

**UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA**  
**CARRERA DE ELECTROMECAÁNICA**

**DINÁMICA**  
**Apuntes de clase**

**Docente:**  
Ing. Andrés Garrido Vargas.

# Índice general

<b>1. Fundamentos básicos</b>	<b>4</b>
1.1. Leyes de <i>Newton</i> . . . . .	4
1.2. Energía cinética . . . . .	4
1.3. Transformaciones de coordenadas . . . . .	4
1.3.1. Coordenadas polares . . . . .	4
1.3.2. Coordenadas cilíndricas . . . . .	5
1.3.3. Coordenadas esféricas . . . . .	6
<b>2. Ecuaciones de <i>Lagrange</i> para una partícula</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. Deducción de la ecuación de <i>Lagrange</i> . . . . .	8
2.3. Determinación de la aceleración . . . . .	10
2.4. Ejemplos . . . . .	12
2.4.1. Ejemplo 1 . . . . .	12
2.4.2. Ejemplo 2 . . . . .	12
2.4.3. Ejemplo 3 . . . . .	12
2.4.4. Ejemplo 4 . . . . .	12
2.4.5. Ejemplo 5 . . . . .	12
2.4.6. Ejemplo 6 . . . . .	12
2.4.7. Ejemplo 7 . . . . .	13
2.4.8. Ejemplo 8 . . . . .	13
2.4.9. Ejemplo 9 . . . . .	13
2.4.10. Ejemplo 10 . . . . .	13
2.4.11. Ejemplo 11 . . . . .	13
<b>3. Ecuaciones de <i>Lagrange</i> para un sistema de partículas</b>	<b>15</b>

3.1. Ejemplos . . . . .	15
3.1.1. Ejemplo 1 . . . . .	15
3.1.2. Ejemplo 2 . . . . .	15
3.1.3. Ejemplo 3 . . . . .	16
3.1.4. Ejemplo 4 . . . . .	16
3.1.5. Ejemplo 5 . . . . .	17
<b>4. Sistemas conservativos</b>	<b>18</b>
4.1. Ejemplos . . . . .	18
4.1.1. Ejemplo 1 . . . . .	18
4.1.2. Ejemplo 2 . . . . .	18
4.1.3. Ejemplo 3 . . . . .	18
4.1.4. Ejemplo 4 . . . . .	18
4.1.5. Ejemplo 5 . . . . .	19
4.1.6. Ejemplo 6 . . . . .	19
4.1.7. Ejemplo 7 . . . . .	19
<b>5. Fuerzas disipativas</b>	<b>20</b>
5.1. Ejemplos . . . . .	20
5.1.1. Ejemplo 1 . . . . .	20
5.1.2. Ejemplo 2 . . . . .	20
5.1.3. Ejemplo 3 . . . . .	21
5.1.4. Ejemplo 4 . . . . .	21
5.1.5. Ejemplo 5 . . . . .	21
5.1.6. Ejemplo 6 . . . . .	22
5.1.7. Ejemplo 7 . . . . .	22

## **Bibliografía recomendada**

- [1] Dare A. Wells. *Teoría y Problemas de Dinámica de Lagrange*.

# Capítulo 1

## Fundamentos básicos

### 1.1. Leyes de *Newton*

- Ley de Inercia.
- $F = ma$ ;  $M_t = I\alpha$ .
- Acción-Reacción.

### 1.2. Energía cinética

- $T = \frac{1}{2}mv^2$ .
- $T = \frac{1}{2}I\omega^2$ .

### 1.3. Transformaciones de coordenadas

#### 1.3.1. Coordenadas polares

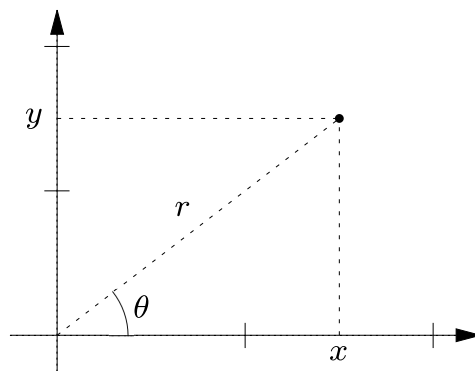


Figura 1.1: Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Calculando la energía cinética en coordenadas polares: n

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2 \cos^2(\theta) - 2\dot{r}r\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta) + r^2\dot{\theta}^2 \sin^2(\theta)$$

