

Informe 7: Efecto *Doppler*

Carlos Eduardo Caballero Burgoa

200201226@est.umss.edu

23 de junio de 2021

Grupo: J2 (Miércoles)

Docente: Ing. Milka Mónica Torrico Troche

Carrera: Ing. Electromecánica

Resumen

Este documento detalla el experimento realizado en simulador para hallar la relación funcional entre los diferentes casos posibles del efecto *Doppler*, además del hallar el valor de la velocidad del sonido en el medio; para esto se realizó la medición de las velocidades y frecuencias, tanto de un emisor de onda sonora como de un receptor; posteriormente se calculó las relaciones funcionales con el método de mínimos cuadrados y finalmente se determinó el valor de la velocidad del sonido, resultando ser: $343[m/s]$.

1. Introducción

Cuando un emisor y un receptor de ondas sonoras están en movimiento relativo con respecto al medio en el cual se propagan (**Figura 1**), la frecuencia de las ondas recibidas es diferente de la frecuencia de las ondas emitidas. Este fenómeno, descrito por primera vez por el científico austriaco del siglo XIX *Christian Doppler* [1].

Para analizar ese fenómeno, solo se considerará el caso especial en que las velocidades del emisor y el receptor se encuentran a lo largo de la línea que los une.

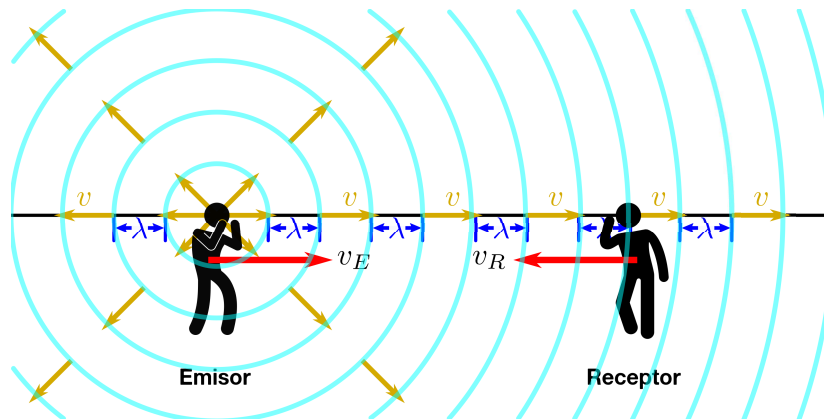


Figura 1: Emisor de sonido y receptor en movimiento relativo.
Nota: Elaboración propia.

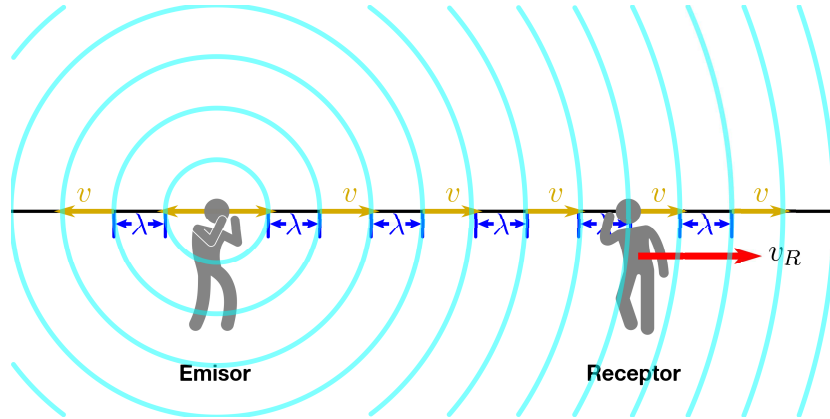


Figura 2: Receptor en movimiento y emisor estacionario.

Nota: Elaboración propia.

Se consideran tres posibles casos.

1.1. Receptor en movimiento y emisor estacionario

Sea un receptor (R) que se mueve con velocidad (v_R) alejándose de un emisor estacionario (E) como en la **Figura 2**. El emisor emite una onda sonora con frecuencia (f_E) y longitud de onda ($\lambda = v/f_E$).

La rapidez de la onda sonora se acerca al receptor en movimiento con una rapidez de propagación relativa igual a: $(v - v_R)$.

Por tanto la frecuencia que el receptor capta es:

$$f_R = \frac{v - v_R}{\lambda} = \frac{v - v_R}{v/f_E} = \left(\frac{v - v_R}{v} \right) f_E$$

$$f_R = \left(1 - \frac{v_R}{v} \right) f_E \quad (1)$$

Desarrollando la ecuación, se obtiene:

$$f_R = f_E - \frac{f_E}{v} v_R \quad (2)$$

Por tanto, un receptor que se mueve hacia un emisor ($v_R < 0$) percibe una frecuencia más alta (tono más agudo) que el emitido. Y un receptor que se aleja del emisor ($v_R > 0$) percibe una frecuencia más baja (tono más grave).

1.2. Emisor en movimiento y receptor estacionario

Sea un emisor (E) que se mueve con velocidad (v_E) hacia un receptor estacionario (R) como en la **Figura 3**. La rapidez de la onda relativa al medio sigue siendo (v); que no cambia por el movimiento del emisor.

La longitud de onda ya no es igual a: v/f_E , y varía tanto por delante del movimiento, como por detrás de él.

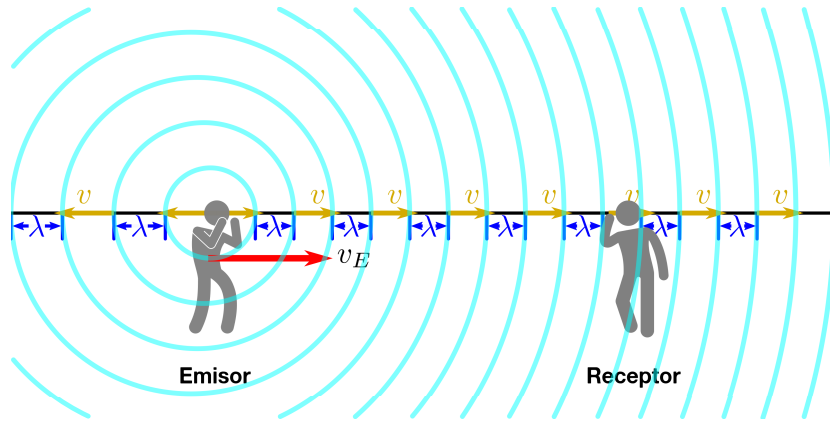


Figura 3: Emisor en movimiento y receptor estacionario.

