# Examen: Laboratorio Física II
# Péndulo simple


Carlos Eduardo Caballero Burgoa

200201226@est.umss.edu


14 de julio de 2021

**Grupo**: Miércoles
**Gestión**: I/2021
**Docente**: Ing. Milka Mónica Torrico Troche
**Carrera**: Ing. Electromecánica


**Resumen**

Este documento detalla el experimento realizado para hallar la relación funcional entre el periodo de oscilación ($T$) y la longitud ($L$) de un péndulo simple, además de calcular el valor de la aceleración de la gravedad; para esto se realizó la medición de 5 oscilaciones de un péndulo con una longitud determinada; y posteriormente se calcula la relación funcional después de linealizar la curva y ajustarla con el método de mínimos cuadrados, finalmente se determinó el valor de la gravedad, resultando ser igual a: $(10.23 \pm 0.37)[m/s^2]; 3.63\,\%$.


## 1. Introducción

Un péndulo simple es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de una cuerda no expansible y de masa despreciable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio vertical descendente, oscilará alrededor de dicha posición [1].

En la **Figura 1** se detallan las fuerzas que actúan sobre la masa ($m$) en cualquier instante del movimiento, estas fuerzas son: La tensión ($F$) de la cuerda y la fuerza de gravedad ($mg$), que se descompone en función del ángulo desplazado ($\theta$), en una componente normal ($mg\,cos\,\theta$) y una componente tangencial ($mg\,sen\,\theta$) [2].

Aplicando la segunda ley de *Newton* en la dirección tangencial, se obtiene:

$$-mg\,sen\,(\theta) = m\,a_t$$

La aceleración en la dirección tangencial es:

$$a_t = \frac{d^2S}{dt^2}$$

Donde $S$ es la longitud del arco o trayectoria circular, cuya relación con el ángulo $\theta$ y la longitud de la cuerda $L$ es:

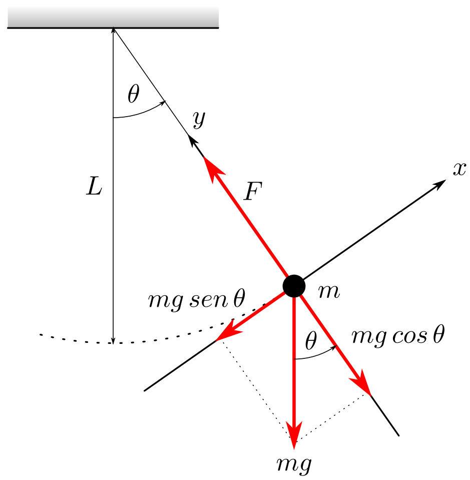


**Figura 1:** Péndulo simple idealizado.
**Nota:** Física Universitaria Volumen I (p. 454),
Young, Hugh D. y Freedman, Roger A., 2013, Pearson.

$$S = \theta\, L$$

Por tanto:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\,(\theta) = 0$$

Si se consideran tan solo oscilaciones de pequeña amplitud, de modo que el ángulo $\theta$ sea siempre suficientemente pequeño, entonces el valor del $sen\,(\theta)$ será muy próximo al valor de $\theta$ expresado en radianes ($sen\,(\theta) \cong \theta$, para $\theta$ suficientemente pequeño), como se aprecia en el **Cuadro 1** [3].

| $\theta[°]$ | $\theta[rad]$ | $sen\,(\theta)$ | diferencia ( %) | $\theta[°]$ | $\theta[rad]$ | $sen\,(\theta)$ | diferencia ( %) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00 | 15 | 0.26180 | 0.25882 | 1.15 |
| 2 | 0.03491 | 0.03490 | 0.02 | 20 | 0.34907 | 0.34202 | 2.06 |
| 5 | 0.08727 | 0.08716 | 0.13 | 25 | 0.43633 | 0.42262 | 3.25 |
| 10 | 0.17453 | 0.17365 | 0.51 | 30 | 0.52360 | 0.50000 | 4.72 |

**Cuadro 1:** Comparación entre el valor del ángulo y su función seno.
**Nota:** Adaptado de péndulo simple (Wikipedia).

La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

La **Ecuación 1** corresponde a un **oscilador armónico simple** cuya solución general es:

$$\theta(t) = A\,cos\,(\omega\,t + \phi)$$

Donde $A$ representa el máximo desplazamiento angular de $\theta$, $\omega$ es la frecuencia angular, y $\phi$ el desfase. Tanto la magnitud $A$, como $\phi$ son dos constantes determinadas por las condiciones iniciales.