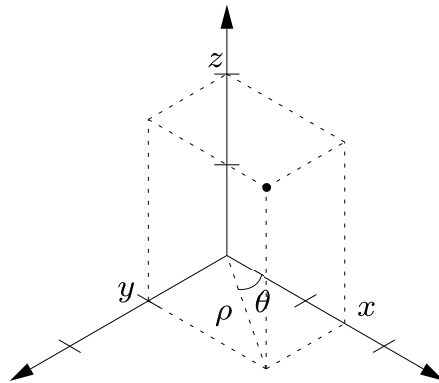
$$\dot{y}^2 = \dot{r}^2 \sin^2(\theta) + 2\dot{r}r\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) + r^2\dot{\theta}^2 \cos^2(\theta)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \cos^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) + \dot{r}^2 \sin^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2 \cos^2(\theta)) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + r^2\dot{\theta}^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

(1.1)

### 1.3.2. Coordenadas cilíndricas



**Figura 1.2:** Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Calculando la energía cinética en coordenadas cilíndricas:

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos(\theta) - \rho \sin(\theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin(\theta) + \rho \cos(\theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{z} = \dot{z}$$

$$\dot{x}^2 = \dot{\rho}^2 \cos^2(\theta) - 2\dot{\rho}\rho\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta)$$

$$\dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 \sin^2(\theta) + 2\dot{\rho}\rho\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta)$$

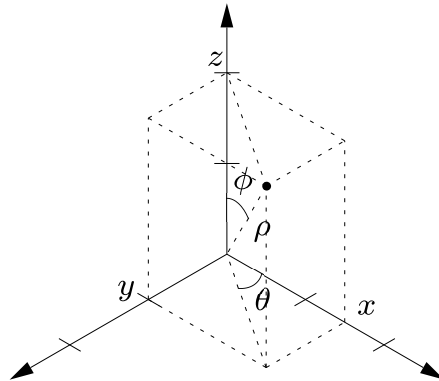
$$\dot{z}^2 = \dot{z}^2$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\rho}^2 \sin^2(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + \rho^2 \dot{\theta}^2 (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

(1.2)

### 1.3.3. Coordenadas esféricas



**Figura 1.3:** Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Calculando la energía cinética en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho} \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) + \rho(\operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta))' \\ &= \dot{\rho} \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) + \rho(\cos(\phi) \dot{\phi} \cos(\theta) + (-\operatorname{sen}(\theta)) \dot{\theta} \operatorname{sen}(\phi)) \\ &= \dot{\rho} \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) + \rho \dot{\phi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \rho \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ \dot{y} &= \dot{\rho} \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) + \rho(\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta))' \\ &= \dot{\rho} \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) + \rho(\cos(\phi) \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta) \dot{\theta} \operatorname{sen}(\phi)) \\ &= \dot{\rho} \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) + \rho \dot{\phi} \cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) + \rho \dot{\theta} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ \dot{z} &= \dot{\rho} \cos(\phi) - \rho \dot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{\rho}^2 \operatorname{sen}^2(\phi) \cos^2(\theta) + \rho^2 \dot{\phi}^2 \cos^2(\phi) \cos^2(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) \\ &\quad + 2\dot{\rho} \rho \dot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) \cos^2(\theta) \cos(\phi) - 2\rho^2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos(\phi) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) - 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \operatorname{sen}^2(\phi) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \\ \dot{y}^2 &= \dot{\rho}^2 \operatorname{sen}^2(\phi) \operatorname{sen}^2(\theta) + \rho^2 \dot{\phi}^2 \cos^2(\phi) \operatorname{sen}^2(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) \\ &\quad + 2\dot{\rho} \rho \dot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\phi) + 2\rho^2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) + 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \\ \dot{z}^2 &= \dot{\rho}^2 \cos^2(\phi) - 2\dot{\rho} \rho \dot{\phi} \cos(\phi) \operatorname{sen}(\phi) + \rho^2 \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 \operatorname{sen}^2(\phi) + \rho^2 \dot{\phi}^2 \cos^2(\phi) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2(\phi) \\ &\quad + 2\dot{\rho} \rho \dot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi) + \dot{\rho}^2 \cos^2(\phi) - 2\dot{\rho} \rho \dot{\phi} \cos(\phi) \operatorname{sen}(\phi) + \rho^2 \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2(\phi)) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2(\phi)) \end{aligned}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2(\phi))}$$

