Tarea #15

Si $x = A \cdot cos(\omega t - \pi/2)$ representa la ecuación de posición de un oscilador armónico simple.

a) Calcular la velocidad, aceleración, energía cinética, energía potencial y la energía total en función del tiempo.

b) Calcular la velocidad, aceleración, energía cinética, energía potencial y la energía total para $x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$.

Solución:

(a)

$$x = A \cdot cos(\omega t - \pi/2) \tag{1}$$

Derivando la posición, obtenemos la velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot (-sen(\omega t - \pi/2))(\omega)$$
$$v = -A\omega \cdot sen(\omega t - \pi/2) \tag{2}$$

Derivando la velocidad, obtenemos la aceleración:

$$\frac{dv}{dt} = -A\omega \cdot (cos(\omega t - \pi/2))(\omega)$$
$$a = -A\omega^2 \cdot cos(\omega t - \pi/2) \tag{3}$$

Para la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-A\omega \cdot sen(\omega t - \pi/2))^2$$
$$T = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2(\omega t - \pi/2) \tag{4}$$

Para la energía potencial:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(A \cdot cos(\omega t - \pi/2))^2 = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t - \pi/2)$$
$$U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2cos^2(\omega t - \pi/2) \tag{5}$$

Para la energía total:

$$T + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2(\omega t - \pi/2) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2cos^2(\omega t - \pi/2)$$
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2(sen^2(\omega t - \pi/2) + cos^2(\omega t - \pi/2))$$
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \tag{6}$$

(b)

Siendo:

$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

entonces:

$$A \cdot cos(\omega t - \pi/2) = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$cos(\omega t - \pi/2) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega t - \pi/2 = arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\omega t - \frac{\pi}{2} = arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Para la velocidad:

$$v = -A\omega \cdot sen(\omega t - \pi/2) = -A\omega \cdot sen\left(arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$v = -A\omega\sqrt{1 - \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -A\omega\sqrt{1 - \frac{1}{2}}$$

$$v = -A\omega\sqrt{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Para la aceleración:

$$a = -A\omega^2 \cdot cos(\omega t - \pi/2) = -A\omega^2 \cdot cos\left(arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$a = \mp\frac{A\omega^2}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

Para la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2(\omega t - \pi/2) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2\left(arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$T = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sqrt{1 - \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$T = \frac{1}{4}mA^2\omega^2 \tag{10}$$

Para la energía potencial:

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2cos^2(\omega t - \pi/2) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2cos^2\left(arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$U = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 \tag{11}$$

Para la energía total:

$$\begin{aligned} T + U &= \frac{1}{4} m A^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 \\ E &= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \end{aligned} \tag{12}$$