Informe 3: Péndulo simple

Carlos Eduardo Caballero Burgoa
200201226@est.umss.edu

11 de mayo de 2021

Grupo: J2
Docente: Ing. Milka Mónica Torrico Troche
Carrera: Ing. Electromecánica

Resumen

Este documento detalla el experimento realizado en simulador para hallar la relación funcional entre el periodo de oscilación (T) y la longitud (L) de un péndulo simple, además de calcular el valor de la aceleración de la gravedad; para esto se realizó dos mediciones de 10 oscilaciones de un péndulo con una longitud determinada; y posteriormente se calcula la relación funcional después de linealizar la curva y ajustarla con el método de mínimos cuadrados, finalmente se determinó el valor de la gravedad, resultando ser igual a: $g = (9.85 \pm 0.03)[m/s^2]; 0.33\,\%$.

1. Introducción

Un péndulo simple es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de una cuerda no expansible y de masa despreciable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio vertical descendente, oscilará alrededor de dicha posición [1].

En la **Figura 1** se detallan las fuerzas que actúan sobre la masa (m) en cualquier instante del movimiento, estas fuerzas son: La tensión (F) de la cuerda y la fuerza de gravedad (mg), que se descompone en función del ángulo desplazado (θ), en una componente normal ($mg\,cos\,\theta$) y una componente tangencial ($mg\,sen\,\theta$) [2].

Aplicando la segunda ley de *Newton* en la dirección tangencial, se obtiene:

$$-mg\,sen\,(\theta) = m\,a_t$$

La aceleración en la dirección tangencial es:

$$a_t = \frac{d^2S}{dt^2}$$

Donde S es la longitud del arco o trayectoria circular, cuya relación con el ángulo θ y la longitud de la cuerda L es:

$$S = \theta\,L$$

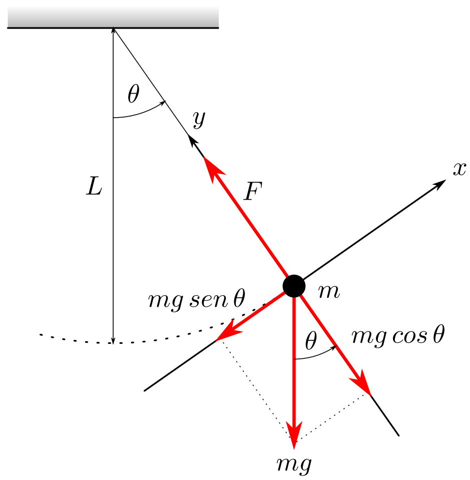

Figura 1: Péndulo simple idealizado.
Nota: Física Universitaria Volumen I (p. 454),
Young, Hugh D. y Freedman, Roger A., 2013, Pearson.

Por tanto:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\,(\theta) = 0$$

Si se consideran tan solo oscilaciones de pequeña amplitud, de modo que el ángulo θ sea siempre suficientemente pequeño, entonces el valor del $sen\,(\theta)$ será muy próximo al valor de θ expresado en radianes ($sen\,(\theta) \cong \theta$, para θ suficientemente pequeño), como se aprecia en el **Cuadro 1** [3].

$\theta[°]$	$\theta[rad]$	$sen\,(\theta)$	diferencia (%)	$\theta[°]$	$\theta[rad]$	$sen\,(\theta)$	diferencia (%)
0	0.00000	0.00000	0.00	15	0.26180	0.25882	1.15
2	0.03491	0.03490	0.02	20	0.34907	0.34202	2.06
5	0.08727	0.08716	0.13	25	0.43633	0.42262	3.25
10	0.17453	0.17365	0.51	30	0.52360	0.50000	4.72

Cuadro 1: Comparación entre el valor del ángulo y su función seno.
Nota: Adaptado de péndulo simple (Wikipedia).

La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

La ecuación anterior corresponde a un **oscilador armónico simple** cuya solución general es:

$$\theta(t) = A\,cos\,(\omega\,t + \phi)$$

Donde A representa el máximo desplazamiento angular de θ, ω es la frecuencia angular, y ϕ el desfase. Tanto la magnitud A, como ϕ son dos constantes determinadas por las condiciones iniciales.