Nota: Elaboración propia.

$$\lambda_{\text{delante}} = \frac{v - v_E}{f_E}$$

$$\lambda_{\text{detrás}} = \frac{v + v_E}{f_E}$$

Las ondas adelante y atrás del emisor se comprimen y se estiran respectivamente por el movimiento.

Por tanto la frecuencia que el receptor capta es:

$$f_R = \frac{v}{\lambda_{\text{delante}}}$$

$$f_R = \left(\frac{v}{v - v_E} \right) f_E \quad (3)$$

Desarrollando la ecuación, se obtiene:

$$(v - v_E) f_R = v f_E$$

$$v f_R - v_E f_R - v f_E = 0$$

$$(v_E f_R) = v (f_R - f_E) \quad (4)$$

1.3. Emisor en movimiento y receptor en movimiento

Para el caso en que el emisor (E) y el receptor (R) están en movimiento, se combinan ambas consideraciones hechas en los casos anteriores.

Por tanto la frecuencia que el receptor capta es:

$$f_R = \left(\frac{v - v_R}{v - v_E} \right) f_E \quad (5)$$

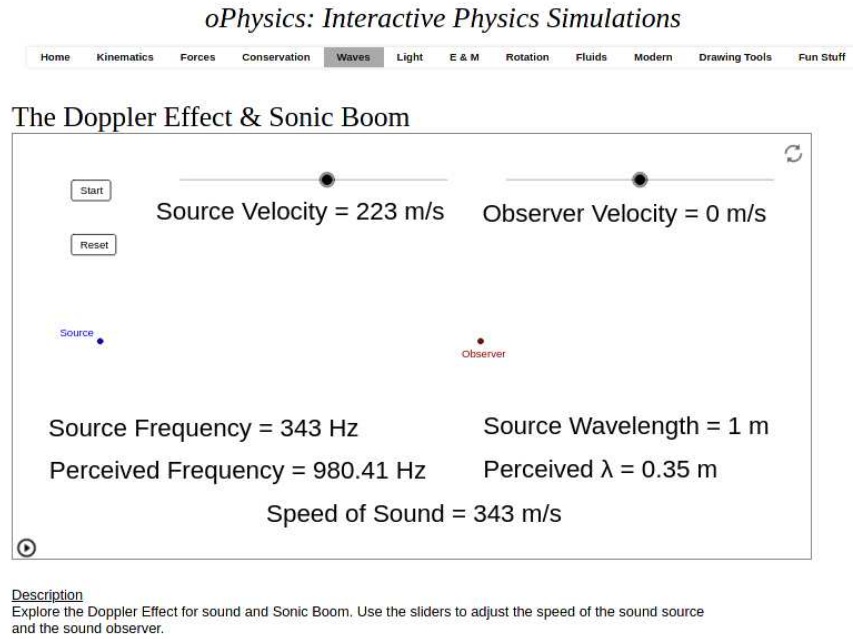


Figura 4: Simulador de efecto *Doppler*.

Nota: Captura propia.

Desarrollando la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (v - v_E) f_R &= (v - v_R) f_E \\
 v f_R - v_E f_R &= v f_E - v_R f_E \\
 v_R f_E - v_E f_R &= v f_E - v f_R \\
 (v_R f_E - v_E f_R) &= v (f_E - f_R)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Para el experimento se verificará las relaciones funcionales descritas en las **Ecuaciones 2, 4 y 6**, midiendo los valores de velocidad del emisor (v_E), velocidad del receptor (v_R), además de la frecuencia emitida (f_E), y la frecuencia percibida (f_R).

Posteriormente se despejará en cada ecuación, el valor de la velocidad del sonido en el medio utilizado.

2. Método experimental

Para la realización del experimento, se emplea el simulador «*oPhysics: Interactive Physics Simulations*», ubicado en la dirección web: <https://ophysics.com/w11.html>, tal como se presenta en la **Figura 4**.

2.1. Receptor en movimiento y emisor estacionario

Se registrarán los valores de frecuencia percibida (f_R), para diferentes valores de velocidad del receptor (v_R).

Una vez registrados los datos, se procederá a graficar la relación (v_R vs. f_R), y con la ayuda del método de los mínimos cuadrados, se hallará la relación funcional entre las variables.

Finalizando con el calculo del valor de la velocidad del sonido (v), a partir de la **Ecuación 2**:

$$B = -\frac{f_E}{v}$$

Despejando v , se obtiene:

$$v = -\frac{f_E}{B} \quad (7)$$

Datos necesarios para el experimento:

Frecuencia sonora emitida:

$$f_E = 343[Hz]$$

Datos tomados en el experimento:

En el **Cuadro 1**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto la velocidad del receptor (v_R) como la frecuencia percibida (f_R).

i	$v_R[m/s]$	$f_R[Hz]$
1	-100	443
2	-80	423
3	-60	403
4	-40	383
5	-20	363
6	0	343
7	20	323
8	40	303
9	60	283
10	80	263
11	100	243

Cuadro 1: Mediciones de la frecuencia percibida por un receptor con un emisor estacionario.

Nota: Elaboración propia.

2.2. Emisor en movimiento y receptor estacionario

Se registrarán los valores de frecuencia percibida (f_R), para diferentes valores de velocidad de emisor (v_E).

Una vez registrados los datos, se procederá a graficar la relación $((f_R - f_E) \text{ vs. } (v_E f_R))$, con la ayuda del método de los mínimos cuadrados, se hallará la relación entre las variables.

