UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

# FÍSICA BÁSICA II

## Tarea de Investigación

# MOMENTO DE INERCIA

**Estudiante:**
Caballero Burgoa, Carlos Eduardo.

**Docente:**
Ing. Moreira Calizaya, Rene.

**Grupo:** J.
**Fecha de entrega:** 30 de Abril del 2021.

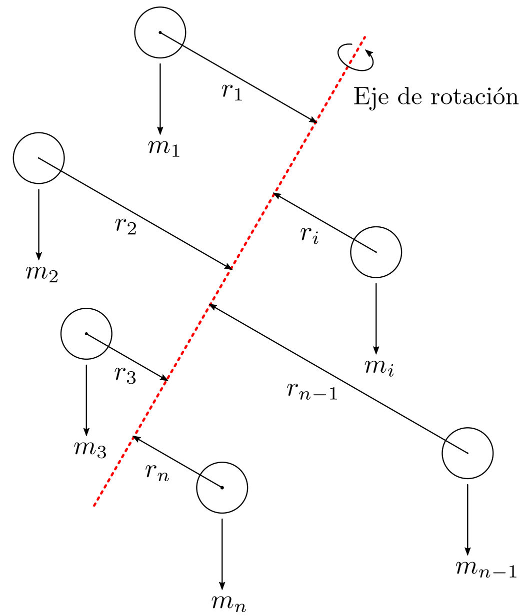



**Figura 1:** Sistema de partículas girando alrededor de un eje.

## 1. Introducción

Cuando se analiza un movimiento traslacional y rectilíneo se considera a la masa del objeto como una medida de su inercia. Por lo tanto, la masa es una medida de la inercia de un cuerpo y es en este sentido, una medida de su resistencia al cambio de velocidad.

Análogamente, al hacer que un objeto sólido rote o se mueva en trayectoria curva, se observa una resistencia al cambio del movimiento rotacional. Esta oposición del objeto al cambio de su rotación se conoce como inercia rotacional o **momento de inercia**. En otras palabras, en el movimiento circular el momento de inercia cumple el mismo rol que la masa juega en el movimiento rectilíneo [1].

## 2. Sistema de partículas[2]

Se tiene un cuerpo formado por un sistema de partículas (véase la **Figura 1**), con masas $m_1$, $m_2$, $m_3$, ..., $m_i$, ..., $m_{n-1}$, $m_n$, a distancias perpendiculares $r_1$, $r_2$, $r_3$, ..., $r_i$, ..., $r_{n-1}$, $r_n$ del eje de rotación.

Cuando este sistema de partículas gira alrededor de un eje fijo, la rapidez $v_i$ de cada partícula esta dada por:

$$v = r\omega$$

Donde $\omega$ es la magnitud de la velocidad angular del sistema de partículas medida en $rad/s$. Cada partícula tiene un $r_i$ diferente, pero todas comparten el mismo valor de $\omega$ (si es que consideramos el sistema de partículas como un cuerpo rígido), por tanto la energía cinética de cada partícula es:

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

La energía cinética total del sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \omega^2 + ... + \frac{1}{2}m_n r_n^2 \omega^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Sacando el factor común $\omega^2/2$ de la expresión, se obtiene:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + ... + m_n r_n^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se denota con $I$, y es el **momento de inercia** del cuerpo para este eje de rotación:

$$I = m_1 r_1^2 + ... + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{1}$$

Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total determinada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia.

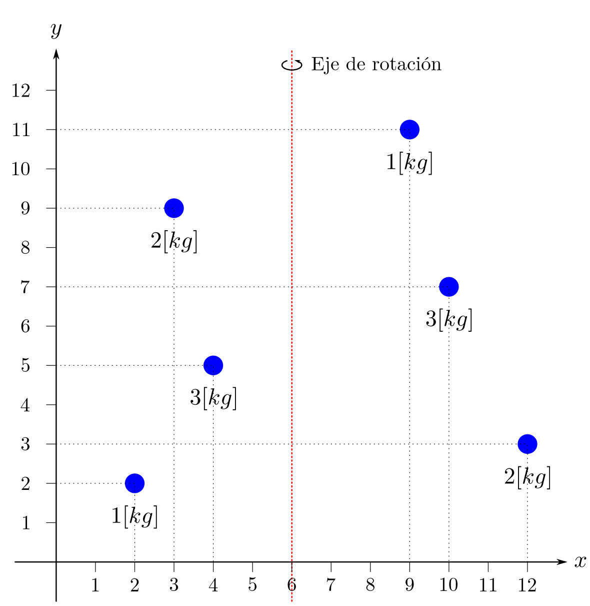
En términos del momento de inercia $I$, la **energía cinética de rotación** $K$ de un cuerpo rígido es:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{2}$$

Entonces, cuanto mayor sea el momento de inercia, mayor será la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una rapidez angular $\omega$. Y sabiendo que la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo efectuado para acelerar ese cuerpo desde el reposo, podemos asumir que cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo, más difícil sera ponerlo a girar si está en reposo, y más difícil será detener su rotación si ya está girando.