La frecuencia angular (ω) esta determinado por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Considerando que $\omega = 2\pi/T$, el periodo de oscilación para el péndulo simple es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L} \tag{1}$$

Para el experimento se verificará la **Ecuación 1**. A partir de una longitud de cuerda establecida (L), se medirá el tiempo de oscilación del péndulo para hallar el periodo (T). Finalmente se determinará el valor de la gravedad (g) despejándola de la misma ecuación.

2. Método experimental

Para la realización del experimento, se emplea el simulador de péndulo simple de *PHET*, ubicado en la dirección web: `https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_es.html`, tal como presenta en la **Figura 2**.

Para el simulador se escoge un valor de longitud (L), que se mantendrá constante durante la medición, y se registrarán 2 veces la cantidad de tiempo que requiere el péndulo para hacer 10 oscilaciones completas. Todas las mediciones con una inclinación de 8°.

Una vez medidos los datos para 10 valores distintos de longitud (L), se procederá a calcular el periodo (T) con la siguiente ecuación:

$$T = \frac{\bar{t}}{10} \tag{2}$$

Donde $\bar{t}$, es el promedio de las mediciones realizadas.

Luego se procederá a graficar la relación longitud (L) vs. periodo (T), para realizar primeramente la linealización de la curva por logaritmos, y luego el calculo de la recta por el método de los mínimos cuadrados, posteriormente hallar la relación funcional entre las variables.

Finalizando con el calculo del valor de la gravedad, a partir de la **Ecuación 1**:

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

Donde a es uno de los parámetros de la curva hallada.

Despejando g, se obtiene:

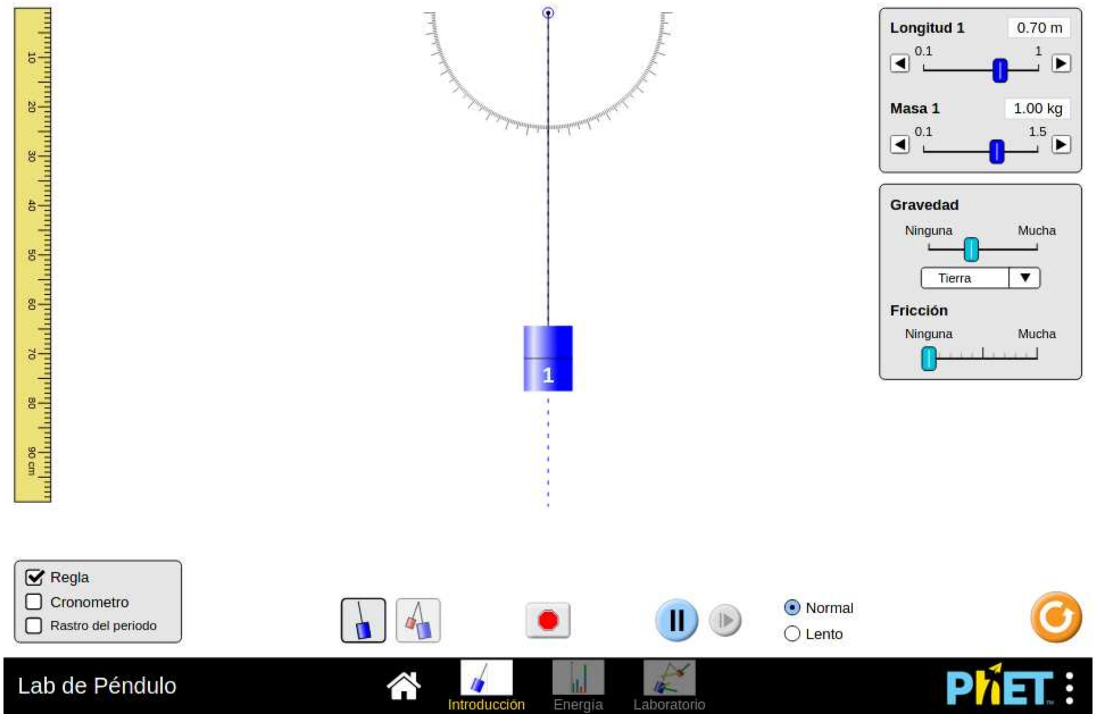

Figura 2: Simulador de péndulo simple.
Nota: Fotografía propia.

$$g = \frac{4\pi^2}{a^2} \tag{3}$$

Datos tomados en el experimento:

En el **Cuadro 2**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto la longitud como el tiempo de 10 oscilaciones tomados 2 veces, además del valor del periodo resultante.

