

Informe 8: Ley de *Boyle-Mariotte*

Carlos Eduardo Caballero Burgoa

200201226@est.umss.edu

10 de julio de 2021

Grupo: J2 (Miércoles)

Docente: Ing. Milka Mónica Torrico Troche

Carrera: Ing. Electromecánica

Resumen

Este documento detalla el experimento realizado en simulador para hallar la relación funcional entre la presión (P) y el ancho de un recipiente contenedor (x) de un gas a temperatura (T), cantidad de materia (n), y área transversal del contenedor (A) constantes, además del calculo de tal área; para esto se realizó la medición de la presión en el contenedor a diferentes variaciones del ancho del recipiente; posteriormente se calculó la relación funcional con el método de mínimos cuadrados, finalmente se determinó el valor del área transversal del contenedor, resultando ser: $(356.74 \pm 2.27 \times 10^{-10})[nm^2]$; $6.36 \times 10^{-11} \%$.

1. Introducción

En el siglo XVII, *Robert Boyle* estudió en forma sistemática y cuantitativa el comportamiento de los gases. En una serie de experimentos, *Boyle* analizó la relación que existe entre la presión y el volumen de una muestra de un gas.

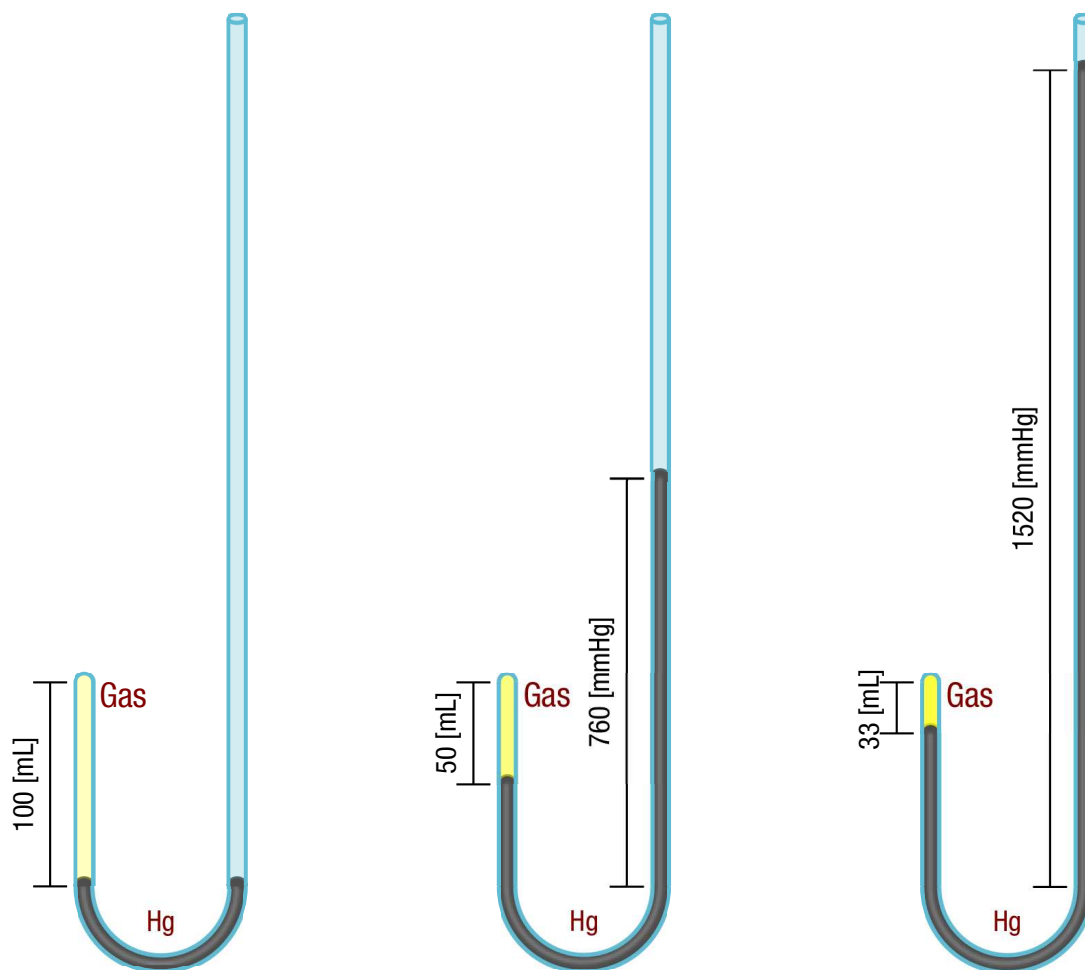
El aparato que *Boyle* utilizó en el experimento era muy sencillo (véase **Figura 1**). En la **Figura 1a** la presión ejercida sobre el gas es igual a la presión atmosférica y el volumen del gas es de $100[mL]$. (La parte superior del tubo se encuentra abierta y por tanto está expuesta a la presión atmosférica.) En la **Figura 1b** se ha añadido mas mercurio a fin de duplicar la presión sobre el gas, con lo que el volumen del gas disminuye a $50[mL]$. Al triplicar la presión sobre el gas su volumen disminuye a un tercio de su valor original (**Figura 1c**).