**Ejemplo 1**:
Se tiene un sistema de 6 partículas como se muestra en la figura.

a) Calcular el momento de inercia del sistema para el eje de rotación $y = 6$,
b) Calcular la energía cinética rotacional si el sistema gira con una rapidez angular $\omega = 4.0[rad/s]$.



**Solución**:
a) Para calcular el momento de inercia se utilizara la **ecuación (1)**, y se calculará la distancia perpendicular aprovechando que el eje es vertical.

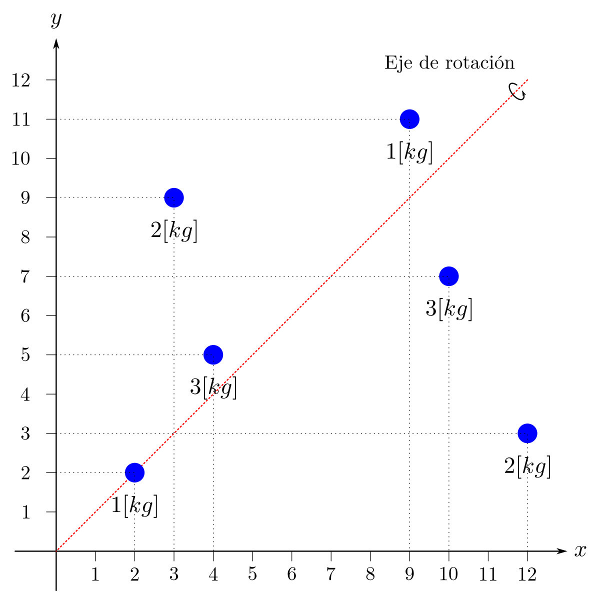
$$I = \sum_{i=1}^{6} m_i r_i^2 = 1(4)^2 + 2(3)^2 + 3(2)^2 + 1(3)^2 + 3(4)^2 + 2(6)^2 = 175[kg\,m^2]$$

b) Una vez calculado el momento de inercia para el eje propuesto, se puede calcular la energía cinética con la **ecuación (2)**:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(175[kg\,m^2]\right)\left(4.0\left[\frac{rad}{s^2}\right]\right) = 350[J]$$

**Ejemplo 2**:
Se tiene el sistema de 6 partículas anteriormente citado como se muestra en la figura.

a) Calcular el momento de inercia del sistema para el eje de rotación $y = x$,
b) Calcular la energía cinética rotacional si el sistema gira con una rapidez angular $\omega = 4.0[rad/s]$.




**Solución**:
a) Para calcular el momento de inercia se utilizará la **ecuación (1)**, y considerando que el eje es diagonal al sistema de referencia, se debe calcular la distancia perpendicular a tal eje:
Ecuación de la recta:

$$x - y = 0$$

Distancia de una recta a un punto:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por tanto:

$$d_1(2,2) = \frac{|1(2) - 1(2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2-2|}{\sqrt{2}} = 0$$

$$d_2(3,9) = \frac{|1(3) - 1(9)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3-9|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$d_3(4,2) = \frac{|1(4) - 1(2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|4-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$d_4(9,11) = \frac{|1(9) - 1(11)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|9-11|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$d_5(10,7) = \frac{|1(10) - 1(7)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|10-7|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$d_6(12,3) = \frac{|1(12) - 1(3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|12-3|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$I = \sum_{i=1}^{6} m_i r_i^2 = 1(0) + 2\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$I = 2\left(\frac{36}{2}\right) + 3\left(\frac{4}{2}\right) + 1\left(\frac{4}{2}\right) + 3\left(\frac{9}{2}\right) + 2\left(\frac{81}{2}\right) = \frac{277}{2}[kg\, m^2]$$

b) Una vez calculado el momento de inercia para el eje propuesto, se puede calcular la energía cinética con la **ecuación (2)**:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{277}{2}[kg\, m^2]\right)\left(4.0\left[\frac{rad}{s^2}\right]\right) = 277[J]$$

