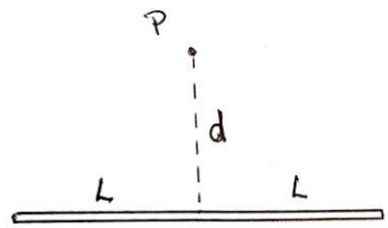
Primer parcial

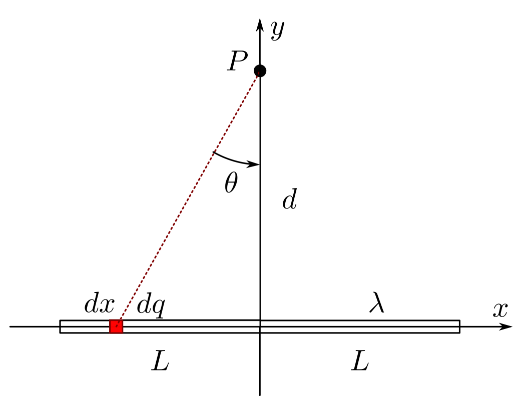
Estudiante: CABALLERO BURGOA, Carlos Eduardo
Carrera: Ingeniería Electromecánica
Correo: cijkb.j@gmail.com

1. Una varilla delgada de longitud $2L$ ($L = 1[m]$) y uniformemente cargada por unidad de longitud ($\lambda = 1[\mu C/m]$), yace a lo largo del eje x, como se muestra en la figura. Calcular el campo eléctrico en el punto P, a una distancia $d = 1[m]$ de la varilla a lo largo de su bisectriz perpendicular.



- $12727.92[N/C]$.
- $11462.36[N/C]$.
- $10354.28[N/C]$.
- $9658.33[N/C]$.

Solución:



Dada la ecuación campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{\vec{r}^2}$$

Y considerando la uniformidad de la carga:

$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$

Entonces:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\lambda dx}{x^2+d^2}\,sen(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dx}{x^2+d^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

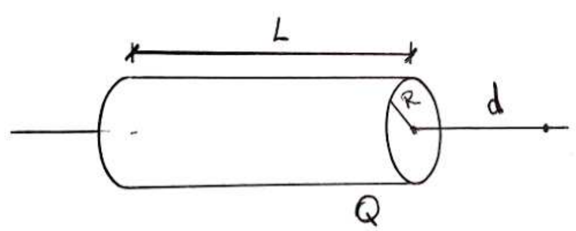
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{x}{(x^2+d^2)^{3/2}}dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}}\bigg|_{-L}^{L}\right) = 0$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\lambda dx}{x^2+d^2}\,cos(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dx}{x^2+d^2}\frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$E_y = \frac{\lambda\, d}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{1}{(x^2+d^2)^{3/2}}dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}\bigg|_{-L}^{L}\right)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{d^2}\frac{L}{\sqrt{L^2+d^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2L\lambda}{d^2\sqrt{L^2+d^2}} = 12710.32[N/C]$$

2. Considere un cilindro hueco con una pared delgada uniformemente cargada con una carga total $Q = 1[\mu C]$, radio $R = 0.1[m]$ y una longitud $L = 1[m]$. Determine el campo eléctrico en un punto del eje a una distancia $d = 0.2[m]$ del lado derecho del cilindro como se muestra en la figura.



- $41326.35[N/C]$.
- $32775.13[N/C]$.
- $25689.22[N/C]$.
- $18567.46[N/C]$.

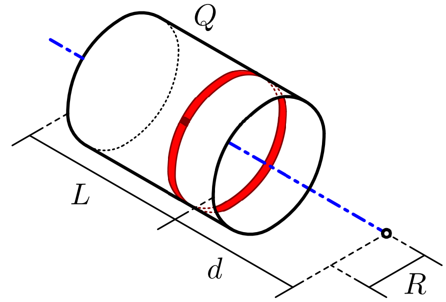
Solución:

Dada la ecuación campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_Q \frac{dq}{\vec{r}^2}$$

Y considerando la uniformidad de la carga:

$$\sigma = \frac{dq}{ds\,dx}$$



Entonces:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_d^{d+L}\int_0^{2\pi\,R}\frac{\sigma\,ds\,dx}{x^2+R^2}\,cos(\theta) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_d^{d+L}\int_0^{2\pi\,R}\frac{ds\,dx}{x^2+R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_d^{d+L}\int_0^{2\pi\,R}\frac{x\,ds\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_d^{d+L}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}dx\int_0^{2\pi\,R}ds$$

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_d^{d+L}\frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}(2\pi\,R) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\int_d^{d+L}\frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\Bigg|_d^{d+L}\right) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{(d+L)^2+R^2}}+\frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)$$

Reemplazando $\sigma = Q/2\pi\,R\,L$, obtenemos:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{L}\left(\frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{(d+L)^2+R^2}}\right) = 32729.7980[N/C]$$

3. Un cilindro aislante de longitud infinita y de radio $R = 0.3[m]$, tiene una densidad de carga volumétrica $\rho = \rho_0(a - r/b)$ que varía en función del radio donde: $\rho_0 = 1[\mu C/m^3]$, $a = 4$, y $b = 2$ son constantes positivas y r es la distancia al eje del cilindro. Calcule la magnitud del campo eléctrico en $r = 1[m]$.

