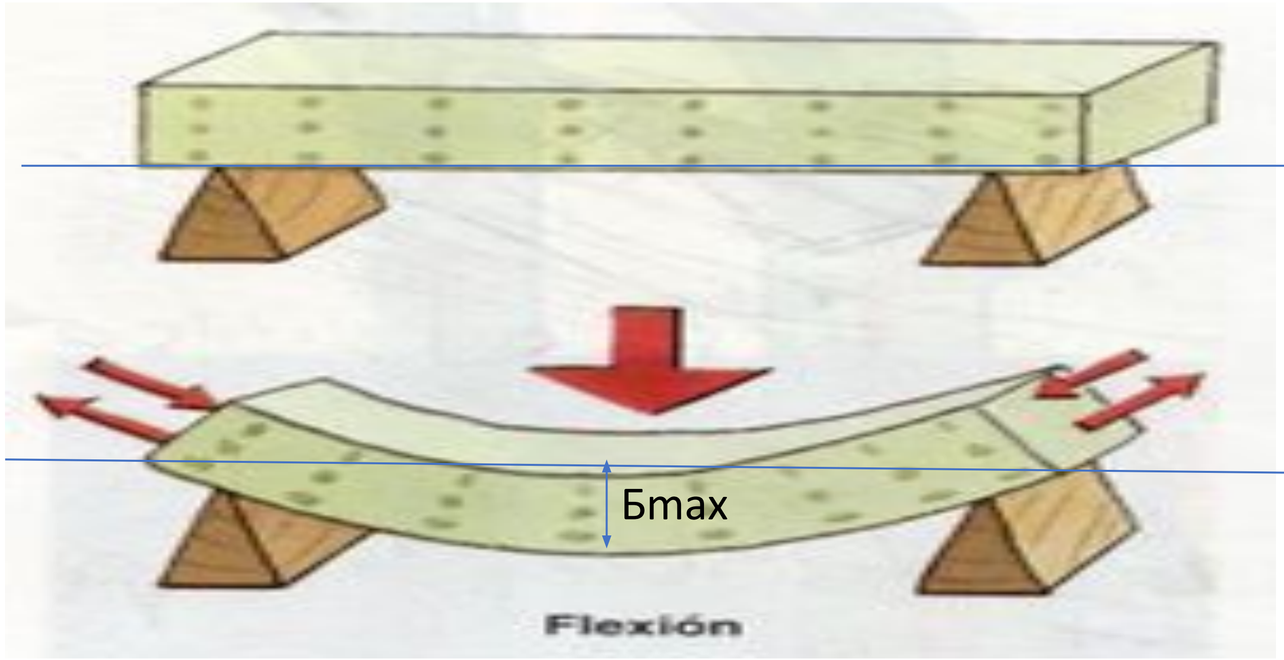
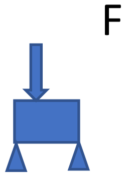
CAP VI.- DEFORMACIONES DEBIDO A LA FLEXION

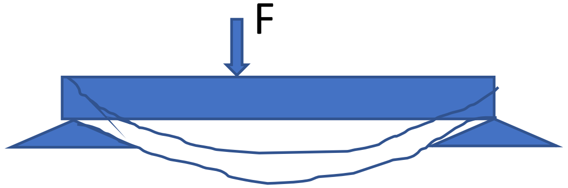
Profesor: Ing. Guido Gomez U.
Dpto de: Ingeniería Mecánica
FCyT- UMSS

CRITERIOS DE FALLA EN VIGAS





Corte puro

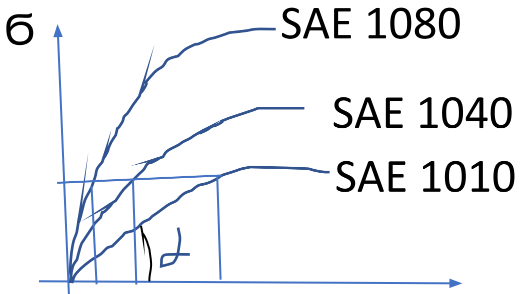


Flexión

$\frac{F}{A}$≤Tad

FALLAS A LA FLEXION:
- RESISTENCIA ➡ TENSIONES ➡ Ϭmax ≤ Ϭadm
- RIGIDEZ ➡ DEFORMACIONES ➡ Бmax ≤ Бadm

Ϭ= ε* E   ε = $\frac{Ϭ}{E}$



Materiales ductiles

E= Tg α

ECUACION DE LA ELASTICA

OBJETIVOS

- Hallar el valor de la deformación en cualquier punto.
- Aplicar el criterio de dimensionamiento a la rigidez.

Hipótesis:

1. La sección transversal tiene que ser uniforme.
2. El material tendrá que ser homogéneo y obedece a la ley de Hooke.
3. Las cargas que actúan sobre la viga, tendrán que ser perpendiculares sobre la viga.
4. El módulo de elasticidad a la tracción es aproximadamente igual al módulo de elasticidad al de compresión.
5. El esfuerzo de trabajo tendrá que ser menor al esfuerzo admisible

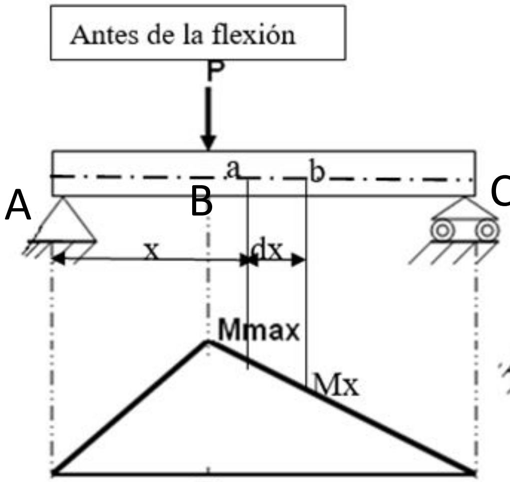


Fig. a

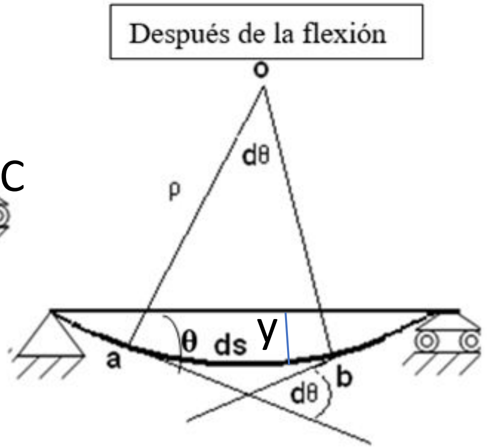


Fig. b

Analizaremos la deformación de una fibra situada sobre la línea neutra de longitud dx, que al deformarse formara un arco de longitud ds.

Por definición la derivada de una curva es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto, o lo que es lo mismo que:

$$Tan\theta \cong \theta \Rightarrow Tan\theta = \frac{dy}{dx} \quad \therefore \boxed{\theta = \frac{dy}{dx}} \text{ Derivando tenemos } \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots (7.1)$$

De la Fig.b, tenemos $d\theta = \frac{ds}{\rho}$ pero $ds \cong dx \Rightarrow d\theta = \frac{dx}{\rho} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho}$ …….. (7.2)

Sustituyendo la ecuación (8.2) en la ecuación (8.1) tenemos: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho}$ …….. (7.3)

Recordando del *capitulo 6* de flexión en vigas tenemos:

$$M = \frac{E*I}{\rho} \Rightarrow \frac{M}{E*I} = \frac{1}{\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7.4)$$

Sustituyendo la ecuación (8.4) en la ecuación (8.3) tenemos:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E*I}}$$ $\Rightarrow$ **Ecuación diferencial de la elástica…………………(7.5)**

METODO DE LA DOBLE INTEGRAL

$$\boxed{EI\frac{dy}{dx}=\int Mxdx + C1}$$ Ecuación de la pendiente de la elástica

$$\boxed{EIY=\iint Mxdx^2 + C1x + C2}$$

Ecuación integral de la elástica

Donde:

E = Modulo de elasticidad propio del material (Kg/cm^2).

I = Momento de inercia de la sección transversal de la viga (cm^4).

Y = Es la deformación de la viga (cm).

M = Ecuación singular de momento en función de X.

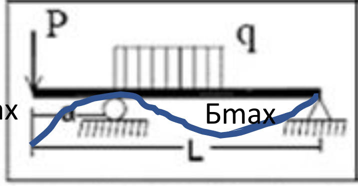
C_1 y C_2 son constantes que están en función de las condiciones de frontera.

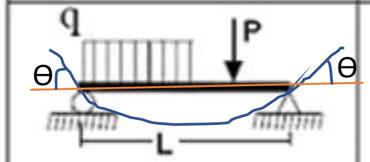
Cuyas unidades de C_1 es (Kg*m^2) y de C_2 es (Kg*m^3).

Deformación máxima:

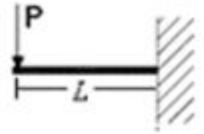
Y=f(x)........ Y=Ymax ⟺ $\frac{dy}{dx}=0$

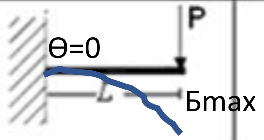
Condiciones para el caso de dos apoyos

Estructura	Condición 1	Condición 2
Бmax 	x=a y=0	x=L y=0

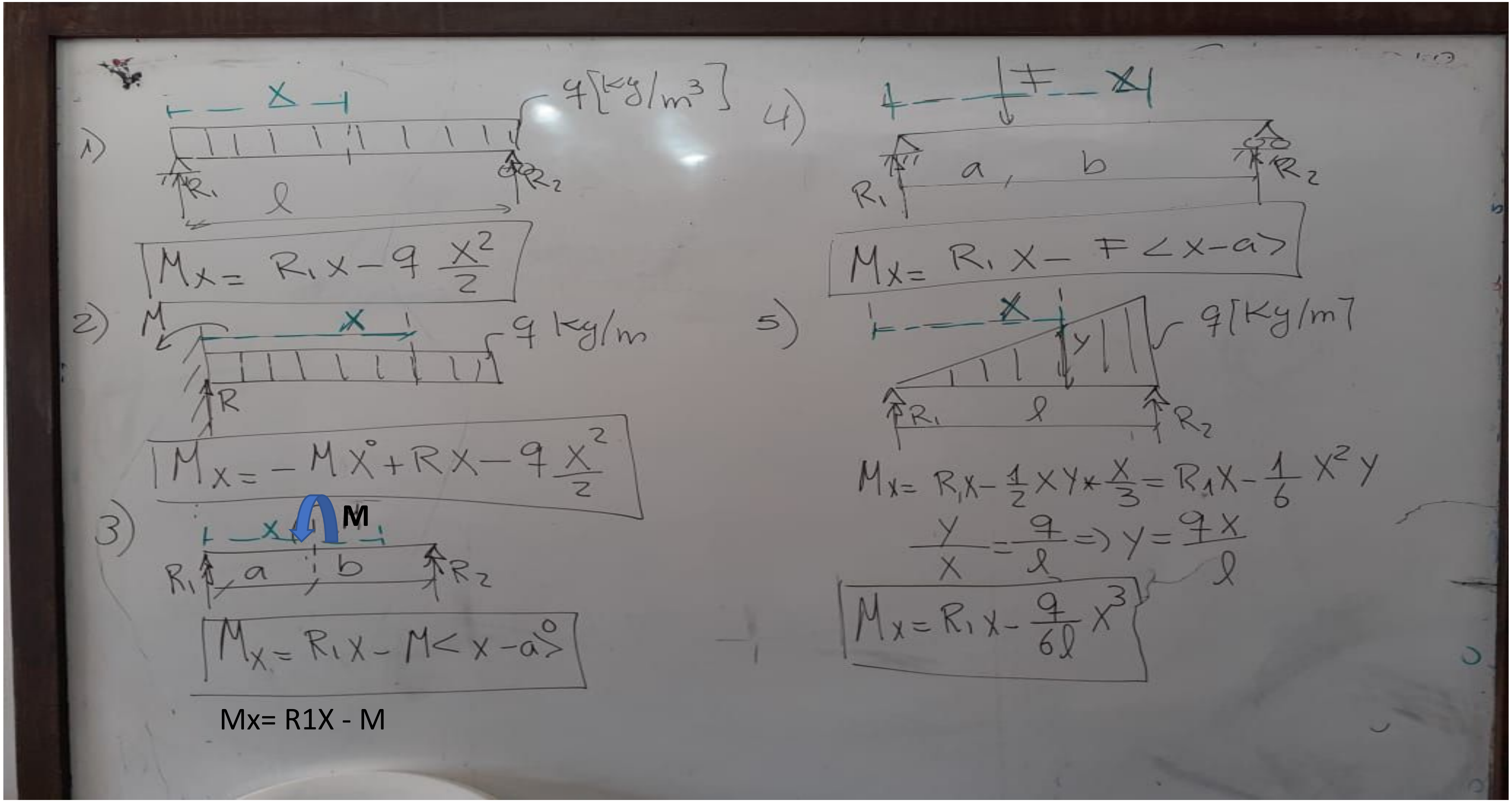
Estructura	Condición 1	Condición 2
	x=0 y=0	x=L y=0

Condiciones para el caso de empotrado

Estructura	Condición 1	Condición 2	Deformación máxima
	$\frac{dy}{dx}=0$ x=L	x=L y=0	x=0 Y=máxima

