

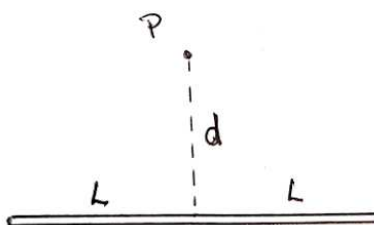
## Primer parcial

Estudiante: CABALLERO BURGOA, Carlos Eduardo

Carrera: Ingeniería Electromecánica

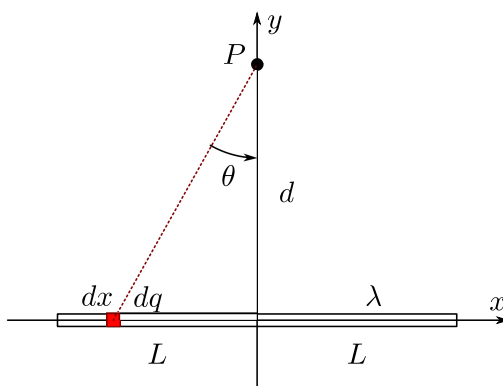
Correo: cijkb.j@gmail.com

1. Una varilla delgada de longitud  $2L$  ( $L = 1[m]$ ) y uniformemente cargada por unidad de longitud ( $\lambda = 1[\mu C/m]$ ), yace a lo largo del eje  $x$ , como se muestra en la figura. Calcular el campo eléctrico en el punto  $P$ , a una distancia  $d = 1[m]$  de la varilla a lo largo de su bisectriz perpendicular.



- 12727.92[N/C].
- 11462.36[N/C].
- 10354.28[N/C].
- 9658.33[N/C].

**Solución:**



Dada la ecuación campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r^2}$$

Y considerando la uniformidad de la carga:

$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$

Entonces:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\lambda dx}{x^2 + d^2} \sin(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dx}{x^2 + d^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

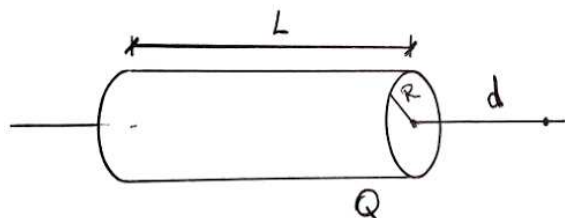
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{x}{(x^2 + d^2)^{3/2}} dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right) \Big|_{-L}^L = 0$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\lambda dx}{x^2 + d^2} \cos(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dx}{x^2 + d^2} \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$E_y = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{1}{(x^2 + d^2)^{3/2}} dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right) \Big|_{-L}^L$$

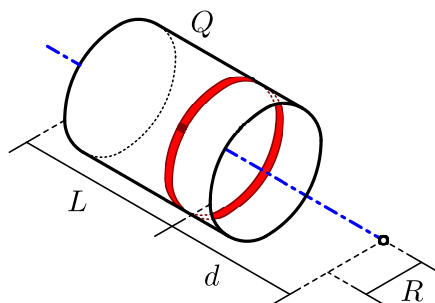
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{d^2} \frac{L}{\sqrt{L^2 + d^2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L\lambda}{d^2 \sqrt{L^2 + d^2}} = 12710.32 [N/C]$$

2. Considere un cilindro hueco con una pared delgada uniformemente cargada con una carga total  $Q = 1[\mu C]$ , radio  $R = 0.1[m]$  y una longitud  $L = 1[m]$ . Determine el campo eléctrico en un punto del eje a una distancia  $d = 0.2[m]$  del lado derecho del cilindro como se muestra en la figura.



- 41326.35[N/C].
- 32775.13[N/C].
- 25689.22[N/C].
- 18567.46[N/C].

**Solución:**



Dada la ecuación campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r^2}$$

Y considerando la uniformidad de la carga:

$$\sigma = \frac{dq}{ds dx}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \int_0^{2\pi R} \frac{\sigma ds dx}{x^2 + R^2} \cos(\theta) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \int_0^{2\pi R} \frac{ds dx}{x^2 + R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \\ E_x &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \int_0^{2\pi R} \frac{x ds dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx \int_0^{2\pi R} ds \\ E_x &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{x dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} (2\pi R) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{x dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \\ E_x &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_d^{d+L} \right) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{(d+L)^2 + R^2}} + \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}} \right) \end{aligned}$$

Reemplazando  $\sigma = Q/2\pi R L$ , obtenemos:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left( \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(d+L)^2 + R^2}} \right) = 32729.7980[N/C]$$

3. Un cilindro aislante de longitud infinita y de radio  $R = 0.3[m]$ , tiene una densidad de carga volumétrica  $\rho = \rho_0(a - r/b)$  que varía en función del radio donde:  $\rho_0 = 1[\mu C/m^3]$ ,  $a = 4$ , y  $b = 2$  son constantes positivas y  $r$  es la distancia al eje del cilindro. Calcule la magnitud del campo eléctrico en  $r = 1[m]$ .

