

# Informe 3: Péndulo simple

Carlos Eduardo Caballero Burgoa

200201226@est.umss.edu

28 de abril de 2021

**Grupo:** J2 (Miércoles)

**Docente:** Ing. Milka Mónica Torrico Troche

**Carrera:** Ing. Electromecánica

## Resumen

Este documento detalla el experimento realizado en simulador para hallar la relación funcional entre el periodo de oscilación ( $T$ ) y la longitud ( $L$ ) de un péndulo simple, además de calcular el valor de la aceleración de la gravedad; para esto se realizó dos mediciones de 10 oscilaciones de un péndulo con una longitud determinada; y posteriormente se calcula la relación funcional después de linealizar la curva y ajustarla con el método de mínimos cuadrados, finalmente se determinó el valor de la gravedad, resultando ser igual a:  $(9.85 \pm 0.03)[m/s^2]$ ; 0.33 %.

## 1. Introducción

Un péndulo simple es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de una cuerda no expansible y de masa despreciable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio vertical descendente, oscilará alrededor de dicha posición [1].

En la **Figura 1** se detallan las fuerzas que actúan sobre la masa ( $m$ ) en cualquier instante del movimiento, estas fuerzas son: La tensión ( $F$ ) de la cuerda y la fuerza de gravedad ( $mg$ ), que se descompone en función del ángulo desplazado ( $\theta$ ), en una componente normal ( $mg \cos \theta$ ) y una componente tangencial ( $mg \sin \theta$ ) [2].

Aplicando la segunda ley de *Newton* en la dirección tangencial, se obtiene:

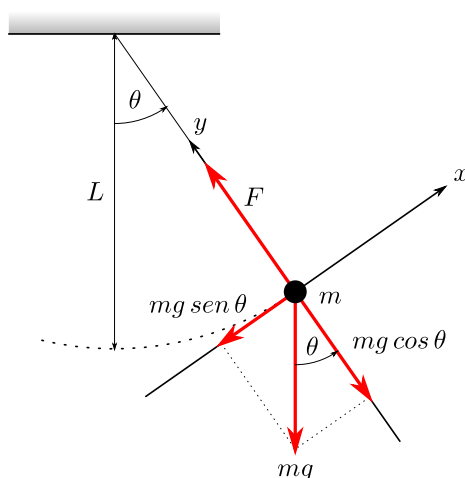
$$-mg \sin(\theta) = m a_t$$

La aceleración en la dirección tangencial es:

$$a_t = \frac{d^2 S}{dt^2}$$

Donde  $S$  es la longitud del arco o trayectoria circular, cuya relación con el ángulo  $\theta$  y la longitud de la cuerda  $L$  es:

$$S = \theta L$$

**Figura 1:** Péndulo simple idealizado.

**Nota:** Física Universitaria Volumen I (p. 454),  
Young, Hugh D. y Freedman, Roger A., 2013, Pearson.

Por tanto:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \text{sen}(\theta) = 0$$

Si se consideran tan solo oscilaciones de pequeña amplitud, de modo que el ángulo  $\theta$  sea siempre suficientemente pequeño, entonces el valor del  $\text{sen}(\theta)$  será muy próximo al valor de  $\theta$  expresado en radianes ( $\text{sen}(\theta) \cong \theta$ , para  $\theta$  suficientemente pequeño), como se aprecia en el **Cuadro 1** [3].

$\theta[^\circ]$	$\theta[\text{rad}]$	$\text{sen}(\theta)$	diferencia (%)	$\theta[^\circ]$	$\theta[\text{rad}]$	$\text{sen}(\theta)$	diferencia (%)
0	0.00000	0.00000	0.00	15	0.26180	0.25882	1.15
2	0.03491	0.03490	0.02	20	0.34907	0.34202	2.06
5	0.08727	0.08716	0.13	25	0.43633	0.42262	3.25
10	0.17453	0.17365	0.51	30	0.52360	0.50000	4.72

**Cuadro 1:** Comparación entre el valor del ángulo y su función seno.

**Nota:** Adaptado de péndulo simple (Wikipedia).

La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

La **Ecuación 1** corresponde a un **oscilador armónico simple** cuya solución general es:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Donde  $A$  representa el máximo desplazamiento angular de  $\theta$ ,  $\omega$  es la frecuencia angular, y  $\phi$  el desfase. Tanto la magnitud  $A$ , como  $\phi$  son dos constantes determinadas por las condiciones iniciales.

