Tarea #25

1) Demostrar y/o verificar las ecuaciones:

a) Caso I: Movimiento aperiódico sobre-amortiguado

$$\begin{cases} x_0 = A_1 + A_2 \\ \dot{x}_0 = (\omega_{sa} - b)A_1 - (\omega_{sa} + b)A_2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} A_1 = \dfrac{(\omega_{sa} + b)x_0 + \dot{x}_0}{2\omega_{sa}} \\ \\ A_2 = \dfrac{(\omega_{sa} - b)x_0 - \dot{x}_0}{2\omega_{sa}} \end{cases}$$

b) Caso II: Movimiento aperiódico crítico

$$\begin{cases} x_0 = A_1 \\ \dot{x}_0 = A_2 - A_1 b \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = \dot{x}_0 + x_0 b \end{cases}$$

c) Caso III: Movimiento oscilatorio amortiguado

$$\begin{cases} x_0 = R\, cos(\theta) \\ \dot{x}_0 = -R\,(b\, cos(\theta) - \omega'\, sin(\theta)) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} R = \dfrac{\sqrt{(\omega' x_0)^2 + (\dot{x}_0 + b\, x_0)^2}}{\omega'} \\ \\ cos(\theta) = \dfrac{\omega' x_0}{\sqrt{(\omega' x_0)^2 + (\dot{x}_0 + b\, x_0)^2}} \end{cases}$$

Solución:

(a)

Considerando el sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ (\omega_{sa} - b)A_1 - (\omega_{sa} + b)A_2 = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Y resolviendo por el método de determinantes, obtenemos:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ \dot{x}_0 & -(\omega_{sa}+b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (\omega_{sa}-b) & -(\omega_{sa}+b) \end{vmatrix}} = \frac{-x_0\omega_{sa} - x_0 b - \dot{x}_0}{-\omega_{sa} - b - \omega_{sa} + b} = \frac{-(\omega_{sa}+b)x_0 - \dot{x}_0}{-2\omega_{sa}} = \frac{(\omega_{sa}+b)x_0 + \dot{x}_0}{2\omega_{sa}} \tag{1}$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ (\omega_{sa}-b) & \dot{x}_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (\omega_{sa}-b) & -(\omega_{sa}+b) \end{vmatrix}} = \frac{\dot{x}_0 - x_0\omega_{sa} + x_0 b}{-\omega_{sa} - b - \omega_{sa} + b} = \frac{-(\omega_{sa}-b)x_0 + \dot{x}_0}{-2\omega_{sa}} = \frac{(\omega_{sa}-b)x_0 - \dot{x}_0}{2\omega_{sa}} \tag{2}$$

(b)

Considerando el sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_1 b - A_2 = -\dot{x}_0 \end{cases}$$

Y resolviendo por el método de determinantes, obtenemos:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 0 \\ -\dot{x}_0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-x_0}{-1} = x_0 \tag{3}$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ b & -\dot{x}_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-\dot{x}_0 - x_0 b}{-1} = \dot{x}_0 + x_0 b \tag{4}$$

(c)

Considerando el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} x_0 = R\,cos(\theta) \\ \dot{x}_0 = -R\,(b\,cos(\theta) - \omega'\,sin(\theta)) \end{cases}$$

Despejando R de la primera ecuación:

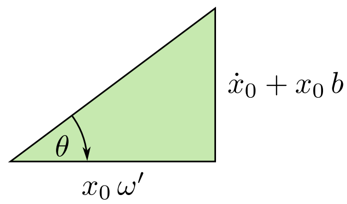
$$R = \frac{x_0}{cos(\theta)}$$

Y reemplazando en la segunda ecuación:

$$\dot{x}_0 = -R\,b\,cos(\theta) + R\,\omega'\,sen(\theta)$$
$$\dot{x}_0 = -\frac{x_0}{cos(\theta)}\,b\,cos(\theta) + \frac{x_0}{cos(\theta)}\,\omega'\,sen(\theta)$$

$$\dot{x}_0 = -x_0\, b + x_0\, \omega' \, \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$$
$$\frac{\dot{x}_0 + x_0\, b}{x_0\, \omega'} = tan(\theta)$$