(1.3)



## Capítulo 2

# Ecuaciones de *Lagrange* para una partícula

### 2.1. Introducción

Ecuación de *Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{q_r}$$

Principio de *d'Alembert*:

$$m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$$

### 2.2. Deducción de la ecuación de *Lagrange*

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \\ z = z(q_1, q_2) \end{cases}$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2$$

$$m \left( \ddot{x} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 \right) + \ddot{y} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 \right) + \ddot{z} \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 \right) \right) =$$

$$F_x \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 \right) + F_y \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 \right) + F_z \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 \right)$$

$$m \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 \right) + m \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 \right) =$$

$$\left( F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 \right) + \left( F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 \right)$$

$$m \left( \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \right) + m \left( \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2 \right) =$$

$$\left( F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left( F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2$$

Si  $q_2 = 0$ :

$$m \left( \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \right) = \left( F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \quad (2.1)$$

Sabiendo que por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)$$

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \quad (2.2)$$

Por otro lado, derivando  $x = x(q_1, q_2)$  con respecto al tiempo:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2$$

Y derivando con respecto a  $\dot{q}_1$ :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \quad (2.3)$$

Por otro lado:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \quad (2.4)$$

Combinando 2.3 y 2.4 en 2.2, se obtiene:

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \quad (2.5)$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \frac{1}{2} 2\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} = \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \frac{1}{2} 2\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} \quad (2.7)$$

Combinando 2.6 y 2.7 en 2.5:

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) \quad (2.8)$$

Sustituyendo 2.8, agregando las relaciones para  $y$  y  $z$  y reagrupando términos en 2.1:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right) \right] \delta q_1 = \left( F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1$$

Considerando que  $\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  representa la energía cinética ( $T$ ), finalmente se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1}$$

## 2.3. Determinación de la aceleración

La componente  $a'$  del vector aceleración  $a$ , sobre una línea cuyos cosenos directores son:  $l, m, n$ , esta dada por:

$$a' = \ddot{x}l + \ddot{y}m + \ddot{z}n$$

Si debe hallarse  $a'$  en la dirección de la tangente a una curva en el espacio en un punto  $p$  determinado.

$$l = \frac{dx}{ds}; \quad m = \frac{dy}{ds}; \quad n = \frac{dz}{ds}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Entonces, partiendo de las ecuaciones de la curva en el espacio, puede hallarse  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , supóngase que se desea determinar una expresión general para la componente de la aceleración en la dirección de la tangente a la coordenada  $q_1$ , teniendo en cuenta que las coordenadas generalizadas  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  se relacionan con las rectangulares por medio de:

$$x = x(q_1, q_2, q_3, t); \quad y = y(q_1, q_2, q_3, t); \quad z = z(q_1, q_2, q_3, t)$$

La línea coordenada de  $q_1$  se determina haciendo que permanezcan constantes  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $t$ . En forma semejante se obtienen las líneas coordenadas de  $q_2$  y  $q_3$ . Tomando las derivadas se obtienen:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1$$

Por tanto:

$$ds^2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2 \right] dq_1^2$$

En donde  $ds$  es un elemento de longitud medido sobre la curva de  $q$

$$l_1 = \frac{dx}{dq_1 \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1}$$

En donde el significado de  $h_1$  es claro, y donde se ha escrito  $dx/dq_1$  como  $\partial x/\partial q_1$  puesto que  $q_2$ ,  $q_3$  y  $t$  se consideran todavía constantes. En forma semejante  $m_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1}$  y  $n_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1}$ . Igualmente los cosenos directores de la tangente a la curva coordenada de  $q_2$ , son:

$$l_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2}; \quad m_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2}; \quad n_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2};$$

Designando  $a'$  como  $a_{q_1}$  la ecuación se convierte en:

$$a' = a_{q_1} = \frac{1}{h_1} \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)$$

Teniendo en cuenta las etapas que condujeron al miembro izquierdo de la ecuación de *Lagrange*, evidentemente puede escribirse en la siguiente forma:

$$a_{q_r} = \frac{1}{h_{q_r}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T'}{\partial q_r} \right]$$

$$T' = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

## 2.4. Ejemplos

### 2.4.1. Ejemplo 1

Determinar las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve por acción de una fuerza  $F$ . Suponer que el movimiento es en un plano.

### 2.4.2. Ejemplo 2

Determinar las ecuaciones de movimiento de una partícula de masa  $m$  por la acción de una fuerza, la misma que tiene movimiento lineal, y angular, la fuerza que hace posible el movimiento es  $F$ .