La frecuencia angular ($\omega$) esta determinada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Considerando que $\omega = 2\pi/T$, el periodo de oscilación para el péndulo simple es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L} \tag{1}$$

Para el experimento se comprobará la relación funcional entre la longitud de la cuerda establecida ($L$), y el periodo ($T$), establecida por la **Ecuación 1**. Finalmente se determinará el valor de la gravedad ($g$) en Cochabamba, despejando la variable ($g$).

## 2. Método experimental

Para facilitar la medición, se ha armado el equipo mostrado en la **Figura 2**, el cual consta de un barra horizontal previamente nivelada, a la cual se ha sujetado un transportador para que la oscilación no exceda los 10°. Una vez montado el soporte, se escogió una moneda de colección atada a hilo que se haría oscilar.

Se escoge un valor de longitud ($L$) y se registrará la cantidad de tiempo que requiere el péndulo para hacer 10 oscilaciones completas.

Una vez medidos los datos para 5 valores distintos de longitud ($L$), se procederá a calcular el periodo ($T$) con la siguiente ecuación:

$$T = \frac{t}{10} \tag{2}$$

Luego se procederá a graficar la relación longitud ($L$) vs. periodo ($T$), para realizar primeramente la linealización de la curva por logaritmos, y luego el calculo de la recta por el método de los mínimos cuadrados, posteriormente hallar la relación funcional entre las variables.

Finalizando con el calculo del valor de la gravedad, a partir de la **Ecuación 1**:

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

Donde $a$ es uno de los parámetros de la curva hallada.

Despejando $g$, se obtiene:

**Figura 2:** Montaje para el experimento.
**Nota:** Fotografía propia.

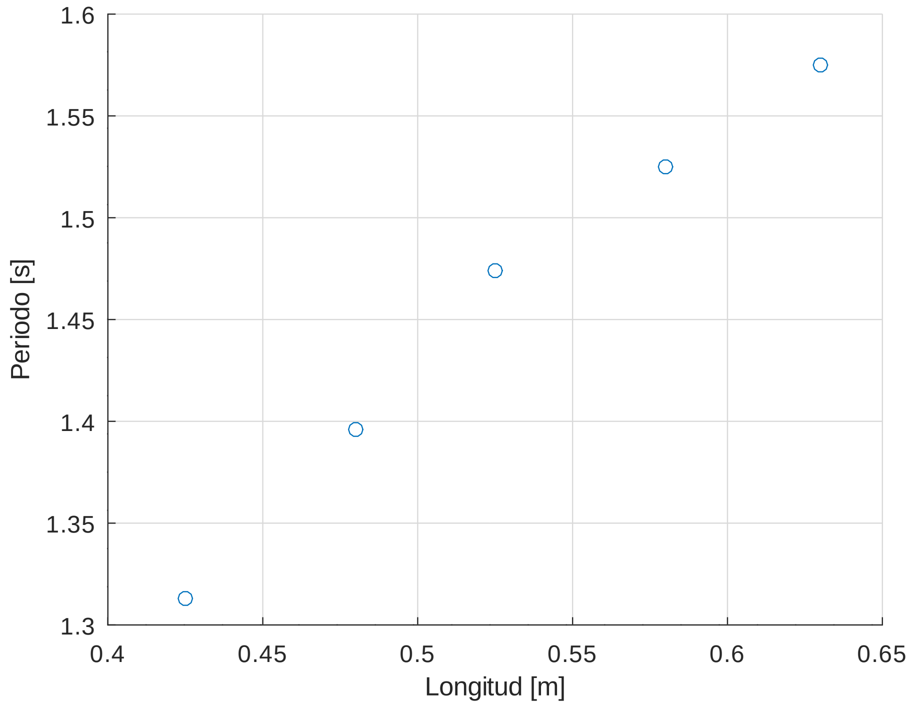


**Figura 3:** Gráfica de longitud vs periodo.
**Nota:** Elaboración propia.

$$g = \frac{4\pi^2}{a^2} \tag{3}$$

**Datos tomados en el experimento:**

En el **Cuadro 2**, se pueden ver los valores tomados del experimento, tanto la longitud como el tiempo de 10 oscilaciones, además del valor del periodo resultante.

