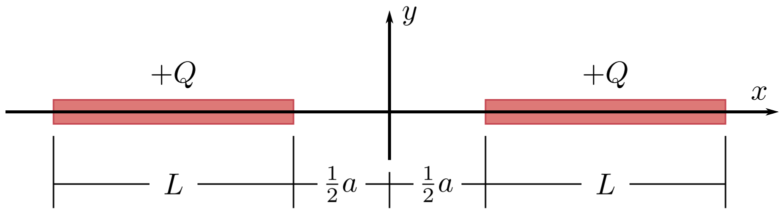
Tarea

21.97. Dos varillas delgadas de longitud L están a lo largo del eje x, una entre $x = \frac{1}{2}a$ y $x = \frac{1}{2}a + L$, y la otra entre $x = -\frac{1}{2}a$ y $x = -\frac{1}{2}a - L$. Cada varilla tiene carga positiva Q distribuida uniformemente en toda su longitud.



a) Calcule el campo eléctrico producido por la segunda varilla en puntos a lo largo del eje x positivo.

b) Demuestre que la magnitud de la fuerza que ejerce una varilla sobre la otra es:

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\, ln\left[\frac{(a+L)^2}{a(a+2L)}\right]$$

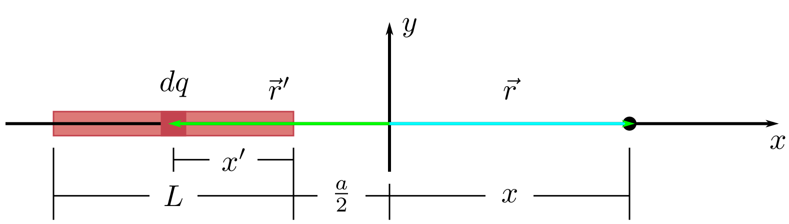
c) Demuestre que si $a \gg L$, la magnitud de esta fuerza se reduce a:

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Sugerencia: Use la expansión: $ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots$, válida para $|z| \ll 1$. Considere *todas* las expansiones al menos hasta el orden $\frac{L^2}{a^2}$. Interprete este resultado.

Solución:

a)



Los vectores de posición de las cargas son:

$$\vec{r} = x\hat{u}_x$$

$$\vec{r}' = -\left(\frac{a}{2} + x'\right)\hat{u}_x$$

Considerando la distribución homogénea de la carga:

$$\lambda = \frac{dq}{dx'}$$

El campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Reemplazando $dq = \lambda dx'$ y los vectores de posición $\vec{r}$ y $\vec{r}'$:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \lambda dx' \frac{(x\hat{u}_x + \frac{a}{2}\hat{u}_x + x'\hat{u}_x)}{|x\hat{u}_x + \frac{a}{2}\hat{u}_x + x'\hat{u}_x|^3} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L dx' \frac{(x + \frac{a}{2} + x')}{(x + \frac{a}{2} + x')^3}\hat{u}_x \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{(x + \frac{a}{2} + x')^2}\hat{u}_x
\end{aligned}$$

Realizando un cambio de variable para resolver la integral:

$$u = x + \frac{a}{2} + x'$$
$$du = dx'$$

Por tanto:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}$$

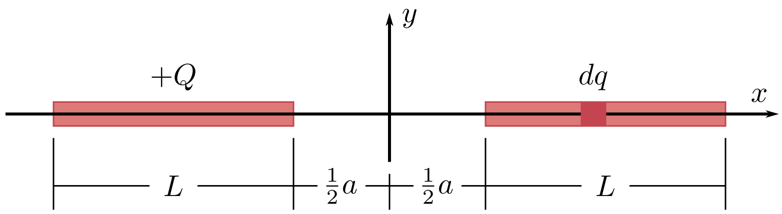
Reemplazando en la función original:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{x + \frac{a}{2} + x'}\bigg|_0^L\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{x + \frac{a}{2} + L} + \frac{1}{x + \frac{a}{2}}\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x + \frac{a}{2}} - \frac{1}{x + \frac{a}{2} + L}\right)\hat{u}_x
\end{aligned}$$

