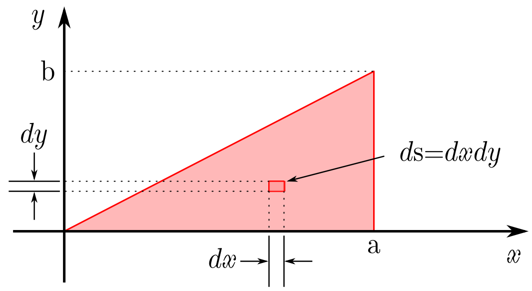
Tarea #8

Calcular el centro de masa de una lámina triangular de densidad superficial uniforme.



Solución:

Dada la ecuación del centro de masa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r} \cdot dm \tag{1}$$

Asumiendo la distribución homogénea de la masa sobre el material:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = ctte$$

Por tanto:

$$dm = \sigma \cdot ds = \sigma \cdot dx \cdot dy \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^M \vec{r} \cdot \sigma \cdot ds$$

Reemplazando $\vec{r}$ por sus componentes:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^S (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \cdot \sigma \cdot ds = \frac{\sigma}{M}\int_0^a \int_0^y (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \cdot dx \cdot dy$$

Sabiendo que la relación entre x y y es:

$$y = \frac{b}{a}x$$

Para $\hat{\imath}$ obtenemos:

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M}\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} x \cdot dy \cdot dx = \frac{\sigma}{M}\int_0^a x \left(\int_0^{\frac{b}{a}x} dy\right) dx = \frac{\sigma}{M}\int_0^a x \cdot y\Big|_0^{\frac{b}{a}x} dx$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right) dx = \frac{\sigma}{M}\int_0^a \frac{b}{a}x^2 dx = \frac{\sigma}{M}\frac{b}{a}\int_0^a x^2 dx$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma}{M}\frac{b}{a}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{\sigma}{M}\left(\frac{b}{a}\frac{a^3}{3}\right) = \frac{\sigma}{M}\left(\frac{a^2 b}{3}\right)$$

Para $\hat{j}$ obtenemos:

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} y \cdot dy \cdot dx = \frac{\sigma}{M} \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}x} y \cdot dy \right) dx = \frac{\sigma}{M} \int_0^a \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\frac{b}{a}x} dx$$

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M} \int_0^a \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} x^2 dx = \frac{\sigma}{M} \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \int_0^a x^2 dx$$

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{M} \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^a = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \frac{a^3}{3} \right) = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{ab^2}{6} \right)$$

Uniendo ambas componentes, obtenemos:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{a^2 b}{3} \right) \hat{i} + \frac{\sigma}{M} \left(\frac{ab^2}{6} \right) \hat{j} \tag{3}$$

A partir de la ecuación (2) sabemos que:

$$M = \sigma \cdot s = \sigma \frac{a \cdot b}{2}$$

Despejando M de la ecuación (3), obtenemos:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{2a}{3} \hat{i} + \frac{b}{3} \hat{j}$$