| $i$ | $L_i[m]$ | $t_{1i}[s]$ | $T_i[s]$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.630 | 15.75 | 1.5750 |
| 2 | 0.580 | 15.25 | 1.5250 |
| 3 | 0.525 | 14.74 | 1.4740 |
| 4 | 0.480 | 13.96 | 1.3960 |
| 5 | 0.425 | 13.13 | 1.3130 |

**Cuadro 2:** Mediciones de tiempo en función de la longitud del péndulo.
**Nota:** Elaboración propia.

## 3. Resultados

A partir de los datos obtenidos se calculó el periodo de oscilación ($T$) para los valores de longitud ($L$), con los que se generó la gráfica de la **Figura 3**.

Posteriormente se linealizó la curva por medio de logaritmos, y se calculó la recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados, resultando los siguientes valores:

$$A = (0.68 \pm 0.02)[u]; 2.70\,\%$$
$$B = (0.46 \pm 0.03)[u]; 5.90\,\%$$

Siendo su coeficiente de correlación ($r$):

$$r = 0.9948$$

Con los valores hallados, se calculan los valores originales de la curva, resultando:

$$a = (1.96 \pm 0.03)[s/\sqrt{m}]; 1.81\,\%$$
$$b = (0.46 \pm 0.03)[u]; 5.90\,\%$$

Resultando el modelo de ajuste:

$$T = 1.96\,L^{0.46}$$

Por tanto la relación funcional aproximada entre $T$ y $L$, es:

| **Resultado** |
|---|
| $T \propto \sqrt{L}$ |

Verificándose el comportamiento establecido por la **Ecuación 1**.

Para el calculo de la gravedad ($g$) se utiliza la **Ecuación 3**, resultando:

| **Resultado** |
|---|
| $g = (10.23 \pm 0.37)[m/s^2]; 3.63\,\%$ |

## 4. Discusión

Considerando la discrepancia entre el valor nominal de la gravedad $g = (9.78 \pm 0.02)[m/s^2]$ y el resultado hallado, se considera que la baja cantidad de datos, además que la toma de una única repetición, esta afectando mucho la medición.

Se recomienda realizar el experimento con mas de 5 datos, y con mayor numero de repeticiones, para mejorar la precisión del experimento.

Cosa que no se realizó en este por la falta del tiempo necesario para la toma de datos.

## 5. Conclusiones

Se verificaron las ecuaciones planteadas en la introducción, así como la ecuación de un oscilador armónico simple.

También se calculó el valor de la gravedad, a pesar de la notoria discrepancia con el valor teórico.

## Referencias

[1] Young, Hugh D. y Freedman, Roger A. (2013).
Física Universitaria. Volumen 1.
13va Edición.
Capitulo 14.

[2] Departamento de Física - UMSS.
Laboratorio de Física Básica II.
Guía - Cartilla de laboratorio.
Gestión I/2020.

[3] Péndulo simple
Extraído el 27 de Abril del 2021, de:
`https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_simple`.