Es posible escribir una expresión matemática que muestre la relación hacia la izquierda entre la presión y el volumen:

$$P \propto \frac{1}{V} \quad (1)$$

Para cambiar esta proporcionalidad a una igualdad, se agrega un valor constante k_1 llamado *constante de proporcionalidad*:

$$P = k_1 \frac{1}{V} \quad (2)$$



(a) Los niveles de mercurio son iguales y la presión del gas es igual a la presión atmosférica (760[mmHg]). El volumen del gas es de 100[mL] .

(b) Al duplicar la presión mediante la adición de mas mercurio, el volumen del gas se reduce a 50[mL] .

(c) Al triplicar la presión, el volumen del gas disminuye a un tercio del valor original. La temperatura y cantidad del gas se mantienen constantes.

Figura 1: Instrumento para el estudio de la relación entre la presión y el volumen de un gas.

Nota: Química. (p. 180),
Chang, Raymond. 2010, McGraw-Hill.

La **Ecuación 2** es una expresión matemática de la ley de *Boyle*, también se puede expresar como:

$$PV = k_1 \quad (3)$$

Esta forma de la ley de *Boyle* establece que el producto de la presión y el volumen de un gas a temperatura (T) y cantidad del gas (n) constantes, es una constante [1].

Aunque los valores individuales de presión y volumen pueden variar mucho para una muestra dada de un gas, siempre que la temperatura permanezca constante y la cantidad de gas no cambie, P multiplicada por V siempre será igual a la misma constante. Por consiguiente, para una muestra de un gas bajo dos conjuntos de condiciones distintas a temperatura constante se tiene:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad (4)$$

Conjuntamente a la ley de *Boyle-Mariotte*, existen otras leyes que describen el comportamiento de los gases, estas son:

La ley de *Charles*:

$$V \propto T \quad (5)$$

Donde la presión (P) y la cantidad de materia (n) son constantes.

Y la ley de *Avogadro*:

$$V \propto n \quad (6)$$

Donde la presión (P) y la temperatura (T) son constantes.

Combinando las **Ecuaciones (2), (5) y (6)**, se obtiene una ecuación maestra para el comportamiento de los gases:

$$\begin{aligned} V &\propto \frac{nT}{P} \\ V &= R \frac{nT}{P} \\ PV &= nRT \end{aligned} \quad (7)$$

Donde R , la *constante de proporcionalidad*, se denomina **constante de los gases**. La **Ecuación 7**, conocida como **ecuación del gas ideal**, explica la relación entre las cuatro variables P , V , T y n .

El valor de R es:

$$R = 8.205\,746 \times 10^{-5} \left[\frac{m^3 - atm}{K - mol} \right]$$

2. Método experimental

Para la realización del experimento, se emplea el simulador *PhET* «Propiedades de los Gases», ubicado en la dirección web: https://phet.colorado.edu/sims/html/gas-properties/latest/gas-properties_es.html, tal como se presenta en la **Figura 2**.