Considerando el valor de la tangente de θ, podemos formar el siguiente triangulo rectángulo:



Cuyo valor de la hipotenusa es:

$$h^2 = (x_0\, \omega')^2 + (\dot{x}_0 + x_0\, b)^2$$
$$h = \sqrt{(x_0\, \omega')^2 + (\dot{x}_0 + x_0\, b)^2}$$

Por tanto, es posible calcular el valor del coseno:

$$cos(\theta) = \frac{x_0 \omega'}{\sqrt{(x_0\, \omega')^2 + (\dot{x}_0 + x_0\, b)^2}} \tag{5}$$

Despejando R de la primera ecuación, obtenemos:

$$R = \frac{x_0}{cos(\theta)}$$
$$R = x_0\, \frac{\sqrt{(x_0\, \omega')^2 + (\dot{x}_0 + x_0\, b)^2}}{x_0 \omega'}$$
$$R = \frac{\sqrt{(x_0\, \omega')^2 + (\dot{x}_0 + x_0\, b)^2}}{\omega'} \tag{6}$$

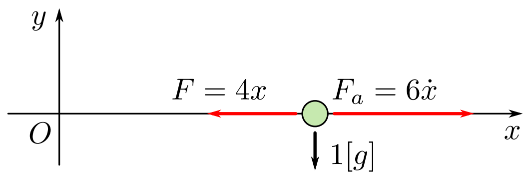
2) Una partícula de masa $1\,[g]$ se mueve a lo largo del eje x bajo la influencia de dos fuerzas: (i) una fuerza de atracción hacia el origen que es numéricamente igual a $4x\,[dinas]$, y (ii) una fuerza de amortiguación cuya magnitud en $dinas$ es numéricamente igual a 6 veces la velocidad instantánea. Suponiendo que la partícula comienza desde el reposo a una distancia de $10\,[cm]$ del origen.

a) Establezca la ecuación diferencial del movimiento de la partícula.

b) Encuentre la posición de la partícula en cualquier momento.

c) Determine la amplitud, periodo y frecuencia de la oscilación amortiguada.

Solución:



(a)

Considerando la segunda ley de *Newton*:

$$\sum F = m\,a$$
$$-F - F_a = m\,a$$
$$-4x - 6\dot{x} = 1\,\ddot{x}$$

Por tanto:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 4x = 0 \tag{7}$$

(b)

Comparando con la ecuación diferencial de un oscilador armónico amortiguado:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Se obtienen el valor de b y ω_0:

$$2b = 6$$
$$b = 3 \tag{8}$$

$$\omega_0^2 = 4$$
$$\omega_0 = 2 \tag{9}$$

Al ser $b > \omega_0$, se considera un movimiento aperiódico sobre-amortiguado (Caso I).
Por tanto:

$$\omega_{sa} = \sqrt{b^2 - \omega_0^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$A_1 = \frac{(\omega_{sa} + b)x_0 + \dot{x}_0}{2\omega_{sa}} = \frac{(\sqrt{5}+3)10 + 0}{2\sqrt{5}} = 11.708$$

$$A_2 = \frac{(\omega_{sa} - b)x_0 - \dot{x}_0}{2\omega_{sa}} = \frac{(\sqrt{5}-3)10 - 0}{2\sqrt{5}} = -1.708$$

Resultando la ecuación de $x(t)$:

$$x(t) = e^{-bt}\left(A_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}t}\right)$$

$$x(t) = e^{-3t}\left(11.708e^{\sqrt{5}t} - 1.708e^{-\sqrt{5}t}\right)$$

$$x(t) = 11.708e^{(-3+\sqrt{5})t} - 1.708e^{(-3-\sqrt{5})t}$$

$$x(t) = 11.708e^{-0.7639t} - 1.708e^{-5.2361t}\,[cm] \tag{10}$$

(c)

Considerando que es un movimiento aperiódico sobre-amortiguado, esta carece de los parámetros ω', T y f.