## Apéndice A: Cálculos realizados en *Octave*

A continuación se presenta los cálculos realizados en el programa *Octave* para la generación de las gráficas, la linealización de la curva, el calculo de los mínimos cuadrados y el valor de la gravedad.

```
# Datos importados (i1.csv):
0.630,15.75
0.580,15.25
0.525,14.74
0.480,13.96
0.425,13.13
```

```
# Comandos ejecutados (o1.m):
function graficar(t,_x,_y,eps,x,y)
    f = figure()

    title(t)
    xlabel(_x)
    ylabel(_y)

    hold on
    grid on
    plot(x, y, 'o')

    print(f,eps,'-color')
    hold off
end


function [A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)
    xx = x.*x
    yy = y.*y
    xy = x.*y

    % tamano de la muestra
    n = length(x)

    % calculo de las sumatorias
    sx = sum(x)
    sy = sum(y)

    sxx = sum(xx)
    syy = sum(yy)
    sxy = sum(xy)

    D1 = (n * sxx) - (sx)^2
```

```
    D2 = (n * syy) - (sy)^2

    % calculo de los valores de la recta
    A = ( (sy * sxx) - (sxy * sx) ) / D1
    B = ( (n * sxy) - (sx * sy) ) / D1

    % calculo del error
    Y = A + (B * x)
    d = y - Y

    dd = d.*d
    sdd = sum(dd)
    s2 = sdd / ( n - 2)

    sA = sqrt( (s2 * sxx) / D1 )
    sB = sqrt( (s2 * n) / D1 )

    % calculando el error porcentual
    EA = abs(sA / A) * 100
    EB = abs(sB / B) * 100

    % calculo de correlacion
    R = ((n * sxy) - (sx * sy)) / sqrt( D1 * D2 )
end


clear
close all
clc

addpath('../../../octave')

% leer datos previamente formateados
table = csvread('i1.csv')

L = table(:,1)
t = table(:,2)

% calculo del periodo
T = t / 10

graficar(
    '',
    'Longitud [m]',
    'Periodo [s]',
    'o1.1.eps',
    L,
    T
)

x = log(L)
y = log(T)

graficar(
    '',
    'ln(L)',
```

```
    'ln(T)',
    'o1.2.eps',
    x,
    y
)

[A,sA,B,sB,R]=minimoscuadrados(x,y)

% calculando los valores originales
e = exp(1)
a = e^A
b = B

% calculando el error absoluto
sa = (e^A) * sA
sb = sB

% calculando el error porcentual
Ea = abs(sa / a) * 100
Eb = abs(sb / b) * 100

% calculo de la gravedad
g = (4 * pi^2) / a^2
e_g = ((8*(pi^2))/a^3) * sa
E_g = abs(e_g / g) * 100
```

```
# Salida del programa (o1.out):
table =

    0.6300   15.7500
    0.5800   15.2500
    0.5250   14.7400
    0.4800   13.9600
    0.4250   13.1300

L =

   0.6300
   0.5800
   0.5250
   0.4800
   0.4250

t =

   15.750
   15.250
   14.740
   13.960
```

```
   13.130

T =

   1.5750
   1.5250
   1.4740
   1.3960
   1.3130

f = 1
x =

  -0.4620
  -0.5447
  -0.6444
  -0.7340
  -0.8557

y =

   0.4543
   0.4220
   0.3880
   0.3336
   0.2723

f = 2
xx =

   0.2135
   0.2967
   0.4152
   0.5387
   0.7322

yy =

   0.206348
   0.178079
   0.150528
   0.111296
   0.074155

xy =

  -0.2099
  -0.2299
  -0.2500
  -0.2449
  -0.2330

n = 5
sx = -3.2408
sy = 1.8702
sxx = 2.1963
```

```
syy = 0.7204
sxy = -1.1676
D1 = 0.4789
D2 = 0.1046
A = 0.6753
B = 0.4648
Y =

   0.4605
   0.4221
   0.3758
   0.3341
   0.2776

d =

  -6.2894e-03
  -1.1199e-04
   1.2185e-02
  -5.2840e-04
  -5.2554e-03

dd =

   3.9557e-05
   1.2542e-08
   1.4848e-04
   2.7921e-07
   2.7619e-05

sdd = 2.1595e-04
s2 = 7.1982e-05
sA = 0.018169
sB = 0.027415
EA = 2.6905
EB = 5.8977
R = 0.9948
A = 0.6753
sA = 0.018169
B = 0.4648
sB = 0.027415
R = 0.9948
e = 2.7183
a = 1.9647
b = 0.4648
sa = 0.035697
sb = 0.027415
Ea = 1.8169
Eb = 5.8977
g = 10.228
e_g = 0.3717
E_g = 3.6339
```