Finalizando con el calculo del valor de la velocidad del sonido (v), a partir de la **Ecuación 4**:

$$B = v \quad (8)$$

Datos necesarios para el experimento:

Frecuencia sonora emitida:

$$f_E = 343[\text{Hz}]$$

Datos tomados en el experimento:

En el **Cuadro 2**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto la velocidad del emisor (v_E) como la frecuencia percibida (f_R).

i	$v_E[m/s]$	$f_R[\text{Hz}]$	$f_R - f_E$	$v_E f_R (1 \times 10^4)$
1	-100	265.57	-77.4300	-2.6557
2	-80	278.13	-64.8700	-2.2250
3	-60	291.93	-51.0700	-1.7516
4	-40	307.18	-35.8200	-1.2287
5	-20	324.10	-18.9000	-0.6482
6	0	343.00	0	0
7	20	364.24	21.2400	0.7285
8	40	388.28	45.2800	1.5531
9	60	415.72	72.7200	2.4943
10	80	447.33	104.3300	3.5786
11	100	484.15	141.1500	4.8415

Cuadro 2: Mediciones de la frecuencia percibida por un receptor estacionario con un emisor en movimiento.

Nota: Elaboración propia.

2.3. Emisor en movimiento y receptor en movimiento

Se registrarán los valores de frecuencia percibida (f_R), para diferentes valores de velocidad de emisor (v_E) y velocidad del receptor (v_R).

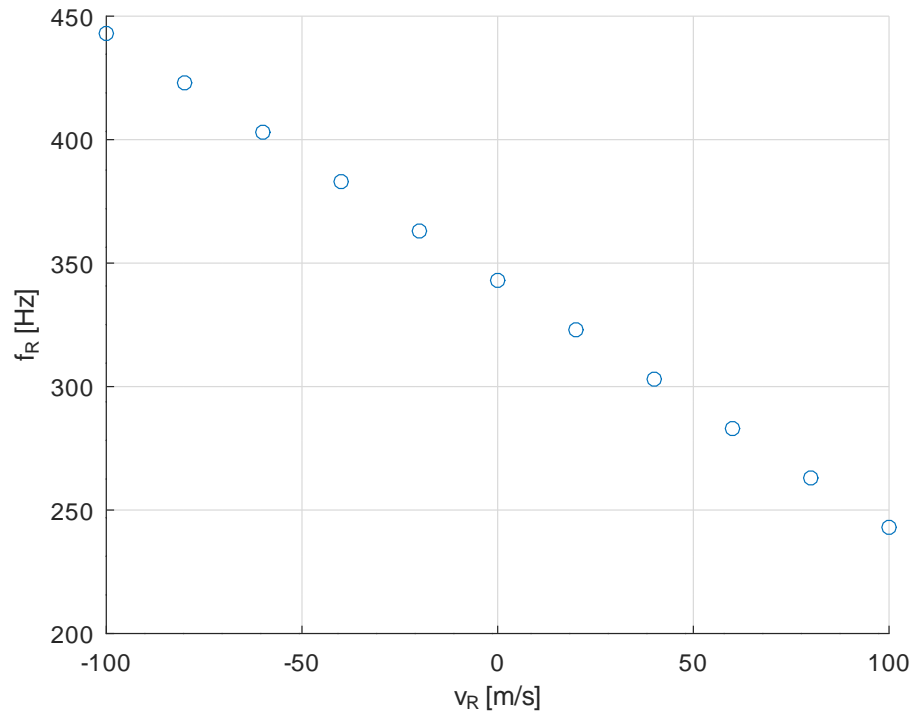


Figura 5: Relación funcional entre v_R y f_R .

Nota: Elaboración propia.

Una vez registrados los datos, se procederá a graficar la relación $((f_E - f_R) \text{ vs. } (v_R f_E - v_E f_R))$, con la ayuda del método de los mínimos cuadrados, se hallará la relación entre las variables.

Finalizando con el cálculo del valor de la velocidad del sonido (v), a partir de la **Ecuación 6**:

$$B = v \quad (9)$$

Datos necesarios para el experimento:

Frecuencia sonora emitida:

$$f_E = 343[\text{Hz}]$$

Datos tomados en el experimento:

En el **Cuadro 3**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto la velocidad del emisor (v_E), la velocidad del receptor (v_R), como la frecuencia percibida (f_R).

3. Resultados

3.1. Receptor en movimiento y emisor estacionario

A partir de los datos obtenidos se genera la gráfica de la **Figura 5**.

i	$v_E[m/s]$	$v_R[m/s]$	$f_R[Hz]$	$f_E - f_R$	$v_R f_E - v_E f_R (1 \times 10^4)$
1	-100	-100	343.00	0	0
2	-100	-50	304.29	38.7100	1.3279
3	-100	0	265.57	77.4300	2.6557
4	-100	50	226.86	116.1400	3.9836
5	-100	100	188.15	154.8500	5.3115
6	-50	-100	386.64	-43.6400	-1.4968
7	-50	-50	343.00	0	0
8	-50	0	299.36	43.6400	1.4968
9	-50	50	255.72	87.2800	2.9936
10	-50	100	212.08	130.9200	4.4904
11	0	-100	443.00	-100.0000	-3.4300
12	0	-50	393.00	-50.0000	-1.7150
13	0	0	343.00	0	0
14	0	50	293.00	50.0000	1.7150
15	0	100	243.00	100.0000	3.4300
16	50	-100	518.60	-175.6000	-6.0230
17	50	-50	460.06	-117.0600	-4.0153
18	50	0	401.53	-58.5300	-2.0076
19	50	50	343.00	0	0
20	50	100	284.47	58.5300	2.0076
21	100	-100	625.30	-282.3000	-9.6830
22	100	-50	554.73	-211.7300	-7.2623
23	100	0	484.15	-141.1500	-4.8415
24	100	50	413.58	-70.5800	-2.4208
25	100	100	343.00	0	0

Cuadro 3: Mediciones de la frecuencia percibida por un receptor en movimiento con un emisor en movimiento.

Nota: Elaboración propia.

Posteriormente se calculo la recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores:

$$A = (343 \pm 0)[Hz]; 0 \%$$

$$B = (-1.0 \pm 0)[m^{-1}]; 0 \%$$

Siendo su coeficiente de correlación (r):

$$r = -1$$

Considerando que el modelo de ajuste es:

$$f_R = A + Bv_R$$

Por tanto, se comprueba la relación funcional entre f_R y v_R .

Resultado
$f_R \propto v_R$

Para el calculo de la velocidad del sonido (v) se utiliza la **Ecuación 7**, resultando:

Resultado
$v = (343 \pm 0)[m/s]; 0 \%$

3.2. Emisor en movimiento y receptor estacionario

A partir de los datos obtenidos se genera la gráfica de la **Figura 6**.