### 2.4.3. Ejemplo 3

3.5. Una cuenta puede moverse restringida a una espiral cónica lisa. Suponiendo que  $\rho = az$  y que  $\phi = -bz$ , en donde  $a$  y  $b$  son constantes, demostrar que la ecuación del movimiento es:

$$\ddot{z}(a^2 + 1 + a^2b^2z^2) + a^2b^2z\dot{z}^2 = -g$$

### 2.4.4. Ejemplo 4

3.7. La masa  $m$  del péndulo está suspendida por medio de un hilo inextensible del punto  $p$ . Este punto puede moverse libremente sobre una horizontal bajo la acción de los resortes, los cuales tienen una constante  $k$ . Despreciando la masa de los resortes, demostrar que el péndulo oscila con un periodo igual a:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{mg + 2kr}{2kg}}$$

### 2.4.5. Ejemplo 5

Determinar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones de un péndulo envolvente en el campo gravitacional. El radio  $r$  del cilindro y la longitud libre  $l_0$  de la soga en su posición de equilibrio son datos conocidos.

### 2.4.6. Ejemplo 6

Un segmento cilíndrico se balancea sobre un plano rugoso por la acción del campo gravitacional. Determinar el periodo de oscilación, los datos son: la masa  $m$ , el momento inercial  $I_s$

con respecto al centro de gravedad y la excentricidad del centro de gravedad  $e$ .

### 2.4.7. Ejemplo 7

3.1. Suponiendo que el movimiento está restringido al plano  $Q_1Q_2$  y que la gravedad actúa en la dirección negativa del eje vertical  $Y$ , establézcanse las ecuaciones del movimiento de un proyectil en función de las coordenadas  $q_1$  y  $q_2$ .

### 2.4.8. Ejemplo 8

Determinar las ecuaciones de aceleración para una partícula en coordenadas esféricas.

### 2.4.9. Ejemplo 9

Determinar las ecuaciones de aceleración para una partícula en coordenadas polares.

### 2.4.10. Ejemplo 10

3.16. Un disco pesado uniforme, de radio  $R$ , rueda por un plano inclinado sin resbalar. Los ejes  $X$  y  $Y$  están adheridos a la superficie del disco con el origen en el centro. Una partícula de masa  $m$  puede moverse libremente en el plano del disco bajo la acción de la gravedad y de un sistema de resortes cuyos detalles no es necesario especificar. Por consideraciones elementales puede decirse que despreciando la pequeña masa de la partícula, el centro del disco se mueve con aceleración lineal  $a = \frac{2}{3}g \sin(\alpha)$ , en donde  $\alpha$  es el ángulo de inclinación del plano. Demostrar que la energía cinética de la partícula en coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  ( $\theta$  medido a partir del eje  $X$  adherido al disco) esta dada por: ( $\beta$  se mide entre  $X$  y una recta fija normal al plano inclinado)

$$T = \frac{1}{2}m[a^2t^2 + \dot{r}^2 + r^2(\dot{\beta} - \dot{\theta})^2 + 2atr \sin(\beta - \theta) + 2atr(\dot{\beta} - \dot{\theta}) \cos(\beta - \theta)]$$

en donde  $\dot{\beta} = (a/R)t$ .

### 2.4.11. Ejemplo 11

3.21. Un alambre rígido parabólico que gira de una cierta manera alrededor del eje  $Z_2$  al mismo tiempo que la plataforma a la cual se halla adherido el sistema  $X_2, Y_2, Z_2$  se mueve con aceleración constante  $a$ , paralela al eje  $Y_1$ . La cuenta de masa  $m$  puede deslizarse a lo largo del alambre liso bajo la fuerza de la gravedad. (a) Demostrar que:

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + a^2t^2 + 2\dot{r}at \sin(\phi) + 2r\dot{\phi}at \cos(\phi) + 4b^2r^2\dot{r}^2]$$

