Probalisitic Software product lines*

Carlos Camacho, Luis Llana, Alberto Núñez, and Manuel Núñez

Departamento Sistemas Informáticos y Computación
Universidad Complutense de Madrid, Spain
`carlos.camacho@ucm.es, llana@ucm.es, alberto.nunez@pdi.ucm.es, mn@fdi.ucm.es`
`Draft: 2017-02-02 13:30`

Abstract. In this paper we introduce a probabilistic extension of our previous framework `fodaA` for software product lines.

Keywords; Software Product Lines; Probabilistic Models; Formal Methods; Feature Models

El objetivo principal de éste capítulo es el de estudiar el comportamiento de las líneas de productos software basado en el análisis probabilístico. Este análisis muestra cómo identificar aquella característica mas utilizada dentro del modelo calculando la probabilidad de encontrar una característica dentro de una línea de productos. La sección 1 muestra la descripción formal de la extensión de `fodaA` para soportar probabilidades en los elementos sintácticos que lo requieran. Luego, la sección 2 muestra los cambios necesarios en las reglas semánticas de `fodaA` para soportar los cambios realizados en la sintaxis del lenguaje. Una vez modificadas tanto la sintaxis como la semántica de `fodaA` la sección 3 demuestra que todos los teoremas y lemas planteados para esta extensión son correctos. La sección 4 describe los cambios realizados a las reglas de la semántica denotacional. Seguidamente la sección 6 muestra una característica novedosa de la extensión probabilística, que es la de ocultar aquellas características que no afecten a la cardinalidad total de los productos validos a generar. La sección 5 muestra que los productos generados por ambas semánticas (operacional y denotacional) son equivalentes. Para finalizar la sección 7 muestra la implementación de la semántica denotacional de la extensión probabilística.

1 Sintaxis

Para el modelo probabilístico, el conjunto de características será representado como $\mathcal{F}$, las características aisladas se mostrarán como $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}\ldots$, los términos del modelo probabilístico serán descritos como P, Q y las probabilidades p, q son expresadas dentro del rango $(0, 1)$.

* Research partially supported by the Spanish MEC project ESTuDIo (TIN2012-36812-C02-01), the Comunidad de Madrid project SICOMORo-CM (S2013/ICE-3006) and the UCM-Santander program to fund research groups (group 910606).

Definition 1. Una *línea de productos probabilística* es un término generado por la siguiente expresion EBNF:

$$P ::= \checkmark \mid \texttt{nil} \mid \texttt{A}; P \mid \overline{\texttt{A}};_p P \mid P \vee_p Q \mid P \wedge Q \mid \\ \texttt{A} \not\Rightarrow \texttt{B in } P \mid \texttt{A} \Rightarrow \texttt{B in } P \mid P \backslash \texttt{A} \mid P \Rightarrow \texttt{A}$$

donde $\texttt{A} \in \mathcal{F}$ y $p \in (0, 1)$. Los términos del álgebra serán representados dentro del modelo $\texttt{SPLA}^{\mathcal{P}}$. □

Como puede observarse, la descripción de la sintaxis para la extensión probabilística (ver def. 1) parte de la definición original de `fodaA` (ver def. **??**). Sin embargo los elementos sintácticos deben ser modificados tal que permitan almacenar información relativa a las probabilidades. Los operadores de la sintaxis que han sido extendidos para soportar probabilidades son $P \vee_p Q$ y $\overline{\texttt{A}};_p P$ por dos razones. La primera razón es que estos dos operadores son los operadores mínimos a los que un término `fodaA` puede reducirse (formas normales y pre-normales) y cualquier otro término podría ser representado utilizando estos dos operadores. La segunda razón es porque estos operadores son los operadores que representan la selección exclusiva o de adición opcional de características dentro de los productos en construcción, afectando así a la cardinalidad de las características dentro de los productos finales.

2 Semántica operacional

Las reglas de la semántica operacional de $\texttt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ está basada en las reglas descritas en la figura **??**, sin embargo, estas reglas deben ser modificadas y extendidas para permitir representar probabilidades dentro del nuevo modelo.

Las reglas descritas en la figura 1 describen el comportamiento del sistema al procesar términos siguiendo la extensión probabilística $\texttt{SPLA}^{\mathcal{P}}$. Como se puede observar, la definición de estas reglas parte de la definición de figura **??**, sin embargo, las reglas de la extensión probabilística permiten modificar la información relacionada a las probabilidades a medida que son procesadas las característica.

Las reglas [**tick**] y [**feat**] muestran que al procesar la característica ✓, `A` y `A` respectivamente, podrá realizarse siempre con probabilidad 1 y que debe ser procesada la característica correspondiente. Las transiciones [**ofeat1**] y [**ofeat2**] permiten procesar el operador opcional, si es procesada la característica se computa con probabilidad p y en caso contrario $1 - p$ respectivamente. El operador de selección única ($\vee$) está compuesto por dos reglas semánticas [**cho1**] y [**cho2**], para el caso de la regla [**cho1**] se calcula la probabilidad multiplicando la probabilidad de ambos lados del operador $(p.q)$ y para la regla [**cho2**] al ser un operador simétrico es multiplicado 1 menos la probabilidad de la característica a procesar por la probabilidad acumulada del término del otro lado del operador $((1 - p).q)$. Los operadores de conjunción [**con1**] y [**con2**] procesan el operador de paralelo siempre que puedan seguirse procesando características, en donde, deber ejecutarse ambos lados de la conjunción la probabilidad de procesarlos es la mitad ($\frac{p}{2}$ o $\frac{q}{2}$) dependiendo de que lado del paralelo se esté ejecutando. La

[**tick**]	$\checkmark \xrightarrow{\checkmark}_1 \mathtt{nil}$	[**feat**]	$\mathtt{A};P \xrightarrow{\mathtt{A}}_1 P$
[**ofeat1**]	$\overline{\mathtt{A}};_p P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P$	[**ofeat2**]	$\overline{\mathtt{A}};_p P \xrightarrow{\checkmark}_{(1-p)} \mathtt{nil}$
[**cho1**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P_1}{P \vee_q Q \xrightarrow{\mathtt{A}}_{p\cdot q} P_1}$	[**cho2**]	$\dfrac{Q \xrightarrow{\mathtt{A}}_q Q_1}{P \vee_p Q \xrightarrow{\mathtt{A}}_{(1-p)\cdot q} Q_1}$
[**con1**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P_1}{P \wedge Q \xrightarrow{\mathtt{A}}_{\frac{p}{2}} P_1 \wedge Q}$	[**con2**]	$\dfrac{Q \xrightarrow{\mathtt{A}}_q Q_1}{P \wedge Q \xrightarrow{\mathtt{A}}_{\frac{q}{2}} P \wedge Q_1}$
[**con3**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\checkmark}_q \mathtt{nil}, Q \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}}{P \wedge Q \xrightarrow{\checkmark}_{p\cdot q} \mathtt{nil}}$		
[**con4**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P_1, Q \xrightarrow{\checkmark}_q \mathtt{nil}}{P \wedge Q \xrightarrow{\mathtt{A}}_{\frac{p\cdot q}{2}} P_1}$	[**con5**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}, Q \xrightarrow{\mathtt{A}}_q Q_1}{P \wedge Q \xrightarrow{\mathtt{A}}_{\frac{p\cdot q}{2}} Q_1}$
[**req1**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{C}}_p P_1,\ \mathtt{C} \neq \mathtt{A}}{\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{C}}_p \mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P_1}$	[**req2**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P_1}{\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P_1 \Rightarrow \mathtt{B}}$
[**req3**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}}{\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}}$		
[**excl1**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{C}}_p P_1,\ \mathtt{C} \neq \mathtt{A},\ \mathtt{C} \neq \mathtt{B}}{\mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{C}}_p \mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P_1}$	[**excl2**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P_1}{\mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P_1 \backslash \mathtt{B}}$
[**excl3**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{B}}_p P_1}{\mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{B}}_p P_1 \backslash \mathtt{A}}$	[**excl4**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}}{\mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}}$
[**forb1**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{B}}_p P_1,\ \mathtt{B} \neq \mathtt{A}}{P \backslash \mathtt{A} \xrightarrow{\mathtt{B}}_p P_1 \backslash \mathtt{A}}$	[**forb2**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}}{P \backslash \mathtt{A} \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}}$
[**mand1**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}}{P \Rightarrow \mathtt{A} \xrightarrow{\mathtt{A}}_p \checkmark}$	[**mand2**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P_1}{P \Rightarrow \mathtt{A} \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P_1}$
[**mand3**]	$\dfrac{P \xrightarrow{\mathtt{B}}_p P_1,\ \mathtt{A} \neq \mathtt{B}}{P \Rightarrow \mathtt{A} \xrightarrow{\mathtt{B}}_p P_1 \Rightarrow \mathtt{A}}$		