Posteriormente se calculo la recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores:

$$A = (0.4 \pm 0.2)[m/s^2]; 65.32 \%$$

$$B = (343.000 \pm 0.003)[m/s]; 0.001 \%$$

Siendo su coeficiente de correlación (r):

$$r = 1.0000$$

Considerando que el modelo de ajuste es:

$$(v_E f_R) = A + B(f_R - f_E)$$

Por tanto, se comprueba la relación funcional entre $(f_R - f_E)$ y $(v_E f_R)$.

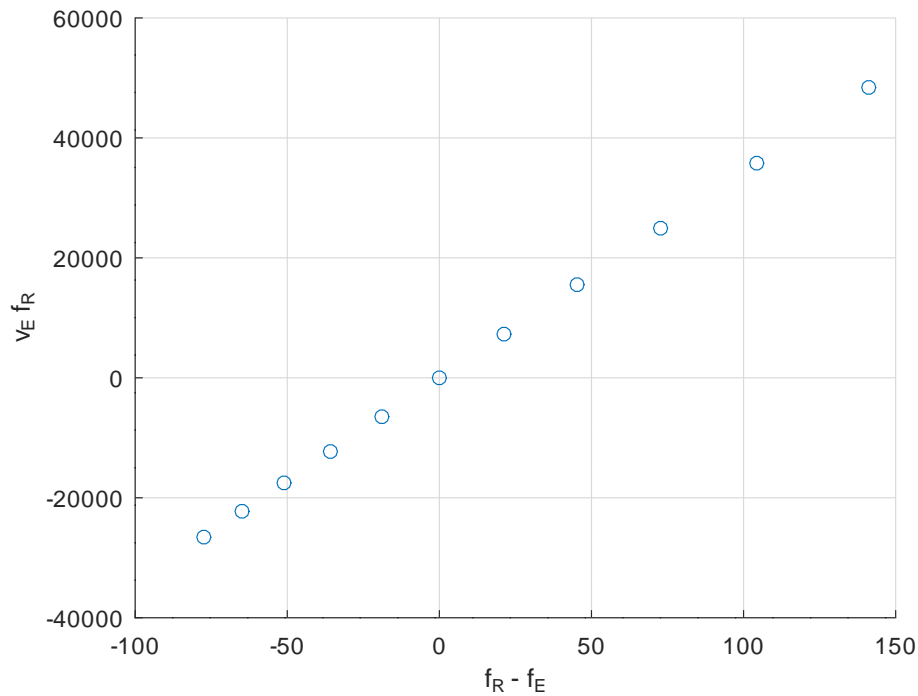


Figura 6: Relación funcional entre $(f_R - f_E)$ y $(v_E f_R)$.

Nota: Elaboración propia.

Resultado
$(f_R - f_E) \propto (v_E f_R)$

Para el calculo de la velocidad del sonido (v) se utiliza la **Ecuación 8**, resultando:

Resultado
$v = (343.000 \pm 0.003)[m/s]; 0.001 \%$

3.3. Emisor en movimiento y receptor en movimiento

A partir de los datos obtenidos se genera la gráfica de la **Figura 7**.

Posteriormente se calculo la recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores:

$$A = (-0.1 \pm 0.2)[m/s^2]; 220.05 \%$$

$$B = (343.000 \pm 0.002)[m/s]; 0.0 \%$$

Siendo su coeficiente de correlación (r):

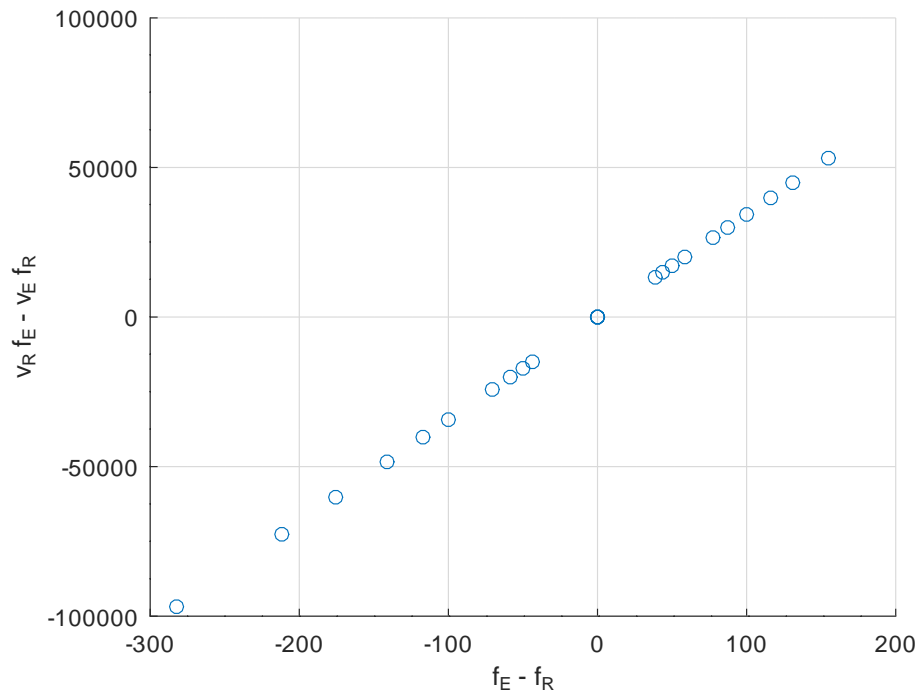


Figura 7: Relación funcional entre $(f_E - f_R)$ y $(v_E f_E - v_E f_R)$.

Nota: Elaboración propia.

$$r = 1.0000$$

Considerando que el modelo de ajuste es:

$$(v_R f_E - v_E f_R) = A + B(f_E - f_R)$$

Por tanto, se comprueba la relación funcional entre $(f_E - f_R)$ y $(v_R f_E - v_E f_R)$.

Resultado
$(f_E - f_R) \propto (v_R f_E - v_E f_R)$

Para el calculo de la velocidad del sonido (v) se utiliza la **Ecuación 9**, resultando:

Resultado
$v = (343 \pm 0.002)[m/s]; 0.0004 \%$

4. Discusión

El calculo del error de la velocidad del sonido, en todos los casos resultó 0 o muy próximo a este, lo que refleja el uso de un simulador muy ideal.

Este simulador tampoco ofrece la información sobre la precisión de los datos, por lo que no puede obtenerse una medida apropiada de error de los resultados.

5. Conclusiones

Se halló la relación funcional entre las velocidades del emisor, velocidad del receptor, frecuencia emitida, y frecuencia percibida, confirmándose la **Ecuación 5**.

También se calculó el valor de la velocidad del sonido en el medio simulado, siendo este valor el mismo en todos los casos.

Referencias

- [1] Young, Hugh D. y Freedman, Roger A. (2013).
Física Universitaria. Volumen 1.
13va Edición.
Capítulo 16. Sección 8.
- [2] Laboratorio efecto *Doppler*.
Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.
Extraído el 23 de Junio del 2021, de:
<https://www.studocu.com/bo/document/universidad-nacional-de-san-agustin-de-arequipa/fisica-experimental-3/informe/laboratorio-efecto-doppler/9041486/view>.

Apéndice A: Cálculos adicionales

5.1. Receptor en movimiento y emisor estacionario

Se calculan los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados, con la ayuda de los datos presentados en el **Cuadro 4**.

i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	Y_i	d_i	d_i^2
1	5995.4	196249	-44300	443	0	0
2	4208.1	178929	-33840	423	0	0
3	2608.1	162409	-24180	403	0	0
4	1283.1	146689	-15320	383	0	0
5	357.2	131769	-7260	363	0	0
6	0	117649	0	343	0	0
7	451.1	104329	6460	323	0	0
8	2050.3	91809	12120	303	0	0
9	5288.2	80089	16980	283	0	0
10	10885.0	69169	21040	263	0	0
11	19923.0	59049	24300	243	0	0

Cuadro 4: Valores para el método de mínimos cuadrados.

Nota: Elaboración propia.

$$n = 11$$

$$\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i = 3773$$

$$\sum x_i^2 = 44000$$

$$\sum y_i^2 = 1338139$$

$$\sum x_i y_i = -44000$$

$$\Delta_1 = n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 = 484000$$

$$\Delta_2 = n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i \right)^2 = 484000$$

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta_1} = 343$$

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta_1} = -1$$

$$\sum d^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n-2} = 0$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta_1}} = 0$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta_1}} = 0$$

Parámetros de la recta obtenida:

$$A = (343 \pm 0)[Hz]; 0 \%$$

$$B = (-1 \pm 0)[m^{-1}]; 0 \%$$

Siendo el coeficiente de correlación:

$$R = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} = -1$$

La ecuación de la recta resultante es:

$$y = 343 - x$$

5.2. Emisor en movimiento y receptor estacionario

Se calculan los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados, con la ayuda de los datos presentados en el **Cuadro 5**.

$$n = 11$$

$$\sum x_i = 136.63$$

$$\sum y_i = 4.6868 \times 10^4$$

$$\sum x_i^2 = 5.3050 \times 10^4$$

$$\sum y_i^2 = 6.2413 \times 10^9$$

$$\sum x_i y_i = 1.8196 \times 10^7$$

$$\Delta_1 = n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = 5.6488 \times 10^5$$

$$\Delta_2 = n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2 = 6.6457 \times 10^{10}$$

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta_1} = 0.3714$$

i	$x_i^2(1 \times 10^4)$	$y_i^2(1 \times 10^9)$	$x_i y_i(1 \times 10^6)$	$Y_i(1 \times 10^4)$	d_i	d_i^2
1	0.5995	0.7053	2.0563	-2.6558	1.1323	1.2821
2	0.4208	0.4951	1.4434	-2.2250	-0.3499	0.1225
3	0.2608	0.3068	0.8945	-1.7517	0.8476	0.7185
4	0.1283	0.1510	0.4401	-1.2286	-1.3051	1.7033
5	0.0357	0.0420	0.1225	-0.6482	0.3319	0.1102
6	0	0	0	0.0000	-0.3714	0.1380
7	0.0451	0.0531	0.1547	0.7286	-0.8952	0.8014
8	0.2050	0.2412	0.7033	1.5531	-0.2195	0.0482
9	0.5288	0.6222	1.8139	2.4943	-0.1443	0.0208
10	1.0885	1.2807	3.7336	3.5786	0.8201	0.6725
11	1.9923	2.3440	6.8338	4.8415	0.1535	0.0236

Cuadro 5: Valores para el método de mínimos cuadrados.**Nota:** Elaboración propia.

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta_1} = 343.0002$$

$$\sum d^2 = 5.6408$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n - 2} = 0.6268$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta_1}} = 0.2426$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta_1}} = 0.0035$$

Parámetros de la recta obtenida:

$$A = (0.3714 \pm 0.2426)[m/s^2]; 65.32 \%$$

$$B = (343.0002 \pm 0.0035)[m/s]; 0.001 \%$$

Siendo el coeficiente de correlación:

$$R = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} = 1.0000$$

La ecuación de la recta resultante es:

$$y = 0.3714 + 343.0002 x$$

5.3. Emisor en movimiento y receptor en movimiento

Se calculan los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados, con la ayuda de los datos presentados en el **Cuadro 6**.

i	$x_i^2(1 \times 10^4)$	$y_i^2(1 \times 10^9)$	$x_i y_i(1 \times 10^7)$	$Y_i(1 \times 10^4)$	d_i	d_i^2
1	0	0	0	-0.0000	0.0778	0.0061
2	0.1498	0.1763	0.0514	1.3277	1.5296	2.3396
3	0.5995	0.7053	0.2056	2.6558	-1.4486	2.0985
4	1.3488	1.5869	0.4627	3.9836	0.0031	0.0000
5	2.3979	2.8212	0.8225	5.3114	1.4549	2.1168
6	0.1904	0.2240	0.0653	-1.4969	0.6183	0.3823
7	0	0	0	-0.0000	0.0778	0.0061
8	0.1904	0.2240	0.0653	1.4968	-0.4627	0.2141
9	0.7618	0.8962	0.2613	2.9937	-1.0033	1.0066
10	1.7140	2.0164	0.5879	4.4906	-1.5438	2.3833
11	1.0000	1.1765	0.3430	-3.4300	0.1249	0.0156
12	0.2500	0.2941	0.0858	-1.7150	0.1013	0.0103
13	0	0	0	-0.0000	0.0778	0.0061
14	0.2500	0.2941	0.0858	1.7150	0.0543	0.0029
15	1.0000	1.1765	0.3430	3.4300	0.0307	0.0009
16	3.0835	3.6277	1.0576	-6.0231	0.9604	0.9224
17	1.3703	1.6123	0.4700	-4.0152	-1.2871	1.6567
18	0.3426	0.4031	0.1175	-2.0076	-0.6047	0.3656
19	0	0	0	-0.0000	0.0778	0.0061
20	0.3426	0.4031	0.1175	2.0076	0.7603	0.5780
21	7.9693	9.3760	2.7335	-9.6829	-0.8894	0.7909
22	4.4830	5.2741	1.5376	-7.2624	0.5674	0.3220
23	1.9923	2.3440	0.6834	-4.8415	-0.4058	0.1647
24	0.4982	0.5860	0.1709	-2.4209	1.0510	1.1046
25	0	0	0	-0.0000	0.0778	0.0061