3. Resultados

A partir de los datos obtenidos se calculó el periodo de oscilación (T) para los valores de longitud (L), con los que se generó la gráfica de la **Figura 3**.

Posteriormente se linealizó la curva por medio de logaritmos, y se calculó la recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores:

$$A = (0.694 \pm 0.001)[u]; 0.23\,\%$$

$$B = (0.502 \pm 0.005)[u]; 0.98\,\%$$

Siendo su coeficiente de correlación (r):

i	$L_i[m]$	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	$T_i[s]$
1	0.55	14.85	14.81	1.4830
2	0.60	15.42	15.45	1.5435
3	0.65	16.09	16.14	1.6115
4	0.70	16.88	16.76	1.6820
5	0.75	17.35	17.37	1.7360
6	0.80	17.87	17.92	1.7895
7	0.85	18.37	18.41	1.8390
8	0.90	19.01	18.94	1.8975
9	0.95	19.53	19.62	1.9575
10	1.00	20.02	19.92	1.9970

Cuadro 2: Mediciones de tiempo en función de la longitud del péndulo.
Nota: Elaboración propia.

$$r = 0.9996$$

Con los valores hallados, se calculan los valores originales de la curva, resultando:

$$a = (2.002 \pm 0.003)[s/\sqrt{m}]; 0.16\,\%$$
$$b = (0.502 \pm 0.005)[u]; 0.98\,\%$$

Resultando el modelo de ajuste:

$$T = 2.002\,L^{0.502}$$

Por tanto la relación funcional entre T y L, es:

$$T \propto \sqrt{L}$$

Verificándose el comportamiento establecido por la **Ecuación 1**.
Para el calculo de la gravedad (g) se utiliza la **Ecuación 3**, resultando:

$$g = (9.85 \pm 0.03)[m/s^2]; 0.33\,\%$$

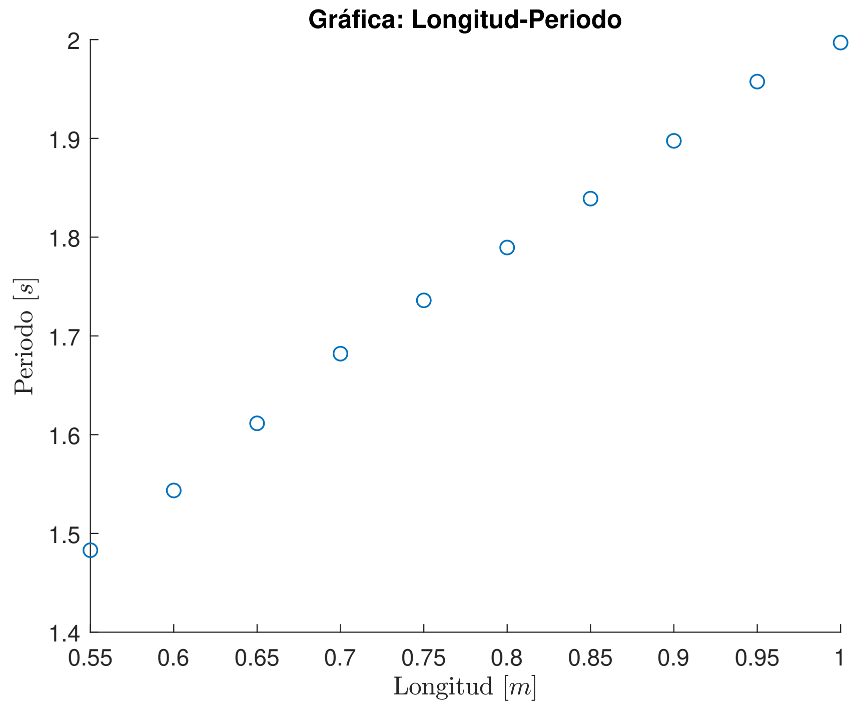

Figura 3: Gráfica de longitud vs periodo.
Nota: Elaboración propia.