$$\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C} \in \mathcal{F},\ a \in \mathcal{F} \cup \{\checkmark\}$$

Fig. 1. Reglas para definir la semántica operacional de `fodaA`.

regla [**con3**] permite procesar la característica $\checkmark$ cuando pueda ser procesada en ambos lados del paralelo y su probabilidad será la multiplicación de las probabilidades de ambos lados ($p.q$). Las reglas [**con4**] y [**con5**] permiten procesar el operador de conjunción si alguno de los extremos del término puede generar la característica $\checkmark$ y su probabilidad será la mitad de la multiplicación de las probabilidades de ambos lados del operador ($\frac{p\cdot q}{2}$). Todos los operadores restantes ([**req1**], [**req2**], [**req3**], [**excl1**], [**excl2**], [**excl3**], [**excl4**], [**forb1**], [**forb2**], [**mand1**], [**mand2**] y [**mand3**]) no intervienen ni modifican la probabilidad de los elementos sintácticos al ser procesados.

A continuación serán descritas las definiciones correspondientes al procesamiento de las probabilidades.

Definition 2. Dados los términos $P, Q \in \mathtt{fodaA}$ y la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F} \cup \{\checkmark\}$. Existe una transición de P a Q etiquetada con el símbolo $\mathtt{A}$ y la probabilidad p, representada por $P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p Q$, si puede ser deducida de las reglas descritas en la figura 1. $\square$

Definition 3. $P \overset{s}{\Longrightarrow}_p Q$ si y sólo si $s = a_1 a_2 \cdots a_n$ y $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$ y

$$P = P_0 \xrightarrow{a_1}_{p_1} P_1 \xrightarrow{a_2}_{p_2} P_2 \cdots P_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{p_n} P_n = Q$$

$(pr, p) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P)$ si y sólo si $p > 0$ y $p = \sum[q \mid P \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_q Q \;\wedge\; \lfloor s \rfloor = pr]$ $\square$

Las definiciones 2 y 3 muestran como es modelada la información probabilística dentro de $\mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$. Esta, es relativa al procesamiento de las características que pertenezcan a cualquier término válido y a trazas de características.

Lemma 1. Dados los términos $P,\ Q \in \mathtt{fodaA}$,

- Dada la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F} \cup \{\checkmark\}$, si $P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p Q$ entonces $p \in (0, 1]$.
- Dada la característica $s \in \mathcal{F}^*$, si $P \overset{s}{\Longrightarrow}_p Q$ entonces $p \in (0, 1]$.

$\square$

Es importante una vez descrito como será modelada la información probabilística, definir el dominio matemático de estos nuevos datos. El lema 1 muestra que la información relativa a la probabilidad de cualquier característica aislada o parte de cualquier traza probabilística estará comprendida por números reales entre $(0, 1]$ con lo que se plantea el siguiente lema.

Lemma 2. Para cualquier término $P \in \mathtt{fodaA}$ se cumple

$$\sum\{p \mid \exists \mathtt{A} \in \mathcal{F},\ Q \in \mathtt{fodaA} :\ P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p Q\} \in [0, 1]$$

$\square$

Así el lema 2 acota a que la sumatoria de todas las probabilidades del procesamiento de las características deba ser representado como un número real entre $[0, 1]$.

Lemma 3. Dados los términos $P, Q \in \mathtt{fodaA}$ y la probabilidad $p \in (0, 1]$, $P \xrightarrow{\checkmark}_p Q$ si y sólo si $Q = \mathtt{nil}$. $\square$

Debe ser descrito el comportamiento del símbolo terminal al generar un producto válido de la extensión probabilística, el lema 3 muestra que solo es posible procesar la característica $\checkmark$ cuando el término restante es $\mathtt{nil}$ lo que significa que ha sido generado un producto válido.

Una vez definido como es modelada la información probabilística en la semántica operacional de $\mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ debe describirse el proceso del cálculo de las probabilidades, esto es logrado mediante la definición de las funciones que permitirán calcular la probabilidad de una traza probabilística dentro de un término que pertenezca al álgebra.

Ya definida la noción del almacenamiento de la información relacionada a las probabilidades dentro de los términos del álgebra, se procede a definir el concepto de traza probabilística.

Definition 4. Dado el término $P \in \texttt{fodaA}$ y la traza probabilística $\sigma = \langle (a_1, p_1), \ldots, (a_n, p_n) \rangle \in \texttt{ptr}(N_P)$, decimos que $\sigma = \langle (a_1, p_1), \ldots, (a_n, p_n) \rangle$ es una traza satisfactoria de P si $a_n = \checkmark$ y en caso contrario se dice que es una traza no satisfactoria.

– Se denota el conjunto de trazas satisfactorias de P como $\texttt{SuccessfulT}(P)$.
– Se denota el conjunto de trazas no satisfactorias de P como $\texttt{UnsuccessfulT}(P)$.
– Se denota la unión de ambos conjuntos de trazas satisfactorias y no satisfactoiras como $\texttt{CompleteT}(P)$.

□

La definición 4 define el proceso de construcción de tanto las trazas probabilísticas como el resultado de la función $\texttt{SuccessfulT}(P)$ y en la definición 5 la agrupación de todas las características para cada traza probabilística sin importar el orden de los mismos.

Definition 5. Dada la traza probabilística σ. El *producto inducido por la traza*, escrito $[\sigma]$, es el conjunto obtenido de los elementos del alfabeto de la traza sin tomar en cuenta su posición dentro de la traza:

$$[\sigma] = \{a_k | \ \sigma = \langle (a_1, p_1), \ldots, (a_n, p_n) \rangle \wedge 1 \leq k \leq n \wedge \ a_k \in \mathcal{F}\}$$

□

Podemos tomar como ejemplo la siguiente traza $\sigma = \langle (\texttt{A}, p_1), (\texttt{B}, p_2), (\texttt{C}, p_3), (\checkmark, p_4) \rangle$, se tiene que $[\sigma] = \{\texttt{A}, \texttt{B}, \texttt{C}\}$.

De esta manera la definición 6 muestra el significado de la función encargada de calcular todos los productos válidos generados a partir de un término cualquiera.

Definition 6. Dado un término $P \in \texttt{fodaA}$, se definen *los productos de* P, escrito $\texttt{prod}\,(P)$, como:

$$\texttt{prod}\,(P) = \{[\sigma] \mid \sigma \in \texttt{SuccessfulT}(N_P)\}$$

□

Una vez calculadas las trazas probabilísticas de los productos válidos y el conjunto de todas estas, se deben tomar en cuenta aquellas trazas probabílisticas que no han generado productos válidos.