A partir de la **Ecuación 7**, se obtiene:

$$P = nR \frac{T}{V}$$

Y asumiendo que el contenedor es rectangular, este será igual al área transversal (A) por el ancho (x):

$$P = nR \frac{T}{Ax} = \left(nR \frac{T}{A} \right) \frac{1}{x} \quad (8)$$

Para el simulador, se registrarán diferentes valores del ancho del recipiente (x) y la variación de su presión (P)

Una vez medidos los datos, se procederá a graficar la relación ancho vs. presión del recipiente, y con la ayuda del método de los mínimos cuadrados, se halla la relación funcional entre las variables.

Finalizando con el calculo del valor del área transversal (A) del contenedor, a partir de la **Ecuación 8**:

$$\begin{aligned} k &= nR \frac{T}{A} \\ A &= nR \frac{T}{k} \end{aligned} \quad (9)$$

Donde, la n , T y R son valores conocidos.

Datos necesarios para el experimento:

Temperatura:

$$T = 300[K]$$

Átomos dentro el contenedor:

$$N = 300[\text{átomos}]$$

Numero de moles de gas, a partir del numero de *Avogadro* (N_A):

$$\begin{aligned} N_A &= 6.022\,141\,5 \times 10^{23} \\ n &= \frac{N}{N_A} = 4.981\,62 \times 10^{-22}[\text{moles}] \end{aligned}$$

