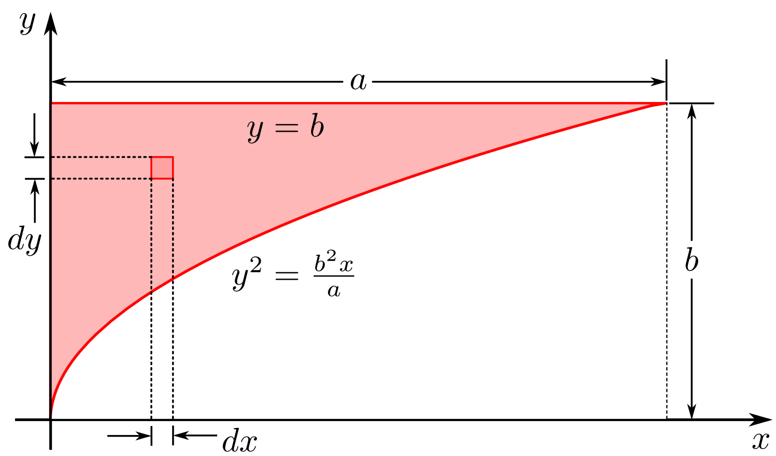
Tarea #11

1. Ejercicio 1

Calcule el centro de masa del siguiente sistema de distribución superficial uniforme. *Sugerencia*: Utilice un diferencial de área apropiado.



Solución:

Dada la ecuación del centro de masa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} \cdot dm \tag{1}$$

Y considerando la distribución homogénea de la masa sobre el material:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = ctte$$

Por tanto:

$$dm = \sigma \cdot ds = \sigma \cdot dx \cdot dy \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^M \vec{r} \cdot \sigma \cdot ds$$

Reemplazando $\vec{r}$ por sus componentes:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^S (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot \sigma \cdot ds = \frac{\sigma}{M} \int_0^a \int_{y_{min}}^{y_{max}} (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot dx \cdot dy$$

Sabiendo que los limites de la función son:

$$y_{min} = \sqrt{\frac{b^2 x}{a}}$$

$$y_{max} = b$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=\sqrt{\frac{b^2 x}{a}}}^{y=b} (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot dy \cdot dx$$

Para simplificar la resolución de la integral doble, se procede a cambiar el orden de integración, corrigiendo sus limites:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=\frac{ay^2}{b^2}} (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot dx \cdot dy$$

Para $\hat{i}$:

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^b \int_0^{\frac{ay^2}{b^2}} x \cdot dx \cdot dy = \frac{\sigma}{M} \int_0^b \left(\int_0^{\frac{ay^2}{b^2}} x \cdot dx \right) dy = \frac{\sigma}{M} \int_0^b \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\frac{ay^2}{b^2}} dy$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^b \left(\frac{a^2 y^4}{2b^4} \right) dy = \frac{\sigma}{M} \frac{a^2}{2b^4} \int_0^b y^4 dy$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M} \frac{a^2}{2b^4} \left. \frac{y^5}{5} \right|_0^b = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{a^2}{2b^4} \frac{b^5}{5} \right) = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{a^2 b}{10} \right)$$

Para $\hat{j}$:

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^b \int_0^{\frac{ay^2}{b^2}} y \cdot dx \cdot dy = \frac{\sigma}{M} \int_0^b y \left(\int_0^{\frac{ay^2}{b^2}} dx \right) dy = \frac{\sigma}{M} \int_0^b y \cdot x \Big|_0^{\frac{ay^2}{b^2}} dy$$

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^b y \cdot \frac{ay^2}{b^2} dy = \frac{\sigma}{M} \frac{a}{b^2} \int_0^b y^3 dy$$

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M} \frac{a}{b^2} \left. \frac{y^4}{4} \right|_0^b = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{a}{b^2} \frac{b^4}{4} \right) = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{ab^2}{4} \right)$$

Uniendo ambas componentes:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{a^2 b}{10} \right) \hat{i} + \frac{\sigma}{M} \left(\frac{ab^2}{4} \right) \hat{j} \tag{3}$$

Integrando la ecuación (2):

$$M = \sigma \int_0^b \int_0^{\frac{ay^2}{b^2}} dx \cdot dy = \sigma \int_0^b x \Big|_0^{\frac{ay^2}{b^2}} dy = \sigma \int_0^b \frac{a}{b^2} y^2 dy$$