La frecuencia angular ( $\omega$ ) esta determinada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Considerando que  $\omega = 2\pi/T$ , el periodo de oscilación para el péndulo simple es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L} \quad (1)$$

Para el experimento se verificará la **Ecuación 1**. A partir de una longitud de cuerda establecida ( $L$ ), se medirá el tiempo de oscilación del péndulo para hallar el periodo ( $T$ ). Finalmente se determinará el valor de la gravedad ( $g$ ) despejándola de la misma ecuación.

## 2. Método experimental

Para la realización del experimento, se emplea el simulador de péndulo simple de *PHET*, ubicado en la dirección web: [https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab\\_es.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_es.html), tal como presenta en la **Figura 2**.

Para el simulador se escoge un valor de longitud ( $L$ ), que se mantendrá constante durante la medición, y se registrarán 2 veces la cantidad de tiempo que requiere el péndulo para hacer 10 oscilaciones completas. Todas las mediciones con una inclinación de  $8^\circ$ .

Una vez medidos los datos para 10 valores distintos de longitud ( $L$ ), se procederá a calcular el periodo ( $T$ ) con la siguiente ecuación:

$$T = \frac{\bar{t}}{10} \quad (2)$$

Donde  $\bar{t}$ , es el promedio de las mediciones realizadas.

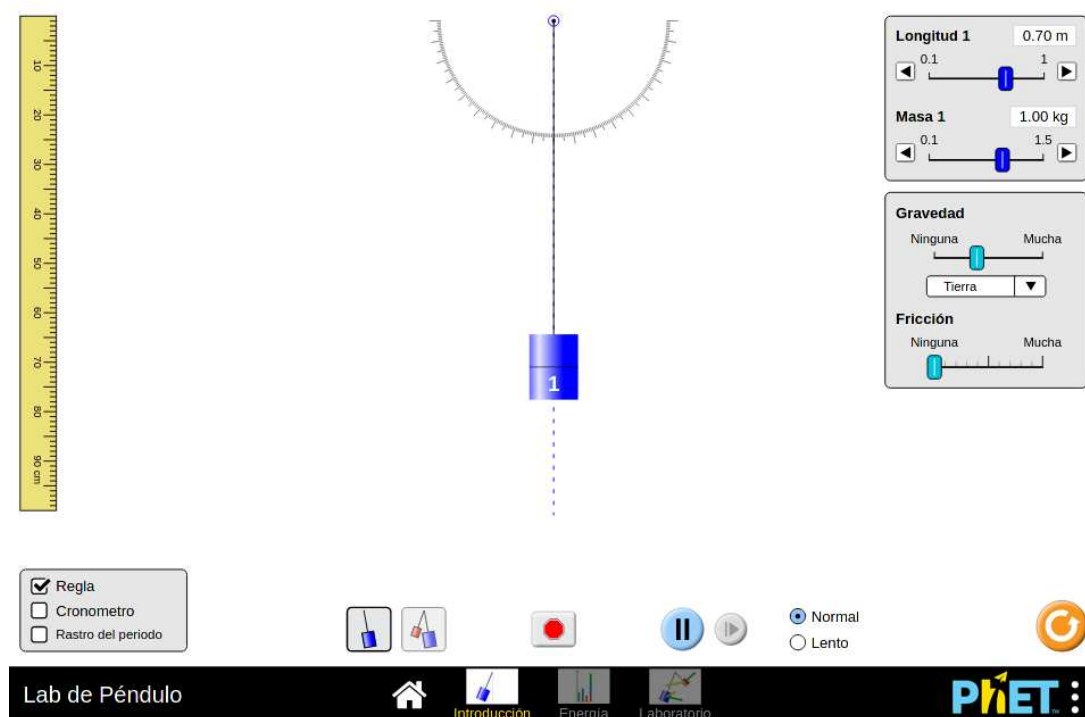
Luego se procederá a graficar la relación longitud ( $L$ ) vs. periodo ( $T$ ), para realizar primeramente la linealización de la curva por logaritmos, y luego el calculo de la recta por el método de los mínimos cuadrados, posteriormente hallar la relación funcional entre las variables.