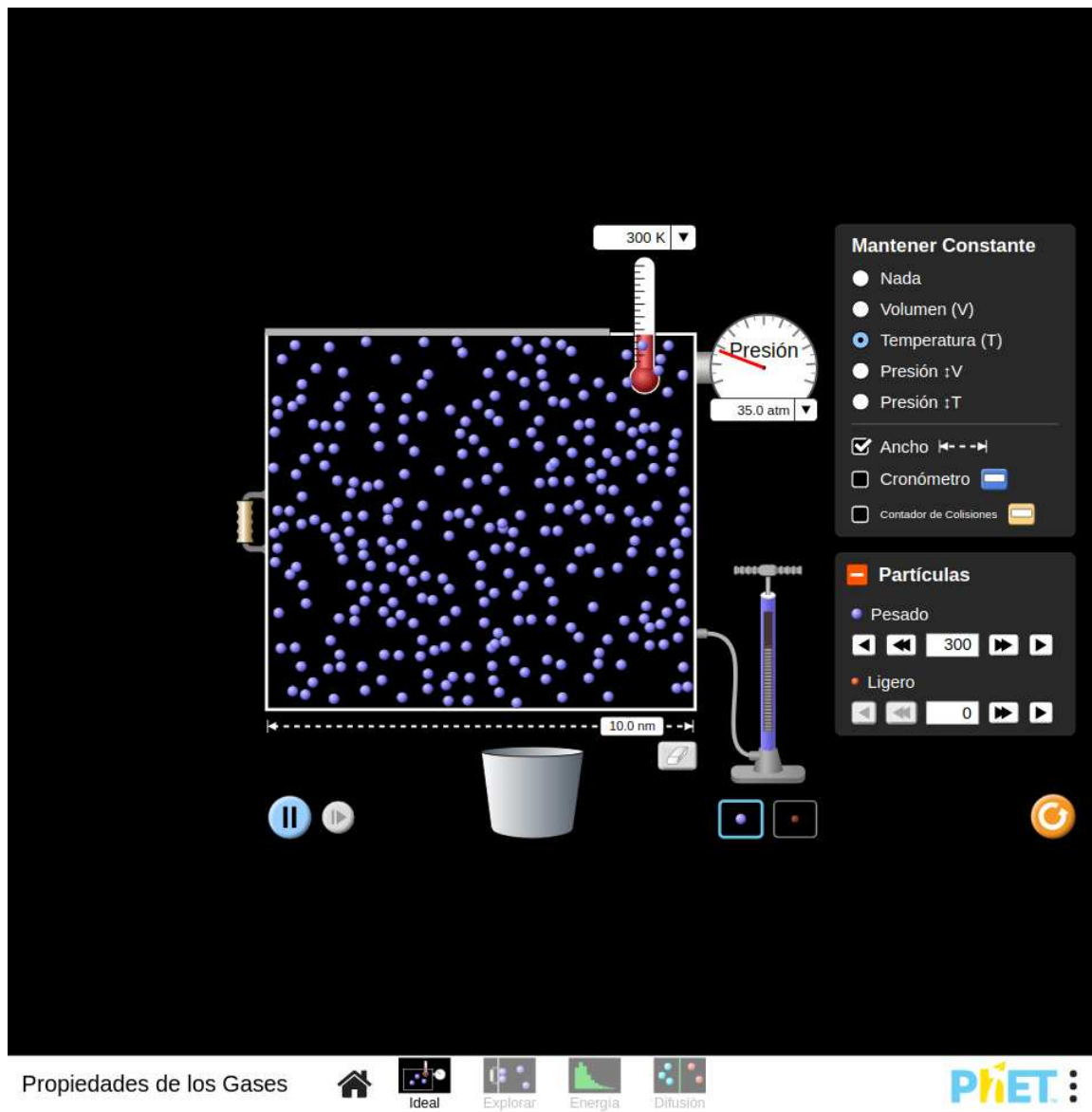


Figura 2: Simulador de propiedades de los gases.
Nota: Captura propia.

Datos tomados en el experimento:

En el **Cuadro 1**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto el ancho del recipiente, como la serie de mediciones de presión, y su promedio.

i	$x_i[nm]$	$P_{i1}[atm]$	$P_{i2}[atm]$	$P_{i3}[atm]$	$\bar{P}_i[atm]$
1	15.0	23.6	23.0	23.8	23.4667
2	14.0	24.7	25.0	25.2	24.9667
3	13.0	26.6	27.3	26.9	26.9333
4	12.0	29.1	28.9	29.5	29.1667
5	11.0	32.0	31.8	31.6	31.8000
6	10.0	34.7	35.0	34.8	34.8333
7	9.0	38.8	39.0	39.2	39.0000
8	8.0	44.4	43.7	44.0	44.0333
9	7.0	50.0	50.5	50.4	50.3000
10	6.0	58.5	58.3	58.7	58.5000
11	5.0	69.8	69.9	70.0	69.9000

Cuadro 1: Mediciones de presión en función del ancho del recipiente.

Nota: Elaboración propia.

3. Resultados

A partir de los datos del **Cuadro 1** se genera la gráfica de la **Figura 3**.

Posteriormente se linealizó la curva por medio de un cambio de variable, y se calculó la recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores:

$$A = (-12.58 \pm 0.05)[u]; 0.43 \%$$

$$B = (-1.001 \pm 0.003)[u]; 0.33 \%$$

Siendo su coeficiente de correlación (r):

$$r = -1.0000$$

Con los valores hallados, se calculan los valores originales de la curva, resultando:

$$a = (3.4376 \times 10^{-6} \pm 1.8489 \times 10^{-7})[m - atm]; 5.38 \%$$

$$b = (-1.001 \pm 0.003)[u]; 0.33 \%$$

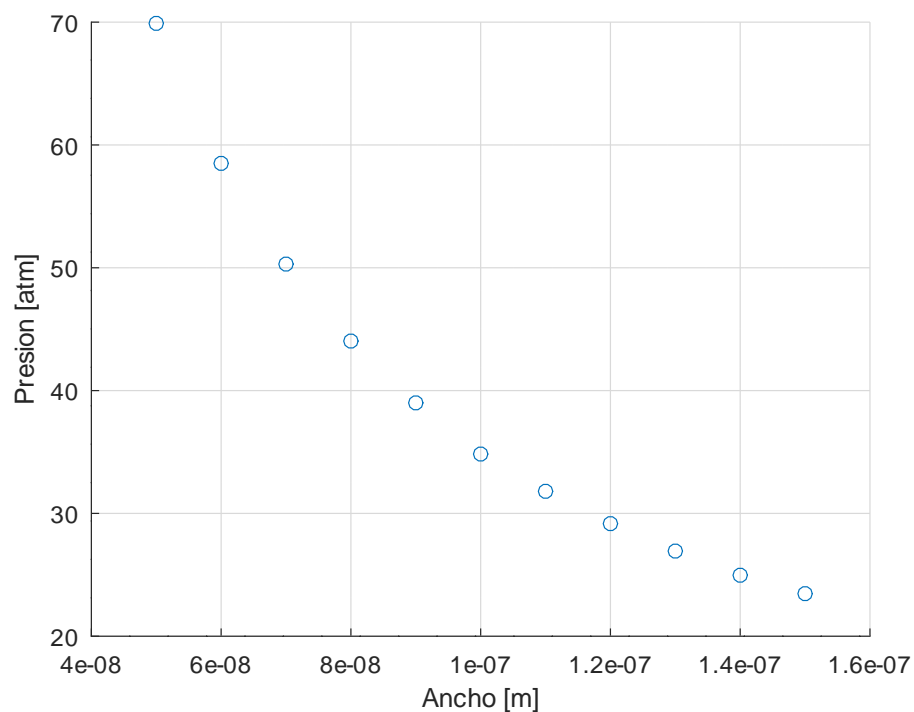


Figura 3: Gráfica de ancho vs presión.

Nota: Elaboración propia.

Resultando el modelo de ajuste:

$$P = 0.0000034 x^{-1.00}$$

Por tanto la relación funcional entre P y x , es:

Resultado
$P \propto \frac{1}{x}$

Verificándose el comportamiento establecido por la **Ecuación 1**.

Para el calculo de la área transversal del recipiente contenedor (A) se utiliza la **Ecuación 9**, resultando:

Resultado
$A = (356.74 \pm 2.27 \times 10^{-10})[nm^2]; 6.36 \times 10^{-11} \%$

4. Discusión

El simulador utilizado no provee información sobre la forma o dimensiones del recipiente, permitiendo únicamente modificar el valor de una dimensión.

El resultado obtenido para el área transversal del recipiente resulto $356.74[nm]$, si se presupone una forma cuadrada, cada lado tendría un valor de $18.89[nm]$, que como puede verse en la **Figura 2** es bastante razonable.

Otra particularidad sobre el simulador, es la cantidad de partículas que utiliza, la cual no especifica claramente si hace referencia a átomos o moléculas.

Se presupuso también que hace referencia a átomos, aunque sería mas lógico pensar que son moléculas, pero sin saber el tipo de gas utilizado, no puede hallarse la molaridad requerida en las ecuaciones utilizadas.

5. Conclusiones

Se halló la relación funcional entre el volumen (con área constante y ancho variable) y la presión, confirmandose la **Ecuación 3**.

También se calculó el valor del área transversal del recipiente con la ayuda de la ecuación de los gases ideales (**Ecuación 7**).

Referencias

- [1] Chang, Raymond. (2010).
Química.
10ma Edición.
Capitulo 5.
- [2] Departamento de Física - UMSS.
Laboratorio de Física Básica II.
Guía - Cartilla de laboratorio.
Gestión I/2020.

Apéndice A: Cálculos adicionales

5.1. Linealización de la curva

En el **Cuadro 2**, se detallan los valores logaritmizados de x y P :

i	$\ln(x_i)$	$\ln(P_i)$
1	-15.7126	3.1556
2	-15.7816	3.2175
3	-15.8557	3.2934
4	-15.9358	3.3730
5	-16.0228	3.4595
6	-16.1181	3.5506
7	-16.2235	3.6636
8	-16.3412	3.7849
9	-16.4748	3.9180
10	-16.6289	4.0690
11	-16.8112	4.2471

Cuadro 2: Valores logaritmizados de x y P .