Definition 7. Dado el término $P \in \texttt{fodaA}$, se define el *desecho de* P como la suma de las probabilidades de las trazas no satisfactorias de P

$$\texttt{waste}(P) = \sum_{\sigma \in \texttt{CompleteT}(N_P) \setminus \texttt{SuccessfulT}(N_P)} \texttt{prob}(\sigma)$$

□

La definición 7 permite calcular la probabilidad de aquellas trazas no satisfactorias para cualquier término P.

Definition 8. Dado el producto $[\sigma] \in \texttt{prod}\,(P)$, definimos la probabilidad de este producto en P descrita $\texttt{prob}\,([\sigma], P)$ como:

$$\texttt{prob}\,([\sigma], P) = \frac{\sum_{\sigma' \in \texttt{SuccessfulT}(N_P) \wedge [\sigma'] = [\sigma]} \texttt{prob}(\sigma')}{1 - \texttt{waste}(P)}$$

□

Es importante destacar que $\checkmark \notin \mathcal{F}$ entonces $\checkmark \notin [\sigma]$. La función $\texttt{prob}\,([\sigma], P)$ induce un espacio probabilístico en el conjunto de productos de P.

Proposition 1. Dado el producto $P \in \texttt{fodaA}$, entonces

$$1 = \sum_{[\sigma] \in \texttt{prod}(P)} \texttt{prob}\,([\sigma], P)$$

□

La definición 1 muestra que la suma de las probabilidades del producto $[\sigma] \in \texttt{prod}\,(P)$ debe ser igual a 1.

Los ejemplos descritos en la figura 2 muestran el cálculo de la información probabilística al procesar los términos P_1, P_2 y P_3.

Consideremos el término $P_1 = \texttt{A}; \overline{\texttt{B}};_p (\texttt{C}; \overline{\texttt{D}};_q \checkmark)$ cuyo conjunto $\texttt{SuccessfulT}(N_{P_1})$ es:

$$\begin{aligned}\texttt{SuccessfulT}(N_{P_1}) = \{ & \\ & \langle (\texttt{A}, 1), (\checkmark, (1-p)) \rangle, \\ & \langle (\texttt{A}, 1), (\texttt{B}, p), (\texttt{C}, 1), (\checkmark, 1-q) \rangle \\ & \langle (\texttt{A}, 1), (\texttt{B}, p), (\texttt{C}, 1), (\texttt{D}, q), (\checkmark, 1) \rangle \\ & \}\end{aligned}$$

Donde $\texttt{prod}\,(P_1) = \{[\texttt{A}], [\texttt{ABC}], [\texttt{ABCD}]\}$

De igual manera el término $P_2 = \texttt{A}; \overline{\texttt{B}};_p (\texttt{C}; (\texttt{D}; \checkmark \vee_q (\overline{\texttt{E}};_r \checkmark)))$ cuyo conjunto $\texttt{SuccessfulT}(N_{P_2})$ es:

$$\begin{aligned}\texttt{SuccessfulT}(N_{P_2}) = \{ & \\ & \langle (\texttt{A}, 1), (\checkmark, (1-p)) \rangle, \\ & \langle (\texttt{A}, 1), (\texttt{B}, p), (\texttt{C}, 1), (\texttt{D}, 1.q), (\checkmark, 1) \rangle \\ & \langle (\texttt{A}, 1), (\texttt{B}, p), (\texttt{C}, 1), (\texttt{E}, ((1-p).q)), (\checkmark, 1) \rangle \\ & \langle (\texttt{A}, 1), (\texttt{B}, p), (\texttt{C}, 1), (\checkmark, (1-q).(1-r)) \rangle \\ & \}\end{aligned}$$

Donde $\texttt{prod}\,(P_2) = \{[\texttt{A}], [\texttt{ABCD}], [\texttt{ABCE}], [\texttt{ABC}]\}$

También $P_3 = \overline{\texttt{A}};_p \texttt{B}; (\overline{\texttt{C}};_q \checkmark \wedge \texttt{D}; \checkmark)$ cuyo conjunto $\texttt{SuccessfulT}(N_{P_3})$ es:

$$\begin{aligned}\texttt{SuccessfulT}(N_{P_3}) = \{ & \\ & \langle (\checkmark, (1-p)) \rangle, \\ & \langle (\texttt{A}, p), (\texttt{B}, 1), (\texttt{C}, \tfrac{q}{2}), (\texttt{D}, \tfrac{\frac{q}{2}.p}{2}), (\checkmark, p.q) \rangle \\ & \langle (\texttt{A}, p), (\texttt{B}, 1), (\texttt{D}, \tfrac{q}{2}), (\texttt{C}, \tfrac{\frac{q}{2}.p}{2}), (\checkmark, p.q) \rangle \\ & \langle (\texttt{A}, p), (\texttt{B}, 1), (\texttt{D}, \tfrac{q}{2}), (\checkmark, 1 - (\tfrac{q}{2})) \rangle \\ & \}\end{aligned}$$

Donde $\texttt{prod}\,(P_3) = \{[\texttt{ABCD}], [\texttt{ABD}]\}$

De esta manera es posible dentro de la semántica operacional, calcular las probabilidades para cada traza en cada elemento.

3 Consistencia del modelo probabilístico

La consistencia del modelo probabilístico se basa en la consistencia del modelo no probabilístico. Esto implica que deberá ser definida una función que permita realizar una traducción directa entre $\texttt{SPLA}^{\mathcal{P}}$y $\texttt{fodaA}$, de esta manera se demostrará que esta particularización del modelo es consistente si y sólo si el modelo no probabilístico lo es.

La sintaxis del modelo no probabilístico es presentada en la definición **??**

Definition 9. Se define la función $\texttt{np} : \texttt{SPLA}^{\mathcal{P}} \mapsto \texttt{fodaA}$, eliminando las información relacionada a las probabilidades.

$$\texttt{np}(P) = \begin{cases} \overline{\texttt{A}}; P & \text{si } P = \texttt{A};_p P \\ P \vee Q & \text{si } P \vee_p Q \\ P & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

□

Proposition 2. Dados los términos $P, Q \in \texttt{SPLA}^{\mathcal{P}}$,

1. $P \stackrel{s}{\Longrightarrow}_p Q$ si y sólo si $\texttt{np}(P) \stackrel{s}{\Longrightarrow} \texttt{np}(Q)$.
2. $pr \in \texttt{prod}(\texttt{np}(P))$ si y sólo si existe $p > 0$ tal que $(pr, p) \in \texttt{prod}^{\mathcal{P}}(P)$.
3. $pr \in [\![\texttt{np}(P)]\!]$ si y sólo si existe $p > 0$ tal que $(pr, p) \in [\![P]\!]^{\mathcal{P}}$.
4. Existe $p \in (0, 1)$ tal que $(pr, p) \in \texttt{prod}^{\mathcal{P}}(P)$ si y sólo si existe $q \in (0, 1)$ tal que $(pr, q) \in [\![P]\!]^{\mathcal{P}}$.

Deberiamos llamar a $\texttt{prod}\,(P)$ como $\texttt{prod}^{\mathcal{P}}(P)$ en la sem denotacional ??? por consistencia?

Demostración La demostración de las secciones 1 y 3 de la proposición 2 es trivial ya que las reglas consideradas en [**?**] son las mismas que las presentadas en el modelo probabilístico, simplemente eliminando la información relacionada a las probabilidades. En particular la sección 1 muestra que para cualquier transición de la extensión probabilística $P \stackrel{s}{\Longrightarrow}_p Q$ existen los términos con la información probabilística eliminada P y Q. La sección 3 muestra que existe un producto pr que pertenece al conjunto de los productos no probabilísticos generados por la función P y este solo existirá si pr existe dentro del conjunto de los productos generados por la función probabilística de P y que su probabilidad sea mayor a 0. La sección 2 de la proposición 2 es una consecuencia directa de la sección 1 y muestra que el producto pr existirá si y sólo si éste existe tanto en el conjunto de los productos probabilísticos como en el de los no probabilísticos. La sección 4 se refiere a que existe una probabilidad $p \in (0, 1)$ de un producto probabilístico si y sólo si este producto existe dentro de los productos generados por la misma función de la semántica denotacional P.