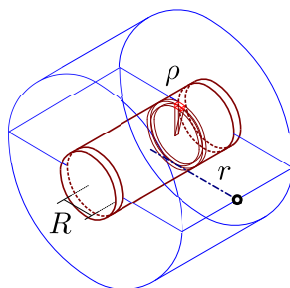
- 19830.51[N/C].
- 18575.46[N/C].
- 17624.33[N/C].
- 16458.29[N/C].

**Solución:**

Usando la ley de *Gauss*:

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Se halla la carga encerrada por la superficie gaussiana  $Q_{enc}$  a partir de la densidad volumétrica:



$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

$$dq = \rho dV$$

$$dq = \rho r d\theta dr dL$$

$$dq = \rho_0 \left( a - \frac{r}{b} \right) r d\theta dr dL$$

$$\int_Q dq = \int \int \int \rho_0 \left( a - \frac{r}{b} \right) r d\theta dr dL$$

$$Q = \rho_0 \int_0^L \int_0^R \int_0^{2\pi} \left( a - \frac{r}{b} \right) r d\theta dr dL = \rho_0 \int_0^L \int_0^R \left( a - \frac{r}{b} \right) r 2\pi dr dL$$

$$Q = 2\pi \rho_0 \int_0^L \int_0^R \left( ar - \frac{r^2}{b} \right) dr dL = 2\pi \rho_0 \int_0^L \left( \frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3b} \right) \Big|_0^R dL$$

$$Q = 2\pi \rho_0 \left( \frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b} \right) \int_0^L dL = 2\pi \rho_0 \left( \frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b} \right) L$$

$$Q = 2\pi \rho_0 L \left( \frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b} \right)$$

Por tanto:

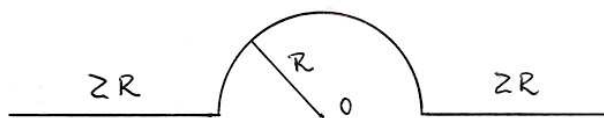
$$E_{\perp} A = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E (2\pi r L) = \frac{1}{\epsilon_0} 2\pi \rho_0 L \left( \frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b} \right)$$

$$E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 r} \left( \frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b} \right) = 19821,1291 [N/C]$$

4. Un alambre con una densidad lineal de carga uniforme igual a  $1[\mu C/m]$ , se dobla como se muestra en la figura. Calcular el potencial eléctrico en el punto 0.

- 43419.92[V].
- 44603.85[V].



- 46371.26[V].
- 48049.36[V].

### Solución:

Se calcula el potencial separando el alambre en tres partes:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Conociendo la ecuación del potencial eléctrico:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r}$$

Para  $V_1$  y  $V_3$ :

Considerando una distribución lineal de carga:

$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$

$$dq = \lambda dx$$

Se calcula el potencial eléctrico:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{3R} \lambda \frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \ln x \right)_R^{3R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (\ln(3R) - \ln(R))$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{3R}{R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \ln(3)$$

Para  $V_3$ :

Considerando una distribución lineal de carga:

$$\lambda = \frac{dq}{ds} = \frac{dq}{R d\theta}$$

$$dq = \lambda R d\theta$$

Se calcula el potencial eléctrico:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \lambda \frac{R d\theta}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \pi$$

Por tanto:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \ln(3) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \pi + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \ln(3)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda (\pi + 2 \ln(3)) = 47982.8963[V]$$

5. Un capacitor de placas paralelas de  $2[nF]$  se carga con una diferencia de potencial de  $100[V]$  y se aísla (desconecta de la batería) a continuación. El material dieléctrico que llevaba entre las placas es mica con una constante dieléctrica de 5. Calcular el trabajo que se requiere para retirar la hoja de mica.

- $38[\mu J]$ .
- $39[\mu J]$ .
- $40[\mu J]$ .
- $41[\mu J]$ .

**Solución:**

La energía almacenada en un capacitor es:

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

De la definición de  $K$  del dieléctrico:

$$K = \frac{C}{C_0}$$

$$V = \frac{V_0}{K}$$

El trabajo requerido es la diferencia de energía del capacitor con y sin el dieléctrico:

$$U = U_0 - U_D = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 - \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{C}{K} \right) (V K)^2 - \frac{1}{2} C V^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{C}{K} \right) V^2 K^2 - \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C V^2 K + \frac{1}{2} C V^2$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 (K - 1) = 4 \times 10^{-5} [J] = 40[\mu J]$$