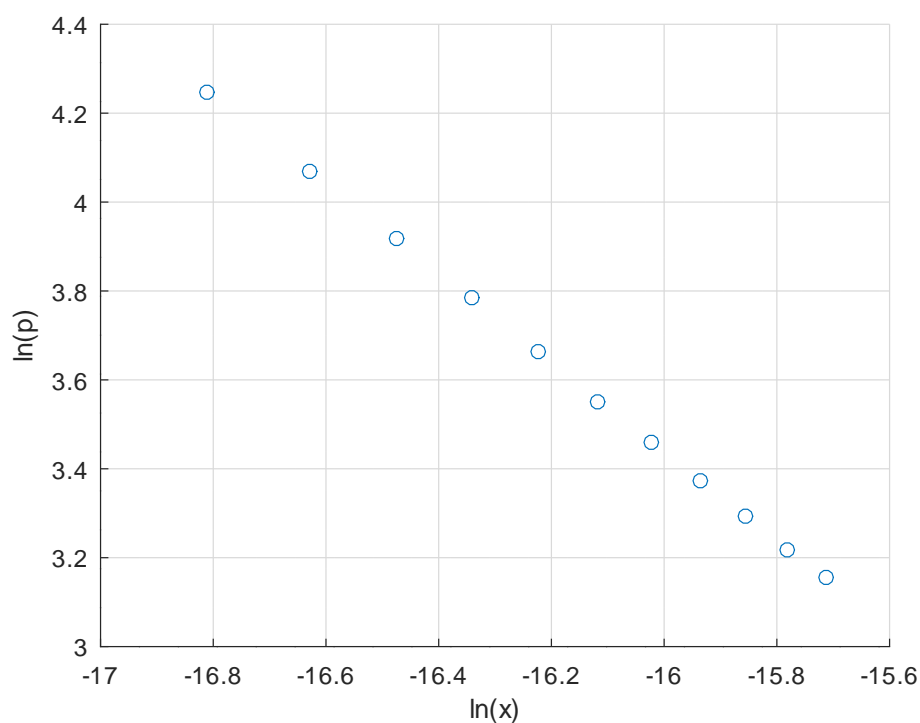
Nota: Elaboración propia.

Los valores del **Cuadro 2**, pueden verse gráficamente en la **Figura 4**.

5.2. Método de mínimos cuadrados

Se calculan los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados, con la ayuda de los datos presentados en el **Cuadro 3**.

$$\begin{aligned}
 n &= 11 \\
 \sum x_i &= -177.9063 \\
 \sum y_i &= 39.7322 \\
 \sum x_i^2 &= 2.8786 \times 10^3 \\
 \sum y_i^2 &= 144.8011 \\
 \sum x_i y_i &= -64.8864 \\
 \Delta_1 &= n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 = 14.1324 \\
 \Delta_2 &= n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i \right)^2 = 14.1678 \\
 A &= \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta_1} = -12.5807
 \end{aligned}$$

**Figura 4:** Gráfica de $\ln(L)$ vs. $\ln(T)$.**Nota:** Elaboración propia.

i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	Y_i	d_i	$d_i^2 (10^{-4})$
1	246.8868	9.9577	-49.5825	3.1508	0.0048	0.2292
2	249.0596	10.3526	-50.7780	3.2199	-0.0023	0.0542
3	251.4042	10.8463	-52.2187	3.2941	-0.0007	0.0049
4	253.9489	11.3773	-53.7518	3.3742	-0.0012	0.0139
5	256.7297	11.9679	-55.4303	3.4613	-0.0019	0.0344
6	259.7930	12.6066	-57.2285	3.5567	-0.0062	0.3809
7	263.2005	13.4217	-59.4356	3.6622	0.0013	0.0176
8	267.0361	14.3258	-61.8507	3.7802	0.0048	0.2293
9	271.4181	15.3508	-64.5482	3.9139	0.0042	0.1726
10	276.5210	16.5570	-67.6635	4.0682	0.0008	0.0071
11	282.6179	18.0376	-71.3985	4.2507	-0.0037	0.1341

Cuadro 3: Valores para el método de mínimos cuadrados.**Nota:** Elaboración propia.

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta_1} = -1.0012$$

$$\sum d^2 = 1.2782 \times 10^{-4}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n-2} = 1.4204 \times 10^{-5}$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta_1}} = 0.0538$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta_1}} = 0.0033$$

