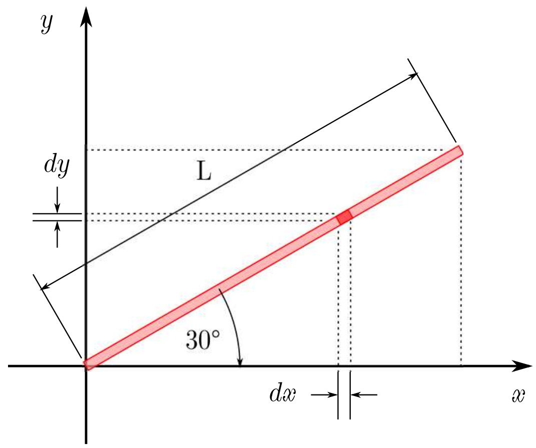
Tarea #5

Determinar el centro de masa de una barra delgada inclinada 30° con respecto a la horizontal. La masa de la barra es M y su longitud es L.



Solución:

Dada la ecuación del centro de masa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\cdot dm \tag{1}$$

Asumiendo la distribución homogénea de la masa sobre el material:

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = ctte$$

Por tanto:

$$dm = \lambda \cdot dl \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L \vec{r}\cdot\lambda\cdot dl$$

Reemplazando $\vec{r}$ por sus componentes:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L (x\hat{i} + y\hat{j})\cdot\lambda\cdot dl$$

Realizando los siguientes cambios de variable:

$$dx = dl\cdot cos(30°) \tag{3}$$

$$dy = dl\cdot sen(30°) \tag{4}$$

Para $\hat{i}$ obtenemos:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\cdot\lambda\cdot dl = \frac{1}{M}\int \frac{x\cdot\lambda\cdot dx}{cos(30°)} = \frac{\lambda}{M\cdot cos(30°)}\int_0^{L\cdot cos(30°)} x\cdot dx$$

$$x_{cm} = \frac{\lambda}{M \cdot cos(30°)} \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{L \cdot cos(30°)} = \frac{\lambda}{M \cdot cos(30°)} \frac{L^2 cos^2(30°)}{2}$$

$$x_{cm} = \frac{\lambda L^2 cos(30°)}{2M} = \frac{\lambda L^2 \cdot cos(30°)}{2\lambda L} = \frac{L \cdot cos(30°)}{2} = \frac{L}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}L$$

Para $\hat{j}$ obtenemos:

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L y \cdot \lambda \cdot dl = \frac{1}{M}\int \frac{y \cdot \lambda \cdot dy}{sen(30°)} = \frac{\lambda}{M \cdot sen(30°)}\int_0^{L \cdot sen(30°)} y \cdot dy$$

$$y_{cm} = \frac{\lambda}{M \cdot sen(30°)} \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{L \cdot sen(30°)} = \frac{\lambda}{M \cdot sen(30°)} \frac{L^2 sen^2(30°)}{2}$$

$$y_{cm} = \frac{\lambda L^2 sen(30°)}{2M} = \frac{\lambda L^2 \cdot sen(30°)}{2\lambda L} = \frac{L \cdot sen(30°)}{2} = \frac{L}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}L$$

Uniendo ambas componentes, obtenemos:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sqrt{3}}{4}L \cdot \hat{i} + \frac{1}{4}L \cdot \hat{j} \tag{5}$$