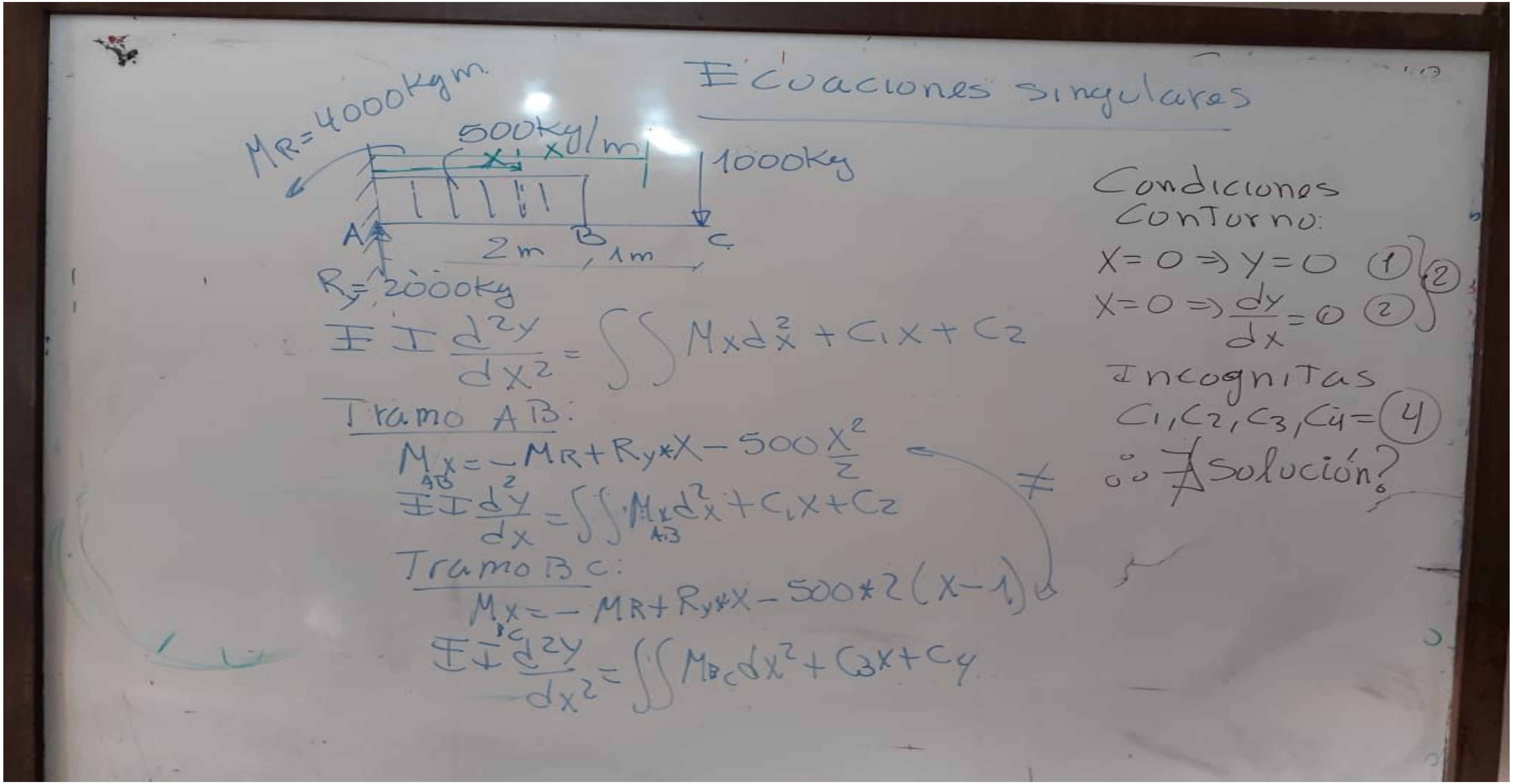
Estructura	Condición 1	Condición 2	Deformación máxima
	$\frac{dy}{dx}=0$ x=0	x=0 y=0	x=L Y=máxima

ECUACIONES DE MOMENTOS



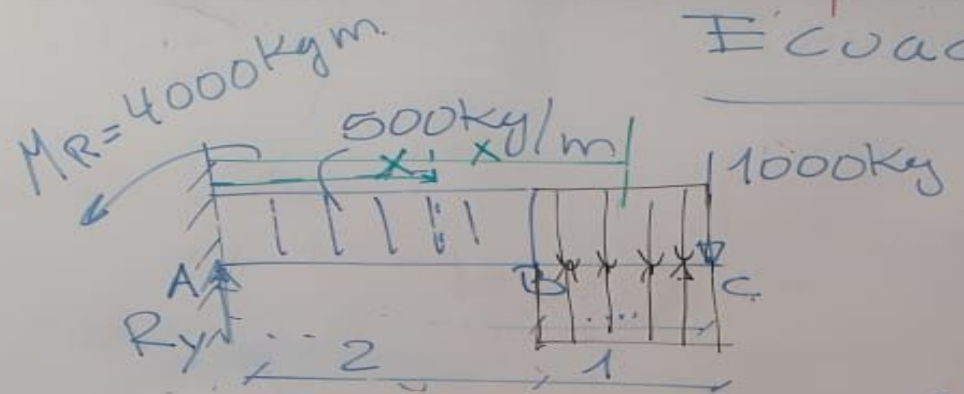
$M_x = R_1X - M$

ECUACIONES SINGULARES



ECUACIONES SINGULARES

Ecuaciones singulares



$$M_{AB} = -M_R + R_y * X - 500\frac{X^2}{2}$$

$$M_{BC} = \underbrace{-M_R + R_y * X - 500\frac{X^2}{2}}_{M_{AB}} + 500\frac{(X-2)^2}{2} \Rightarrow \text{"Ec. singular"}$$

Condición: Término es válido $\Leftrightarrow$ $(\quad) > 0$

Tramo AB: $0 < X < 2$

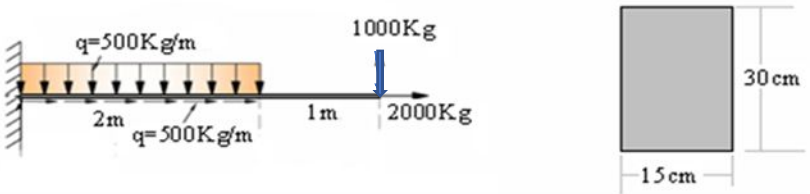
Sea $X = 1 \Rightarrow M = -M_R + R_1 X - 500\frac{X^2}{2}$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \iint \langle M_x \rangle dx^2 + C_1 X + C_2 \Rightarrow \text{"¿Incógnitas?"}$$

"Ec. singular de la elástica"

EJEMPLO 1.-

1.-Calcular la deformación máxima si $E=2.1 \times 10^6 Kg/cm^2$

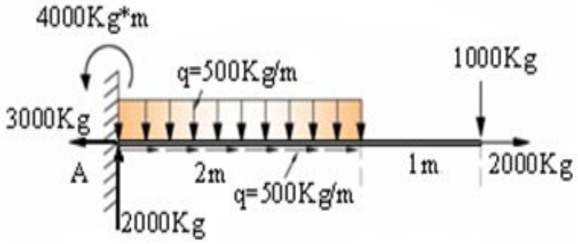


Para x=3m se da la deformación máxima.

$$EI\delta_{MAX} = -2000(3)^2 + \frac{1000}{3}(3)^3 - \frac{250}{12}(3)^4 + \frac{250}{12}(1)^4$$

$$EI\delta_{MAX} = -10666.67^{Kg\,m^3} \Rightarrow \delta_{MAX} = \frac{10666.67x10^6 Kg*cm^3}{2.1x10^6 * \frac{15*30^3}{12}} \Rightarrow \delta_{MAX} = 0.15\ cm$$

Solución:



$\sum F_x=0 \rightarrow - H + 1000+2000=0\rightarrow$

$H= 3000Kg$

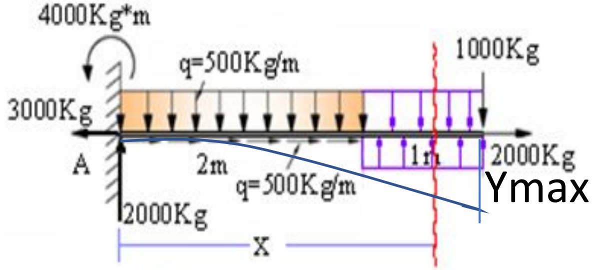
$\sum M_A=0$

$-M+500*2+1000*3=0\rightarrow M=4000Kg*m$

$\sum F_V=0$

$V_A - 1000 - 1000=0\rightarrow V_A =2000Kg$

Ecuación singular de momento para lo cual tiene que estar completo la carga para poder seccionar en el ultimo tramo, esta sección se hace con la finalidad de que el ultimo tramo contenga todas las ecuaciones de los anteriores tramos



$$\langle M\rangle = -4000*x^0 + 2000x - 250x^2 + 250\langle x-2\rangle^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -4000x + 1000x^2 - \frac{250}{3}x^3 + \frac{250}{3}\langle x-2\rangle^3 + c_1$$

$$EIY = -2000x^2 + \frac{1000}{3}x^3 - \frac{250}{12}x^4 + \frac{250}{12}\langle x-2\rangle^4 + c_1x + c_2$$