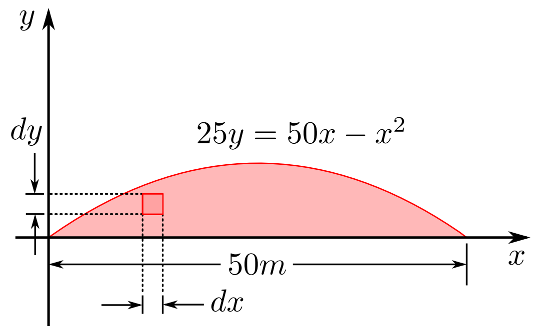
$$M = \sigma \frac{a}{b^2} \int_0^b y^2 dy = \sigma \frac{a}{b^2} \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^b = \sigma \frac{a}{b^2} \frac{b^3}{3} = \frac{\sigma}{3} ab$$

Reemplazando M de la ecuación (6), obtenemos:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{3}{10} a\hat{i} + \frac{3}{4} b\hat{j} \tag{resultado}$$

2. Ejercicio 2

Calcule el centro de masa del siguiente sistema de distribución superficial uniforme. *Sugerencia*: Utilice un diferencial de área apropiado.



Solución:

Dada la ecuación del centro de masa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r} \cdot dm \tag{4}$$

Y considerando la distribución homogénea de la masa sobre el material:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = ctte$$

Por tanto:

$$dm = \sigma \cdot ds = \sigma \cdot dx \cdot dy \tag{5}$$

Reemplazando (5) en (4):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^M \vec{r} \cdot \sigma \cdot ds$$

Reemplazando $\vec{r}$ por sus componentes:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^S (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot \sigma \cdot ds = \frac{\sigma}{M}\int_0^{50}\int_{y_{min}}^{y_{max}} (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot dx \cdot dy$$

Sabiendo que los limites de la función son:

$$y_{min} = 0$$

$$y_{max} = \frac{50x - x^2}{25}$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sigma}{M}\int_{x=0}^{x=50}\int_{y=0}^{y=\frac{50x-x^2}{25}} (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot dy \cdot dx$$

Para $\hat{i}$:

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M}\int_0^{50}\int_0^{\frac{50x-x^2}{25}} x \cdot dy \cdot dx = \frac{\sigma}{M}\int_0^{50} x \cdot \left(\int_0^{\frac{50x-x^2}{25}} dy\right) dx = \frac{\sigma}{M}\int_0^{50} x \cdot y\Big|_0^{\frac{50x-x^2}{25}} dx$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M}\int_0^{50} x\left(\frac{50x-x^2}{25}\right)dx = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{25}\int_0^{50}(50x^2-x^3)\cdot dx = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{25}\left(\frac{50x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{50}$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{25}50^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{25}\frac{50^4}{12} = \frac{\sigma}{M}\frac{50^4}{300}$$

Para $\hat{j}$:

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M}\int_0^{50}\int_0^{\frac{50x-x^2}{25}} y\cdot dy\cdot dx = \frac{\sigma}{M}\int_0^{50}\left(\int_0^{\frac{50x-x^2}{25}} y\cdot dy\right)dx = \frac{\sigma}{M}\int_0^{50}\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{50x-x^2}{25}} dx$$

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M}\int_0^{50}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{50x-x^2}{25}\right)^2\right)dx = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{2}\frac{1}{25^2}\int_0^{50}(50^2x^2-100x^3+x^4)\cdot dx$$

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{2}\frac{1}{25^2}\left(\frac{50^2x^3}{3}-\frac{100x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^{50} = \frac{\sigma}{M}\frac{1}{2}\frac{1}{25^2}\frac{50^5}{30} = \frac{\sigma}{M}\frac{50^5}{60\cdot 25^2}$$

Uniendo ambas componentes:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sigma}{M}\left(\frac{50^4}{300}\right)\hat{\imath} + \frac{\sigma}{M}\left(\frac{50^5}{60\cdot 25^2}\right)\hat{\jmath} \tag{6}$$

Integrando la ecuación (5):

$$M = \sigma\int_0^{50}\int_0^{\frac{50x-x^2}{25}} dx\cdot dy = \sigma\int_0^{50} x\Bigg|_0^{\frac{50x-x^2}{25}} dy = \sigma\int_0^{50}\frac{50x-x^2}{25}dy$$

$$M = \frac{\sigma}{25}\int_0^{50}\left(\frac{50x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{50} = \frac{\sigma}{25}\frac{50^3}{6} = \frac{\sigma\cdot 50^3}{150}$$

Reemplazando M de la ecuación (6), obtenemos:

$$\vec{r}_{cm} = 25\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} \tag{resultado}$$