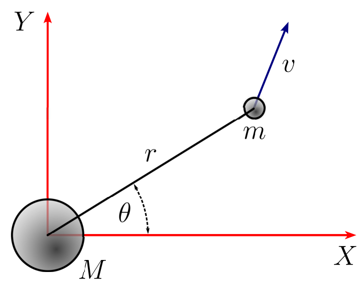
Ejercicio 3.10

Estudiante: CABALLERO BURGOA, Carlos Eduardo
Carrera: Ingeniería Electromecánica

La masa m de la figura es atraída hacia la masa estacionaria M por medio de la fuerza gravitacional $F = -GmR/r^2$. A una distancia inicial r_0 se le da a m una velocidad inicial v_0 en el plano XY. (a) Establézcanse las ecuaciones del movimiento en coordenadas r y θ. (b) Demostrar que el momento angular $p_\theta = mr^2\dot{\theta} =$ constante. (c) Con el auxilio de esto, integrar la ecuación de r y demostrar que la trayectoria es una cónica.



Solución:

(a)

Calculando la energía cinética en coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\theta) - r\operatorname{sen}(\theta)\dot{\theta}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\operatorname{sen}(\theta) + r\cos(\theta)\dot{\theta}$$

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2(\theta) - 2\dot{r}r\dot{\theta}\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2(\theta)$$
$$\dot{y}^2 = \dot{r}^2\operatorname{sen}^2(\theta) + 2\dot{r}r\dot{\theta}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2\cos^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2(\theta) + \dot{r}^2\operatorname{sen}^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta)) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) + r^2\dot{\theta}^2(\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta))) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)} \tag{1}$$

Calculando las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$
$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$F_r = -\frac{GmM}{r^2}$$
$$F_\theta = 0$$

Resultando:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{GmM}{r^2} = 0$$
$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0} \tag{2}$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$$
$$\boxed{r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0} \tag{3}$$

(b)

De la segunda ecuación de movimiento se tiene:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \tag{4}$$

Por tanto:

$$\boxed{mr^2\dot{\theta} = \text{constante}}$$

Que representa el **momento angular (L)** de la partícula.

(c)

Si denominamos $h = L/m$:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \tag{5}$$

Reemplazando $\dot{\theta}$ en (2):

$$\ddot{r} - r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \tag{6}$$

Se realizará un cambio de variable:

$$q = \frac{1}{r} \tag{7}$$

Calculamos $\dot{r}$ y $\ddot{r}$, con la ayuda de (5) y (6):

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{q}\right)\dot{\theta} = -\frac{1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\right) = -\frac{1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}(hq^2)$$

$$\dot{r} = -h\frac{dq}{d\theta} \tag{8}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{dq}{d\theta}\right)\dot{\theta} = -h\frac{d^2q}{d\theta^2}\left(\frac{h}{r^2}\right) = -h\frac{d^2q}{d\theta^2}(hq^2)$$

$$\ddot{r} = -h^2q^2\frac{d^2q}{d\theta^2} \tag{9}$$

Reemplazando (9) y (7) en (6):

$$-h^2q^2\frac{d^2q}{d\theta^2} - h^2q^3 + GMq^2 = 0$$

$$q^2\left(-h^2\left(\frac{d^2q}{d\theta^2} + q\right) + GM\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{GM}{h^2}} \tag{10}$$

Ecuación diferencial cuya solución general es:

$$q(\theta) = A\cos(\theta) + B\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{GM}{h^2} \tag{11}$$

Para calcular los coeficientes A y B se plantean condiciones iniciales:

- Para $t = 0$, $r = r_0$, asumiendo $\theta = 0$:

$$q(0) = \frac{1}{r_0} \tag{12}$$

- Para $t = 0$, la velocidad radial $\dot{r} = \dot{r}_0$, asumiendo $\theta = 0$ y usando la ecuación (8):

$$\frac{dq}{d\theta}(0) = -\frac{\dot{r}_0}{h} \tag{13}$$

- Para $t = 0$, la velocidad angular $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, y sustituyendo h:

$$h = \frac{L}{m} = \frac{mr_0^2\dot{\theta}_0}{m} = r_0^2\dot{\theta}_0 \tag{14}$$