□

4 Semántica denotacional

De manera de definir la semántica denotacional para la extensión probabilística es indispensable definir el *dominio matemático* donde serán representados los elementos sintácticos de $\texttt{SPLA}^{\mathcal{P}}$.

La semántica de cualquier expresión $\texttt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ se representa por su conjunto de productos y sus probabilidades, y cada producto puede ser representado por sus características sin tomar en cuenta su posición dentro de la traza, de tal manera que éstas serán vistos como conjuntos de características. De igual manera que en la sección **??**, la extensión denotacional de $\texttt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ permitirá que serán definidas todas las funciones que permitan describir el comportamiento del modelo sin importar de la forma en que estas reglas son procesadas. Este se basa en las definiciones del modelo no probabilístico con la excepción que debe ser añadida la información probabilística a medida que se procesan las características, de allí, el uso de multiconjuntos para su representación ya la probabilidad es modelada como sería definida la multiplicidad en los multiconjuntos tradicionales.

Definition 10. Se define el conjunto $M \in \mathcal{M}$ si y sólo si

- $M \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F}) \times (0, 1]$
  Donde M está contenido en el superconjunto de todas las características del término y la probabilidad de cada uno de estos productos está entre (0,1].
- $(P, q), (P, r) \in M$ entonces $q = r$
  Cada producto tienen una probabilidad única dentro del conjunto de productos.
- $1 \geq \sum_{(P,q)\in M} q$
  La sumatoria de las probabilidades de los productos contenidos en M será de hasta 1.

□

Para la descripción de la semántica denotacional se utilizaran multiconjuntos, representados por $\wr \cdots \int$, esto, debido a la definición 10, ya que para cada conjunto de características (producto en construcción) será asociado una multiplicidad (probabilidad del producto en construcción).

Definition 11. Dado un multiconjunto $M \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F}) \times [0, 1]$, se define entonces

$$\texttt{accum}(M) = \left\{ (P, p) \mid p = \sum_{(P,q)\in M} q \ , \ p > 0 \right\}$$

□

Proposition 3. Dado un multiconjunto $M \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F}) \times [0, 1]$, si $1 \geq \sum_{(P,q)\in M} q$ entonces $\texttt{accum}(M) \in \mathcal{M}$. □

Verificar agregada por carlos

Definition 12. Dados los multiconjuntos:
$M = \wr(M_1, m_1), \ldots, (M_n, m_n)\int, 0 \leq m_1 \ldots m_n \leq 1, M_1 \ldots M_n \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F})$
$N = \wr(N_1, n_1), \ldots, (N_n, n_n)\int, 0 \leq n_1 \ldots n_n \leq 1, N_1 \ldots N_n \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F})$
se define $M \uplus N$ como:
$\wr(M_1, m_1), \ldots, (M_n, m_n), (N_1, n_1), \ldots, (N_n, n_n)\int$ □

Proposition 4. Dados los multiconjuntos $M \in \mathcal{M}$ y $N \in \mathcal{M}$ entonces $M \uplus N \in \mathcal{M}$ □

Verificar agregada por carlos

El siguiente paso es definir un operador semántico para cada uno de los operadores sintácticos en `fodaA`. Esto es realizado mediante la siguiente definición.

Definition 13. Los operadores de la semántica denotacional para la extensión probabilística de `fodaA` se definen como:

- $[\![\texttt{nil}]\!]^{\mathcal{P}} = \varnothing$
  La función de la semántica denotacional que recibe `nil` retornará siempre vacío y de allí a que no pueda ser procesada ninguna otra característica ya que no existe ninguna función definida que reciba $\varnothing$ como parámetro.
- $[\![\checkmark]\!]^{\mathcal{P}} = \{(\varnothing, 1)\}$
  La función que recibe ✓ como parámetro siempre será procesada con probabilidad 1. Esta no devuelve un multiconjunto porque al procesar el término siempre serán la primeras características en computarse.
- $[\![\texttt{A};\cdot]\!]^{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ como

  $$[\![\texttt{A};\cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M) = \texttt{accum}\big(\wr(\{\texttt{A}\} \cup P, p) \mid (P, p) \in M\int\big)$$

  Para el procesamiento de cualquier característica obligatoria será procesada con probabilidad p y esta será añadida al multiconjunto de características procesadas previamente.
- $[\![\overline{\texttt{A}};_r \cdot]\!]^{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ como

  $$[\![\overline{\texttt{A}};_r \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M) = \texttt{accum}\big(\wr(\varnothing, 1-r)\int \uplus \wr(\{\texttt{A}\} \cup P, r \cdot p) \mid (P, p) \in M\int\big)$$

  Al procesar una característica opcional deben realizarse dos acciones. La primera es de no procesar la característica, terminando el procesamiento del término con probabilidad $1 - r$. La segunda es de procesarla con probabilidad r siendo esta multiplicada por la probabilidad acumulada del término restante. El resultado de ambas acciones es unido usando el operador $\uplus$ y las probabilidades de cada conjunto sumadas utilizando la función $\texttt{accum}(M)$.
- $[\![\cdot \vee_r \cdot]\!]^{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ como

  $$[\![\cdot\vee_r\cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M_1, M_2) = \texttt{accum}\big(\wr(P, r\cdot p) \mid (P, p) \in M_1\int \uplus \wr(Q, (1-r)\cdot q) \mid (Q, q) \in M_2\int\big)$$

  Se crea un nuevo multiconjunto al procesar los términos (multiconjuntos) a cada lado del operador de selección única, este, generará dos conjuntos dentro del nuevo multiconjunto y sus probabilidades serán sumadas utilizando la función $\texttt{accum}(M)$.

Deberiamos intercambiar de lado la probabilidad r y 1-r por consistencia en este operador.

– $[\![\cdot \wedge \cdot]\!]^{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ como

$$[\![\cdot \wedge \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M_1, M_2) = \texttt{accum}\Big(\wr(P \cup Q, p \cdot q)|\ (P,p) \in M_1,\ (Q,q) \in M_2 \int\Big)$$

El operador de paralelo dentro de la semántica operacional unirá las características de ambos términos multiplicando su probabilidad.

– $[\![\texttt{A} \Rightarrow \texttt{B in} \cdot]\!]^{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ como

$$[\![\texttt{A} \Rightarrow \texttt{B in} \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M) = \texttt{accum}\begin{pmatrix} \wr\big(P,p\big) \mid (P,p) \in M, \texttt{A} \notin P \int\ \uplus \\ \wr\big(\{\texttt{B}\} \cup P, p\big) \mid (P,p) \in M, \texttt{A} \in P \int \end{pmatrix}$$

La restricción de requerimiento no modifica las probabilidades de los productos en construcción, sin embargo, si se cumple la restricción de requerimiento debe agregarse la característica requerida en el producto y deben ser sumadas las probabilidades utilizando los operadores $\uplus$ y $\texttt{accum}(M)$.

– $[\![\texttt{A} \not\Rightarrow \texttt{B in} \cdot]\!]^{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ como

$$\begin{aligned}[\![\texttt{A} \not\Rightarrow \texttt{B in} \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M) = & \{(P,p) \mid (P,p) \in M, \texttt{A} \notin P\} \cup \\ & \{(P,p) \mid (P,p) \in M, \texttt{B} \notin P\}\end{aligned}$$

Para el caso de la restricción de exclusión, si esta se cumple, se procede a eliminar las características que estén referenciadas por este operador y las probabilidades se mantienen inalteradas.