Finalizando con el calculo del valor de la gravedad, a partir de la **Ecuación 1**:

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

Donde  $a$  es uno de los parámetros de la curva hallada.

Despejando  $g$ , se obtiene:



**Figura 2:** Simulador de péndulo simple.

**Nota:** Captura propia.

$$g = \frac{4\pi^2}{a^2} \quad (3)$$

### Datos tomados en el experimento:

En el **Cuadro 2**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto la longitud como el tiempo de 10 oscilaciones tomados 2 veces, además del valor del periodo resultante.

## 3. Resultados

A partir de los datos obtenidos se calculó el periodo de oscilación ( $T$ ) para los valores de longitud ( $L$ ), con los que se generó la gráfica de la **Figura 3**.

Posteriormente se linealizó la curva por medio de logaritmos, y se calculó la recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores:

$$A = (0.694 \pm 0.001)[u]; 0.23 \%$$

$$B = (0.502 \pm 0.005)[u]; 0.98 \%$$

Siendo su coeficiente de correlación ( $r$ ):

$i$	$L_i[m]$	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	$T_i[s]$
1	0.55	14.85	14.81	1.4830
2	0.60	15.42	15.45	1.5435
3	0.65	16.09	16.14	1.6115
4	0.70	16.88	16.76	1.6820
5	0.75	17.35	17.37	1.7360
6	0.80	17.87	17.92	1.7895
7	0.85	18.37	18.41	1.8390
8	0.90	19.01	18.94	1.8975
9	0.95	19.53	19.62	1.9575
10	1.00	20.02	19.92	1.9970

**Cuadro 2:** Mediciones de tiempo en función de la longitud del péndulo.**Nota:** Elaboración propia.

$$r = 0.9996$$

Con los valores hallados, se calculan los valores originales de la curva, resultando:

$$a = (2.002 \pm 0.003)[s/\sqrt{m}]; 0.16 \%$$

$$b = (0.502 \pm 0.005)[u]; 0.98 \%$$

Resultando el modelo de ajuste:

$$T = 2.002 L^{0.502}$$

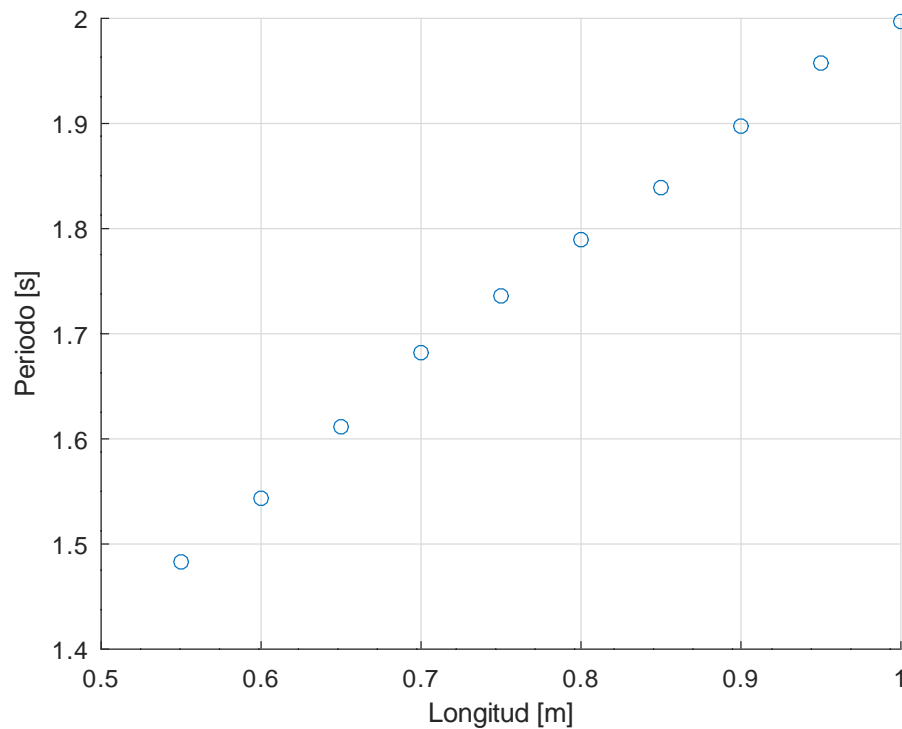
Por tanto la relación funcional entre  $T$  y  $L$ , es:

Resultado
$T \propto \sqrt{L}$

Verificándose el comportamiento establecido por la **Ecuación 1**.

Para el calculo de la gravedad ( $g$ ) se utiliza la **Ecuación 3**, resultando:

Resultado
$g = (9.85 \pm 0.03)[m/s^2]; 0.33 \%$



**Figura 3:** Gráfica de longitud vs periodo.

**Nota:** Elaboración propia.

## 4. Discusión

Si se calculase la relación lineal entre la longitud ( $L$ ) y el periodo ( $T$ ) directamente desde sus valores sin linealización previa, se obtienen los siguientes valores de la recta:

$$A = (0.86 \pm 0.02)[s]; 2.08 \%$$

$$B = (1.15 \pm 0.02)[s/\sqrt{m}]; 1.98 \%$$

Siendo su coeficiente de correlación ( $r$ ):

$$r = 0.9984$$

Considerando la correlación hallada, podría cometerse el error de presuponer una relación lineal entre las variables. Esto se debe a que los datos tomados se encuentran en una zona de la curva (que es una parábola) donde la curvatura es muy alta ( $[0.55, 1.00]$ ).

Se recomienda tener datos más dispersos para evitar una posible confusión de este tipo.

## 5. Conclusiones

Se verificaron las ecuaciones planteadas en la introducción, así como la ecuación de un oscilador armónico simple.

También se calculó el valor de la gravedad, siendo equivalente al valor establecido en el simulador.

## Referencias

- [1] Young, Hugh D. y Freedman, Roger A. (2013).  
Física Universitaria. Volumen 1.  
13va Edición.  
Capítulo 14.
- [2] Departamento de Física - UMSS.  
Laboratorio de Física Básica II.  
Guía - Cartilla de laboratorio.  
Gestión I/2020.
- [3] Péndulo simple  
Extraído el 27 de Abril del 2021, de:  
[https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo\\_simple](https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_simple).

## Apéndice A: Cálculos adicionales

### 5.1. Linealización de la curva

Conociendo  $t_{1i}$ ,  $t_{2i}$ , se calculan los valores del promedio ( $\bar{t}$ ), y el periodo de oscilación ( $T$ ) en el **Cuadro 3**.

$i$	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	$\bar{t}_i[s]$	$T_i[s]$
1	14.85	14.81	14.8300	1.4830
2	15.42	15.45	15.4350	1.5435
3	16.09	16.14	16.1150	1.6115
4	16.88	16.76	16.8200	1.6820
5	17.35	17.37	17.3600	1.7360
6	17.87	17.92	17.8950	1.7895
7	18.37	18.41	18.3900	1.8390
8	19.01	18.94	18.9750	1.8975
9	19.53	19.62	19.5750	1.9575
10	20.02	19.92	19.9700	1.9970

**Cuadro 3:** Calculo del periodo de oscilación.

**Nota:** Elaboración propia.

En el **Cuadro 4**, se detallan los valores logaritmizados de  $T$  y  $L$ :