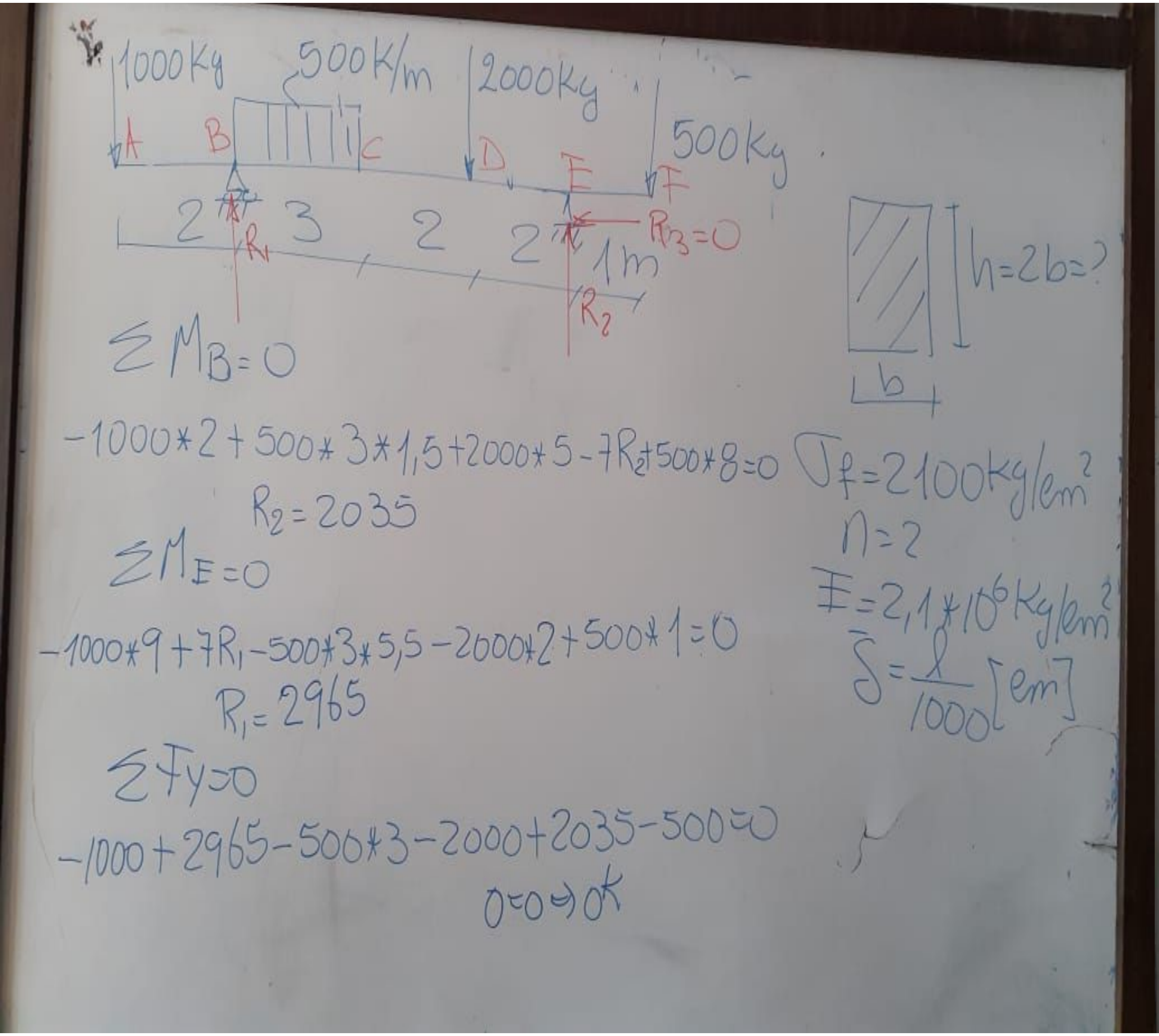
Condiciones de contorno

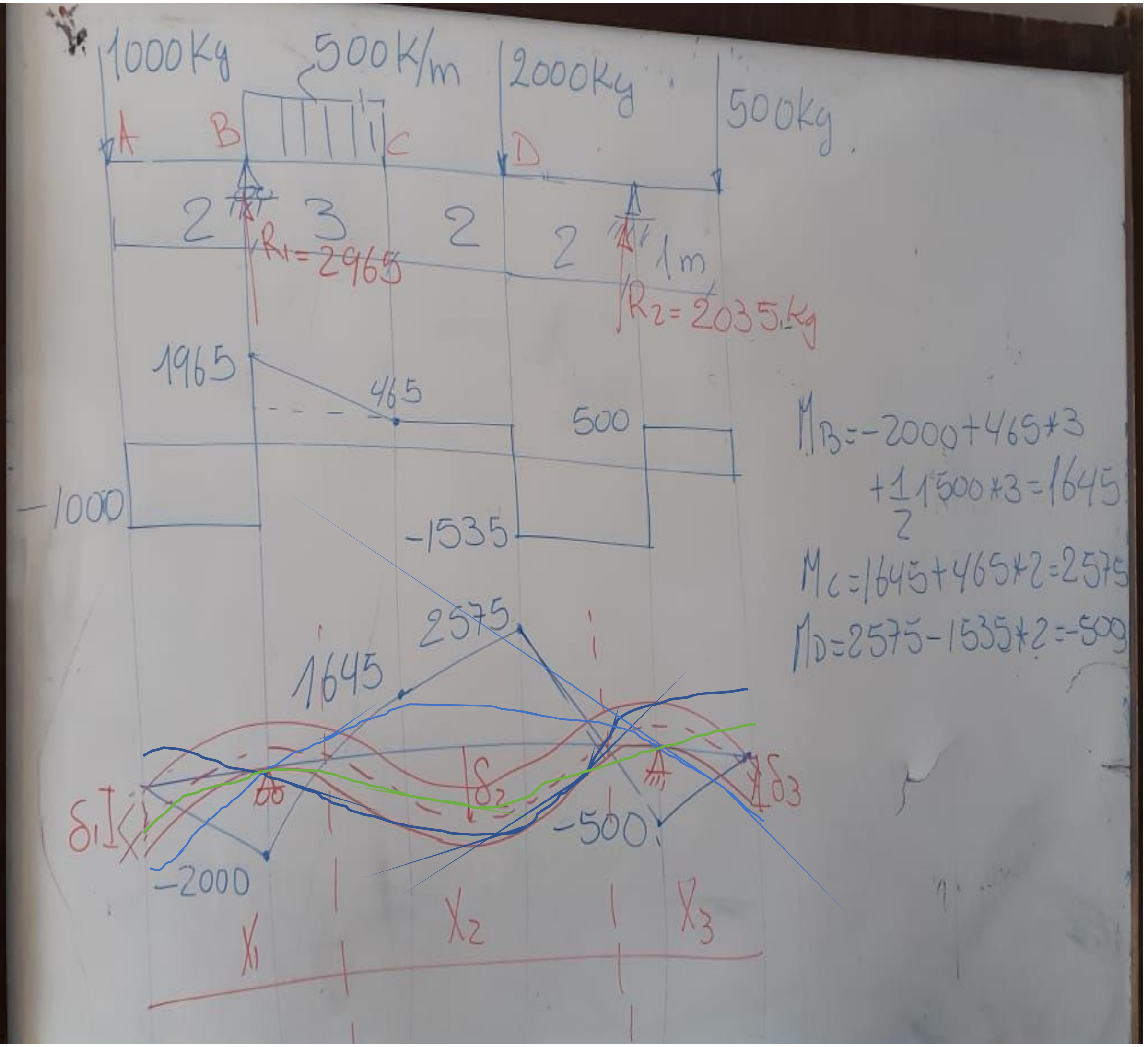
$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right. \Rightarrow c_2 = 0 \quad ; \quad \left.\frac{dy}{dx}=0\right|_{x=0} \Rightarrow c_1 = 0$

Ecuación de la elástica

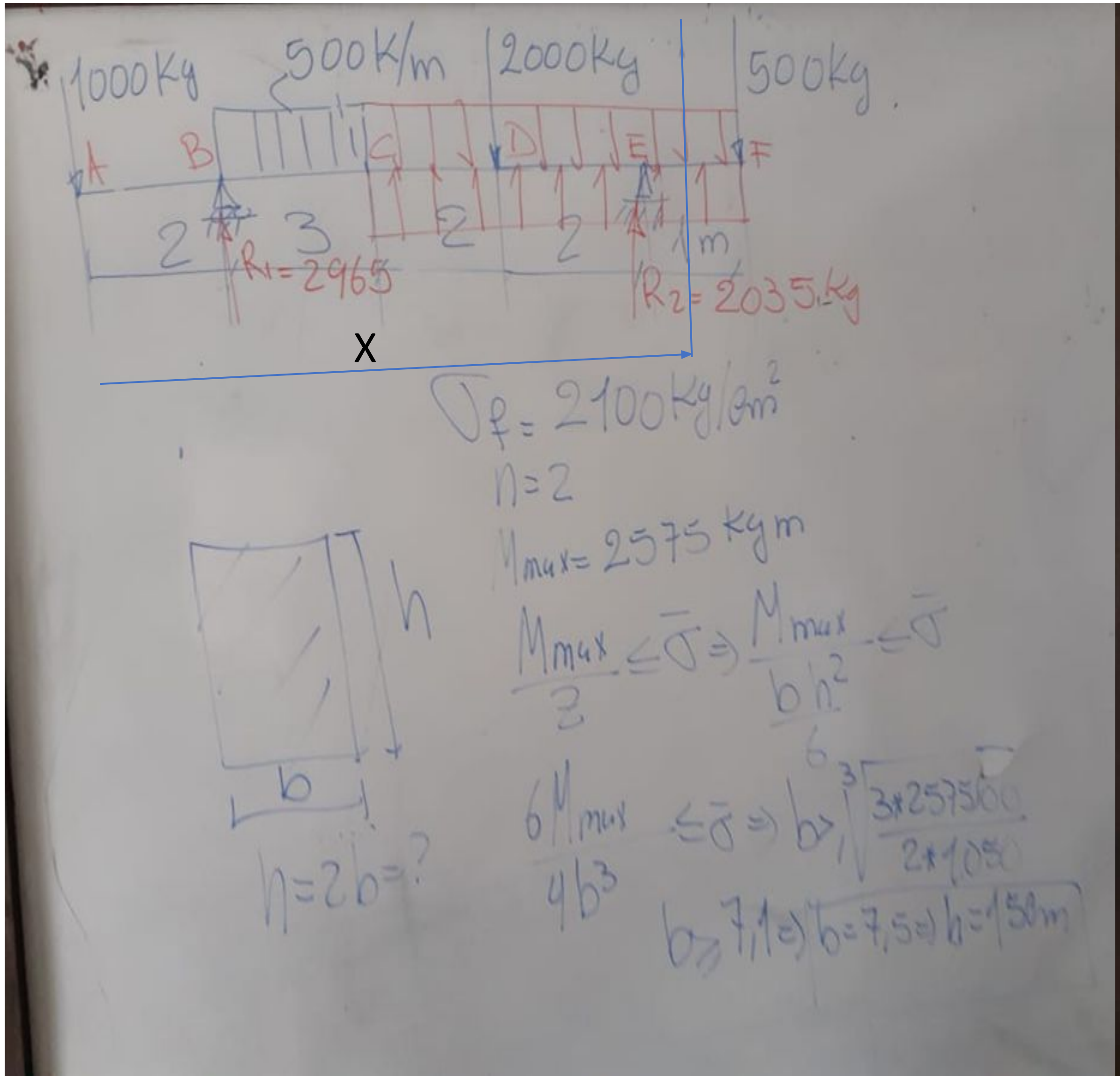
$$EIY = -2000x^2 + \frac{1000}{3}x^3 - \frac{250}{12}x^4 + \frac{250}{12}\langle x-2\rangle^4$$

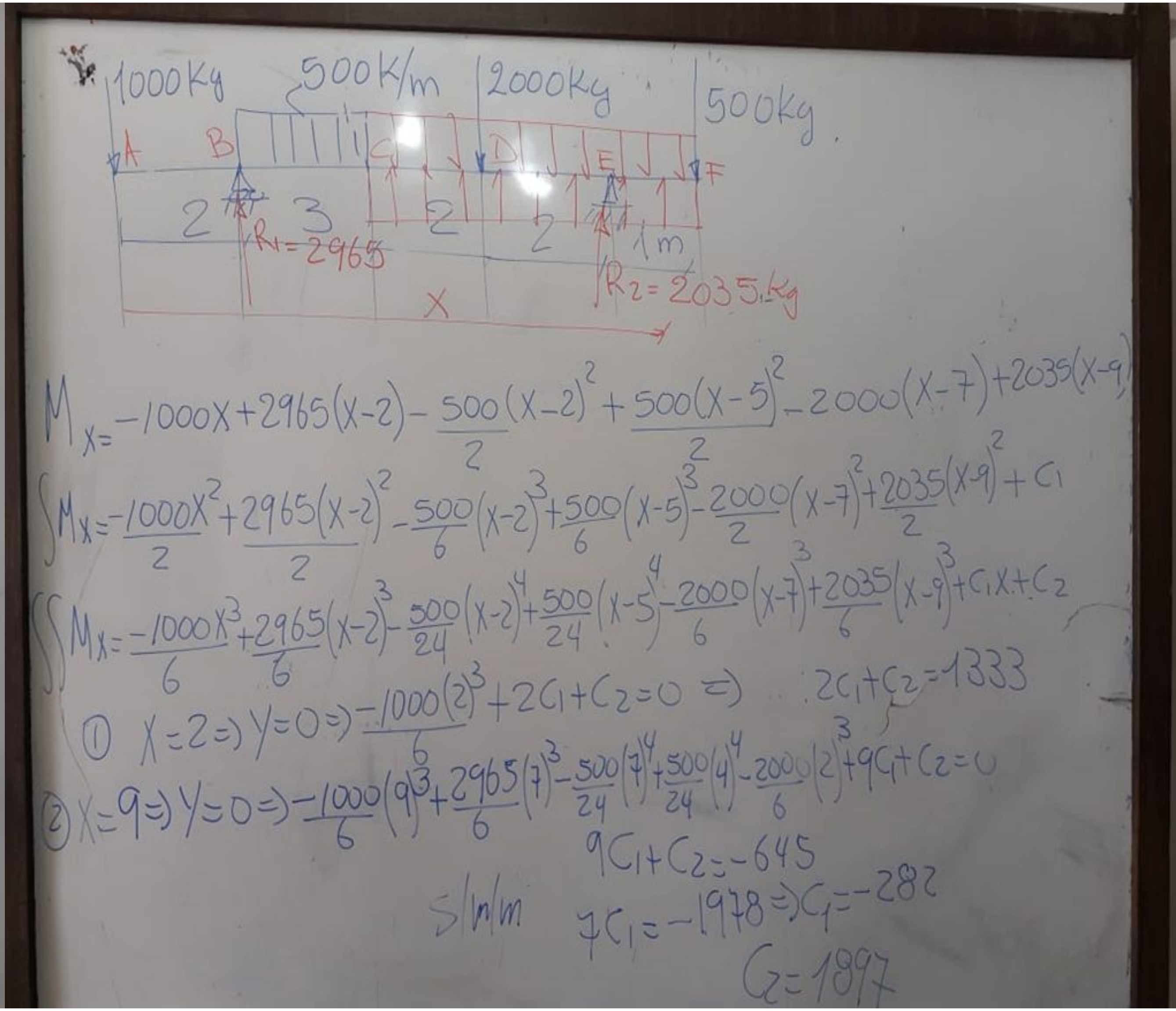
EJEMPLO 2.-


1000 Kg
500 K/m
2000 Kg
500 Kg
A B C D E F
2 3 2 2 1 m
R_1 R_2 $R_3=0$
h=2b=?
b
ΣM_B=0
-1000*2+500*3*1,5+2000*5-7R_2+500*8=0
R_2=2035
ΣM_E=0
-1000*9+7R_1-500*3*5,5-2000*2+500*1=0
R_1=2965
ΣFy=0
-1000+2965-500*3-2000+2035-500=0
0=0 ⇒ ok
σf=2100 kg/cm²
n=2
E=2,1*10^6 Kg/cm²
δ = l/1000 [cm]

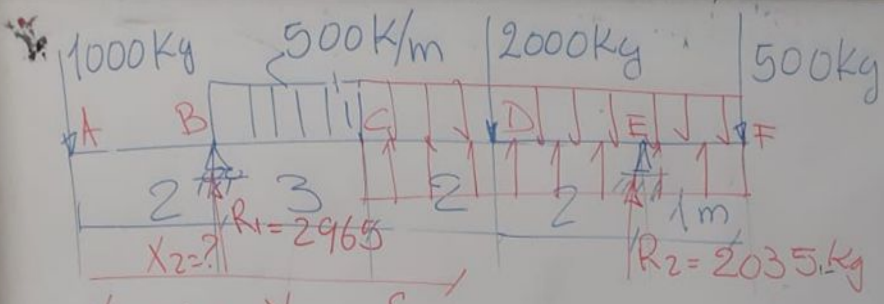

1000 Kg
500 K/m
2000 Kg
500 Kg
A B C D
2 3 2 2 1 m
R_1=2965
R_2=2035 Kg
1965
465
500
-1000
-1535
M_B=-2000+465*3+1/2 1500*3=1645
M_C=1645+465*2=2575
M_D=2575-1535*2=-500
2575
1645
-500
-2000
δ_1
δ_2
δ_3
X_1
X_2
X_3