4. Discusión

Si se calculase la relación lineal entre la longitud (L) y el periodo (T) directamente desde sus valores sin linealización previa, se obtienen los siguientes valores de la recta:

$$A = (0.86 \pm 0.02)[s]; 2.08\,\%$$
$$B = (1.15 \pm 0.02)[s/\sqrt{m}]; 1.98\,\%$$

Siendo su coeficiente de correlación (r):

$$r = 0.9984$$

Considerando la correlación hallada, podría cometerse el error de presuponer una relación lineal entre las variables. Esto se debe a que los datos tomados se encuentran en una zona de la curva (que es una parábola) donde la curvatura es muy alta ($[0.55, 1.00]$).

Se recomienda tener datos más dispersos para evitar una posible confusión de este tipo.

5. Conclusiones

Se confirmaron las ecuaciones planteadas en la introducción, así como la ecuación de un oscilador armónico simple.

También se calculó el valor de la gravedad, siendo equivalente al valor establecido en el simulador.

Referencias

[1] Young, Hugh D. y Freedman, Roger A. (2013).
Física Universitaria. Volumen 1.
13va Edición.
Capitulo 14.

[2] Departamento de Física - UMSS.
Laboratorio de Física Básica II.
Guía - Cartilla de laboratorio.
Gestión I/2020.

[3] Péndulo simple
Extraído el 27 de Abril del 2021, de:
`https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_simple`.

Apéndice: Cálculos adicionales

5.1. Linealización de la curva

Conociendo t_{1i}, t_{2i}, se calculan los valores del promedio ($\bar{t}$), y el periodo de oscilación (T) en el **Cuadro 3**.

i	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	$\bar{t}_i[s]$	$T_i[s]$
1	14.85	14.81	14.8300	1.4830
2	15.42	15.45	15.4350	1.5435
3	16.09	16.14	16.1150	1.6115
4	16.88	16.76	16.8200	1.6820
5	17.35	17.37	17.3600	1.7360
6	17.87	17.92	17.8950	1.7895
7	18.37	18.41	18.3900	1.8390
8	19.01	18.94	18.9750	1.8975
9	19.53	19.62	19.5750	1.9575
10	20.02	19.92	19.9700	1.9970

Cuadro 3: Calculo del periodo de oscilación.
Nota: Elaboración propia.

En el **Cuadro 4**, se detallan los valores logaritmizados de T y L:

i	$ln(L_i)$	$ln(T_i)$
1	-0.5978	0.3941
2	-0.5108	0.4341
3	-0.4308	0.4772
4	-0.3567	0.5200
5	-0.2877	0.5516
6	-0.2231	0.5819
7	-0.1625	0.6092
8	-0.1054	0.6405
9	-0.0513	0.6717
10	0	0.6916

Cuadro 4: Valores logaritmizados de L y T.
Nota: Elaboración propia.

Los valores del **Cuadro 4**, pueden verse gráficamente en la **Figura 4**.

