# Tarea #18

Una barra uniforme y delgada de $L = 2[m]$ y masa $m = 0.5[kg]$ esta sostenida a $0.1[m]$ de uno de sus extremos.

Si $\phi_0 = 10°$ y $\Omega_0 = \dot{\psi}_0 = 0[rad/s]$ para $t = 0[s]$, calcular:

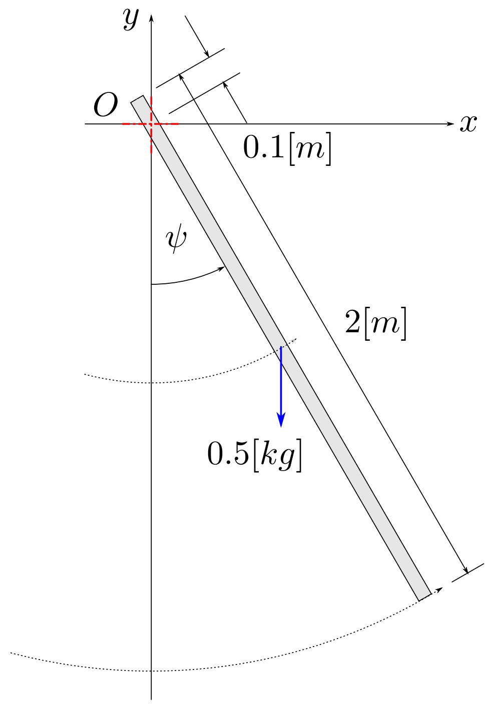
a) La frecuencia angular de oscilación, el periodo de oscilación y la frecuencia de oscilación.

b) La ecuación $\psi = \psi(t)$.

c) La ecuación $\Omega = \dot{\psi} = \dot{\psi}(t)$.

d) La ecuación $\alpha = \ddot{\psi} = \ddot{\psi}(t)$.

e) Las ecuaciones paramétricas del movimiento en $XY$.




**Solución:**

**(a)**

Sabemos que el momento de inercia en el centro de masa de una barra es:

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$$

y con ayuda del teorema de los ejes paralelos:

$$I_P = I_{CM} + Md^2$$

Calculamos el momento de inercia sobre el eje de rotación:

$$I_O = \frac{1}{12}M(2.0)^2 + M\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{343}{300}M = 1.1433M \tag{1}$$

Sabiendo que:

$$\ddot{\psi} + \frac{mgd}{I_O}\psi = 0$$

y comparando con la ecuación de un oscilador armónico simple:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Obtenemos la frecuencia angular de oscilación ($\omega$):

$$\omega = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{I_O}} = \sqrt{\frac{(0.5)(9.8)(1-0.1)}{1.1433(0.5)}} = 2.7775[rad/s] \tag{2}$$

El periodo de oscilación ($T$):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2.7775} = 2.2622[s] \tag{3}$$

Y la frecuencia de oscilación ($\nu$):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.2622} = 0.4420[Hz] \tag{4}$$

**(b)**

La solución general de un oscilador armónico simple es:

$$\psi = A \cdot cos(\omega t - \phi)$$

Considerando las condiciones iniciales para $t = 0$:

$$\psi_0 = 10^\circ \cdot \frac{\pi[rad]}{180^\circ} = \frac{\pi}{18}[rad]$$
$$\dot{\psi}_0 = 0$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{18} = A \cdot cos(-\phi) \\ 0 = -A \cdot 2.7775 \cdot sen(-\phi) \end{cases} \tag{5}$$

Despejando $\phi$ de la segunda ecuación:

$$0 = sen(-\phi)$$
$$0 = sen(\phi)$$
$$\phi = arcsen(0) = 0 \tag{6}$$

Y se calcula $A$ de la primera ecuación:

$$A = \frac{\pi}{18 \cdot cos(0)} = \frac{\pi}{18} = 0.1745[rad] \tag{7}$$

Por tanto:

$$\psi = A \cdot cos(\omega \cdot t - \phi)$$
$$\psi = 0.1745 \cdot cos(2.7775 \cdot t) \tag{8}$$