EJEMPLO 2.-


1000 Kg
500 K/m
2000 Kg
500 Kg
A B C D E F
2 3 2 2 1m
R1=2965
R2=2035 Kg
X
σf = 2100 Kg/cm²
n=2
Mmax= 2575 Kgm
h
b
h=2b=?
b≥7,1 ⇒ b=7,5 ⇒ h=15cm


1000 Kg
500 K/m
2000 Kg
500 Kg
A B C D E F
2 3 2 2 1m
R1=2965
R2=2035 Kg
X
Mx= −1000X+2965(X−2)− 500(X−2)²/2 + 500(X−5)²/2 − 2000(X−7)+2035(X−9)
∫Mx= −1000X²/2 + 2965(X−2)²/2 − 500/6 (X−2)³ + 500/6 (X−5)³ − 2000/2 (X−7)² + 2035/2 (X−9)² + C1
∫∫Mx= −1000X³/6 + 2965/6 (X−2)³ − 500/24 (X−2)⁴ + 500/24 (X−5)⁴ − 2000/6 (X−7)³ + 2035/6 (X−9)³ + C1X + C2
① X=2 ⇒ Y=0 ⇒ −1000(2)³/6 + 2C1 + C2 = 0 ⇒ 2C1+C2=1333
② X=9 ⇒ Y=0 ⇒ −1000/6 (9)³ + 2965/6 (7)³ − 500/24 (7)⁴ + 500/24 (4)⁴ − 2000/6 (2)³ + 9C1 + C2 = 0
9C1+C2=−645
s/m/m
7C1=−1978 ⇒ C1=−282
C2=1897

EJEMPLO 2.-



$X_1 = 0 \Rightarrow Y_{max} = \delta_1$

$X_3 = 10 \Rightarrow Y_{max} = \delta_3$

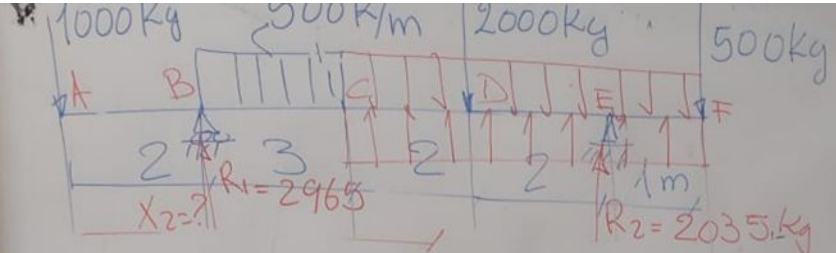
Para $X_2 = ?$

Tramo CD $\Rightarrow 5 \leq X < 7 \Rightarrow$ Sea $X = 6$

$$EI\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{1000}{2}x^2 + \frac{2965}{2}(x-2)^2 - \frac{500}{6}(x-2)^3 + \frac{500}{6}(x-5)^3 - 282 = 0$$

$$-500x^2 + 1482(x-2)^2 - 83(x-2)^3 + 83(x-5)^3 - 282 = 0$$

$X_2 = 5{,}90\ m \in (CD) \Rightarrow ok$



$$EIY = -\frac{1000}{6}X^3 + \frac{2965}{6}(X-2)^3 - \frac{500}{24}(X-2)^4 + \frac{500}{24}(X-5)^4 - \frac{2000}{6}(X-7)^3$$

$$+\frac{2035}{6}(X-9)^3 - 282X + 1897$$ Ecuación singular

Para $X_1 = 0$

$$EIY_{1,max} = 1897 * 10^6 \Rightarrow Y_{max_1} = \frac{1896 * 10^6}{2.1*10^6 * \frac{7{,}5 * 15^3}{12}} = 0{,}42\ cm$$

Para $X_2 = 5{,}9$

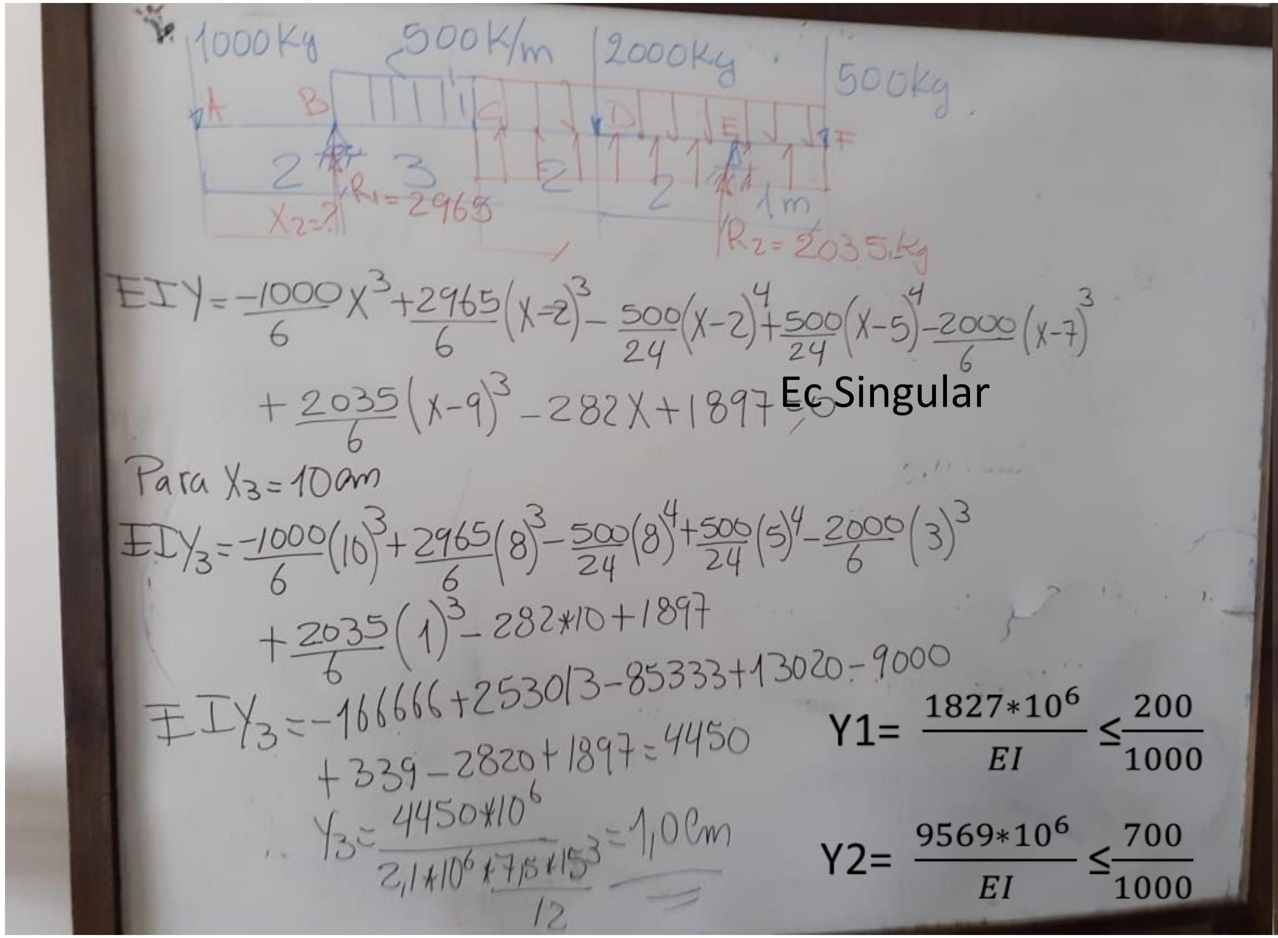
$$EIY_2 = -\frac{1000}{6}(5{,}9)^3 + \frac{2965}{6}(3{,}9)^3 - \frac{500}{24}(3{,}9)^4 + \frac{500}{24}(0{,}9)^4 - 282(5{,}9) + 1897$$

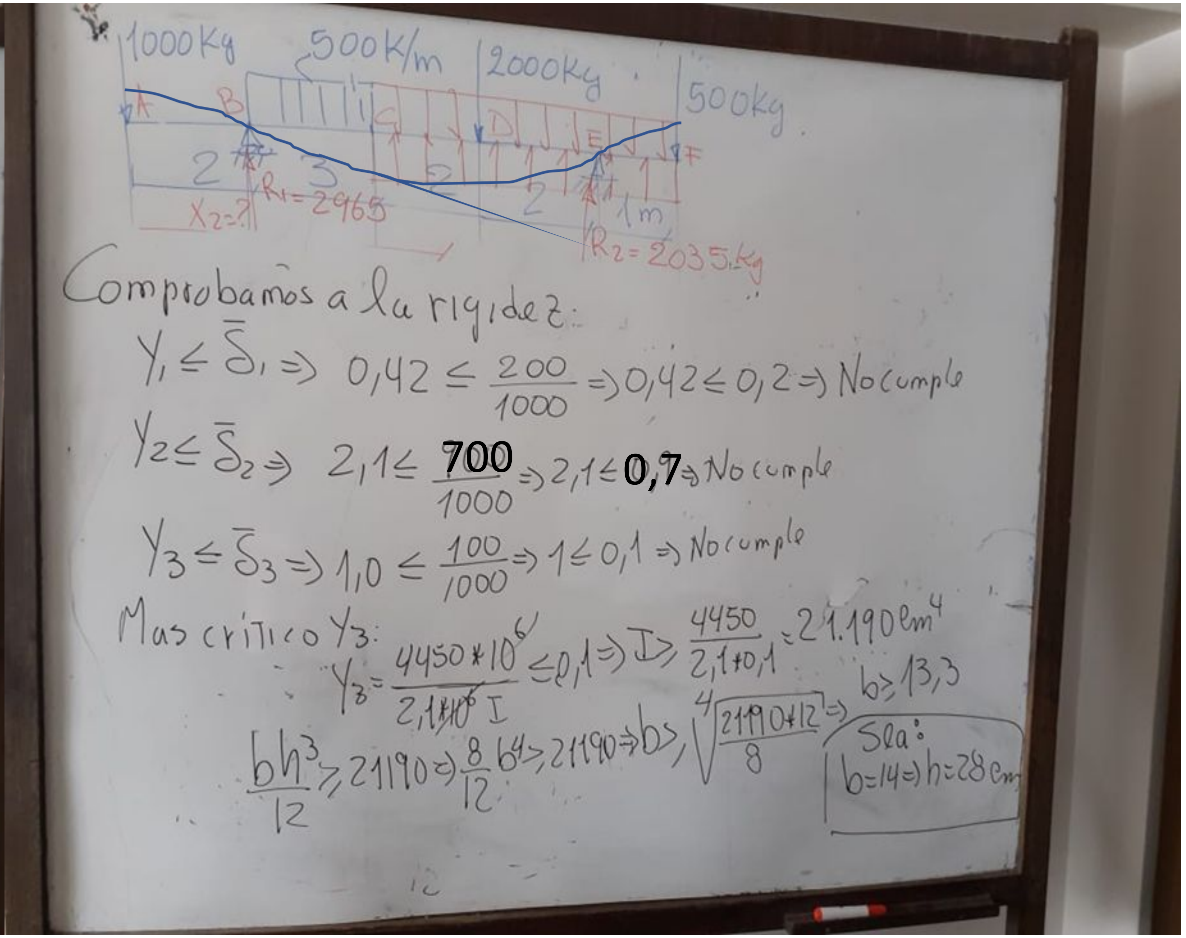
$$= -34229 + 29313 - 4819 + 13 - 1664 + 1897 = -9569$$

$$Y_2 = \frac{-9569 * 10^6}{2{,}1*10^6 * \frac{7{,}5*15^3}{12}} = -2{,}16\ cm$$

$$\int M_x = -\frac{1000}{2}X^2 + \frac{2965}{2}(X-2)^2 - \frac{500}{6}(X-2)^3 + \frac{500}{6}(X-5)^3 - \frac{2000}{2}(X-7)^2 + \frac{2035}{2}(X-9) + C_1$$