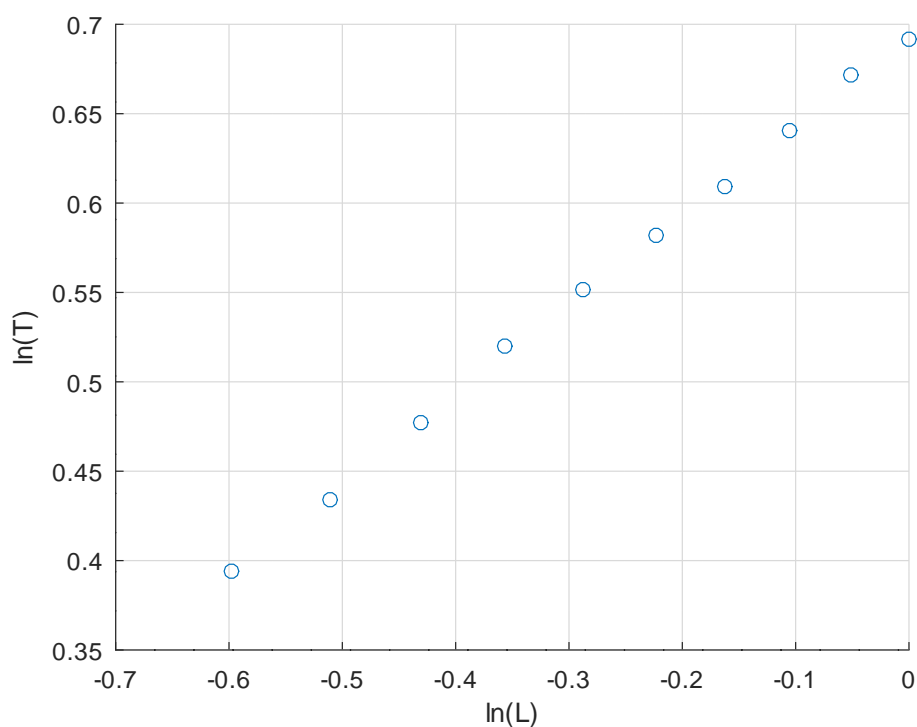
$i$	$\ln(L_i)$	$\ln(T_i)$
1	-0.5978	0.3941
2	-0.5108	0.4341
3	-0.4308	0.4772
4	-0.3567	0.5200
5	-0.2877	0.5516
6	-0.2231	0.5819
7	-0.1625	0.6092
8	-0.1054	0.6405
9	-0.0513	0.6717
10	0	0.6916

**Cuadro 4:** Valores logaritmizados de  $L$  y  $T$ .

**Nota:** Elaboración propia.

Los valores del **Cuadro 4**, pueden verse gráficamente en la **Figura 4**.





**Figura 4:** Gráfica de  $\ln(L)$  vs.  $\ln(T)$ .

**Nota:** Elaboración propia.

## 5.2. Método de mínimos cuadrados

Se calculan los parámetros de la recta por el método de los mínimos cuadrados, con la ayuda de los datos presentados en el **Cuadro 5**.

$i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$	$Y_i$	$d_i$	$d_i^2 (10^{-4})$
1	0.3574	0.1553	-0.2356	0.3938	0.0002	0.0005
2	0.2609	0.1884	-0.2217	0.4375	-0.0035	0.1222
3	0.1856	0.2277	-0.2056	0.4777	-0.0006	0.0034
4	0.1272	0.2704	-0.1855	0.5150	0.0050	0.2516
5	0.0828	0.3042	-0.1587	0.5496	0.0020	0.0387
6	0.0498	0.3386	-0.1299	0.5820	-0.0001	0.0001
7	0.0264	0.3712	-0.0990	0.6125	-0.0033	0.1060
8	0.0111	0.4103	-0.0675	0.6412	-0.0006	0.0042
9	0.0026	0.4511	-0.0345	0.6683	0.0033	0.1109
10	0	0.4784	0	0.6941	-0.0025	0.0602

**Cuadro 5:** Valores para el método de mínimos cuadrados.

**Nota:** Elaboración propia.

$$n = 10$$

$$\sum x_i = -2.7261$$

$$\sum y_i = 5.5719$$

$$\sum x_i^2 = 1.1038$$

$$\sum y_i^2 = 3.1956$$

$$\sum x_i y_i = -1.3378$$

$$\Delta_1 = n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2 = 3.6067$$

$$\Delta_2 = n \sum y_i^2 - \left( \sum y_i \right)^2 = 0.9104$$

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{\Delta_1} = 0.6941$$

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta_1} = 0.5022$$

$$\sum d^2 = 6.9772 \times 10^{-5}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n - 2} = 8.7215 \times 10^{-6}$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta_1}} = 0.0016$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta_1}} = 0.0049$$