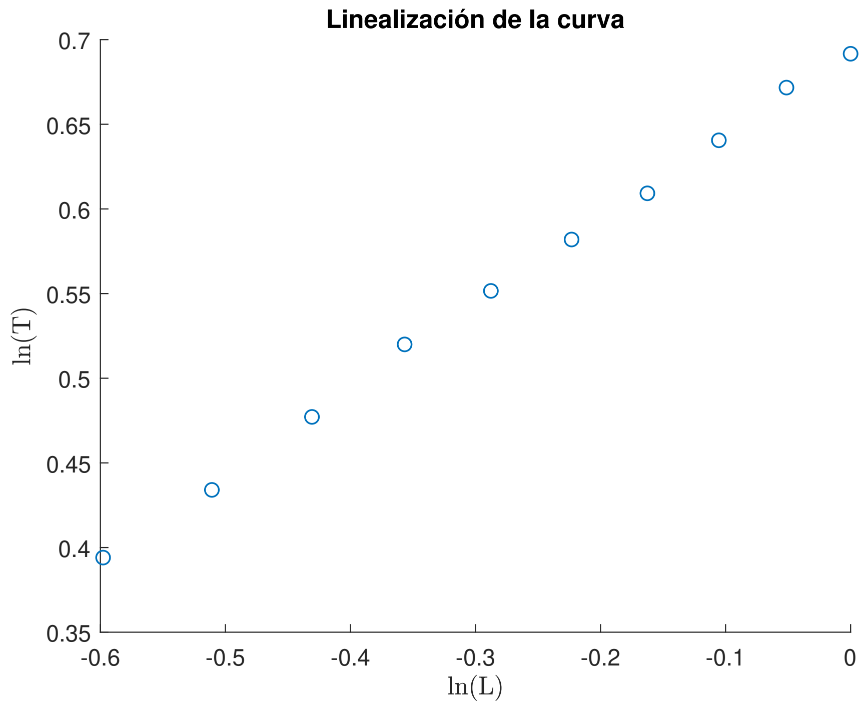

Figura 4: Gráfica de $ln(L)$ vs. $ln(T)$.
Nota: Elaboración propia.

5.2. Método de mínimos cuadrados

Se calculan los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados, con la ayuda de los datos presentados en el **Cuadro 5**.

i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2	Y_i	d_i	$d_i^2\ (10^{-4})$
1	-0.2356	0.3574	0.1553	0.3938	0.0002	0.0005
2	-0.2217	0.2609	0.1884	0.4375	-0.0035	0.1222
3	-0.2056	0.1856	0.2277	0.4777	-0.0006	0.0034
4	-0.1855	0.1272	0.2704	0.5150	0.0050	0.2516
5	-0.1587	0.0828	0.3042	0.5496	0.0020	0.0387
6	-0.1299	0.0498	0.3386	0.5820	-0.0001	0.0001
7	-0.0990	0.0264	0.3712	0.6125	-0.0033	0.1060
8	-0.0675	0.0111	0.4103	0.6412	-0.0006	0.0042
9	-0.0345	0.0026	0.4511	0.6683	0.0033	0.1109
10	0	0	0.4784	0.6941	-0.0025	0.0602

Cuadro 5: Valores para el método de mínimos cuadrados.
Nota: Elaboración propia.

$$n = 10$$
$$\sum x_i = -2.7261$$
$$\sum y_i = 5.5719$$
$$\sum x_i^2 = 1.1038$$
$$\sum y_i^2 = 3.1956$$
$$\sum x_i y_i = -1.3378$$
$$\Delta_1 = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = 3.6067$$
$$\Delta_2 = n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2 = 0.9104$$
$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta_1} = 0.6941$$
$$B = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta_1} = 0.5022$$
$$\sum d^2 = 6.9772 \times 10^{-5}$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n-2} = 8.7215 \times 10^{-6}$$
$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta_1}} = 0.0016$$
$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta_1}} = 0.0049$$

Parámetros de la recta obtenida:

$$A = (0.6941 \pm 0.0016)[u]; 0.2354\,\%$$
$$B = (0.5022 \pm 0.0049)[u]; 0.9791\,\%$$

Siendo el coeficiente de correlación:

$$R = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} = 0.9996$$

La ecuación de la recta resultante es:

$$y = 0.6941 + 0.5022\,x$$

A partir de los parámetros de recta A y B, se calculan los parámetros a y b de la curva original y sus errores por el método de propagación de errores:

$$a = e^A = e^{0.6941} = 2.0019$$
$$b = B = 0.5022$$
$$e_a = e^A e_A = e^{0.6941}\,(0.0016) = 0.0033$$
$$e_b = e_B = 0.0049$$

Obteniendo finalmente los valores de la curva:

$$a = (2.0019 \pm 0.0033)[s/\sqrt{m}]; 0.1634\,\%$$
$$b = (0.5022 \pm 0.0049)[u]; 0.9791\,\%$$

La ecuación de la curva resultante es:

$$T = aL^b = 2.0019\,d^{0.5022} = 2.0019\,\sqrt{d}$$