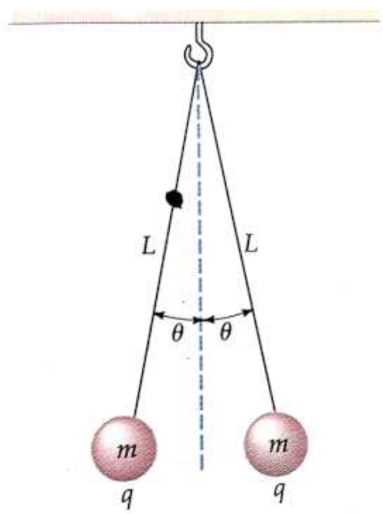
Examen final

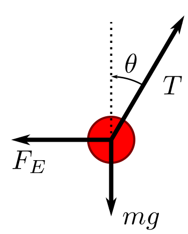
Estudiante: CABALLERO BURGOA, Carlos Eduardo
Carrera: Ingeniería Electromecánica
Correo: cijkb.j@gmail.com

1. Dos pequeñas esferas de masa $m = 10[g]$ están suspendidas de un punto común mediante cuerdas de longitud $L = 50[cm]$. Cuando cada una de las esferas contiene la carga q, cada cuerda forma un ángulo $\theta = 10°$ con la vertical. Calcular la carga q.



- $0.24[\mu C]$.
- $0.29[\mu C]$.
- $0.32[\mu C]$.
- $0.38[\mu C]$.

Solución:



A partir del diagrama de cuerpo libre, sabemos:

$$\begin{cases} T\,cos(\theta) - mg = 0 \\ T\,sen(\theta) - F_E = 0 \end{cases}$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$tan(\theta) = \frac{F_E}{mg}$$

Por la ley de *Coulomb* sabemos:

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

Ademas por propiedades trigonometricas sabemos:

$$sen(\theta) = \frac{r/2}{L}$$
$$r = 2L\, sen(\theta)$$

Juntando todas la ecuaciones:

$$mg\, tan(\theta) = F_E$$
$$mg\, tan(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$
$$q^2 = 4\pi\epsilon_0 r^2 mg\, tan(\theta)$$
$$q = 2r\sqrt{\pi\epsilon_0\, mg\, tan(\theta)}$$
$$q = 2(2Lsen(\theta)\sqrt{\pi\epsilon_0\, mg\, tan(\theta)}$$
$$q = 4L\, sen(\theta)\sqrt{\pi\epsilon_0\, mg\, tan(\theta)}$$
$$q = 4(0.5)\, sen(10°)\sqrt{\pi\epsilon_0\,(0.01)(9.81)\, tan(10°)} = 2.4086\times 10^{-7}[C]$$

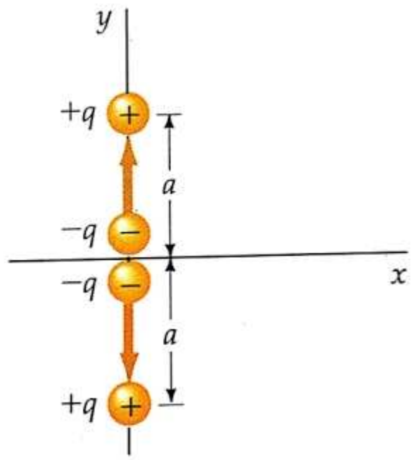
2. Un cuadripolo consta de dos dipolos próximos entre sí. La carga efectiva en el origen es $-2q$ y las otras cargas sobre el eje "y" en $y = a$ e $y = -a$ tienen valores de q. Tomando los valores $q = 1[\mu C]$ y $a = 1[cm]$, hallar el valor del campo eléctrico en un punto sobre el eje x a gran distancia de manera que $x \gg a$.

   - $2.7/x$.
   - $-2.7/x^2$.
   - $2.7/x^3$.
   - $-2.7/x^4$.

   Solución:

   Por la superposición de los campos electricos, tenemos:

$$E_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}\right)\frac{x}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2q}{x^2}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}\right)\frac{x}{r}$$
$$E_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2qx}{r^3}\right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2q}{x^2}\right) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2}\right)$$



$$E_T = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{[(x^2)(\frac{a^2}{x^2}+1)]^{3/2}} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{x^3(\frac{a^2}{x^2}+1)^{3/2}} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$E_T = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x^2\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)^{3/2}} - \frac{1}{x^2}\right] = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 x^2}\left[\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)^{-3/2} - 1\right]$$

Haciendo una aproximación por expansión binomial:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

Por tanto:

$$E_T = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 x^2}\left[\left(1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{a^2}{x^2}\right) - 1\right] = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 x^2}\left(-\frac{3a^2}{2x^2}\right)$$

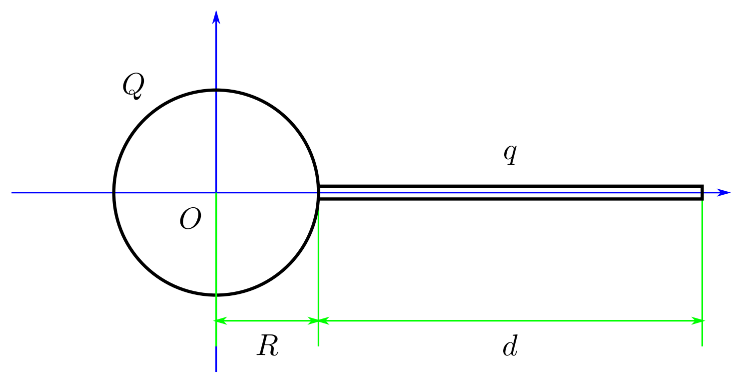
$$E_T = -\frac{3qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^4} = -\frac{3(1\mu)(0.01)^2}{4\pi\epsilon_0 x^4} = -\frac{2.6964}{x^4}$$