Suponiendo  $\dot{\phi} = \omega = \text{constante}$ , plantear la ecuación del movimiento correspondiente a  $r$ , y demostrar que:

$$F_r = -2mgb r$$

## Capítulo 3

# Ecuaciones de *Lagrange* para un sistema de partículas

### 3.1. Ejemplos

#### 3.1.1. Ejemplo 1

4.7. (a) El bloque de masa  $m$  puede deslizarse a lo largo del plano inclinado sobre el carro, bajo la acción de la gravedad y del resorte. El cuerpo del carro tiene una masa  $M_1$ , y cada una de las ruedas una masa  $M$ , un radio  $r$  y un momento de inercia  $I$ , con respecto al eje. Sobre el carro se ejerce una fuerza constante  $f$ . Despreciando la fricción de los cojinetes, demostrar que:

$$\left( M_1 + 4M + \frac{4I}{r^2} + m \right) \ddot{x} + \frac{m}{\tan(\theta)} \ddot{y} = f$$
$$\frac{m}{\sin^2(\theta)} \ddot{y} + \frac{m}{\tan(\theta)} \ddot{x} = -mg + \frac{k}{\sin(\theta)} \left( \frac{y_0 - y}{\sin(\theta)} - q_0 \right)$$

en donde  $q_0$  es el valor de  $q$  cuando el resorte tiene su longitud normal.

(b) Plantear las ecuaciones del movimiento en función de las coordenadas  $x$  y  $q$ . Demostrar que  $F_x = f$  y que  $F_q = +mg \sin(\theta) - k(q - q_0)$ .

#### 3.1.2. Ejemplo 2

4.8. Si un mecanismo impulsor liviano (por ejemplo, un pistón operado por medio de aire comprimido) hace que el bloque oscile a lo largo del plano inclinado, de tal forma que sus desplazamientos con respecto al plano vienen dados por  $A \sin(\omega t)$ , demostrar que:

$$T = \frac{1}{2} \left( M_1 + 4M + \frac{4I}{r^2} + m \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (-2\dot{x} A \omega \cos(\omega t) \cos(\theta) + A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t))$$



y que si se supone que  $f$  no actúa, el movimiento del carro estaría determinado por:

$$\left( M_1 + 4M + \frac{4I}{r^2} + m \right) \dot{x} - mA\omega \cos(\theta) \cos(\omega t) = \text{constante}$$

### 3.1.3. Ejemplo 3

4.9. Las partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, están conectadas por medio de un hilo en el que se ha intercalado un resorte. El hilo pasa alrededor de una polea liviana y las partículas pueden deslizarse libremente en el interior de los tubos lisos. Los tubos, junto con el eje, tienen un momento de inercia  $I$ , con relación al eje vertical. (a) Utilizando las coordenadas  $\theta$ ,  $r_1$  y  $r_2$  y suponiendo que no existe ningún torque aplicado al eje vertical, demostrar que:

$$\begin{aligned} (I + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \dot{\theta} &= P_\theta = \text{constante} \\ m_1 \ddot{r}_1 - m_1 r_1 \dot{\theta}^2 &= -k(r_1 + r_2 - c) \\ m_2 \ddot{r}_2 - m_2 r_2 \dot{\theta}^2 &= -k(r_1 + r_2 - c) \end{aligned}$$

(b) Suponiendo que el eje se encuentra impulsado por un motor a velocidad constante  $\dot{\theta} = \omega$ , escribir las ecuaciones del movimiento para  $m_1$  y  $m_2$ .

### 3.1.4. Ejemplo 4

4.6. El plano  $XY$  es horizontal. Un eje fijo  $S$ , se extiende en la dirección de  $Z$ . Las varillas  $A$  y  $B$  se encuentran sostenidas por cojinetes lisos montados en el eje, el uno sobre el otro. Un resorte de reloj con constante de torsión  $k$ , conecta a  $A$  con  $B$ . Los momentos de inercia de las varillas son  $I_1$  e  $I_2$ . Las varillas pueden girar alrededor del eje bajo la acción del resorte. Utilizando a  $\theta_1$  y  $\alpha$  como coordenadas, demostrar que:

$$\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \ddot{\alpha} = -k\alpha$$

y que:

$$(I_1 + I_2) \dot{\theta}_1 - I_2 \dot{\alpha} = P_{\theta_1} = \text{constante}$$

Integrar estas ecuaciones y describir brevemente el movimientos.

Demostrar que si  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se consideran como coordenadas, las fuerzas generalizadas son  $F_{\theta_1} = F_{\theta_2} = -k(\theta_1 + \theta_2)$ . Supóngase que el resorte se encuentra en su configuración normal cuando  $A$  y  $B$  son colineales.