– $[\![\cdot \Rightarrow \texttt{A}]\!]^{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ como

$$[\![\cdot \Rightarrow \texttt{A}]\!]^{\mathcal{P}}(M) = [\![\texttt{A}; \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M)$$

El operador de inclusión se comporta de igual manera al operador de obligatoriedad.

– $[\![\cdot \backslash \texttt{A}]\!]^{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ como

$$[\![\cdot \backslash \texttt{A}]\!]^{\mathcal{P}}(M) = \{(P,p) \mid (P,p) \in M, \texttt{A} \notin P\}$$

El operador de ocultamiento tiene el mismo comportamiento que el operador de exclusión, con la diferencia que se aplica a una sola característica.

□

Proposition 5. Dados $M, M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, la probabilidad $p \in (0,1]$ y las características $\texttt{A}, \texttt{B} \in \mathcal{F}$, entonces:

– $[\![\texttt{A}; \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M) \in \mathcal{M}$
– $[\![\overline{\texttt{A}};_r \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M) \in \mathcal{M}$
– $[\![\cdot \vee_r \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M_1, M_2) \in \mathcal{M}$
– $[\![\cdot \wedge \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M_1, M_2) \in \mathcal{M}$
– $[\![\texttt{A} \Rightarrow \texttt{B in} \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M) \in \mathcal{M}$
– $[\![\texttt{A} \not\Rightarrow \texttt{B in} \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(M) \in \mathcal{M}$
– $[\![\cdot \Rightarrow \texttt{A}]\!]^{\mathcal{P}}(M) \in \mathcal{M}$
– $[\![\cdot \backslash \texttt{A}]\!]^{\mathcal{P}}(M) \in \mathcal{M}$

Demostración. La demostración de la proposición 5 permite comprobar que las operaciones sobre los multiconjuntos dentro de la semántica denotacional de $\mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ siempre tienen como resultado un único multiconjunto. Para aquellos operadores que hagan uso de la función $\mathtt{accum}(M)$ por la proposición 3 se cumple que $\mathtt{accum}(M) \in \mathcal{M}$. De igual manera para los operadores que utilicen el operador $\uplus$ por la proposición 4 se cumple que $M \uplus N \in \mathcal{M}$. ☐

Una vez definidos los operadores semánticos sobre un conjunto de productos, es posible definir la semántica denotacional para cualquier expresión `fodaA`. Esta es definida de manera inductiva.

Definition 14. La semántica denotacional de `fodaA` es representada por la función $[\![\cdot]\!]^{\mathcal{P}} : \mathtt{fodaA} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{F}))$ definida de manera inductiva de la siguiente forma: para cualquier operador n-ario $\mathtt{op} \in \{\mathtt{nil}, \checkmark, \mathtt{A};\cdot, \overline{\mathtt{A}};_p \cdot, \cdot \vee_p \cdot, \cdot \wedge \cdot, \mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ \cdot, \mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ \cdot, \cdot \Rightarrow \mathtt{A}, \cdot\backslash\mathtt{A}\}$[1]:

$$[\![\mathtt{op}(P_1, \ldots P_n)]\!]^{\mathcal{P}} = [\![\mathtt{op}]\!]^{\mathcal{P}}([\![P_1]\!]^{\mathcal{P}}, \ldots, [\![P_n]\!]^{\mathcal{P}})$$

☐

En la figura 3 y en la figura 4 se describe el cálculo la semántica denotacional de 5 ejemplos, así permitir analizar el proceso de cálculo de las probabilidades de las características dentro de términos a medida que son procesados, estos, viendo que el término es representado como un árbol, desde los elementos terminales u hojas hasta la raíz.

5 Relaciones de equivalencia

Esta sección muestra las relaciones de equivalencia entre la semántica operacional y la semántica denotacional.

Proposition 6. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ y la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F}$, entonces $(pr, p) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(\mathtt{A}; P)$ si y sólo si

$$p = \sum \wr r \mid (pr', r) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P) \ \wedge\ pr' \cup \{\mathtt{A}\} = pr \int$$

Demostración. La otra transición de $\mathtt{A}; P$ es $\mathtt{A}; P \xrightarrow{\mathtt{A}}_1 Q$. Entonces $\mathtt{A}; P \overset{s}{\Longrightarrow}_p P$ si y sólo si

$$\mathtt{A}; P \xrightarrow{\mathtt{A}}_1 P \overset{s}{\Longrightarrow}_p Q \quad \wedge \quad s = \mathtt{A} \cdot s'$$

Entonces

$$\begin{aligned} p = \sum \wr r \mid \mathtt{A}; P \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_p \mathtt{nil} \ \wedge\ \lfloor s \rfloor = pr \int = \\ \sum \wr r \mid \mathtt{A}; P \xrightarrow{\mathtt{A}}_1 P \overset{s'\checkmark}{\Longrightarrow}_r \mathtt{nil} \ \wedge\ \lfloor \mathtt{A} \cdot s' \rfloor = pr \int \\ \sum \wr r \mid P \overset{s'\checkmark}{\Longrightarrow}_r \mathtt{nil} \ \wedge\ \{\mathtt{A}\} \cup \lfloor s' \rfloor = pr \int \\ \sum \wr r \mid (pr', r) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P) \ \wedge\ \{\mathtt{A}\} \cup pr' = pr \int \end{aligned}$$

[1] `nil` y $\checkmark$ son operadores 0-arios; $\mathtt{A};\cdot$, $\overline{\mathtt{A}};\cdot$ $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ \cdot$, $\mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ \cdot$, $\cdot \Rightarrow \mathtt{A}$, $\cdot\backslash\mathtt{A}$ son operadores 1-arios; $\cdot \vee_p \cdot$ y $\cdot \wedge \cdot$ son operadores 2-arios.

$\square$

Corollary 1. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, y la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F}$, entonces

$$\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(\mathtt{A}; P) = [\![\mathtt{A}; \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P))$$

Demostración. Esto es consecuencia de la proposición 6.

$\square$

Proposition 7. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F}$, y la probabilidad $q \in (0, 1)$, entonces $(pr, p) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(\overline{\mathtt{A}};_q P)$ si y sólo si $(pr, p) = (\varnothing, 1 - q)$ o

$$p = q \cdot \sum\{r \mid (pr', r) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P) \ \wedge \ pr' \cup \{\mathtt{A}\} = pr\}$$

Proof. Existen dos transiciones para $\overline{\mathtt{A}};_q P$: $\overline{\mathtt{A}};_q P \xrightarrow{\mathtt{A}}_q P$ y $\overline{\mathtt{A}};_q P \xrightarrow{\checkmark}_{1-q} \mathtt{nil}$. Por lo tanto si $\overline{\mathtt{A}};_q P \stackrel{s}{\Longrightarrow}_r Q$ entonces

- $s = \checkmark$ y $r = 1 - q$, o
- $s = \mathtt{A} \cdot s'$, $P \stackrel{s}{\Longrightarrow}_{r'} Q$, y $r = q \cdot r'$.