Parámetros de la recta obtenida:

$$A = (0.6941 \pm 0.0016)[u]; 0.2354 \%$$

$$B = (0.5022 \pm 0.0049)[u]; 0.9791 \%$$

Siendo el coeficiente de correlación:

$$R = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} = 0.9996$$

La ecuación de la recta resultante es:

$$y = 0.6941 + 0.5022 x$$

A partir de los parámetros de recta  $A$  y  $B$ , se calculan los parámetros  $a$  y  $b$  de la curva original y sus errores por el método de propagación de errores:

$$\begin{aligned}a &= e^A = e^{0.6941} = 2.0019 \\b &= B = 0.5022 \\e_a &= e^A e_A = e^{0.6941} (0.0016) = 0.0033 \\e_b &= e_B = 0.0049\end{aligned}$$

Obteniendo finalmente los valores de la curva:

$$\begin{aligned}a &= (2.0019 \pm 0.0033)[s/\sqrt{m}]; 0.1634 \% \\b &= (0.5022 \pm 0.0049)[u]; 0.9791 \%\end{aligned}$$

La ecuación de la curva resultante es:

$$T = aL^b = 2.0019 d^{0.5022} = 2.0019 \sqrt{d}$$

### 5.3. Cálculo de la gravedad

Para el cálculo de la gravedad, se utiliza la **Ecuación 3**:

$$g = \frac{4\pi^2}{a^2} = \frac{4(3.1415)^2}{(2.0019)^2} = 9.8508$$

Y el error de la medición es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial a} &= 4\pi^2(-2)a^{-3} = -\frac{8\pi^2}{a^3} \\e_g &= \frac{8\pi^2}{a^3} e_a = 0.0322\end{aligned}$$

Resultando:

$$g = (9.8508 \pm 0.0322)[m/s^2]; 0.3268 \%$$

## Apéndice B: Cálculos realizados en *Octave*

A continuación se presenta los cálculos realizados en el programa *Octave* para la generación de las gráficas, la linealización de la curva, el calculo de los mínimos cuadrados y el valor de la gravedad.

```
# Datos importados (i1.csv):
0.55,14.85,14.81
0.60,15.42,15.45
0.65,16.09,16.14
0.70,16.88,16.76
0.75,17.35,17.37
0.80,17.87,17.92
0.85,18.37,18.41
0.90,19.01,18.94
0.95,19.53,19.62
1.00,20.02,19.92

# Comandos ejecutados (o1.m):
function graficar(t,_x,_y,eps,x,y)
    f = figure()

    title(t)
    xlabel(_x)
    ylabel(_y)

    hold on
    grid on
    plot(x, y, 'o')

    print(f,eps,'-color')
    hold off
end

function [A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)
    xx = x.*x
    yy = y.*y
    xy = x.*y

    % tamaño de la muestra
    n = length(x)

    % calculo de las sumatorias
    sx = sum(x)
    sy = sum(y)

    sxx = sum(xx)
    syy = sum(yy)
    sxy = sum(xy)

    D1 = (n * sxx) - (sx)^2
    D2 = (n * syy) - (sy)^2
```

```
% calculo de los valores de la recta
A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D1
B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D1

% calculo del error
Y = A + (B * x)
d = y - Y

dd = d.*d
sdd = sum(dd)
s2 = sdd / ( n - 2)

sA = sqrt( (s2 * sxx) / D1 )
sB = sqrt( (s2 * n) / D1 )

% calculando el error porcentual
EA = abs(sA / A) * 100
EB = abs(sB / B) * 100

% calculo de correlacion
R = ((n * sxy) - (sx * sy)) / sqrt( D1 * D2 )
end

clear
close all
clc

addpath('.../.../octave')

% leer datos previamente formateados
table = csvread('i1.csv')

L = table(:,1)
t1 = table(:,2)
t2 = table(:,3)

% calculo del valor representativo
tp = (t1 + t2) / 2

% calculo del periodo
T = tp / 10

graficar(
    '',
    'Longitud [m]',
    'Periodo [s]',
    'o1.1.eps',
    L,
    T
)

x = log(L)
y = log(T)

graficar(
```

```

'',
'ln(L)',
'ln(T)',
'o1.2.eps',
x,
y
)

[A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)

% calculando los valores originales
e = exp(1)
a = e^A
b = B

% calculando el error absoluto
sa = (e^A) * sA
sb = sB

% calculando el error porcentual
Ea = abs(sa / a) * 100
Eb = abs(sb / b) * 100

% calculo de la gravedad
g = (4 * pi^2) / a^2
e_g = ((8*(pi^2))/a^3) * sa
E_g = abs(e_g / g) * 100

# Salida del programa (o1.out):
table =

    0.5500    14.8500    14.8100
    0.6000    15.4200    15.4500
    0.6500    16.0900    16.1400
    0.7000    16.8800    16.7600
    0.7500    17.3500    17.3700
    0.8000    17.8700    17.9200
    0.8500    18.3700    18.4100
    0.9000    19.0100    18.9400
    0.9500    19.5300    19.6200
    1.0000    20.0200    19.9200

L =

    0.5500
    0.6000
    0.6500
    0.7000
    0.7500
    0.8000
    0.8500
    0.9000
    0.9500
    1.0000

