2do Examen

Estudiante: CABALLERO BURGOA, Carlos Eduardo
Carrera: Ingeniería Electromecánica

1. Un péndulo simple de longitud L y peso mg esta pivotando a la masa M, la cual se desliza sin fricción sobre un plano horizontal, como se muestra en la figura. Utilice la ecuación de *Lagrange* para determinar las ecuaciones de movimiento del sistema.

Solución:

(a)

Calculando la energía cinética en coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\theta) - r\operatorname{sen}(\theta)\dot{\theta}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\operatorname{sen}(\theta) + r\cos(\theta)\dot{\theta}$$

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2(\theta) - 2\dot{r}r\dot{\theta}\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2(\theta)$$
$$\dot{y}^2 = \dot{r}^2\operatorname{sen}^2(\theta) + 2\dot{r}r\dot{\theta}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2\cos^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2(\theta) + \dot{r}^2\operatorname{sen}^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta)) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) + r^2\dot{\theta}^2(\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta))) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)} \tag{1}$$

Calculando las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$
$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$
$$F_r = -\frac{GmM}{r^2}$$
$$F_\theta = 0$$

Resultando:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{GmM}{r^2} = 0$$
$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0} \tag{2}$$
$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$$
$$\boxed{r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0} \tag{3}$$

(b)

De la segunda ecuación de movimiento se tiene:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \tag{4}$$

Por tanto:

$$\boxed{mr^2\dot{\theta} = \text{constante}}$$

Que representa el **momento angular (L)** de la partícula.

(c)

Si denominamos $h = L/m$:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \tag{5}$$

Reemplazando $\dot{\theta}$ en (2):

$$\ddot{r} - r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 + \frac{GM}{r^2} = 0$$
$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \tag{6}$$

Se realizará un cambio de variable:

$$q = \frac{1}{r} \tag{7}$$

Calculamos $\dot{r}$ y $\ddot{r}$, con la ayuda de (5) y (6):

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{q}\right)\dot{\theta} = -\frac{1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\right) = -\frac{1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}(hq^2)$$

$$\dot{r} = -h\frac{dq}{d\theta} \tag{8}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{dq}{d\theta}\right)\dot{\theta} = -h\frac{d^2q}{d\theta^2}\left(\frac{h}{r^2}\right) = -h\frac{d^2q}{d\theta^2}(hq^2)$$

$$\ddot{r} = -h^2q^2\frac{d^2q}{d\theta^2} \tag{9}$$

Reemplazando (9) y (7) en (6):

$$-h^2q^2\frac{d^2q}{d\theta^2} - h^2q^3 + GMq^2 = 0$$

$$q^2\left(-h^2\left(\frac{d^2q}{d\theta^2} + q\right) + GM\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{GM}{h^2}} \tag{10}$$

Ecuación diferencial cuya solución general es:

$$q(\theta) = A\cos(\theta) + B\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{GM}{h^2} \tag{11}$$

Para calcular los coeficientes A y B se plantean condiciones iniciales:

- Para $t = 0$, $r = r_0$, asumiendo $\theta = 0$:

$$q(0) = \frac{1}{r_0} \tag{12}$$

- Para $t = 0$, la velocidad radial $\dot{r} = \dot{r}_0$, asumiendo $\theta = 0$ y usando la ecuación (8):

$$\frac{dq}{d\theta}(0) = -\frac{\dot{r}_0}{h} \tag{13}$$

- Para $t = 0$, la velocidad angular $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, y sustituyendo h:

$$h = \frac{L}{m} = \frac{mr_0^2\dot{\theta}_0}{m} = r_0^2\dot{\theta}_0 \tag{14}$$

Reemplazando las condiciones (12) y (14) en (11):

$$
\begin{aligned}
q(0) &= A\cos(0) + B\,\mathrm{sen}(0) + \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2} \\
\frac{1}{r_0} &= A + \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2} \\
A &= \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Derivando la ecuación (11) y reemplazando (13) y (14):

$$
\begin{aligned}
\frac{dq(\theta)}{d\theta} &= A(-\,\mathrm{sen}(\theta)) + B\cos(\theta) \\
\frac{dq(0)}{d\theta} &= -A\,\mathrm{sen}(0) + B\cos(0) \\
B &= -\frac{\dot{r}_0}{r_0^2\dot{\theta}_0} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

2. Una palanqueta que consiste en dos esferas iguales pequeñas, unidas rigidamente a los extremos de una varilla delgada y lisa, puede moverse libremente en el espacio dentro de un fluido viscoso. Sin necesidad de tener en cuenta la resistencia sobre la varilla y suponiendo que no hay rotación de las esferas alrededor del eje que coincide con la varilla, determinar la funcion de potencia P.

Suponer que las coordenadas x, y, z, localizan el centro de masa de la palanqueta, l es la distancia del centro de masa, al cento de una de las esferas. θ y ϕ son las coordenadas esfericas usuales.

3. Una particula se mueve en contacto con un tablero horizontal rugoso. Suponiendo que el coeficiente de fricción para movimiento en la dirección de X es μ_x y que en la dirección de Y es μ_y. Determinar las fuerzas de fricción generalizadas, correspondientes a las coordenadas r y θ, o sea F_r y F_θ.