Además, si $pr = \lfloor \mathtt{A} \cdot s' \rfloor$ entonces $pr \neq \varnothing$. Por lo tanto $(\varnothing, 1-q) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(\overline{\mathtt{A}};_q P)$. Ahora suponemos $pr \neq \varnothing$, entonces $(pr, p) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(\overline{\mathtt{A}};_q P)$ si y sólo si

$$\begin{aligned}
d = \sum \wr r \mid \overline{\mathtt{A}};_q P \stackrel{s\checkmark}{\Longrightarrow} \mathtt{nil} \ \wedge \ \lfloor s \rfloor = pr \int = \\
\sum \wr r \mid \overline{\mathtt{A}};_q P \xrightarrow{\mathtt{A}}_q P \stackrel{s'\checkmark}{\Longrightarrow}_{r'} \mathtt{nil} \ \wedge \ \lfloor \mathtt{A} \cdot s' \rfloor = pr \ \wedge \ r = q \cdot r' \int = \\
\sum \wr r \mid P \stackrel{s'\checkmark}{\Longrightarrow}_{r'} \mathtt{nil} \ \wedge \ \{\mathtt{A}\} \cup \lfloor s' \rfloor = pr \ \wedge \ r = q \cdot r' \int = \\
\sum \wr r \mid (pr', r') \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P) \ \wedge \ \{\mathtt{A}\} \cup pr' = pr \ \wedge \ r = q \cdot r' \int = \\
q \cdot \sum \wr r' \mid (pr', r') \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P) \ \wedge \ \{\mathtt{A}\} \cup pr' = pr \int
\end{aligned}$$

$\square$

$\square$

Corollary 2. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F}$ y la probabilidad $q \in (0, 1)$, entonces

$$\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(\overline{\mathtt{A}};_q P) = [\![\overline{\mathtt{A}};_q \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P))$$

Proof. Esto es consecuencia de la proposición 7. $\square$

$\square$

Lemma 4. Dados los términos $P, Q \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, y la probabilidad $q \in (0, 1)$, entonces $P \vee_q Q \stackrel{s}{\Longrightarrow}_r R$ si y sólo si

– $P \overset{s}{\Longrightarrow}_{r'} R$ y $r = q \cdot r'$, o
– $Q \overset{s}{\Longrightarrow}_{r'} R$ y $r = (1-q) \cdot r'$

Proof. Este lema es consecuencia de las reglas [**cho1**] y [**cho2**] de la semántica operacional. □

□

Proposition 8. Dados los términos $P, Q \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, y la probabilidad $q \in (0,1)$, entonces $(pr, p) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P \vee_q Q)$ si y sólo si

$$p = \Big(q \cdot \sum\{r \mid (pr, r) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P)\}\Big) + \Big((1-q) \cdot \sum\{r \mid (pr, r) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(Q)\}\Big)$$

Demostración.
$(pr, p) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P \vee_q Q)$ si y sólo si

$$\begin{aligned} p = \sum \wr r \mid P \vee_q Q \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_r \mathtt{nil} \int = \\ \sum \wr r \mid (P \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_{r'} \mathtt{nil} \ \wedge \ r = q \cdot r') \ \vee \ (Q \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_{r'} \mathtt{nil} \ \wedge \ r = (1-q) \cdot r') \int = \\ \sum \wr r \mid P \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_{r'} \mathtt{nil} \ \wedge \ r = q \cdot r' \int + \sum \wr r \mid Q \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_{r'} \mathtt{nil} \ \wedge \ r = (1-q) \cdot r' \int = \\ q \cdot \sum \wr r \mid P \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_r \mathtt{nil} \int + (1-q) \cdot \sum \wr r \mid Q \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_r \mathtt{nil} \int = \\ q \cdot \sum \wr r \mid (pr, r) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P) \int + (1-q) \cdot \sum \wr r \mid (pr, r) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(Q) \int \end{aligned}$$

□

Corollary 3. Dados los términos $P, Q \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, y la probabilidad $q \in (0,1)$, entonces

$$\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P \vee_q Q) = [\![\cdot \vee_q \cdot]\!]^{\mathcal{P}}\big(\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P), \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(Q)\big)$$

Demostración. Es consecuencia de la proposición 8. □

Definition 15. Dadas las trazas $s, s' \in \mathcal{F}^*$, se denota el conjunto de trazas obtenidas de alternar s y s' por $\mathsf{int}(s, s')$. □

Proposition 9. Dados los términos $P, Q \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, las probabilidades $p, q \in (0,1)$y las trazas $s, s' \in \mathcal{F}^*$ tal que $p = \sum \wr p' \mid P \overset{s\checkmark}{\Longrightarrow}_{p'} \mathtt{nil} \int$ y $q = \sum \wr q' \| \mid Q \overset{s'}{\Longrightarrow}_{q'}$ $\mathtt{nil} \int$ Entonces

$$p \cdot q = \sum \wr r \mid P \wedge Q \overset{s''\checkmark}{\Longrightarrow}_r \mathtt{nil} \ \wedge \ s'' \in \mathsf{int}(s, s) \int$$

Demostración. Por inducción de $|s| + |s'|$.

$|s|+|s'|=0$ Desde $P \wedge Q \xrightarrow{\checkmark}_{r} \texttt{nil}$ si y sólo si $P \xrightarrow{\checkmark}_{r_1} \texttt{nil}$, $Q \xrightarrow{\checkmark}_{r_2} \texttt{nil}$, y $r = r_1 \cdot r_2$, se sostiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\sum \wr r \mid P \wedge Q \xrightarrow{\checkmark}_{r} \texttt{nil} \int = \\
\sum \wr r \mid P \xrightarrow{\checkmark}_{r_1} \texttt{nil} \ \wedge \ Q \xrightarrow{\checkmark}_{r_2} \texttt{nil} \ \wedge \ r = r_1 \cdot r_2 \int = \\
\sum \wr r_1 \cdot r_2 \mid P \xrightarrow{\checkmark}_{r_1} \texttt{nil} \ \wedge \ Q \xrightarrow{\checkmark}_{r_2} \texttt{nil} \int = \\
\sum \left\wr r_1 \cdot \left(\sum \wr r_2 \mid Q \xrightarrow{\checkmark}_{r_2} \texttt{nil} \int \right) \,\middle|\, P \xrightarrow{\checkmark}_{r_1} \texttt{nil} \right\int = \\
\sum \wr r_1 \cdot q \mid P \xrightarrow{\checkmark}_{r_1} \texttt{nil} \int = q \cdot \sum \wr r_1 \mid P \xrightarrow{\checkmark}_{r_1} \texttt{nil} \int = q \cdot p
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$|s|+|s'|>0$ Supóngase que $|s|>0$ (para el caso cuando $|s'|>0$ es simétrico). Consideremos que $s = \texttt{A} \cdot s_1$. Ahora consideremos el multiconjunto $\mathcal{P} = \wr P' \mid P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \xRightarrow{s_1 \checkmark}_{p'} \texttt{nil} \int$ y dado $r_1 = \sum \wr r \mid P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r} P' \ \wedge \ P' \in \mathcal{P} \int$ y $p_1 = \sum \wr r \mid P' \xRightarrow{s_1 \checkmark}_{r} \texttt{nil} \ \wedge \ P' \in \mathcal{P} \int$. Es facil verificar que $p = r_1 \cdot p_1$:

$$
\begin{aligned}
p = \sum \wr r \mid P \xRightarrow{s \checkmark}_{r} \texttt{nil} \int = \\
\sum \wr r' \cdot p' \mid P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \xRightarrow{s_1 \checkmark}_{p'} \texttt{nil} \int = \\
\sum \left\wr r' \cdot \underbrace{\left(\sum \wr p' \mid P' \xRightarrow{s_1 \checkmark}_{p'} \texttt{nil} \int \right)}_{p_1} \,\middle|\, P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \ \wedge \ P' \in \mathcal{P} \right\int = \\
p_1 \cdot \sum \wr r' \mid P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \ \wedge \ P' \in \mathcal{P} \int = r_1 \cdot p_1
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Para cualquier $P' \in \mathcal{P}$, y luego por la hipótesis de inducción obtenemos