3. Una esfera uniformemente cargada de radio $R = 20[cm]$ está centrada en el origen con una carga $Q = 2[mC]$. Determinar la fuerza resultante que actúa sobre una línea uniformemente cargada, orientada radialmente y con una carga total $q = 3[\mu C]$ con sus extremos en $x = R$ y $x = R + d$, donde $d = 10[cm]$.

   - $1350[N]$.
   - $900[N]$.
   - $864[N]$.
   - $600[N]$.

   Solución:

   Sabiendo que la carga de una esfera con radio R y carga Q distribuida de manera uniforme es:



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2};\ r > R$$

Calculando la fuerza ejercida:

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dq$$

Considerando la densidad lineal:

$$\lambda = \frac{dq}{dr}$$
$$dq = \lambda dr$$

Por tanto:

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\lambda dr$$

$$F = \int_R^{R+d}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\lambda dr = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_R^{R+d}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\Bigg|_R^{R+d}\right) = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{R+d}+\frac{1}{R}\right)$$

$$F = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-R+R+d}{R(R+d)}\right) = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{d}{R(R+d)}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{d}\right)\left(\frac{d}{R(R+d)}\right)$$

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R(R+d)}\right) = 898.7552[N]$$

4. Una carga lineal semi-infinita de densidad uniforme $\lambda = 1\times10^{-6}[C/m]$ está sobre el eje x desde $x = 0$ hasta $x = \infty$. Hallar la magnitud del campo eléctrico en el punto $x = 0[m]$, $y = 1[m]$, en números enteros.

   - $12728[N/C]$.
   - $10523[N/C]$.
   - $8645[N/C]$.
   - $6019[N/C]$.

Solución:

5. Cuatro cargas iguales $Q = 1[\mu C]$ se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado $L = 10[cm]$. Las cargas se dejan en libertad de una en una siguiendo el sentido de las agujas del reloj alrededor del cuadrado. Se deja que cada carga alcance su velocidad final a una gran distancia del cuadrado antes de liberar la siguiente carga. Calcular la energía cinética final de la primera carga liberada.

   - $487.28[mJ]$.
   - $243.64[mJ]$.
   - $153.64[mJ]$.
   - $90[mJ]$.

   Solución:

6. Una partícula de masa $m = 1 \times 10^{-9}[kg]$ y carga $Q = 1[\mu C]$ está localizada sobre el eje x en $x = a$ ($a = 50[cm]$), mientras que una segunda partícula de igual masa y carga $-Q$ está localizada sobre el eje x en $x = -a$. Ambas se dejan en libertad en el tiempo $t = 0$. Calcular la magnitud de la velocidad de la partícula cargada positivamente en $x = a/2$.

   - $6000[m/s]$.
   - $5000[m/s]$.
   - $4000[m/s]$.
   - $3000[m/s]$.

   Solución:

7. Dos condensadores idénticos de placas paralelas de $10[\mu F]$ (cada uno) reciben cargas iguales de $100[\mu C]$ cada uno y luego se separan de la fuente de carga. Mediante un cable se conectan sus placas positivas y mediante otro sus placas negativas. Calcular la energía final almacenada en el sistema.

   - $1000[\mu J]$.
   - $832.64[\mu J]$.
   - $616.09[\mu J]$.
   - $476.19[\mu J]$.

   Solución:

8. Un condensador está formado por dos cilindros concéntricos de radios $a = 2[mm]$ y $b = 4[mm]$, siendo su longitud $L = 10[m]$. El cilindro interior posee una carga $Q = 1[\mu C]$ y el cilindro exterior una carga $-Q$. La región comprendida entre los cilindros está llena con un dieléctrico de constante $k = 3$. Si el dieléctrico se desplaza (sin fricción), calcule la energía que se necesita para extraer el dieléctrico.

   - $352,23[\mu J]$.

- $394.37[\mu J]$.
- $415.89[\mu J]$.
- $448.62[\mu J]$.

Solución:

9. El espacio comprendido entre dos cilindros metálicos metálicos coaxiales de longitud $L = 50[cm]$ y radios: $a = 1.5[cm]$ y $b = 2.5[cm]$ se llena totalmente de un material de resistividad igual a $30[\Omega m]$. Determinar la intensidad de corriente entre los dos cilindros si se aplica una diferencia de potencial de $10[V]$ entre éstos.

   - $2.05[A]$.
   - $1.69[A]$.
   - $1.28[A]$.
   - $1.03[A]$.

   Solución:

10. Un disco no conductor de masa M y radio $R = 10[cm]$ tiene una densidad de carga superficial uniforme de $6[\mu C/m^2]$ y gira con una velocidad angular de $360[rpm]$ alrededor de su eje. Calcular el momento magnético de la carga total del disco.

    - $45.24[pAm^2]$.
    - $41.08[pAm^2]$.
    - $38.45[pAm^2]$.
    - $33.33[pAm^2]$.

    Solución: