Tarea #16

En un sistema masa-resorte donde: $k = 80[N/m]$ y $m = 0.2[kg]$, la ecuación diferencial es:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1}$$

Si las condiciones iniciales son $v_0 = 0$ y $x_0 = 0.2[m]$, cuando $t = 0$.

a) Calcular la posición, velocidad, aceleración, energía cinética, potencial y la total en función del tiempo.

b) Calcular la energía cinética, energía potencial y la energía total para $x = -0.1[m]$.

Solución:

(a)

Calculando ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{80}{0.2}} = \sqrt{400} = 20[s^{-1}] \tag{2}$$

Hallamos A y ϕ, a partir de la ecuación de posición y velocidad:

$$x = A \cdot cos(\omega t - \phi)$$
$$0.2 = A \cdot cos(-\phi) = A \cdot cos(\phi)$$
$$v = -A\omega \cdot sen(\omega t - \phi)$$
$$0 = -A(20) \cdot sen(-\phi) = A \cdot sen(\phi)$$

$$sen(\phi) = 0$$
$$\phi = arcsen(0) = 0$$
$$A = \frac{0.2}{cos(\phi)} = \frac{0.2}{cos(0)} = 0.2[m]$$

Por tanto:

$$x = A \cdot cos(\omega t - \phi) = 0.2 \cdot cos(20t)[m] \tag{3}$$
$$v = -A\omega \cdot sen(\omega t - \phi) = -4 \cdot sen(20t)[m/s] \tag{4}$$
$$a = -A\omega^2 \cdot cos(\omega t - \phi) = -80 \cdot cos(20t)[m/s^2] \tag{5}$$
$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.2)(-4^2 \cdot sen^2(20t)) = 1.6 \cdot sen^2(20t)[J] \tag{6}$$
$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(80)(0.2^2 \cdot cos^2(20t)) = 1.6 \cdot cos^2(20t)[J] \tag{7}$$
$$E = T + U = 1.6 \cdot sen^2(20t) + 1.6 \cdot cos^2(20t) = 1.6[J] \tag{8}$$

(b)

Para:

$$x = -0.1[m]$$
$$-0.1 = 0.2 \cdot cos(20t)$$
$$t = \frac{arccos(-0.5)}{20} = \frac{1}{20}\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{30}[s]$$

Calculando la energía cinética:

$$T = 1.6 \cdot sen^2(20t) = 1.6 \cdot sen^2\left(\frac{20\pi}{30}\right) = 1.6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.2[J] \tag{9}$$

Calculando la energía potencial:

$$U = 1.6 \cdot cos^2(20t) = 1.6 \cdot cos^2\left(\frac{20\pi}{30}\right) = 1.6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0.4[J] \tag{10}$$

Comprobándose que la energía total se mantuvo invariable:

$$E = T + U = 1.2 + 0.4 = 1.6[J] \tag{11}$$