$$
p' \cdot q = \sum \wr r \mid P' \wedge Q \xRightarrow{s'' \checkmark}_{r} \ \wedge s'' \in \mathsf{int}(s_1, s') \int
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\sum \wr r \mid P' \in \mathcal{P} \ \wedge \ P' \wedge Q \xRightarrow{s'' \checkmark}_{r} \ \wedge s'' \in \mathsf{int}(s_1, s') \int = \\
\sum \wr p' \cdot q \mid P' \in \mathcal{P} \ \wedge \ P' \xRightarrow{s_1 \checkmark}_{p'} \texttt{nil} \ \wedge \ s'' \in \mathsf{int}(s_1, s') \int \\
q \cdot \sum \wr r \mid P' \xRightarrow{s_1 \checkmark}_{\texttt{nil}} \ \wedge P' \in \mathcal{P} \int = p_1 \cdot q
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Entonces para cualquier $P' \in \mathcal{P}$ se obtiene $P \wedge Q \xRightarrow{s''\checkmark}_r \texttt{nil}$ donde $P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P'$, $r = \frac{r'}{2} \cdot p' \cdot q$ y s'' es la alternación de s y s'. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\sum \wr r \mid P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{\frac{r_1}{2}} P' \wedge Q \xRightarrow{s''\checkmark}_{r_2} \texttt{nil} \;\wedge\; P' \xrightarrow{\texttt{A}}_{r_1} P' \wedge \\
&\qquad r = \frac{r_1}{2} \cdot r_1 \;\wedge\; s'' \in \mathsf{int}(s_1, s') \int = \\
&\sum \left\wr \frac{r'}{2} \cdot r'' \;\middle|\; P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \;\wedge\; P' \wedge Q \xRightarrow{s''\checkmark}_{r''} \texttt{nil} \;\wedge\; s'' \in \mathsf{int}(s_1, s') \right\int = \\
&\sum \left\wr \frac{r'}{2} \cdot \left(\underbrace{\sum \left\wr r'' \;\middle|\; \begin{array}{r} P' \wedge Q \xRightarrow{s''\checkmark}_{r''} \texttt{nil} \wedge \\ s'' \in \mathsf{int}(s_1, s') \end{array} \right\int}_{\text{hipótesis de inducción: } p_1 \cdot q} \right) \;\middle|\; P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \;\wedge\; P' \in \mathcal{P} \right\int = \\
&\sum \left\wr \frac{r'}{2} \cdot (p_1 \cdot q) \;\middle|\; P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \;\wedge\; P' \in \mathcal{P} \right\int = \\
&\frac{(p_1 \cdot q)}{2} \cdot \sum \wr r' \mid P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \;\wedge\; P' \in \mathcal{P} \int = \\
&\frac{1}{2}(p_1 \cdot q \cdot r_1) = \frac{1}{2}(p \cdot q)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

La ecuación 4 agrupa todas las probabilidades de alternar s y s' donde la primera acción de s se dá en primer lugar. Luego se tiene que agrupar la información probabilística cuando la primera acción de s' ocurre en primer lugar.

Existen dos posibilidades, si esas acciones existen o no. Dependiendo de s' se obtienen las siguientes posibilidades.

$|s'| = 0$ En este case tenemos $q = \sum \wr q' \mid Q \xrightarrow{\checkmark}_{q'} \texttt{nil} \int$, Si $Q \xrightarrow{\checkmark}_{q'} \texttt{nil}$, al aplicar la regla [**con4**] y así obtener $P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{\frac{r' \cdot q'}{2}} P_1$. En este caso se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\sum \wr r \mid P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{\frac{q' \cdot r'}{2}} P' \xRightarrow{s_1\checkmark}_{p'} \texttt{nil} \;\wedge\; r = p' \cdot \frac{q' \cdot r'}{2} \int = \\
&\sum \wr \frac{1}{2}(p' \cdot r' \cdot q' \mid P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{\frac{q' \cdot r'}{2}} P' \xRightarrow{s_1\checkmark}_{p'} \texttt{nil} \int = \\
&\sum \wr \frac{1}{2}(p' \cdot r' \cdot (\underbrace{\sum \wr q' \mid Q \xrightarrow{\checkmark}_{q'} \texttt{nil} \int}_{q}) \mid P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \;\wedge\; P' \xRightarrow{s_1\checkmark}_{p'} \texttt{nil} \int = \\
&\frac{q}{2} \cdot \sum \wr r' \cdot (\underbrace{\sum \wr p' \mid P' \xRightarrow{s_1\checkmark}_{p'} \texttt{nil} \int}_{p_1}) \mid P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \;\wedge\; P' \in \mathcal{P} \int = \\
&\frac{1}{2}(q \cdot p_1) \cdot (\underbrace{\sum \wr r' \mid P \xrightarrow{\texttt{A}}_{r'} P' \;\wedge\; P' \in \mathcal{P} \int}_{r_1}) = \frac{1}{2}(q \cdot p_1 \cdot r_1) = \frac{1}{2}(q \cdot p)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

La única transición de $P \wedge Q$ que permite alternar s y s' son de la forma

1. $P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{\frac{r'}{2}} P' \wedge Q \xRightarrow{s''\checkmark}_{p'} \texttt{nil}$ como se indica arriba, o
2. $P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{\frac{q' \cdot r'}{2}} P' \xRightarrow{s''\checkmark}_{p'} \texttt{nil}$.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\sum \wr r \mid P \wedge Q \xRightarrow{s\checkmark} \texttt{nil} \int = \\
\sum \wr r \mid P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{\frac{r_1}{2}} P' \wedge Q \xRightarrow{s''\checkmark}_{r_2} \texttt{nil} \ \wedge \ P' \xrightarrow{\texttt{A}}_{r_1} P' \wedge \\
r = \frac{r_1}{2} \cdot r_1 \ \wedge \ s'' \in \mathsf{int}(s_1, s') \int + \\
\sum \wr r \mid P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{\frac{q' \cdot r'}{2}} P' \xRightarrow{s_1\checkmark}_{p'} \texttt{nil} \ \wedge \ r = p' \cdot \frac{q' \cdot r'}{2} \int = \\
\frac{1}{2}(p \cdot q) + \frac{1}{2}(p \cdot q) = p \cdot q
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$|s'| > 0$ Consideremos $s' = \texttt{B} \cdot s_2$. En este caso se consideran las alternaciones donde Q produce la característica B en primer lugar, lo que es, que primero se aplica la regla [**con2**]. Considerando el multiconjunto $\mathcal{Q} = \wr Q' \mid Q \xrightarrow{\texttt{B}}_r Q' \xRightarrow{s_2\checkmark}_{q'} \texttt{nil}]$, y dado $r_2 = \sum \wr r \mid Q \xrightarrow{\texttt{B}}_r Q' \ \wedge \ Q' \in \mathcal{Q} \int$ y $q_1 = \sum \wr r \mid Q' \xRightarrow{s_2\checkmark}_r \texttt{nil} \ \wedge \ Q' \in \mathcal{Q} \int$. Con un razonamiento similar al de las ecuaciones (1) y (2) se obtiene que $q = r_2 \cdot q_1$ y

$$
\begin{aligned}
\sum \wr r \mid P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{B}}_{\frac{r_1}{2}} P \wedge Q' \xRightarrow{s''\checkmark}_{r_2} \texttt{nil} \wedge \\
r = \frac{r_1}{2} \cdot r_1 \ \wedge \ s'' \in \mathsf{int}(s, s_2) \int = \frac{1}{2}(p \cdot q)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

La única transición de $P \wedge Q$ que implique alternar s y s' son de la forma:

1. $P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{p'} \frac{r}{2} P' \wedge Q \xRightarrow{s''\checkmark}_{p'} \texttt{nil}$ donde s'' es una alternación de s_1 y s', o
2. $P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{B}}_{q'} \frac{r}{2} P \wedge Q' \xRightarrow{s''\checkmark}_{p'} \texttt{nil}$ donde s'' es una alternación de s y s_2,