Parámetros de la recta obtenida:

$$A = (-12.5807 \pm 0.0538)[u]; 0.4275 \%$$

$$B = (-1.0012 \pm 0.0033)[u]; 0.3321 \%$$

Siendo el coeficiente de correlación:

$$R = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} = -1.0000$$

La ecuación de la recta resultante es:

$$y = -12.5807 - 1.0012x$$

A partir de los parámetros de recta A y B , se calculan los parámetros a y b de la curva original y sus errores por el método de propagación de errores:

$$a = e^A = e^{-12.5807} = 3.4376 \times 10^{-6}$$

$$b = B = -1.0012$$

$$e_a = e^A e_A = e^{-12.5807} (0.0538) = 1.8489 \times 10^{-7}$$

$$e_b = e_B = 0.0033$$

Obteniendo finalmente los valores de la curva:

$$a = (3.4376 \times 10^{-6} \pm 1.8489 \times 10^{-7})[m - atm]; 5.3785 \%$$

$$b = (-1.0012 \pm 0.0033)[u]; 0.3321 \%$$

La ecuación de la curva resultante es:

$$P = ax^b = 3.4376 \times 10^{-6} x^{-1.0012} = 0.0000034 \frac{1}{x}$$

5.3. Cálculo del área transversal

Para el cálculo del área transversal, se utiliza la **Ecuación 9**:

$$A = nR \frac{T}{a} = (4.98 \times 10^{-22})(8.2057 \times 10^{-5}) \frac{300}{3.4376 \times 10^{-6}} = 3.5674 \times 10^{-18} [m^2]$$

Y el error de la medición es:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = -nR \frac{T}{a^2}$$
$$e_A = \left| -nR \frac{T}{a^2} \right| e_a = 2.2674 \times 10^{-30}$$

Resultando:

$$A = (3.5674 \times 10^{-18} \pm 2.2674 \times 10^{-30}) [m^2]; 6.3560 \times 10^{-11} \%$$

Apéndice B: Cálculos realizados en *Octave*

A continuación se presenta los cálculos realizados en el programa *Octave* para la generación de las gráficas, la linealización de la curva, el calculo de los mínimos cuadrados y el valor del área transversal.

```
# Datos importados (i1.csv):
15.0,23.6,23.0,23.8
14.0,24.7,25.0,25.2
13.0,26.6,27.3,26.9
12.0,29.1,28.9,29.5
11.0,32.0,31.8,31.6
10.0,34.7,35.0,34.8
9.0,38.8,39.0,39.2
8.0,44.4,43.7,44.0
7.0,50.0,50.5,50.4
6.0,58.5,58.3,58.7
5.0,69.8,69.9,70.0

# Comandos ejecutados (o1.m):
function graficar(t,_x,_y,eps,x,y)
    f = figure()

    title(t)
    xlabel(_x)
    ylabel(_y)

    hold on
    grid on
    plot(x, y, 'o')

    print(f,eps,'-color')
    hold off
end

function [A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)
    xx = x.*x
    yy = y.*y
    xy = x.*y

    % tamaño de la muestra
    n = length(x)

    % calculo de las sumatorias
    sx = sum(x)
    sy = sum(y)

    sxx = sum(xx)
    syy = sum(yy)
    sxy = sum(xy)

    D1 = (n * sxx) - (sx)^2
    D2 = (n * syy) - (sy)^2
```

```
% calculo de los valores de la recta
A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D1
B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D1

% calculo del error
Y = A + (B * x)
d = y - Y

dd = d.*d
sdd = sum(dd)
s2 = sdd / ( n - 2)

sA = sqrt( (s2 * sxx) / D1 )
sB = sqrt( (s2 * n) / D1 )

% calculando el error porcentual
EA = abs(sA / A) * 100
EB = abs(sB / B) * 100

% calculo de correlacion
R = ((n * sxy) - (sx * sy)) / sqrt( D1 * D2 )
end

clear
close all
clc

addpath('.../.../octave')

% leer datos previamente formateados
table = csvread('i1.csv')

x = table(:,1) % [nm]
p1 = table(:,2) % [atm]
p2 = table(:,3) % [atm]
p3 = table(:,4) % [atm]

% conversion a SI
x_m = x * 10e-9
p = (1/3)*(p1+p2+p3)

graficar(
    '',
    'Ancho [m]',
    'Presion [atm]',
    'o1.1.eps',
    x_m,
    p
)

% linealizacion de la curva
x = log(x_m)
y = log(p)
```

```

graficar(
    '',
    'ln(x)',
    'ln(p)',
    'o1.2.eps',
    x,
    y
)

[A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)

% calculando los valores originales
e = exp(1)
a = e^A
b = B

% calculando el error absoluto
sa = (e^A) * sA
sb = sB

% calculando el error porcentual
Ea = abs(sa / a) * 100
Eb = abs(sb / b) * 100

% calculo del area
T = 300
N = 300
NA = 6.0221415e23
n = N/NA
R = 8.205746e-5

area = n*R*(T/a)
ee = n*R*(T/a*a) * sa
EE = abs(ee / area) * 100

area_nm2 = area * 10e9 * 10e9
ee_nm2 = ee * 10e9 * 10e9

# Salida del programa (o1.out):
table =

    15.0000    23.6000    23.0000    23.8000
    14.0000    24.7000    25.0000    25.2000
    13.0000    26.6000    27.3000    26.9000
    12.0000    29.1000    28.9000    29.5000
    11.0000    32.0000    31.8000    31.6000
    10.0000    34.7000    35.0000    34.8000
     9.0000    38.8000    39.0000    39.2000
     8.0000    44.4000    43.7000    44.0000
     7.0000    50.0000    50.5000    50.4000
     6.0000    58.5000    58.3000    58.7000
     5.0000    69.8000    69.9000    70.0000

x =