EJEMPLO 2.-



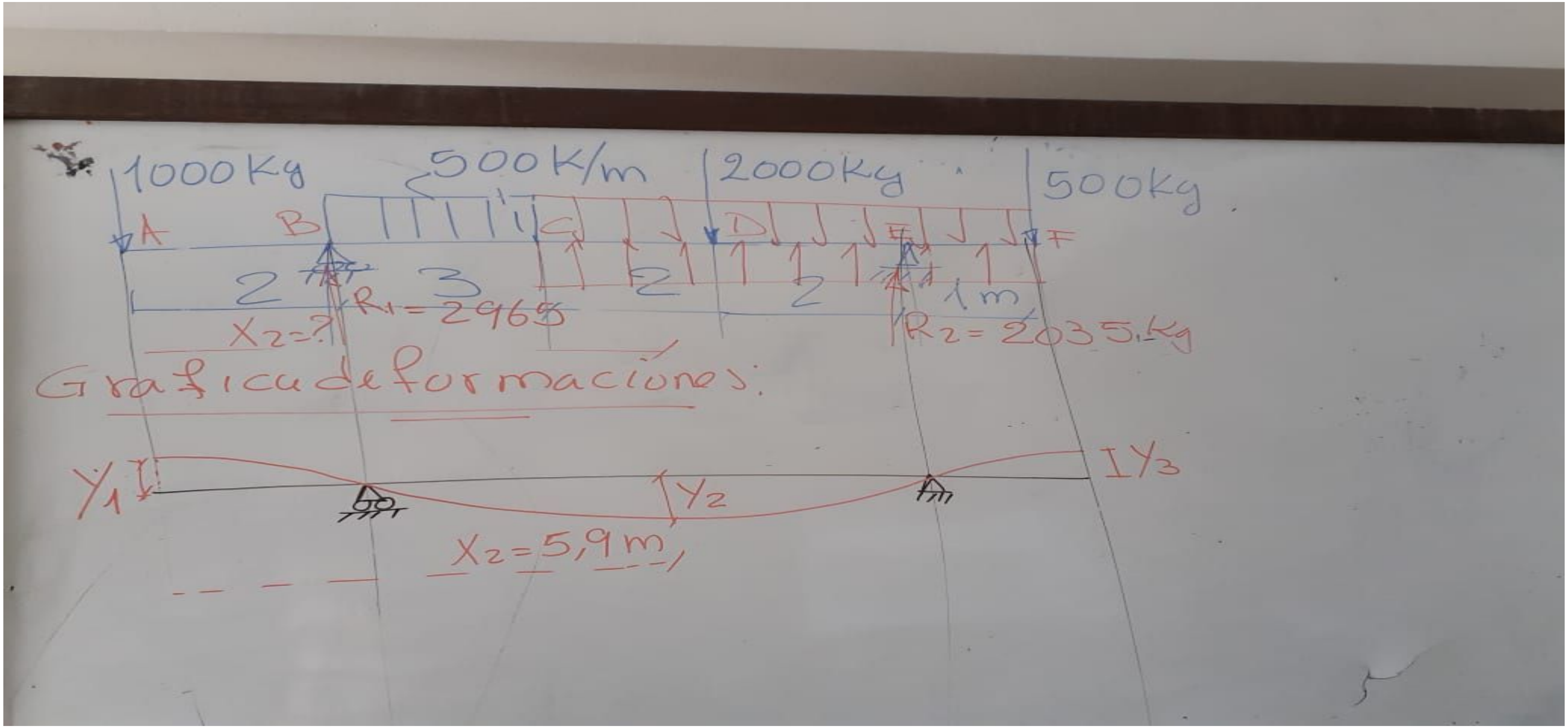


$$Y1=\frac{1827*10^6}{EI}\leq\frac{200}{1000}$$

$$Y2=\frac{9569*10^6}{EI}\leq\frac{700}{1000}$$

$$Y3=\frac{4450*10^6}{EI}\leq\frac{100}{1000}$$

EJEMPLO 2.-



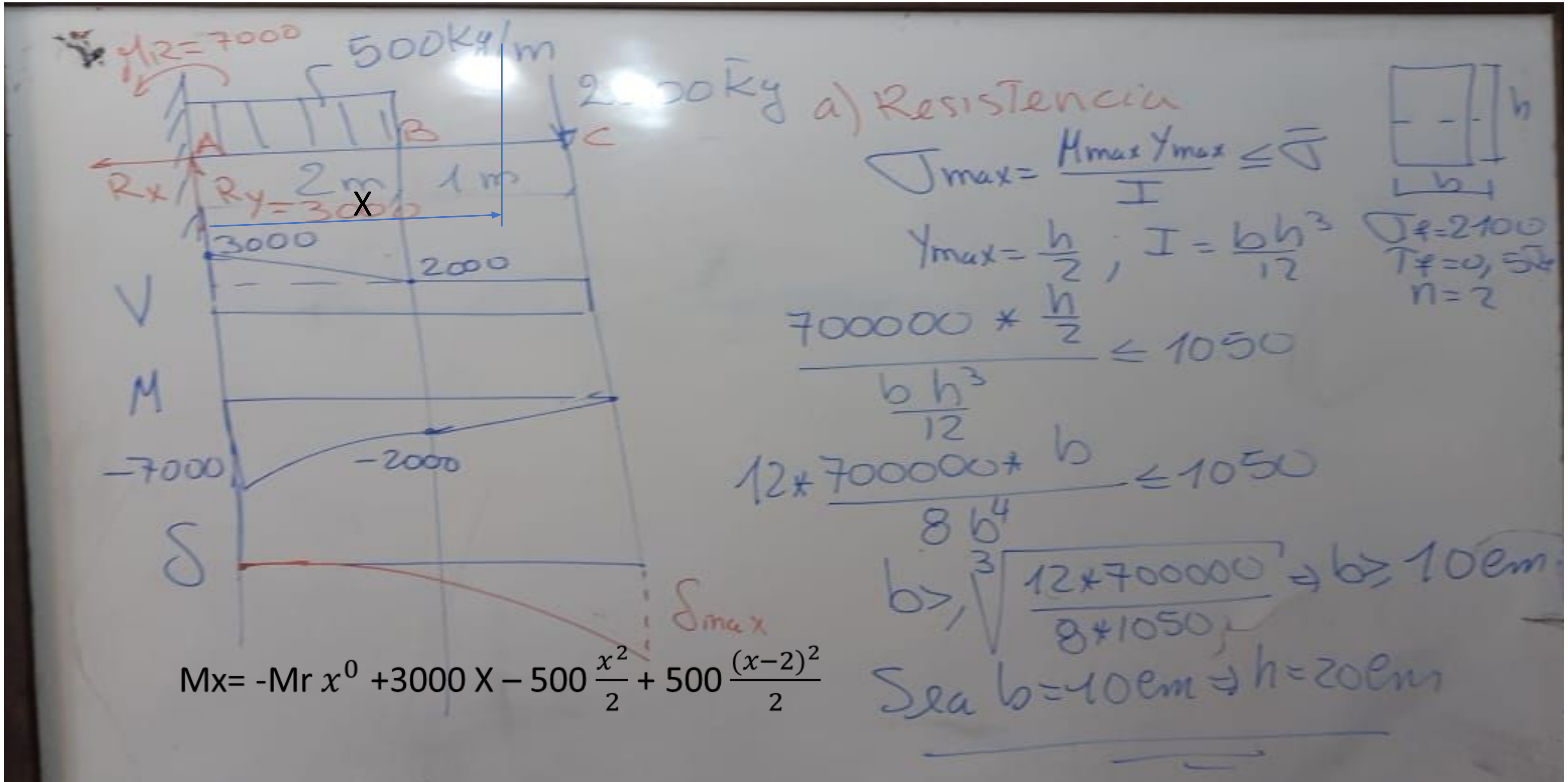
1000 Kg
500 K/m
2000 Kg
500 kg
A
B
C
D
E
F
2
3
2
2
1 m
R_1 = 2965
R_2 = 2035 Kg
X_2 = ?
Grafica deformaciones:
Y_1
Y_2
Y_3
X_2 = 5,9 m

EJEMPLO 3

PROBLEMA 2.- Dimensionar la viga de sección rectangular en la que h=2b, sabiendo que:

σf = 2100 Kg/cm2 $\quad \overline{\tau} = 0.5\overline{\sigma} \quad$ E=2.1*10^{6}kg/cm^2 y $\quad$ Ymax=$\dfrac{l}{2000}$ (cm)

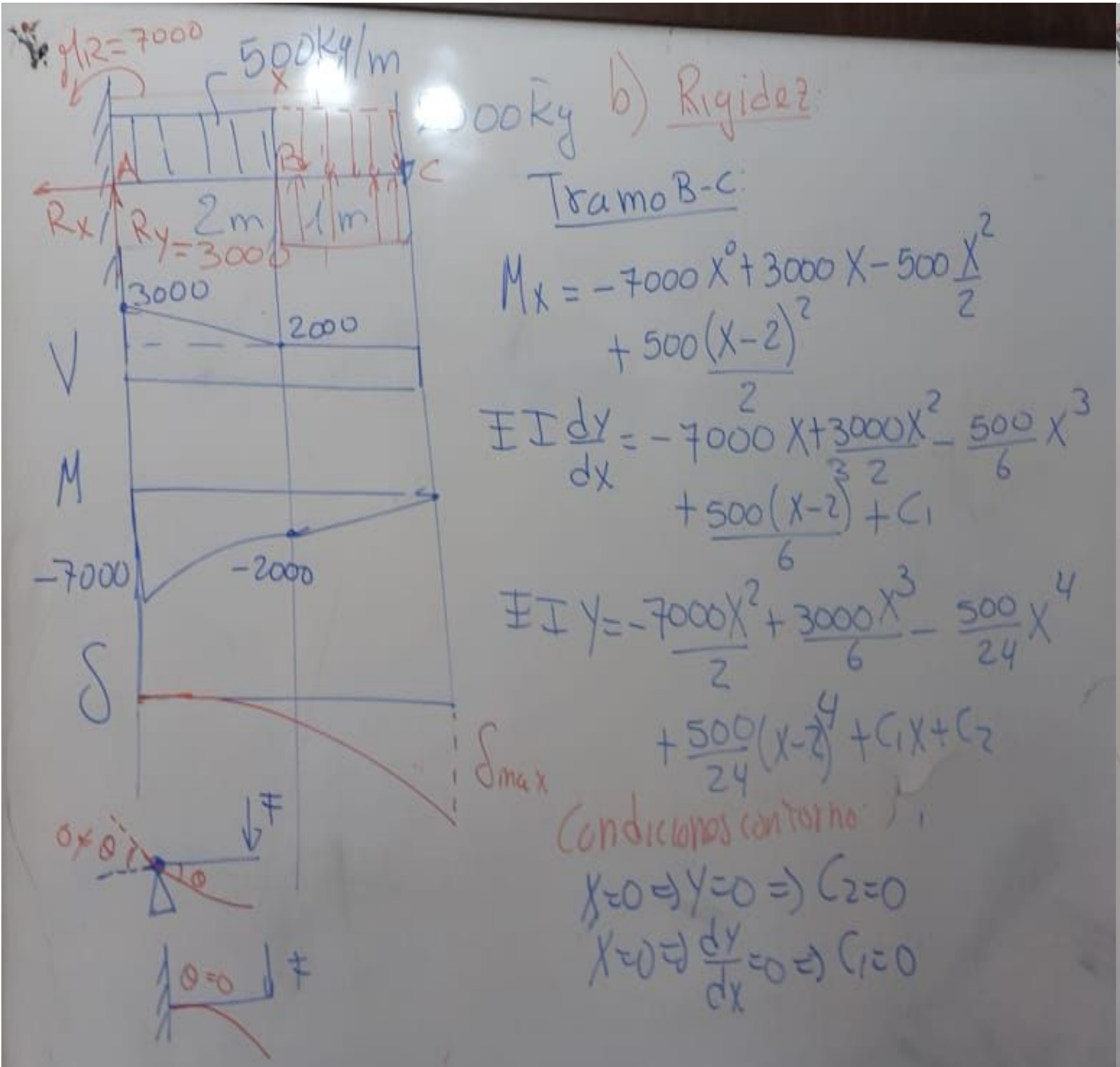
a) Dimensionamiento a la resistencia:

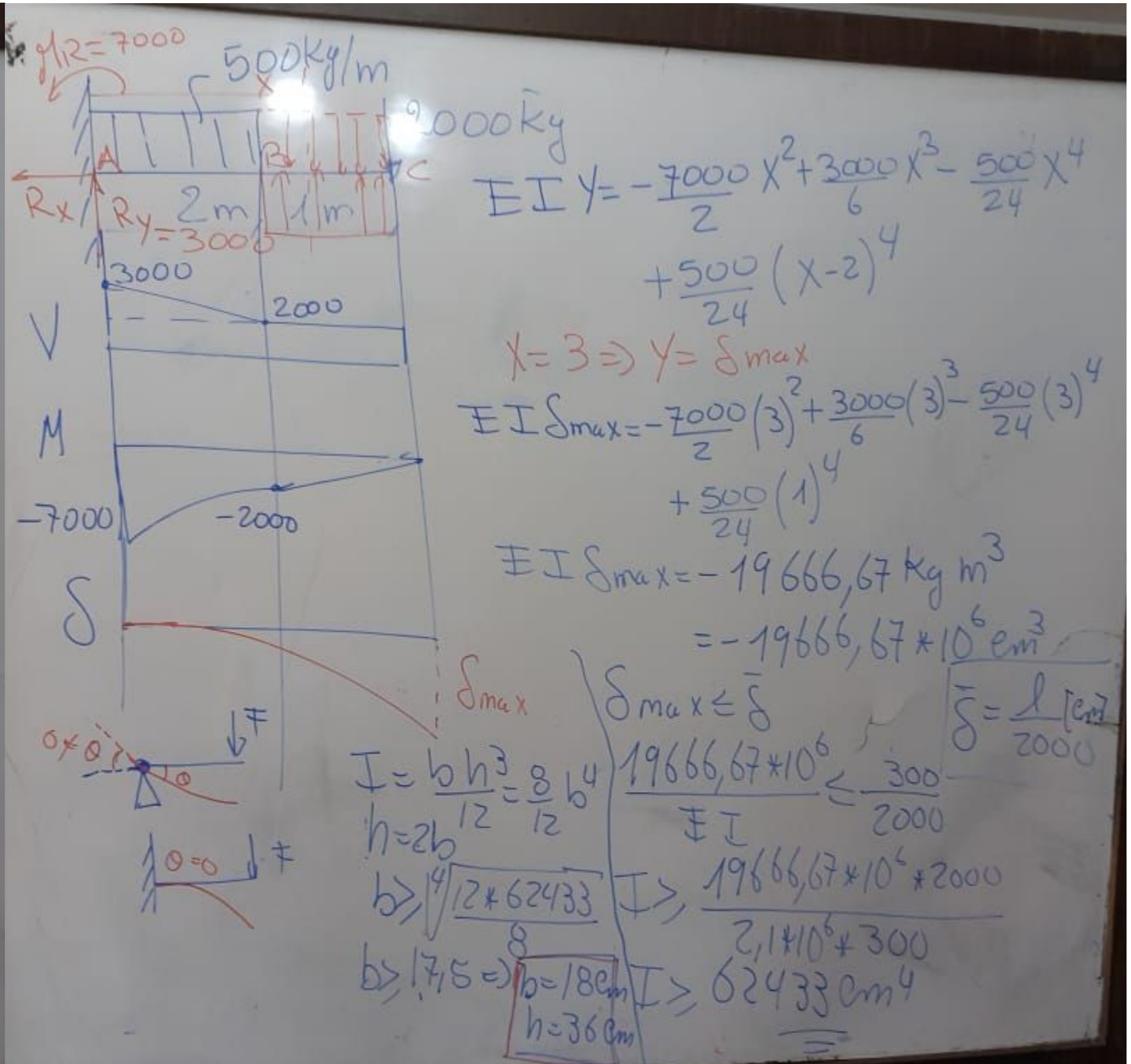


$$Mx= -Mr\, x^0 + 3000\,X - 500\,\frac{x^2}{2} + 500\,\frac{(x-2)^2}{2}$$

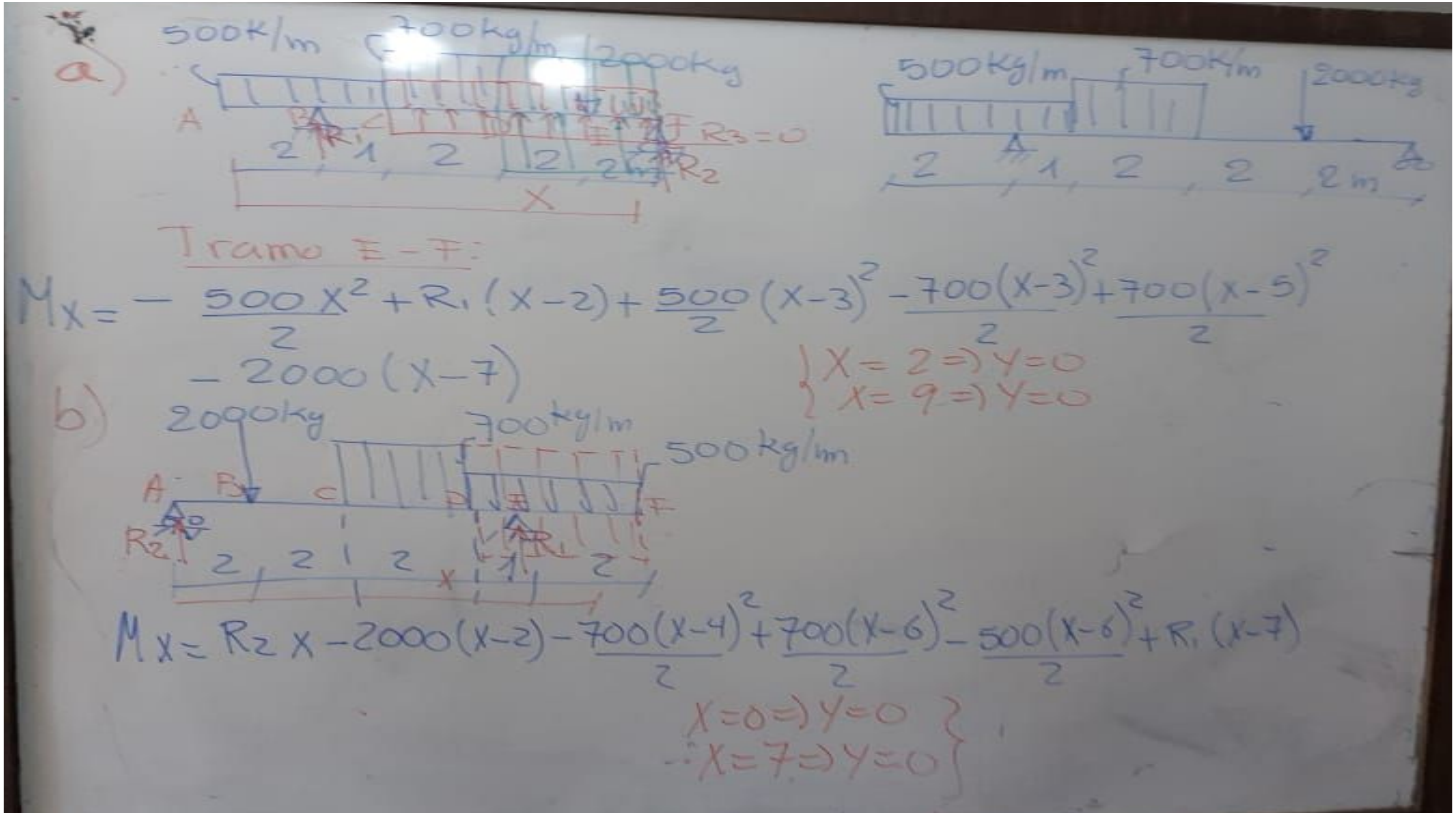
EJEMPLO 3.-

b) Comprobación a la rigidez (deformaciones):



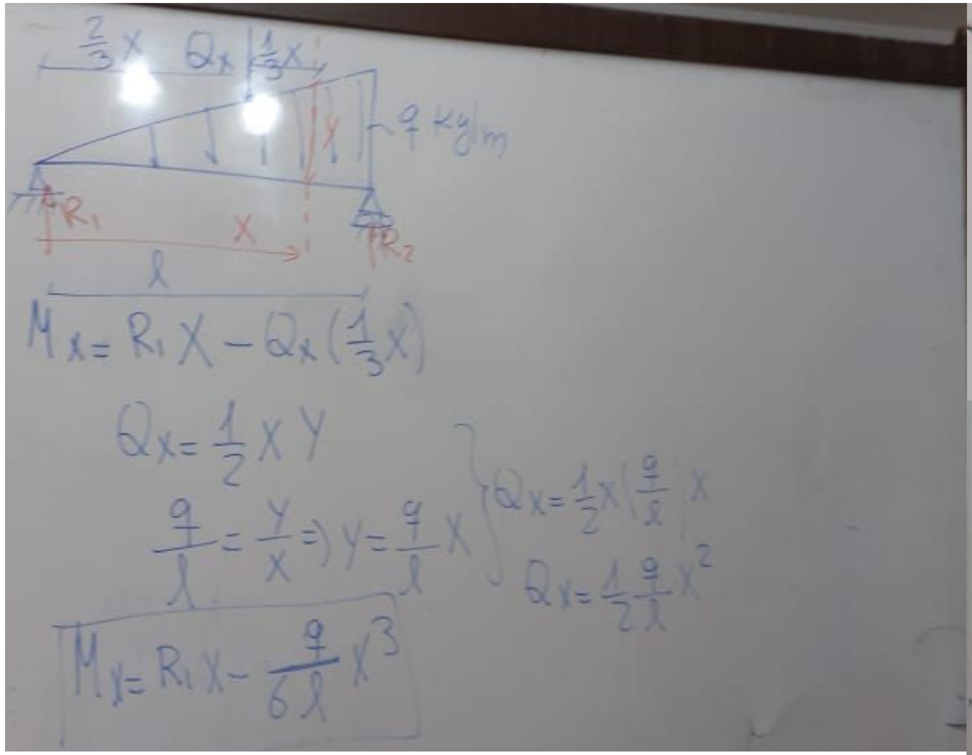


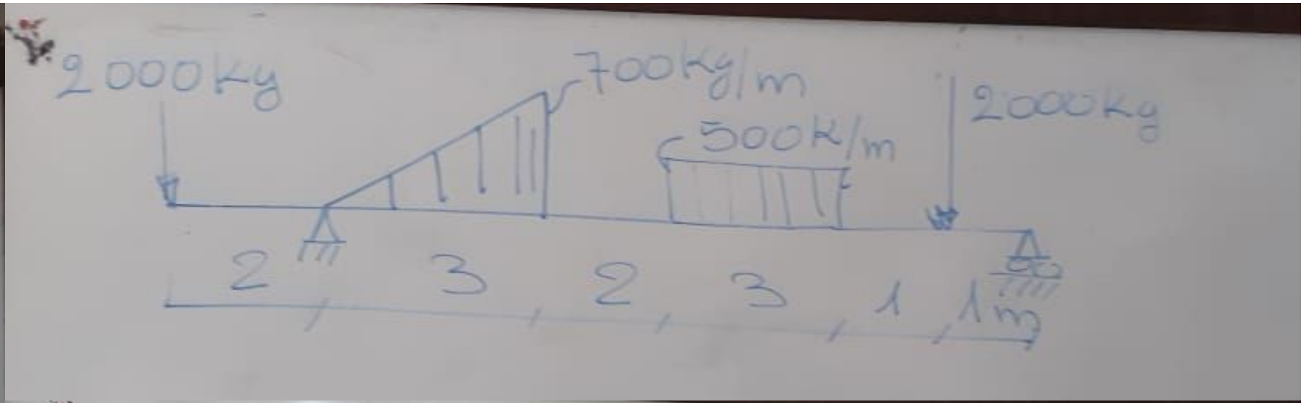
EJEMPLO 4.-

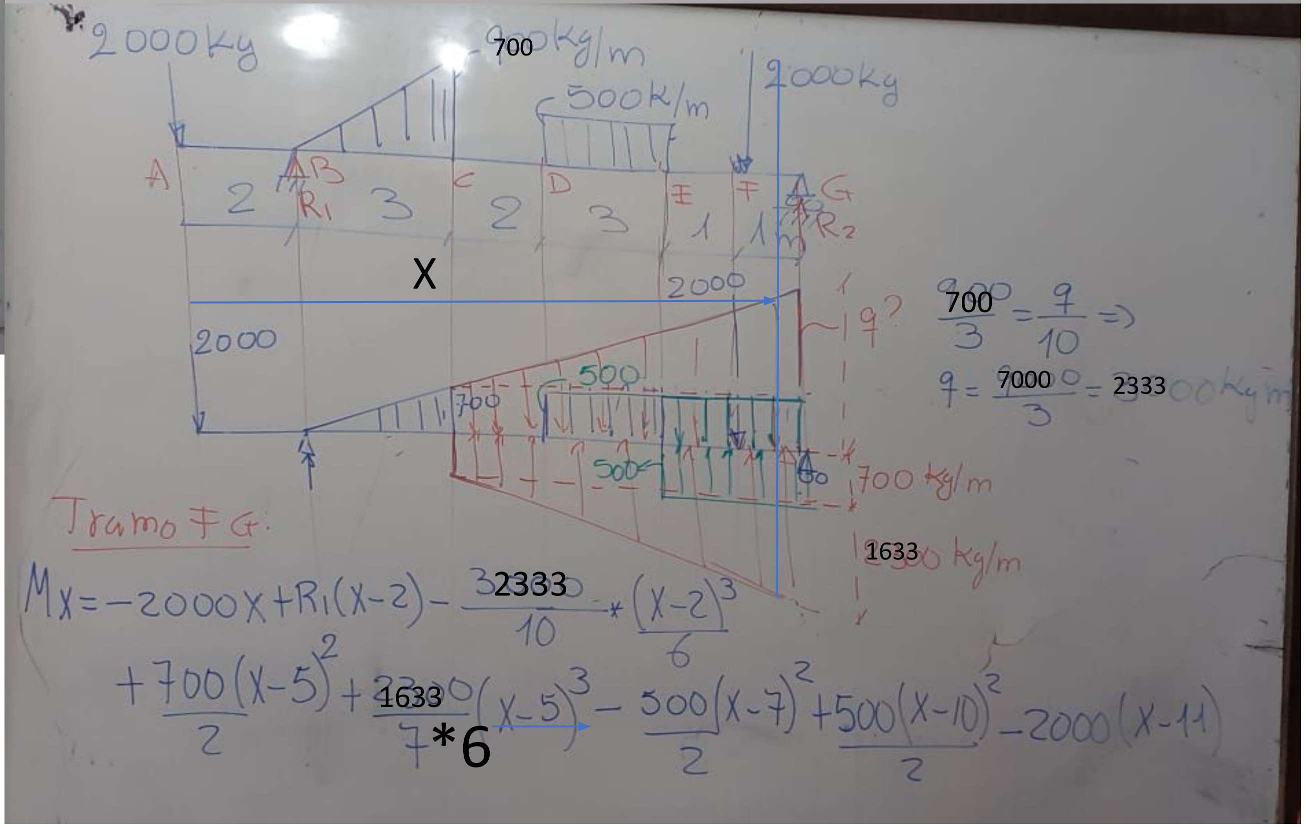


a)
500K/m
700kg/m
2000Kg
A
B
R1
C
E
F
R3=0
R2
2
1
2
2
2
X
500kg/m
700K/m
2000kg
2
1
2
2
2m
Tramo E-F:
$M_X = -\frac{500X^2}{2} + R_1(X-2) + \frac{500}{2}(X-3)^2 - \frac{700(X-3)^2}{2} + \frac{700(X-5)^2}{2} - 2000(X-7)$
X=2 => Y=0
X=9 => Y=0
b)
2000kg
700kg/m
500kg/m
A
B
C
D
E
F
R2
R1
2
2
2
X
1
2
$M_X = R_2X - 2000(X-2) - \frac{700(X-4)^2}{2} + \frac{700(X-6)^2}{2} - \frac{500(X-6)^2}{2} + R_1(X-7)$
X=0 => Y=0
X=7 => Y=0

