtener la velocidad:

$$x = A_1 e^{-2t} + A_2 t e^{-2t}$$
$$\frac{dx}{dt} = A_1(-2)e^{-2t} + A_2 t(-2)e^{-2t} + A_2 e^{-2t}$$
$$\dot{x} = -2A_1\, e^{-2t} + A_2\, e^{-2t}(1 - 2t) \tag{3}$$

Considerando las condiciones iniciales: $x(0) = 10$ y $\dot{x}(0) = 0$:

$$x(0) = A_1 e^{-2(0)} + A_2(0)e^{-2(0)}$$
$$10 = A_1$$

$$\dot{x}(0) = -2\,(10)\,e^{-2(0)} + A_2 e^{-2(0)}(1 - 2(0))$$
$$0 = -20 + A_2$$
$$20 = A_2$$

Por tanto:

(a)

$$x(t) = e^{-2t}(10 + 20t) \tag{4}$$

(b)

$$\dot{x}(t) = -20\, e^{-2t} + 20\, e^{-2t}(1 - 2t)$$
$$\dot{x}(t) = -40t\, e^{-2t} \tag{5}$$