**(c)**

Derivando la función $\psi$:

$$\dot{\psi} = -A\,\omega \cdot sen(\omega \cdot t - \phi)$$
$$\dot{\psi} = -0.1745 \cdot 2.7775 \cdot sen(2.7775 \cdot t)$$
$$\Omega = \dot{\psi} = -0.4848 \cdot sen(2.7775 \cdot t) \tag{9}$$

**(d)**

Derivando la función $\dot{\psi}$:

$$\ddot{\psi} = -A\,\omega^2 \cdot cos(\omega \cdot t - \phi)$$
$$\ddot{\psi} = -0.1745 \cdot (2.7775)^2 \cdot cos(2.7775 \cdot t)$$
$$\alpha = \ddot{\psi} = -1.3464 \cdot cos(2.7775 \cdot t) \tag{10}$$

**(e)**

A partir de las relaciones trigonométricas, sabemos:

$$x(t) = \frac{L}{2} sen(\psi) = \frac{2}{2} sen(\psi) = sen(A \cdot cos(\omega t))$$
$$x(t) = sen(0.1745 \cdot cos(2.7775\,t))[m] \tag{11}$$

$$y(t) = -\frac{L}{2} cos(\psi) = -\frac{2}{2} cos(\psi) = -cos(A \cdot cos(\omega t))$$
$$y(t) = -cos(0.1745 \cdot cos(2.7775\,t))[m] \tag{12}$$

Por tanto:

$$\vec{r}(t) = sen(0.1745 \cdot cos(2.7775\,t))\,\hat{\imath} - cos(0.1745 \cdot cos(2.7775\,t))\,\hat{\jmath} \tag{13}$$

Derivando las funciones de posición se hallan las ecuaciones de velocidad, con la ayuda de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}\left[f(g(t))\right] = f'(g(t))\,g'(t)$$

$$x'(t) = cos(A \cdot cos(\omega t))\,(A(-sen(\omega t)))\,\omega$$

$$x'(t) = -A\omega \cdot cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen(\omega t)$$
$$x'(t) = -0.4848 \cdot cos(0.1745 \cdot cos(2.7775\, t)) \cdot sen(2.7775\, t) \tag{14}$$

$$y'(t) = sen(A \cdot cos(\omega t))\, (A(-sen(\omega t)))\, \omega$$
$$y'(t) = -A\omega \cdot sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen(\omega t)$$
$$y'(t) = -0.4848 \cdot sen(0.1745 \cdot cos(2.7775\, t)) \cdot sen(2.7775\, t) \tag{15}$$

Derivando las funciones de velocidad se hallan las ecuaciones de aceleración, con la ayuda de la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dt}\left[f(t) \cdot g(t)\right] = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

$$x''(t) = -A\omega\left[A\omega \cdot sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen^2(\omega t) + \omega \cdot cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot cos(\omega t)\right]$$
$$x''(t) = -A\omega^2\left[A \cdot sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen^2(\omega t) + cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot cos(\omega t)\right]$$
$$\begin{aligned} x''(t) = &-0.2350 \cdot sen(0.1745 \cdot cos(2.7775t)) \cdot sen^2(2.7775t) \\ &-1.3464 \cdot cos(0.1745 \cdot cos(2.7775t)) \cdot cos(2.7775t) \end{aligned} \tag{16}$$

$$y''(t) = -A\omega\left[-A\omega \cdot cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen^2(\omega t) + \omega \cdot sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot cos(\omega t)\right]$$
$$y''(t) = A\omega^2\left[A \cdot cos(A \cdot cos(\omega t)) \cdot sen^2(\omega t) - sen(A \cdot cos(\omega t)) \cdot cos(\omega t)\right]$$
$$\begin{aligned} y''(t) = &\ 0.2350 \cdot cos(0.1745 \cdot cos(2.7775t)) \cdot sen^2(2.7775t) \\ &-1.3464 \cdot sen(0.1745 \cdot cos(2.7775t)) \cdot cos(2.7775t) \end{aligned} \tag{17}$$