```

15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5

p1 =

23.600
24.700
26.600
29.100
32.000
34.700
38.800
44.400
50.000
58.500
69.800

p2 =

23.000
25.000
27.300
28.900
31.800
35.000
39.000
43.700
50.500
58.300
69.900

p3 =

23.800
25.200
26.900
29.500
31.600
34.800
39.200
44.000
50.400
58.700
70.000

x_m =

1.5000e-07
1.4000e-07
1.3000e-07
1.2000e-07
1.1000e-07
1.0000e-07
9.0000e-08
8.0000e-08
7.0000e-08
6.0000e-08
5.0000e-08

p =

23.467
24.967
26.933
29.167
31.800
34.833
39.000
44.033
50.300
58.500
69.900

f = 1

x =

-15.713
-15.782
-15.856
-15.936
-16.023
-16.118
-16.223
-16.341
-16.475
-16.629
-16.811

y =

3.1556
3.2175
3.2934
3.3730
3.4595
3.5506
3.6636
3.7849
3.9180
4.0690
4.2471

f = 2

xx =

246.89
249.06
251.40
253.95
256.73
259.79
263.20
267.04
271.42
276.52
282.62

yy =

9.9577
10.3526
10.8463
11.3773
11.9679
12.6066
13.4217
14.3258
15.3508
16.5570
18.0376

xy =

-49.582
-50.778
-52.219
-53.752
-55.430
-57.229
-59.436
-61.851
-64.548
-67.664
-71.398

n = 11

sx = -177.91

sy = 39.732

sxx = 2878.6

syy = 144.80

sxy = -643.89

D1 = 14.132

D2 = 14.168

A = -12.581

B = -1.0012

Y =

3.1508
3.2199

```
3.2941
3.3742
3.4613
3.5567
3.6622
3.7802
3.9139
4.0682
4.2507
```

d =

```
4.7871e-03
-2.3281e-03
-7.0215e-04
-1.1793e-03
-1.8555e-03
-6.1718e-03
1.3279e-03
4.7885e-03
4.1547e-03
8.4033e-04
-3.6616e-03
```

dd =

```
2.2916e-05
5.4203e-06
4.9302e-07
1.3907e-06
3.4429e-06
3.8091e-05
1.7632e-06
2.2930e-05
1.7261e-05
7.0615e-07
1.3407e-05
```

sdd = 1.2782e-04

s2 = 1.4202e-05

sA = 0.053785

sB = 3.3248e-03

EA = 0.4275

EB = 0.3321

R = -1.0000

A = -12.581

sA = 0.053785

B = -1.0012

sB = 3.3248e-03

R = -1.0000

e = 2.7183

a = 3.4376e-06

b = -1.0012

sa = 1.8489e-07

sb = 3.3248e-03

Ea = 5.3785

```
Eb = 0.3321  
T = 300  
N = 300  
NA = 6.0221e+23  
n = 4.9816e-22  
R = 8.2057e-05  
area = 3.5674e-18  
ee = 2.2674e-30  
EE = 6.3560e-11  
area_nm2 = 356.74  
ee_nm2 = 2.2674e-10
```