Cuadro 6: Valores para el método de mínimos cuadrados.

Nota: Elaboración propia.

$$n = 25$$

$$\sum x_i = -393.0900$$

$$\sum y_i = -134832$$

$$\sum x_i^2 = 2.9935 \times 10^5$$

$$\sum y_i^2 = 3.5218 \times 10^{10}$$

$$\sum x_i y_i = 1.0268 \times 10^8$$

$$\Delta_1 = n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 = 7.3291 \times 10^6$$

$$\Delta_2 = n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i \right)^2 = 8.6227 \times 10^{11}$$

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta_1} = -0.0778$$

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta_1} = 343.0005$$

$$\sum d^2 = 16.5063$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n - 2} = 0.7177$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta_1}} = 0.1712$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta_1}} = 0.0016$$

Parámetros de la recta obtenida:

$$A = (-0.0778 \pm 0.1712)[m/s^2]; 220.06 \%$$

$$B = (343.0005 \pm 0.0016)[m/s]; 0.0004 \%$$

Siendo el coeficiente de correlación:

$$R = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} = 1.0000$$

La ecuación de la recta resultante es:

$$y = -0.0778 + 343.0005 x$$

Apéndice B: Cálculos realizados en *Octave*

A continuación se presenta los cálculos realizados en el programa *Octave* para la generación de las gráficas, el calculo de los mínimos cuadrados.

5.4. Receptor en movimiento y emisor estacionario

```
# Datos importados (i1.csv):
-100,443
-80,423
-60,403
-40,383
-20,363
0,343
20,323
40,303
60,283
80,263
100,243

# Comandos ejecutados (o1.m):
function graficar(t,_x,_y,eps,x,y)
    f = figure()

    title(t)
    xlabel(_x)
    ylabel(_y)

    hold on
    grid on
    plot(x, y, 'o')

    print(f,eps,'-color')
    hold off
end

function [A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)
    xx = x.*x
    yy = y.*y
    xy = x.*y

    % tamaño de la muestra
    n = length(x)

    % calculo de las sumatorias
    sx = sum(x)
    sy = sum(y)

    sxx = sum(xx)
    syy = sum(yy)
    sxy = sum(xy)
```

```

D1 = (n * sxx) - (sx)^2
D2 = (n * syy) - (sy)^2

% calculo de los valores de la recta
A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D1
B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D1

% calculo del error
Y = A + (B * x)
d = y - Y

dd = d.*d
sdd = sum(dd)
s2 = sdd / ( n - 2)

sA = sqrt( (s2 * sxx) / D1 )
sB = sqrt( (s2 * n) / D1 )

% calculando el error porcentual
EA = abs(sA / A) * 100
EB = abs(sB / B) * 100

% calculo de correlacion
R = ((n * sxy) - (sx * sy)) / sqrt( D1 * D2 )
end

clear
close all
clc

addpath('.../.../octave')

% leer datos previamente formateados
table = csvread('i1.csv')

vr = table(:,1) % [m/s]
fr = table(:,2) % [hz]

% frecuencia emitida
fe = 343

x = vr
y = fr

graficar(
    ',,
    'v_R [m/s]',
    'f_R [Hz]',
    'o1.eps',
    x,
    y
)

[A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)

```

```
% calculo de la velocidad del sonido
v = -1 * fe * (1/B)
e_v = fe * (1/B*B) * sB
E_v = abs(e_v / v) * 100
```

```
# Salida del programa (o1.out):
table =
```

-100	443
-80	423
-60	403
-40	383
-20	363
0	343
20	323
40	303
60	283
80	263
100	243

```
vr =
```

-100
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
100

```
fr =
```

443
423
403
383
363
343
323
303
283
263
243

```
fe = 343
```

```
x =
```

-100
-80
-60
-40

-20
0
20
40
60
80
100

y =

443
423
403
383
363
343
323
303
283
263
243

f = 1

xx =

10000
6400
3600
1600
400
0
400
1600
3600
6400
10000

yy =

196249
178929
162409
146689
131769
117649
104329
91809
80089
69169
59049

xy =

-44300
-33840
-24180

```
-15320
-7260
  0
  6460
 12120
 16980
 21040
 24300

n = 11
sx = 0
sy = 3773
sxx = 44000
syy = 1338139
sxy = -44000
D1 = 484000
D2 = 484000
A = 343
B = -1
Y =

  443
  423
  403
  383
  363
  343
  323
  303
  283
  263
  243

d =

  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0

dd =

  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
```

```
0
0
0
0

sdd = 0
s2 = 0
sA = 0
sB = 0
EA = 0
EB = 0
R = -1
A = 343
sA = 0
B = -1
sB = 0
R = -1
v = 343
e_v = 0
E_v = 0
```