Reemplazando las condiciones (12) y (14) en (11):

$$q(0) = A\cos(0) + B\operatorname{sen}(0) + \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2}$$

$$\frac{1}{r_0} = A + \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2}$$

$$A = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2} \tag{15}$$

Derivando la ecuación (11) y reemplazando (13) y (14):

$$\frac{dq(\theta)}{d\theta} = A(-\operatorname{sen}(\theta)) + B\cos(\theta)$$

$$\frac{dq(0)}{d\theta} = -A\operatorname{sen}(0) + B\cos(0)$$

$$B = -\frac{\dot{r}_0}{r_0^2\dot{\theta}_0} \tag{16}$$

Reemplazando las ecuaciones (14), (15) y (16) en (11):

$$q(\theta) = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2}\right)\cos(\theta) - \left(\frac{\dot{r}_0}{r_0^2\dot{\theta}_0}\right)\operatorname{sen}(\theta) + \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2}$$

Convirtiendo la función q en r usando el cambio de variable (7):

$$r(\theta) = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2}\right)\cos(\theta) - \left(\frac{\dot{r}_0}{r_0^2\dot{\theta}_0}\right)\operatorname{sen}(\theta) + \frac{GM}{\left(r_0^2\dot{\theta}_0\right)^2}}$$

$$r(\theta) = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_0}\right)\left(1 - \frac{GM}{r_0^3\dot{\theta}_0^2}\right)\cos(\theta) - \left(\frac{1}{r_0}\right)\left(\frac{\dot{r}_0}{r_0\dot{\theta}_0}\right)\operatorname{sen}(\theta) + \left(\frac{1}{r_0}\right)\frac{GM}{r_0^3\dot{\theta}_0^2}}$$

$$r(\theta) = \frac{r_0}{\left(1 - \frac{GM}{r_0^3\dot{\theta}_0^2}\right)\cos(\theta) - \left(\frac{\dot{r}_0}{r_0\dot{\theta}_0}\right)\operatorname{sen}(\theta) + \frac{GM}{r_0^3\dot{\theta}_0^2}}$$

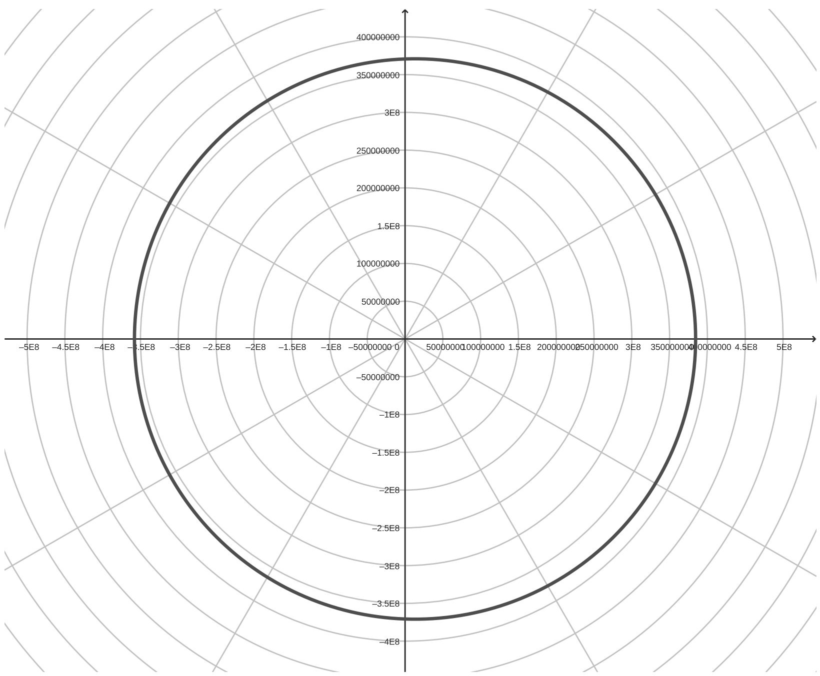
Si definimos a $u_0 = \dot{r}_0$ como la **velocidad radial** inicial y a $v_0 = r_0\dot{\theta}_0$ como la **velocidad tangencial** inicial, se obtiene:

$$\boxed{r(\theta) = \frac{r_0}{\left(1 - \dfrac{GM}{r_0 v_0^2}\right)\cos(\theta) - \left(\dfrac{u_0}{v_0}\right)\operatorname{sen}(\theta) + \dfrac{GM}{r_0 v_0^2}}}$$

Cuya trayectoria es una cónica, que según los parámetros de entrada puede ser una elipse o una hipérbola.

Por ejemplo, la orbita de la luna alrededor de la tierra:

G	$6.6742 \times 10^{-11} [Nm^2/kg^2]$
M	$5.972 \times 10^{24} [kg]$
r_0	$384400000 [m]$
v_0	$1000 [m/s]$
u_0	0



$$r(\theta) = \frac{384400000}{-0.036897\cos(\theta) + 1.0369}$$