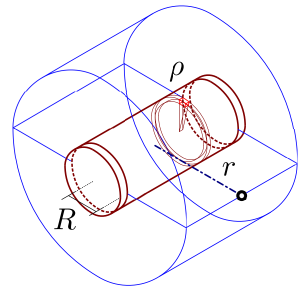
   - $19830.51[N/C]$.
   - $18575.46[N/C]$.
   - $17624.33[N/C]$.
   - $16458.29[N/C]$.

   Solución:

   Usando la ley de *Gauss*:

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

   Se halla la carga encerrada por la superficie gaussiana Q_{enc} a partir de la densidad volumétrica:



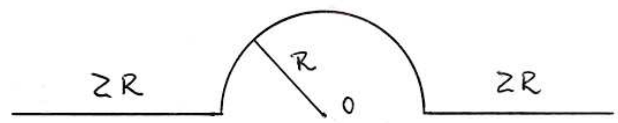
$$\rho = \frac{dq}{dV}$$
$$dq = \rho \, dV$$
$$dq = \rho \, r \, d\theta \, dr \, dL$$
$$dq = \rho_0 \left(a - \frac{r}{b}\right) r \, d\theta \, dr \, dL$$
$$\int_Q dq = \int\int\int \rho_0 \left(a - \frac{r}{b}\right) r \, d\theta \, dr \, dL$$
$$Q = \rho_0 \int_0^L \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(a - \frac{r}{b}\right) r \, d\theta \, dr \, dL = \rho_0 \int_0^L \int_0^R \left(a - \frac{r}{b}\right) r \, 2\pi \, dr \, dL$$
$$Q = 2\pi \, \rho_0 \int_0^L \int_0^R \left(ar - \frac{r^2}{b}\right) dr \, dL = 2\pi \, \rho_0 \int_0^L \left(\frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3b}\right)\Bigg|_0^R dL$$
$$Q = 2\pi \, \rho_0 \left(\frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b}\right) \int_0^L dL = 2\pi \, \rho_0 \left(\frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b}\right) L$$
$$Q = 2\pi \, \rho_0 \, L \left(\frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b}\right)$$

Por tanto:

$$E_{\perp} \, A = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$
$$E \, (2\pi \, r \, L) = \frac{1}{\epsilon_0} 2\pi \, \rho_0 \, L \left(\frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b}\right)$$
$$E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \, r} \left(\frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b}\right) = 19821,1291[N/C]$$

4. Un alambre con una densidad lineal de carga uniforme igual a $1[\mu C/m]$, se dobla como se muestra en la figura. Calcular el potencial eléctrico en el punto 0.

- $43419.92[V]$.
- $44603.85[V]$.



- $46371.26[V]$.
- $48049.36[V]$.

Solución:

Se calcula el potencial separando el alambre en tres partes:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Conociendo la ecuación del potencial eléctrico:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_Q \frac{dq}{r}$$

Para $V1$ y V_3:

Considerando una distribución lineal de carga:

$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$
$$dq = \lambda\, dx$$

Se calcula el potencial eléctrico:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_Q \frac{dq}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_R^{3R} \lambda\frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(lnx\Big|_R^{3R}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}(ln(3R) - ln(R))$$
$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(ln\frac{3R}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\, ln(3)$$

Para $V3$:

Considerando una distribución lineal de carga:

$$\lambda = \frac{dq}{ds} = \frac{dq}{R\,d\theta}$$
$$dq = \lambda\, R\, d\theta$$

Se calcula el potencial eléctrico:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_Q \frac{dq}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi} \lambda\frac{R\,d\theta}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\,\pi$$

Por tanto:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\, ln(3) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\, \pi + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\, ln(3)$$
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda(\pi + 2\, ln(3)) = 47982.8963[V]$$

5. Un capacitor de placas paralelas de $2[nF]$ se carga con una diferencia de potencial de $100[V]$ y se aísla (desconecta de la batería) a continuación. El material dieléctrico que llevaba entre las placas es mica con una constante dieléctrica de 5. Calcular el trabajo que se requiere para retirar la hoja de mica.

   - $38[\mu J]$.
   - $39[\mu J]$.
   - $40[\mu J]$.
   - $41[\mu J]$.

   Solución:

   La energía almacenada en un capacitor es:

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

   De la definición de K del dieléctrico:

$$K = \frac{C}{C_0}$$
$$V = \frac{V_0}{K}$$

   El trabajo requerido es la diferencia de energía del capacitor con y sin el dieléctrico:

$$U = U_0 - U_D = \frac{1}{2}C_0\, V_0^2 - \frac{1}{2}C\, V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{K}\right)(V\, K)^2 - \frac{1}{2}C\, V^2$$
$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{K}\right)V^2\, K^2 - \frac{1}{2}C\, V^2 = \frac{1}{2}C\, V^2\, K + \frac{1}{2}C\, V^2$$
$$U = \frac{1}{2}C\, V^2(K - 1) = 4 \times 10^{-5}[J] = 40[\mu J]$$