5.5. Emisor en movimiento y receptor estacionario

```
# Datos importados (i2.csv):
-100,265.57
-80,278.13
-60,291.93
-40,307.18
-20,324.10
0,343.00
20,364.24
40,388.28
60,415.72
80,447.33
100,484.15

# Comandos ejecutados (o2.m):
function graficar(t,_x,_y,eps,x,y)
    f = figure()

    title(t)
    xlabel(_x)
    ylabel(_y)

    hold on
    grid on
    plot(x, y, 'o')

    print(f,eps,'-color')
    hold off
```

```

end

function [A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)
    xx = x.*x
    yy = y.*y
    xy = x.*y

    % tamano de la muestra
    n = length(x)

    % calculo de las sumatorias
    sx = sum(x)
    sy = sum(y)

    sxx = sum(xx)
    syy = sum(yy)
    sxy = sum(xy)

    D1 = (n * sxx) - (sx)^2
    D2 = (n * syy) - (sy)^2

    % calculo de los valores de la recta
    A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D1
    B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D1

    % calculo del error
    Y = A + (B * x)
    d = y - Y

    dd = d.*d
    sdd = sum(dd)
    s2 = sdd / ( n - 2)

    sA = sqrt( (s2 * sxx) / D1 )
    sB = sqrt( (s2 * n) / D1 )

    % calculando el error porcentual
    EA = abs(sA / A) * 100
    EB = abs(sB / B) * 100

    % calculo de correlacion
    R = ((n * sxy) - (sx * sy)) / sqrt( D1 * D2 )
end

clear
close all
clc

addpath('.../.../octave')

% leer datos previamente formateados
table = csvread('i2.csv')

ve = table(:,1) % [m/s]

```



```
fr = table(:,2) % [hz]

% frecuencia emitida
fe = 343

x = fr-fe
y = ve.*fr

graficar(
    '',
    'f_R - f_E',
    'v_E f_R',
    'o2.eps',
    x,
    y
)

[A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)

# Salida del programa (o2.out):
table =

-100.0000    265.5700
-80.0000    278.1300
-60.0000    291.9300
-40.0000    307.1800
-20.0000    324.1000
     0      343.0000
 20.0000    364.2400
 40.0000    388.2800
 60.0000    415.7200
 80.0000    447.3300
100.0000    484.1500

ve =

-100
-80
-60
-40
-20
 0
 20
 40
 60
 80
100

fr =

265.57
278.13
291.93
307.18
324.10
```

```
343.00
364.24
388.28
415.72
447.33
484.15

fe = 343
x =

-77.4300
-64.8700
-51.0700
-35.8200
-18.9000
  0
 21.2400
 45.2800
 72.7200
104.3300
141.1500

y =

-2.6557e+04
-2.2250e+04
-1.7516e+04
-1.2287e+04
-6.4820e+03
  0
 7.2848e+03
 1.5531e+04
 2.4943e+04
 3.5786e+04
 4.8415e+04

f = 1
xx =

5.9954e+03
4.2081e+03
2.6081e+03
1.2831e+03
3.5721e+02
  0
 4.5114e+02
 2.0503e+03
 5.2882e+03
 1.0885e+04
 1.9923e+04

yy =

7.0527e+08
4.9508e+08
3.0680e+08
```

```
1.5098e+08
4.2016e+07
0
5.3068e+07
2.4122e+08
6.2216e+08
1.2807e+09
2.3440e+09

xy =

2.0563e+06
1.4434e+06
8.9453e+05
4.4013e+05
1.2251e+05
0
1.5473e+05
7.0325e+05
1.8139e+06
3.7336e+06
6.8338e+06

n = 11
sx = 136.63
sy = 4.6868e+04
sxx = 5.3050e+04
syy = 6.2413e+09
sxy = 1.8196e+07
D1 = 5.6488e+05
D2 = 6.6457e+10
A = 0.3714
B = 343.00
Y =

-2.6558e+04
-2.2250e+04
-1.7517e+04
-1.2286e+04
-6.4823e+03
3.7143e-01
7.2857e+03
1.5531e+04
2.4943e+04
3.5786e+04
4.8415e+04

d =

1.1323
-0.3499
0.8476
-1.3051
0.3319
-0.3714
-0.8952
```

```
-0.2195
-0.1443
0.8201
0.1535

dd =

1.282077
0.122457
0.718453
1.703251
0.110167
0.137964
0.801382
0.048163
0.020829
0.672522
0.023577

sdd = 5.6408
s2 = 0.6268
sA = 0.2426
sB = 3.4936e-03
EA = 65.318
EB = 1.0185e-03
R = 1.0000
A = 0.3714
sA = 0.2426
B = 343.00
sB = 3.4936e-03
R = 1.0000
```

5.6. Emisor en movimiento y receptor en movimiento

```
# Datos importados (i3.csv):
-100,-100,343.00
-100,-50,304.29
-100,0,265.57
-100,50,226.86
-100,100,188.15
-50,-100,386.64
-50,-50,343.00
-50,0,299.36
-50,50,255.72
-50,100,212.08
0,-100,443.00
0,-50,393.00
0,0,343.00
0,50,293.00
0,100,243.00
```

```
50,-100,518.60
50,-50,460.06
50,0,401.53
50,50,343.00
50,100,284.47
100,-100,625.30
100,-50,554.73
100,0,484.15
100,50,413.58
100,100,343.00

# Comandos ejecutados (o3.m):
function graficar(t,_x,_y,eps,x,y)
    f = figure()

    title(t)
    xlabel(_x)
    ylabel(_y)

    hold on
    grid on
    plot(x, y, 'o')

    print(f,eps,'-color')
    hold off
end

function [A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)
    xx = x.*x
    yy = y.*y
    xy = x.*y

    % tamaño de la muestra
    n = length(x)

    % calculo de las sumatorias
    sx = sum(x)
    sy = sum(y)

    sxx = sum(xx)
    syy = sum(yy)
    sxy = sum(xy)

    D1 = (n * sxx) - (sx)^2
    D2 = (n * syy) - (sy)^2

    % calculo de los valores de la recta
    A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D1
    B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D1

    % calculo del error
    Y = A + (B * x)
    d = y - Y

    dd = d.*d
```

```

sdd = sum(dd)
s2 = sdd / ( n - 2)

sA = sqrt( (s2 * sxx) / D1 )
sB = sqrt( (s2 * n) / D1 )

% calculando el error porcentual
EA = abs(sA / A) * 100
EB = abs(sB / B) * 100

% calculo de correlacion
R = ((n * sxy) - (sx * sy)) / sqrt( D1 * D2 )
end

clear
close all
clc

addpath('.../.../octave')

% leer datos previamente formateados
table = csvread('i3.csv')

ve = table(:,1) % [m/s]
vr = table(:,2) % [m/s]
fr = table(:,3) % [hz]

% frecuencia emitida
fe = 343

% linealización de la curva
x = fe - fr
y = vr.*fe - ve.*fr

graficar(
    '',
    'f_E - f_R',
    'v_R f_E - v_E f_R',
    'o3.eps',
    x,
    y
)

[A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)

# Salida del programa (o3.out):
table =

-100.0000 -100.0000 343.0000
-100.0000 -50.0000 304.2900
-100.0000 0 265.5700
-100.0000 50.0000 226.8600
-100.0000 100.0000 188.1500
-50.0000 -100.0000 386.6400