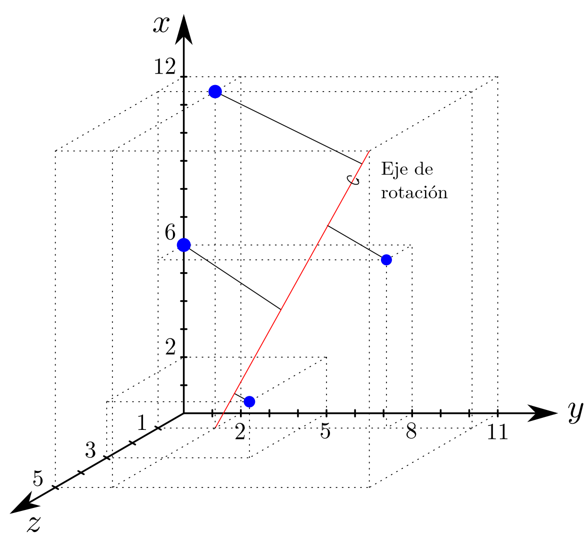
**Ejemplo 3**:
Se tiene el sistema de 4 partículas como se muestra en la figura cuyas masas y posiciones son:

$$m_1 = 1[kg]\ p_1 = (2,5,3)$$

$$m_2 = 2[kg]\ p_2 = (6,0,0)$$

$$m_3 = 3[kg]\ p_3 = (6,8,1)$$

$$m_4 = 4[kg]\ p_4 = (12,2,1)$$




a) Calcular el momento de inercia del sistema para el eje de rotación que pasa por los puntos $A = (0,2,1)$ y $B = (12,11,5)$.
b) Calcular la energía cinética rotacional si el sistema gira con una rapidez angular $\omega = 4.0[rad/s]$.

**Solución**:
a) Para calcular el momento de inercia se utilizará la **ecuación (1)**, y se usaran operaciones vectoriales para facilitar el trabajo con tres dimensiones: Vector posición del eje:

$$\vec{r}_{AB} = B - A = (12,11,5) - (0,2,1) = (12,9,4)$$

Distancia mínima de un punto $P_i$ a la linea de $A$ a $B$:

$$d = |\vec{r}_{AP_i}| \left( \frac{|\vec{r}_{AP_i} \times \vec{r}_{AB}|}{|\vec{r}_{AP_i}||\vec{r}_{AB}|} \right)$$

Por tanto:

$$d_1(2,5,3) = |(2,3,2)| \left( \frac{|(2,3,2) \times (12,9,4)|}{|(2,3,2)||(12,9,4)|} \right) = 1.5988$$

$$d_2(6,0,0) = |(6,-2,-1)| \left( \frac{|(6,-2,-1) \times (12,9,4)|}{|(6,-2,-1)||(12,9,4)|} \right) = 5.5341$$

$$d_3(6,8,1) = |(6,6,0)| \left( \frac{|(6,6,0) \times (12,9,4)|}{|(6,6,0)||(12,9,4)|} \right) = 2.4748$$

$$d_4(12,2,1) = |(12,0,0)| \left( \frac{|(12,0,0) \times (12,9,4)|}{|(12,0,0)||(12,9,4)|} \right) = 7.6130$$

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i r_i^2 = 1(1.5988)^2 + 2(5.5341)^2 + 3(2.4748)^2 + 4(7.6130)^2 = 314.02[kg\, m^2]$$

b) Una vez calculado el momento de inercia para el eje propuesto, se puede calcular la energía cinética con la **ecuación (2)**:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}(314.02[kg\, m^2]) \left( 4.0 \left[ \frac{rad}{s^2} \right] \right) = 628.03[J]$$

## 3. Enunciado

Realizar el desarrollo de la teoria y ejemplos de aplicacion de momentos de inercia. Debe analizar los siguientes casos: 2. Sistema continuo de particulas (solido), analizando distribuciones de masa: 2.1 Lineal 2.2 Superficial 2.3 Volumétrica

## Referencias

[1] Momento de Inercia
Extraído el 21 de Abril del 2021, de:
`https://www.fisic.ch/contenidos/din%C3%A1mica-rotacional/momento-de-inercia/`.

[2] Sears y Zemansky (2013).
Física Universitaria. Volumen 1.
13va Edición.
Capitulo 9: Rotación de cuerpos rígidos.