EJEMPLO 5.-





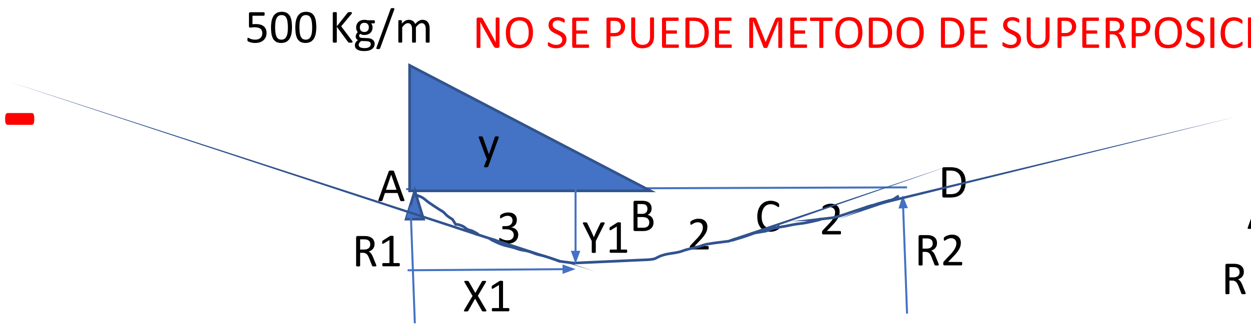


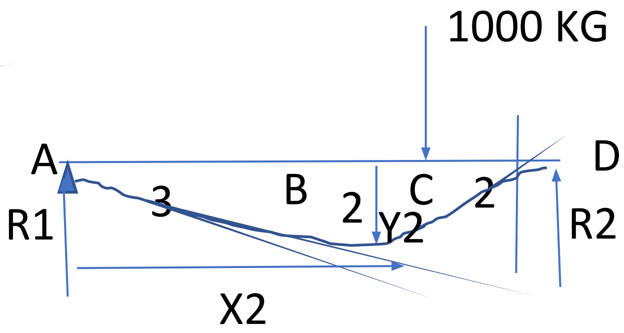
Hallar el diámetro de la viga:

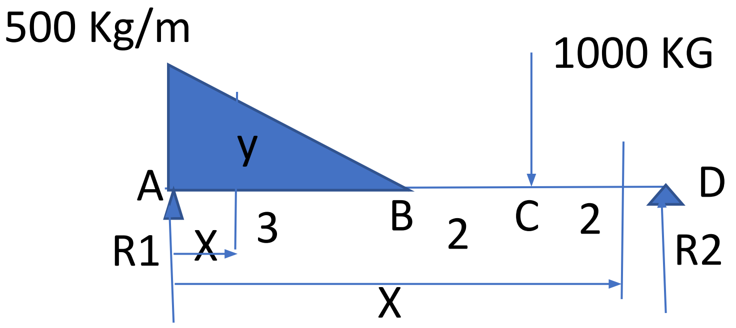
- Tension de fluencia= 2100 Kg/cm2
- n= 2
- E= 2,1 *10E6 Kg/cm2
- δ= L/2000 (cm)

EJEMPLO 6.-

NO SE PUEDE METODO DE SUPERPOSICION POR QUE X1 # X2





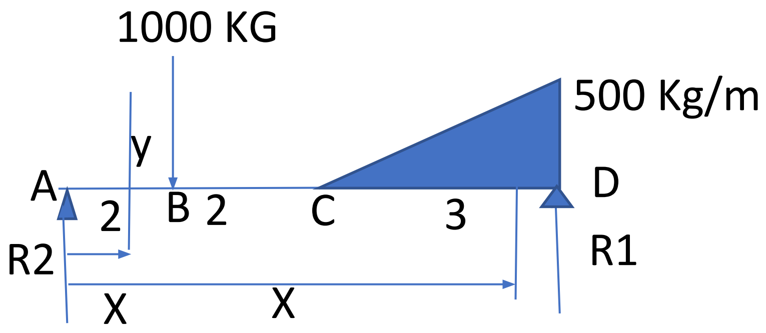


Tramo AB:

Mx= $R1*X-y\frac{x^2}{2}-\frac{(500-y)}{6\,x}\,x^3$

Tramo CD:

Mx= $R1*X-\frac{1}{2}3*500*(x-2)-1000\,(x-5)$ **"NO ES EC. SINGULAR"**



Tramo AB:

Mx= $R2*X$

Tramo BC:

Mx= $R2*X-1000\,(X-2)$

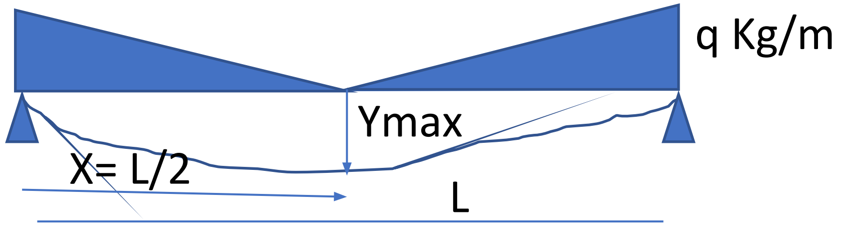
Tramo CD:

Mx= $R2*X-1000\,(X-2)-\frac{500\,(X-4)^3}{6*3}$

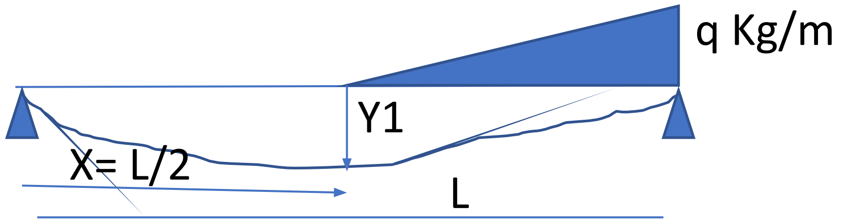
"Es una ecuación singular"

EJEMPLO 7

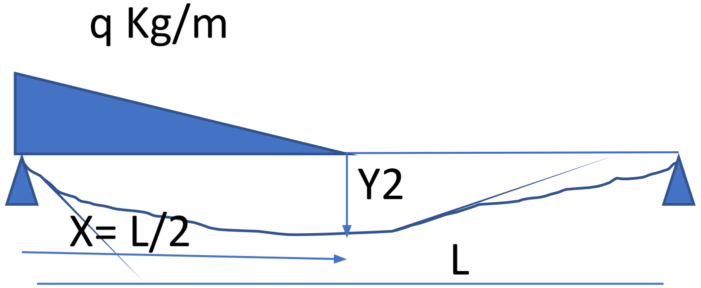
METODO DE SUPERPOSICION



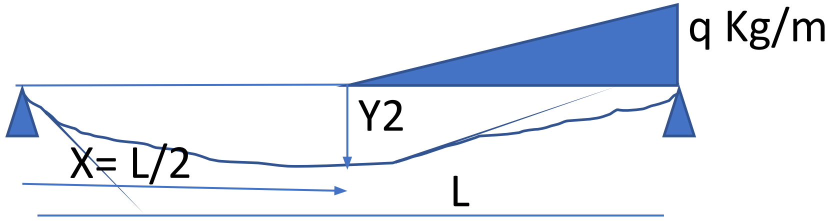
=



+



Mx= $R1\, X - \frac{q}{6(\frac{L}{2})}(X - \frac{L}{2})^3$



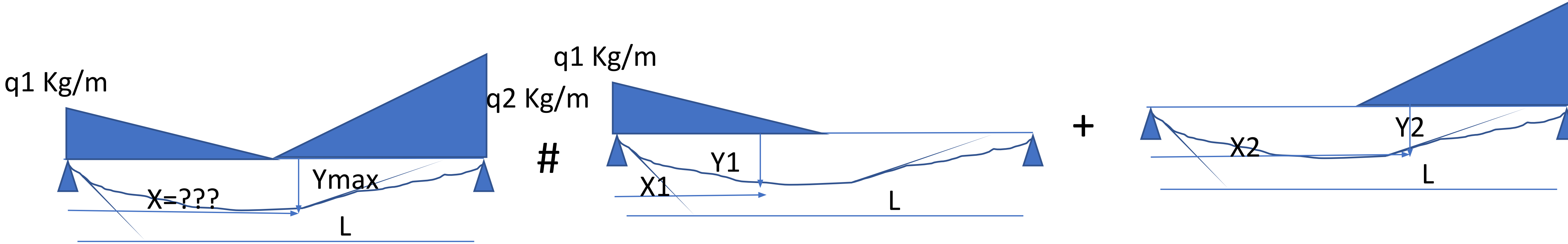
X=L/2..... Y1

X=L/2.... Y2

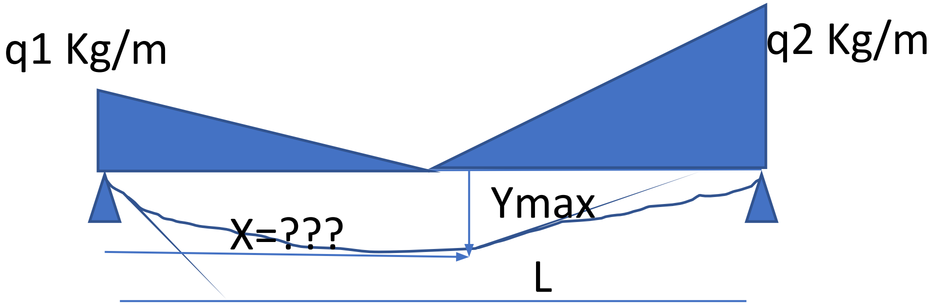
Y1=Y2

Ymax= Y1+Y2= 2Y1

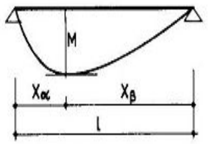
NO SE PUEDE SUPERPOSICION

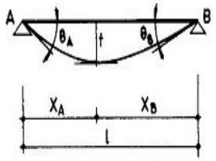


DOBLE INTEGRACION ?????



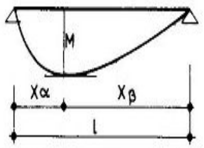
F, q y segmentos en valor absoluto.

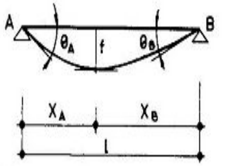




SOLICITACION	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES MOMENTO MAXIMO	DIAGRAMA DE ESFUERZOS CORTANTES REACCIONES EN APOYOS	FLECHAS MAXIMAS ANGULOS DE GIRO EXTREMOS
F; a, b	$M=\frac{Fab}{l}$	$R_A=\frac{F.b}{l}$ $R_B=\frac{F.a}{l}$	$a<b$ „ $x_B=\left[\frac{b(l+a)}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$ „ $f=\frac{F.a}{3l\,EI}\left[\frac{b(l+a)}{3}\right]^{\frac{3}{2}}$ $a>b$ „ $x_A=\left[\frac{a(l+b)}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$ „ $f=\frac{F.b}{3l\,EI}\left[\frac{a(l+b)}{3}\right]^{\frac{3}{2}}$ $\theta_A=\frac{Fab(l+b)}{6l\,EI}$ „ $\theta_B=\frac{Fab(l+a)}{6l\,EI}$
F; $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$	$M=\frac{Fl}{4}$	$R_A=R_B=\frac{F}{2}$	$x_A=x_B=\frac{l}{2}$ „ $f=\frac{Fl^3}{48\,EI}$ „ $\theta_A=\theta_B=\frac{Fl^2}{16\,EI}$
F, F; a, a	$M=F.a$	$R_A=R_B=F$	$x_A=x_B=\frac{l}{2}$ „ $f=\frac{F.a}{24EI}(3l^2-4a^2)$ $\theta_A=\theta_B=\frac{F.a(l-a)}{2EI}$
F, F, F; a, a, a, a	$M=\frac{Fl}{2}$	$R_A=R_B=\frac{3F}{2}$	$x_A=x_B=\frac{l}{2}$ „ $f=\frac{19}{384}\cdot\frac{F}{EI}l^3$ $\theta_A=\theta_B=\frac{5Fl^2}{32\,EI}$