```

-50.0000	-50.0000	343.0000
-50.0000	0	299.3600
-50.0000	50.0000	255.7200
-50.0000	100.0000	212.0800
0	-100.0000	443.0000
0	-50.0000	393.0000
0	0	343.0000
0	50.0000	293.0000
0	100.0000	243.0000
50.0000	-100.0000	518.6000
50.0000	-50.0000	460.0600
50.0000	0	401.5300
50.0000	50.0000	343.0000
50.0000	100.0000	284.4700
100.0000	-100.0000	625.3000
100.0000	-50.0000	554.7300
100.0000	0	484.1500
100.0000	50.0000	413.5800
100.0000	100.0000	343.0000

ve =

-100
-100
-100
-100
-100
-50
-50
-50
-50
-50
0
0
0
0
0
0
50
50
50
50
50
100
100
100
100
100

vr =

-100
-50
0
50
100
-100

```
-50
 0
 50
100
-100
-50
 0
 50
100
-100
-50
 0
 50
100
-100
-50
 0
 50
100

fr =

343.00
304.29
265.57
226.86
188.15
386.64
343.00
299.36
255.72
212.08
443.00
393.00
343.00
293.00
243.00
518.60
460.06
401.53
343.00
284.47
625.30
554.73
484.15
413.58
343.00

fe = 343
x =

 0
38.7100
77.4300
116.1400
154.8500
```



```
-43.6400
0
43.6400
87.2800
130.9200
-100.0000
-50.0000
0
50.0000
100.0000
-175.6000
-117.0600
-58.5300
0
58.5300
-282.3000
-211.7300
-141.1500
-70.5800
0

y =

0
1.3279e+04
2.6557e+04
3.9836e+04
5.3115e+04
-1.4968e+04
0
1.4968e+04
2.9936e+04
4.4904e+04
-3.4300e+04
-1.7150e+04
0
1.7150e+04
3.4300e+04
-6.0230e+04
-4.0153e+04
-2.0076e+04
0
2.0076e+04
-9.6830e+04
-7.2623e+04
-4.8415e+04
-2.4208e+04
0

f = 1
xx =

0
1.4985e+03
5.9954e+03
1.3488e+04
```

```
2.3979e+04
1.9044e+03
0
1.9044e+03
7.6178e+03
1.7140e+04
1.0000e+04
2.5000e+03
0
2.5000e+03
1.0000e+04
3.0835e+04
1.3703e+04
3.4258e+03
0
3.4258e+03
7.9693e+04
4.4830e+04
1.9923e+04
4.9815e+03
0
```

yy =

```
0
1.7633e+08
7.0527e+08
1.5869e+09
2.8212e+09
2.2404e+08
0
2.2404e+08
8.9616e+08
2.0164e+09
1.1765e+09
2.9412e+08
0
2.9412e+08
1.1765e+09
3.6277e+09
1.6123e+09
4.0307e+08
0
4.0307e+08
9.3760e+09
5.2741e+09
2.3440e+09
5.8603e+08
0
```

xy =

```
0
5.1403e+05
2.0563e+06
4.6266e+06
```

```
8.2249e+06
6.5320e+05
0
6.5320e+05
2.6128e+06
5.8788e+06
3.4300e+06
8.5750e+05
0
8.5750e+05
3.4300e+06
1.0576e+07
4.7003e+06
1.1751e+06
0
1.1751e+06
2.7335e+07
1.5376e+07
6.8338e+06
1.7086e+06
0

n = 25
sx = -393.09
sy = -134832
sxx = 2.9935e+05
syy = 3.5218e+10
sxy = 1.0268e+08
D1 = 7.3291e+06
D2 = 8.6227e+11
A = -0.077801
B = 343.00
Y =

-7.7801e-02
1.3277e+04
2.6558e+04
3.9836e+04
5.3114e+04
-1.4969e+04
-7.7801e-02
1.4968e+04
2.9937e+04
4.4906e+04
-3.4300e+04
-1.7150e+04
-7.7801e-02
1.7150e+04
3.4300e+04
-6.0231e+04
-4.0152e+04
-2.0076e+04
-7.7801e-02
2.0076e+04
-9.6829e+04
-7.2624e+04
```

```
-4.8415e+04  
-2.4209e+04  
-7.7801e-02
```

d =

```
7.7801e-02  
1.5296e+00  
-1.4486e+00  
3.1465e-03  
1.4549e+00  
6.1834e-01  
7.7801e-02  
-4.6274e-01  
-1.0033e+00  
-1.5438e+00  
1.2486e-01  
1.0133e-01  
7.7801e-02  
5.4271e-02  
3.0742e-02  
9.6044e-01  
-1.2871e+00  
-6.0466e-01  
7.7801e-02  
7.6026e-01  
-8.8935e-01  
5.6744e-01  
-4.0578e-01  
1.0510e+00  
7.7801e-02
```

dd =

```
6.0529e-03  
2.3396e+00  
2.0985e+00  
9.9005e-06  
2.1168e+00  
3.8234e-01  
6.0529e-03  
2.1412e-01  
1.0066e+00  
2.3833e+00  
1.5590e-02  
1.0268e-02  
6.0529e-03  
2.9454e-03  
9.4506e-04  
9.2244e-01  
1.6567e+00  
3.6561e-01  
6.0529e-03  
5.7799e-01  
7.9095e-01  
3.2199e-01
```

```
1.6465e-01
1.1046e+00
6.0529e-03

sdd = 16.506
s2 = 0.7177
sA = 0.1712
sB = 1.5646e-03
EA = 220.06
EB = 4.5615e-04
R = 1.0000
A = -0.077801
sA = 0.1712
B = 343.00
sB = 1.5646e-03
R = 1.0000
```