Reemplazando $\lambda = Q/L$:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{L}\left(\frac{2}{2x+a} - \frac{2}{2x+a+2L}\right)\hat{u}_x \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{L}\left(\frac{1}{2x+a} - \frac{1}{2x+a+2L}\right)\hat{u}_x\end{aligned}$$

b)



La fuerza ejercida por la varilla sobre un diferencial dq en el eje x es:

$$\vec{F} = \int_Q \vec{E}\,dq = \int_Q \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{L}\left(\frac{1}{2x+a} - \frac{1}{2x+a+2L}\right)dq\,\hat{u}_x$$

Reemplazando $dq = \lambda dx$:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+L} \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{L}\left(\frac{1}{2x+a} - \frac{1}{2x+a+2L}\right)\lambda dx\,\hat{u}_x \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda Q}{L}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+L} \frac{1}{2x+a} - \frac{1}{2x+a+2L} dx\,\hat{u}_x\end{aligned}$$

Reemplazando $\lambda = Q/L$:

$$\vec{F} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\left(\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+L}\frac{dx}{2x+a} - \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+L}\frac{dx}{2x+a+2L}\right)\hat{u}_x$$

Realizando un cambio de variable para resolver la integral:

$$u = 2x + a$$

$$du = 2\,dx$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{ln\,u}{2}$$

Reemplazando en la función original:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\frac{1}{2}\left(ln\,(2x+a)\Big|_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+L} - ln\,(2x+a+2L)\Big|_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+L}\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}(ln\,(2(\frac{a}{2}+L)+a) - ln\,(2(\frac{a}{2})+a) \\
&- ln\,(2(\frac{a}{2}+L)+a+2L) + ln\,(2(\frac{a}{2})+a+2L))\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\left(ln\,(2a+2L) - ln\,(2a) - ln\,(2a+4L) + ln\,(2a+2L)\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\,ln\,\left(\frac{(2a+2L)(2a+2L)}{2a(2a+4L)}\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\,ln\,\left(\frac{4(a+L)^2}{4a(a+2L)}\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\,ln\,\left(\frac{(a+L)^2}{a(a+2L)}\right)\hat{u}_x
\end{aligned}$$

c)

Transformando la función a expresiones tipo $1+\frac{L}{a}$:

$$(a+L) = \frac{a}{a}(a+L) = a\left(1+\frac{L}{a}\right)$$
$$(a+2L) = \frac{a}{a}(a+2L) = a\left(1+\frac{2L}{a}\right)$$

Reemplazando en la función original:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\,ln\,\left(\frac{a^2(1+\frac{L}{a})^2}{a^2(1+\frac{2L}{a})}\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\,ln\,\left(\frac{(1+\frac{L}{a})^2}{(1+\frac{2L}{a})}\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\left(2\,ln\,\left(1+\frac{L}{a}\right) - ln\,\left(1+\frac{2L}{a}\right)\right)\hat{u}_x
\end{aligned}$$

Sabiendo que para $|z| \ll 1$:

$$ln\,(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots$$

Y considerando $a \gg L$:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\left(2\left(\frac{L}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{a}\right)^2\right)-\left(\frac{2L}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{2L}{a}\right)^2\right)\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\left(2\left(\frac{L}{a}-\frac{L^2}{2a^2}\right)-\left(\frac{2L}{a}-\frac{4L^2}{2a^2}\right)\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\left(2\left(\frac{2aL-L^2}{2a^2}\right)-\left(\frac{4aL-4L^2}{2a^2}\right)\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\left(\left(\frac{4aL-2L^2}{2a^2}\right)-\left(\frac{4aL-4L^2}{2a^2}\right)\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\left(\frac{4aL-2L^2-4aL+4L^2}{2a^2}\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{L^2}\left(\frac{2L^2}{2a^2}\right)\hat{u}_x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a^2}\hat{u}_x
\end{aligned}
$$