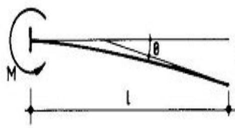
F, q y segmentos en valor absoluto





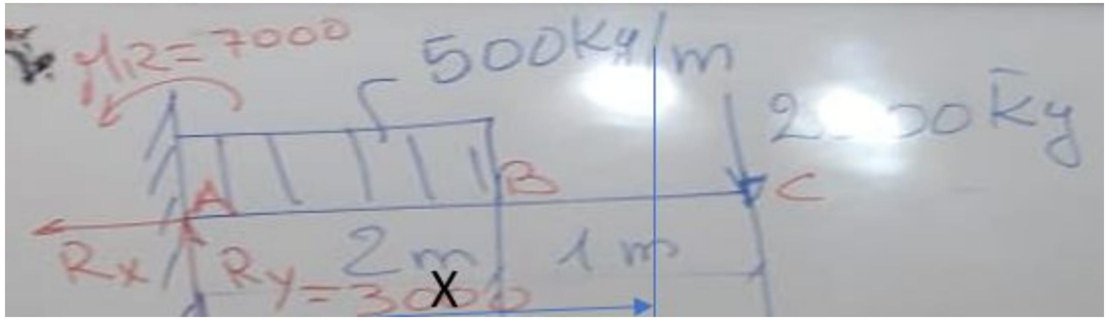
SOLICITACION	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES MOMENTO MAXIMO	DIAGRAMA DE ESFUERZOS CORTANTES REACCIONES EN APOYOS	FLECHAS MAXIMAS ANGULOS DE GIRO EXTREMOS
F F F F F; a a a a a a; $n=\frac{l}{a}$	$n=2k$, $M=\frac{n}{8}Fl$ $n=2k+1$, $M=\frac{n^2-1}{8n}Fl$	$R_A=R_B=\frac{n-1}{2}F$	$x_A=x_B=\frac{l}{2}\begin{cases} n=2k \text{ „ } f=\frac{5n^2-4}{384.n}\cdot\frac{Fl^3}{EI} \\ n=2k+1 \text{ „ } f=\frac{(5n^2+1)(n^2-1)}{384n^3}\cdot\frac{Fl^3}{EI}\end{cases}$ $\theta_A=\theta_B=\frac{n^2-1}{24n}\cdot\frac{Fl^2}{EI}$
F F F F F; $\frac{a}{2}$ a a a a $\frac{a}{2}$; $n=\frac{l}{a}$	$n=2k$, $M=\frac{n}{8}Fl$ $n=2k+1$, $M=\frac{n^2+1}{8n}Fl$	$R_A=R_B=\frac{n}{2}F$	$x_A=x_B=\frac{l}{2}\begin{cases} n=2k \text{ „ } f=\frac{-n^4+6n^3+2n^2+4n-4}{384n^2}\cdot\frac{Fl^3}{EI} \\ n=2k+1 \text{ „ } f=\frac{5n^4+2n^2+1}{384n^3}\cdot\frac{Fl^3}{EI}\end{cases}$ $\theta_A=\theta_B=\frac{2n^2+1}{48n}\cdot\frac{Fl^2}{EI}$
q; l	$M=\frac{1}{8}ql^2$	$R_A=R_B=\frac{ql}{2}$	$x_A=x_B=\frac{l}{2}$ „ $f=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}$ $\theta_A=\theta_B=\frac{ql^3}{24\,EI}$
q; a, b	$x_\alpha=\frac{a(l+b)}{2l}$ „ $M=\frac{qa^2(l+b)^2}{8l^2}$	$R_A=\frac{qa(l+b)}{2l}$ $R_B=\frac{qa^2}{2l}$	$a<0'4531.l$ „ $x_B=\left[\frac{2l^2-a^2}{6}\right]^{\frac{1}{2}}$ „ $f=\frac{qa^2}{6}\left[\frac{2l^2-a^2}{6}\right]^{\frac{3}{2}}$ $a>0'4531.l$ „ $x_B=\frac{58'575\cdot l-8'575.a}{100}$ „ $f=\frac{ql^4}{10^3EI}(13'5734\frac{a}{l}-0'5526)$ $\theta_A=\frac{qa^2l}{24\,EI}(2-\frac{a}{l})^2$ „ $\theta_B=\frac{qa^2l}{24\,EI}(2-\frac{a^2}{l^2})$

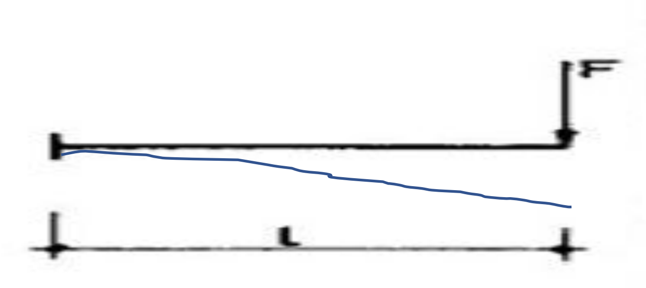
F, q y segmentos en valor absoluto



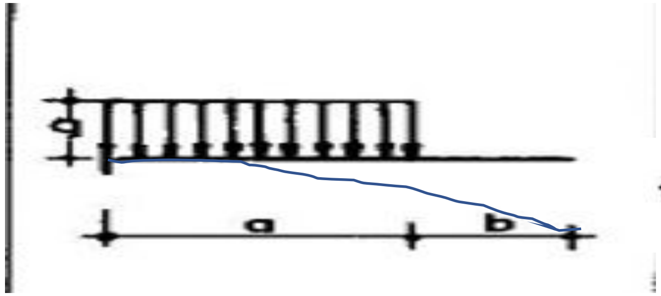
SOLICITACION	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES MOMENTO MAXIMO	DIAGRAMA DE ESFUERZOS CORTANTES REACCION EN APOYO	FLECHA MAXIMA ANGULO DE GIRO EXTREMO
F; a, b	$M=F.a$	$R=F$	$f=Fa^2\frac{3L-a}{6EI}$ $\theta=\frac{Fa^2}{2EI}$
F; l	$M=Fl$	$R=F$	$f=\frac{FL^3}{3EI}$ $\theta=\frac{Fl^2}{2EI}$
q; l	$M=\frac{1}{2}ql^2$	$R=ql$	$f=\frac{ql^4}{8EI}$ $\theta=\frac{ql^3}{6EI}$
q; a, b	$M=\frac{1}{2}qa^2$	$R=qa$	$f=qa^3\frac{4L-a}{24EI}$ $\theta=\frac{qa^3}{6EI}$

METODO DE SUPERPOSICION





$$f = \frac{F L^3}{3EI}$$



$$f = q\, a^3 \frac{4l - a}{24EI}$$

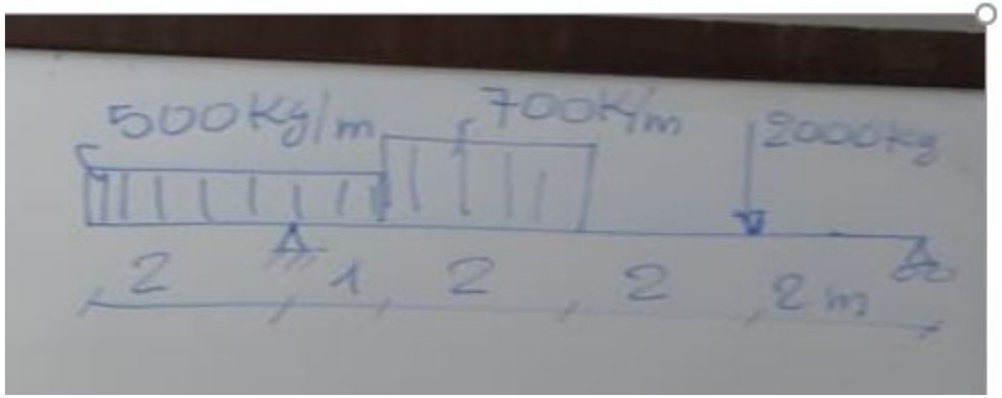
$$f = \frac{F L^3}{3EI} + q\, a^3 \frac{4l - a}{24EI}$$

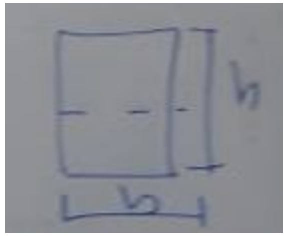
PRACTICA

- Tension de fluencia= 2100 Kg/cm2
- n= 2
- E= 2,1 *10E6 Kg/cm2
- δ= L/2000 (cm)

Para los dos casos, dimensionar a la resistencia y la rigidez

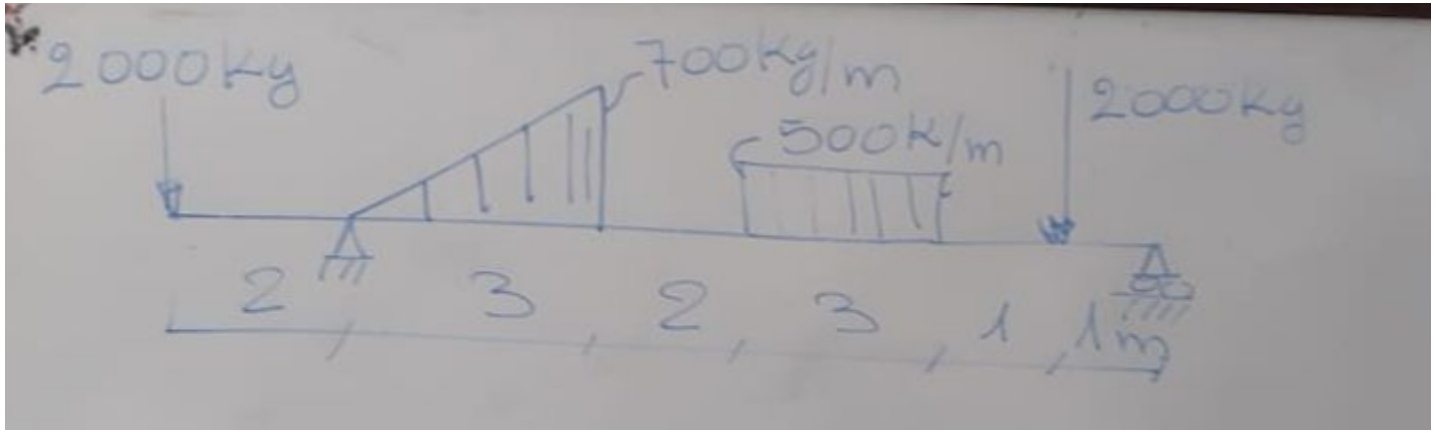
1.-





H=2b ???

2.-

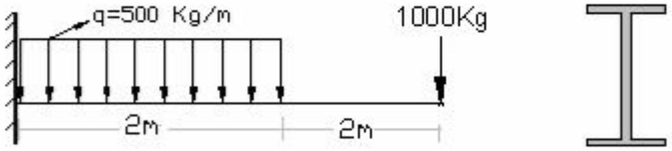


Hallar el diametro

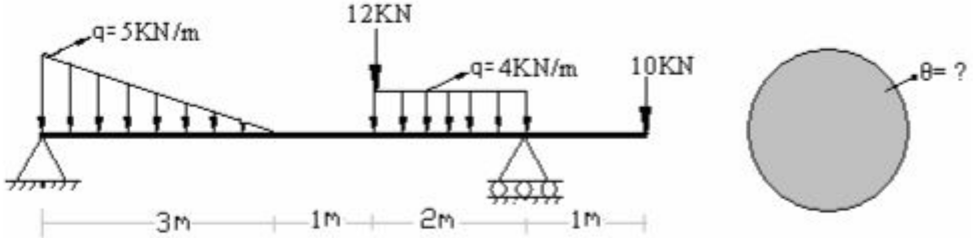
PRACTICA

3- - Hallar las el perfil mas económico, para σ=4200Kg/cm^2, τ=0.5σ, n=2, δ=L/2000cm y E=2.1x10^{6}Kg/cm^2.

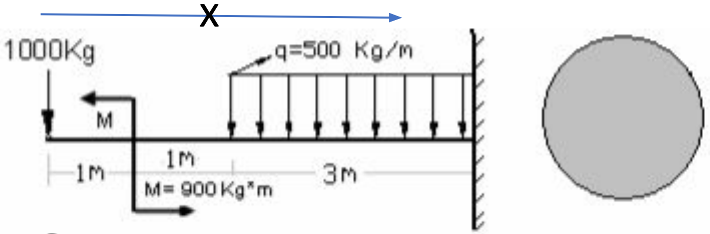
Resp.
h=60.3cm
b=22.8cm
e=1.49cm
e_{alma}=1.09cm



4- - Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si σ=4200Kg/cm^2, τ=0.5σ, n=3 y E=2.1x10^{6}Kg/cm^2.

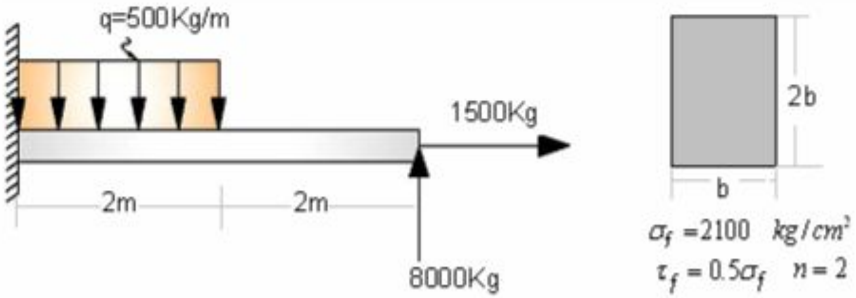


5- . Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si el diámetro es de 20cm E=2.1x10^{6}Kg/cm^2.

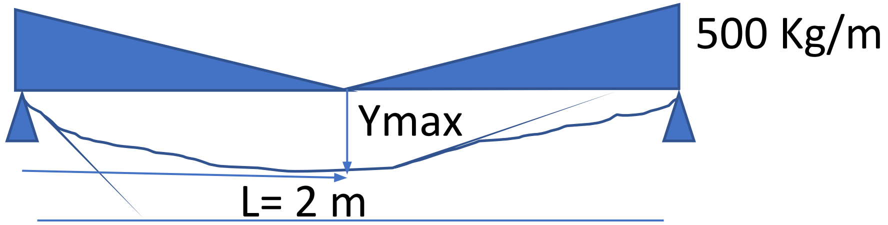


$$M = -1000X - M(x-1)^0 - \frac{500\,(X-2)^2}{2}$$

6- Determinar la deformación máxima de la sección transversal, E=2.1x10^{6}Kg/cm^2.



7.- Hallar la deformacion maxima



E=2.1x10^{6}Kg/cm^2.

GRACIAS……..