### 3.1.5. Ejemplo 5

4.14. En el sistema de piñones los ejes  $S_1, \dots, S_4$  están sostenidos por los cojinetes fijos  $b_1, \dots, b_4$ . Los piñones  $A, D, E$  y  $F$  son solidarios con sus ejes. Una extensión del eje  $S_3$  forma una manivela, según se muestra. El piñón  $C$  puede girar libremente en la manivela.  $B$  es un “molde de pastel” (se muestra en un corte) que tiene dientes de engranaje  $g$ , en su borde exterior, y  $g'$  en el borde interior.  $B$  puede girar libremente sobre  $S_1$ . Se observa que si, por ejemplo, se deja fijo  $D$  mientras se hace girar  $A, C$  y la manivela (y por tanto  $E$  y  $F$ ) giran. Los momentos de inercia de los piñones, incluyendo el eje al que cada uno se halla sujeto, son los indicados en la figura. Los radios de los piñones son  $r_1, r_2$ , etc. Adheridos a los ejes  $S_2$  y  $S_4$  se encuentran los resortes de torsión cuyas constantes respectivas son  $k_1$  y  $k_2$ , según se indica. Si se mide  $\theta_3$  con respecto a la manivela  $C$  y todos los demás ángulos con relación a líneas verticales fijas, demostrar que:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ I_2 + I_4 \left( \frac{r_2}{r_4} \right)^2 \right] \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{I_3}{4r_3^2} \right) [(R + r_3)\dot{\theta}_2 - r_1\dot{\theta}_1]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{I_5 + MR^2}{4R^2} + \frac{I_6}{4R^2} \left( \frac{r_5}{r_6} \right)^2 \right] (r_1\dot{\theta}_1 + R\dot{\theta}_2 + r_3\dot{\theta}_2)^2$$

Escribir las ecuaciones del movimiento y hallar las expresiones de  $F_{\theta_1}$  y  $F_{\theta_2}$  suponiendo que cada uno de los resortes ejerce un torque proporcional al desplazamiento angular del eje al que esta sujeto.

## Capítulo 4

# Sistemas conservativos

### 4.1. Ejemplos

#### 4.1.1. Ejemplo 1

Determine las ecuaciones de movimiento y las frecuencias naturales del sistema masa-resorte de dos grados de libertad utilizando la función de *Lagrange*  $L$ .

#### 4.1.2. Ejemplo 2

Utilizar la función de *Lagrange*  $L$  para deducir las ecuaciones de movimiento del péndulo acoplado.

#### 4.1.3. Ejemplo 3

Determinar las ecuaciones de movimiento de un péndulo suspendido en una banda de caucho utilizando la función de *Lagrange*.

#### 4.1.4. Ejemplo 4

5.6. La barra uniforme  $AB$ , de masa  $M$  y longitud  $l$ , esta sostenida por la articulación lisa en  $A$ . El extremo  $B$  se encuentra unido al resorte  $BC$ , el cual esta aun estirado cuando  $\theta = 0$ . Despreciando la masa del resorte, demostrar que para este sistema:

$$V = -\frac{1}{2}Mgl \cos(\theta) + \frac{1}{2}k[(s^2 + l^2 - 2sl \cos(\theta))^{\frac{1}{2}} - l_0]^2$$

Suponiendo que  $\theta$  es un ángulo pequeño, aproximar el valor de la energía potencial  $V$ , por medio del desarrollo de *Taylor* y determinar el periodo de oscilación de la varilla.

#### 4.1.5. Ejemplo 5

5.13. Tres piñones  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  se encuentran acoplados por medio de resortes de torsión a los discos  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ . Demostrar que la función de *Lagrange* para el sistema es:

$$L = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{d_2^2}{2} \left( \frac{I_3}{d_1^2} + \frac{I_4}{d_2^2} + \frac{I_5}{d_3^2} \right) \dot{\theta}_4^2 + \frac{I_6}{2} \dot{\theta}_6^2 + \frac{I_7}{2} \dot{\theta}_7^2 - \frac{k_1}{2} (\theta_4 - \theta_1)^2 \\ - \frac{k_2 d_2^2}{2} \left( \frac{\theta_4}{d_1} - \frac{\theta_6}{d_2} \right)^2 - \frac{k_3 d_2^2}{2} \left( \frac{\theta_4}{d_3} - \frac{\theta_7}{d_2} \right)^2$$

#### 4.1.6. Ejemplo 6

En la figura esta simbolizado esquemáticamente un típico caso de un grupo de maquinas conformado por un motor conectado con acople elástico con la maquina que realiza trabajo. Si se ejecuta la reducción de las cantidades másicas, por ejemplo sobre el eje del motor, se obtienen los citados sistemas de dos masas, en donde  $I_1$  e  $I_2$  son los momentos inerciales reducidos del motor y de la maquina, y  $c$  es la constante de rigidez del acople elástico. Establecer la frecuencia natural y las principales formas de las oscilaciones propias y expresar el desarrollo de las funciones  $\psi_1(t)$  y  $\psi_2(t)$ . Utilizar la función de *Lagrange*  $L$ .