```

t1 =

14.850  
15.420  
16.090  
16.880  
17.350  
17.870  
18.370  
19.010  
19.530  
20.020

t2 =

14.810  
15.450  
16.140  
16.760  
17.370  
17.920  
18.410  
18.940  
19.620  
19.920

tp =

14.830  
15.435  
16.115  
16.820  
17.360  
17.895  
18.390  
18.975  
19.575  
19.970

T =

1.4830  
1.5435  
1.6115  
1.6820  
1.7360  
1.7895  
1.8390  
1.8975  
1.9575  
1.9970

f = 1

x =

-0.5978

```
-0.5108  
-0.4308  
-0.3567  
-0.2877  
-0.2231  
-0.1625  
-0.1054  
-0.0513  
0
```

y =

```
0.3941  
0.4341  
0.4772  
0.5200  
0.5516  
0.5819  
0.6092  
0.6405  
0.6717  
0.6916
```

f = 2

xx =

```
0.3574  
0.2609  
0.1856  
0.1272  
0.0828  
0.0498  
0.0264  
0.0111  
0.0026  
0
```

yy =

```
0.1553  
0.1884  
0.2277  
0.2704  
0.3042  
0.3386  
0.3712  
0.4103  
0.4511  
0.4784
```

xy =

```
-0.2356  
-0.2217  
-0.2056  
-0.1855
```



```
-0.1587
-0.1299
-0.0990
-0.0675
-0.0345
  0

n = 10
sx = -2.7261
sy = 5.5719
sxx = 1.1038
syy = 3.1956
sxy = -1.3378
D1 = 3.6067
D2 = 0.9104
A = 0.6941
B = 0.5022
Y =

  0.3938
  0.4375
  0.4777
  0.5150
  0.5496
  0.5820
  0.6125
  0.6412
  0.6683
  0.6941

d =

  2.1753e-04
 -3.4964e-03
 -5.8309e-04
  5.0161e-03
  1.9661e-03
 -9.4240e-05
 -3.2558e-03
 -6.4702e-04
  3.3299e-03
 -2.4530e-03

dd =

  4.7319e-08
  1.2225e-05
  3.3999e-07
  2.5161e-05
  3.8655e-06
  8.8811e-09
  1.0600e-05
  4.1863e-07
  1.1088e-05
  6.0173e-06
```

```
sdd = 6.9772e-05
s2 = 8.7215e-06
sA = 1.6338e-03
sB = 4.9175e-03
EA = 0.2354
EB = 0.9791
R = 0.9996
A = 0.6941
sA = 1.6338e-03
B = 0.5022
sB = 4.9175e-03
R = 0.9996
e = 2.7183
a = 2.0019
b = 0.5022
sa = 3.2707e-03
sb = 4.9175e-03
Ea = 0.1634
Eb = 0.9791
g = 9.8508
e_g = 0.032188
E_g = 0.3268
```