#### 4.1.7. Ejemplo 7

El chasis de un automóvil se puede simbolizar esquemáticamente. Si  $I_s$  significa el momento inercial del chasis con respecto al eje que pasa por el centro de gravedad perpendicular al esquema, y  $c_1 = c_2 = c$ , el coeficiente de rigidez de los resortes del chasis, determinar la frecuencia de oscilación natural del sistema.

## Capítulo 5

# Fuerzas disipativas

### 5.1. Ejemplos

#### 5.1.1. Ejemplo 1

6.9. Una pequeña masa  $m_1$ , colgada de un resorte espiral ligero de longitud  $r$ , longitud normal  $r_0$ , y constante elástica  $k$ , puede oscilar como un péndulo, sobre el plano inclinado rugoso. Utilizando coordenadas polares, demostrar que para un desplazamiento virtual general (suponiendo que existe fricción dinámica):

$$\delta W_{total} = \left[ -k(r - r_0) + mg \sin(\alpha) \cos(\theta) - \frac{f \dot{r}}{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \delta r - \left[ mgr \sin(\alpha) \sin(\theta) + \frac{f r^2 \dot{\theta}}{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \delta \theta = F_r \delta r + F_\theta \delta \theta$$

En donde,  $f = \mu mg \cos(\alpha)$ . ¿Con que condiciones pueden ser discontinuas las fuerzas de fricción?

#### 5.1.2. Ejemplo 2

6.11. Una partícula se mueve en contacto con un tablero horizontal rugoso. Suponiendo que el coeficiente de fricción para movimiento en la dirección de  $X$  es  $\mu_x$ , y que en la dirección de  $Y$  es  $\mu_y$ , demostrar que las fuerzas de fricción generalizadas, correspondientes a las coordenadas polares, son:

$$F_r = -f(\mu_x \cos(\theta) + \mu_y \sin(\theta))$$
$$F_\theta = -f r(\mu_y \cos(\theta) - \mu_x \sin(\theta))$$

En donde  $f$  es la fuerza normal entre la partícula y el tablero.

### 5.1.3. Ejemplo 3

Determinar las ecuaciones de movimiento de un niño que resbala por un plano inclinado.

### 5.1.4. Ejemplo 4

6.13. Sobre un tablero plano se ha dibujado un rectángulo de lados  $2a$  y  $2b$ . En cada una de las esquinas del rectángulo se ha clavado una tachuela de cabeza redonda, pequeña. Se coloca entonces el tablero sobre las tachuelas, en contacto con una superficie rugosa, plana. Utilizando como coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $\theta$  ( $x$  y  $y$  son las coordenadas del centro del rectángulo y  $\theta$  el ángulo entre el lado  $2a$  y el eje  $X$ ) y suponiendo que se presenta fricción en seco, demostrar que  $\delta W_{total}$  viene dado por:

$$\begin{aligned} -\delta W_{total} = & f_1 \{ [\dot{x} + r\dot{\theta} \sin(\theta + \beta)] [\delta x + r\delta\theta \sin(\theta + \beta)] + \\ & [\dot{y} - r\dot{\theta} \cos(\theta + \beta)] [\delta y - r\delta\theta \cos(\theta + \beta)] \} \frac{1}{v_1} + \\ & f_2 \{ [\dot{x} - r\dot{\theta} \sin(\theta - \beta)] [\delta x - r\delta\theta \sin(\theta - \beta)] + \\ & [\dot{y} + r\dot{\theta} \cos(\theta - \beta)] [\delta y + r\delta\theta \cos(\theta - \beta)] \} \frac{1}{v_2} + \\ & f_3 \{ [\dot{x} - r\dot{\theta} \sin(\theta + \beta)] [\delta x - r\delta\theta \sin(\theta + \beta)] + \\ & [\dot{y} + r\dot{\theta} \cos(\theta + \beta)] [\delta y + r\delta\theta \cos(\theta + \beta)] \} \frac{1}{v_3} + \\ & f_4 \{ [\dot{x} + r\dot{\theta} \sin(\theta - \beta)] [\delta x + r\delta\theta \sin(\theta - \beta)] + \\ & [\dot{y} - r\dot{\theta} \cos(\theta - \beta)] [\delta y - r\delta\theta \cos(\theta - \beta)] \} \frac{1}{v_4} \end{aligned}$$

En donde:

$$r^2 = a^2 + b^2$$

$$\tan(\beta) = b/a$$

$$v_1 = \{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2r\dot{\theta}\}^{\frac{1}{2}}$$

Con expresiones semejantes para  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$ .  $f_1 = \mu$  (fuerza normal sobre la cabeza de la primera tachuela), etc. Se suponen conocidas  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  y  $f_4$ .

Nótese que es posible leer el valor de las fuerzas generalizadas, en la expresión de  $\delta W_{total}$ .

### 5.1.5. Ejemplo 5

6.12. Los bloques  $a$  y  $b$  unidos rígidamente por medio de una varilla ligera, de longitud  $l$ , se deslizan en contacto con los bloques  $c$  y  $d$ . El bloque  $e$  puede moverse, sin fricción, a lo largo de la varilla lisa, mientras que el bloque  $c$  puede moverse sobre el eje  $X$  y  $d$  permanece fijo.

Los coeficientes de fricción de las superficies de contacto, son  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\mu_3$ , como se índice. Nótese que el valor de las fuerzas normales depende de la posición de  $m_4$ .

Suponiendo que el sistema esta en movimiento de tal manera que  $\dot{x}_2$  y  $\dot{x}_1$  son ambas positivas, y que  $\dot{x}_2 > \dot{x}_1$ , demostrar que las fuerzas generalizadas correspondientes a  $x_1$ ,  $q_1$  y  $q_2$ , son:

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= -[\mu_1(m_1 + m_2 + m_4 - m_4 \frac{q_1}{l}) + \mu_3(m_3 + m_4 \frac{q_1}{l})]g \\ F_{q_2} &= -[\mu_2(m_2 + m_4 - m_4 \frac{q_1}{l}) + \mu_3(m_3 + m_4 \frac{q_1}{l})]g \\ F_{q_1} &= 0 \end{aligned}$$

¿Serán aun validas estas expresiones en el caso en que  $\dot{x}_1 > \dot{x}_2$ ? Evidentemente, las fuerzas de este tipo deber ser manejadas con cuidado.

### 5.1.6. Ejemplo 6

6.1. Una pequeña esfera esta suspendida por medio de una banda de caucho, dentro de un liquido viscoso. Suponiendo una fuerza viscosa sencilla que actúa sobre la esfera y que no hay resistencia sobre la banda, demostrar que las fuerzas viscosas generalizadas, correspondientes a las coordenadas esféricas,  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , son:

$$\begin{aligned} F_r &= -a\dot{r} \\ F_\theta &= -ar^2\dot{\theta} \\ F_\phi &= -ar^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi} \end{aligned}$$

En donde  $a$  es la fuerza viscosa por unidad de velocidad que actúa en la esfera.

### 5.1.7. Ejemplo 7

6.5. En la figura, el imán de herradura y el disco de cobre están sostenidos por tres segmentos de cuerda de piano, de tal manera que se forma un péndulo doble de torsión. Las constantes de torsión de las cuerdas son  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , respectivamente. Existe una resistencia viscosa  $a_1$ , por unidad de velocidad entre el disco y los bloques de freno  $B_1$  y  $B_2$ , y una resistencia semejante  $a_2$ , entre los polos magnéticos y el disco. Demostrar que las ecuaciones del movimiento del sistema son (suponiendo que  $a_1$  y  $a_2$  actúan a distancias radiales  $r_1$  y  $r_2$ ):

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 + C_3\theta_1 + C_2(\theta_1 - \theta_2) + 2a_1r_1^2\dot{\theta}_1 + 2a_2r_2^2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) &= 0 \\ I_2\ddot{\theta}_2 - C_2(\theta_1 - \theta_2) + C_1\theta_2 - 2a_2r_2^2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) &= 0 \end{aligned}$$

En donde  $I_1$  e  $I_2$  son los momentos de inercia del disco y del imán, respectivamente, y  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los desplazamientos angulares correspondientes.