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\sum \wr r \mid P \wedge Q \xRightarrow{s\checkmark} \texttt{nil} \int = \\
\sum \wr r \mid P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{A}}_{\frac{r_1}{2}} P' \wedge Q \xRightarrow{s''\checkmark}_{r_2} \texttt{nil} \ \wedge \ P' \xrightarrow{\texttt{A}}_{r_1} P' \wedge \\
r = \frac{r_1}{2} \cdot r_1 \ \wedge \ s'' \in \mathsf{int}(s_1, s') \int + \\
\sum \wr r \mid P \wedge Q \xrightarrow{\texttt{B}}_{\frac{r_1}{2}} P \wedge Q' \xRightarrow{s''\checkmark}_{r_2} \texttt{nil} \ \wedge \ Q' \xrightarrow{\texttt{B}}_{r_1} Q' \wedge \\
r = \frac{r_1}{2} \cdot r_1 \ \wedge \ s'' \in \mathsf{int}(s, s_2) \int = \\
\frac{1}{2}(p \cdot q) + \frac{1}{2}(p \cdot q) = p \cdot q
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$\square$

Corollary 4. Dados los términos $P, Q \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, y la probabilidad $q \in (0,1)$, entonces

$$\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P \wedge Q) = [\![\cdot \wedge \cdot]\!]^{\mathcal{P}}\big(\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P), \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(Q)\big)$$

Demostración. Este corolario es una consecuencia directa de la proposición 9 y la definición 13.

$\square$

Proposition 10. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ y la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F}$, $P \xRightarrow{s\checkmark}_p \mathtt{nil}$.

1. $\mathtt{A} \in s$ si y sólo si $P \Rightarrow \mathtt{A} \xRightarrow{s\checkmark}_p \mathtt{nil}$.
2. $\mathtt{A} \notin s$ si y sólo si $P \Rightarrow \mathtt{A} \xRightarrow{s\mathtt{A}\checkmark}_p \mathtt{nil}$.

Demostración. En ambos casos la demostración se realiza por inducción de la longitud de $|s|$. [2] $\square$

Corollary 5. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ y la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F}$, entonces $(pr, p) \in$ si y sólo si

$$\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P \Rightarrow \mathtt{A}) = [\![\cdot \Rightarrow \mathtt{A}]\!]^{\mathcal{P}}(\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P))$$

Demostración. Este corolario es una consecuencia directa de la proposición 10 y la definición 13. $\square$

Proposition 11. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F}$, la traza $s \in \mathcal{F}^*$ y la probabilidad $p \in (0,1)$. $P \xRightarrow{s\checkmark}_p \mathtt{nil}$, si y sólo si $A\backslash\mathtt{P} \xRightarrow{s\checkmark}_p \mathtt{nil}$ y $\mathtt{A} \notin s$. *Demostración.* La demostración es simple por inducción de la longitud de s.

$\square$

Corollary 6. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ y la característica $\mathtt{A} \in \mathcal{F}$, entonces

$$\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P\backslash\mathtt{A}) = [\![\cdot\backslash\mathtt{A}]\!]^{\mathcal{P}}(\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P))$$

Demostración. Este corolario es una consecuencia directa de la proposición 11 y la definición 13. $\square$

Proposition 12. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, las características $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathcal{F}$, la traza $s \in \mathcal{F}^*$ y la probabilidad $p \in (0,1)$. Entonces $P \xRightarrow{s\checkmark}_p \mathtt{nil}$ si y sólo si $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xRightarrow{s'\checkmark}_p \mathtt{nil}$ y s' y tiene alguna de las siguientes formas: $\mathtt{A} \notin s$ y $s' = s$, $\mathtt{B} \in s$ y $s' = s$, o $\mathtt{A} \in s$, $\mathtt{B} \notin s$ y $s' = s \cdot \mathtt{B}$. *Demostración.* Se realiza por inducción de la longitud de s.

$|s| = 0$ En este caso $P \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}$. Se obtiene el resultado aplicando la regla [**req3**].

[2] **Comentario de Luis**: I think it is trivial, is it necessary to write it in detail.

$|s| > 0$ Ahora se pueden distinguir tres casos dependiendo de la primera característica de s:

$s = \mathtt{A}s_1$. En este caso existe $p_1, q \in (0,1)$ tal que $P \xrightarrow{\mathtt{A}}_{p_1} P_1 \xRightarrow{s_1\checkmark}_q \mathtt{nil}$. Al aplicar la regla [**req2**] se obtiene $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{A}}_{p_1} P_1 \Rightarrow \mathtt{B}$. Obtenemos el resultado al aplicar la proposición 10.

$s = \mathtt{B}s_1$. En este caso existe $p_1, q \in (0,1)$ tal que $P \xrightarrow{\mathtt{A}}_{p_1} P_1 \xRightarrow{s_1\checkmark}_q \mathtt{nil}$. Al aplicar la regla [**req2**] se obtiene $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{B}} p_1 P_1 \Rightarrow \mathtt{A}$. Se obtiene el resultado al aplicar la proposición 10.

$s = \mathtt{C}s_1$ con $\mathtt{C} \neq \mathtt{A}$ y $\mathtt{C} \neq \mathtt{A}$. En este caso existe $p_1, q \in (0,1)$ tal que $P \xrightarrow{\mathtt{C}}_{p_1} P_1 \xRightarrow{s_1\checkmark}_q \mathtt{nil}$. Al aplicar la regla [**req1**], se obtiene $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{C}}_{p_1} \mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P_1$, y luego el resultado al aplicar la hipótesis de inducción sobre s_1.

□

Proposition 13. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ y las características $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathcal{F}$, entonces

$$\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P) = [\![\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P))$$

Demostración. Este corolario es una consecuencia directa de la proposición 12 y de la definición 13. □

Proposition 14. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, las características $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathcal{F}$, la traza $s \in \mathcal{F}^*$ y la probabilidad $p \in (0,1)$. Entonces $P \xRightarrow{s\checkmark} p\mathtt{nil}$ si y sólo si $\mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xRightarrow{s\checkmark}_p \mathtt{nil}$, $\mathtt{A} \notin s$ y $\mathtt{B} \notin s$. *Demostración.* Se realiza la demostración por la inducción de la longitud de s.

$|s| = 0$ En este caso $P \xrightarrow{\checkmark}_p \mathtt{nil}$. Se obtiene el resultado al aplicar la regla [**excl4**].

$|s| > 0$ Ahora pueden distinguirse tres casos dependiendo de la primera característica de s:

$s = \mathtt{A}s_1$. En este caso existe $p_1, q \in (0,1)$ tal que $P \xrightarrow{\mathtt{A}}_{p_1} P_1 \xRightarrow{s_1\checkmark}_q \mathtt{nil}$. Al aplicar la regla [**req2**] se obtiene $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{A}}_{p_1} P_1 \backslash \mathtt{B}$. Ahora por la proposición **??**,

- $\mathtt{B} \in s_1$ si y sólo si $P_1 \Rightarrow \mathtt{B} \xRightarrow{s_1 \cdot \checkmark}_q \mathtt{nil}$.
- $\mathtt{B} \notin s_1$ si y sólo si $P_1 \Rightarrow \mathtt{B} \xRightarrow{s_1\mathtt{B}\checkmark}_q \mathtt{nil}$.

$s = \mathtt{C}s_1$ con $\mathtt{C} \neq \mathtt{A}$. En este caso es $p_1, q \in (0,1)$ tal que $P \xrightarrow{\mathtt{C}}_{p_1} P_1 \xRightarrow{s_1\checkmark}_q \mathtt{nil}$. Al aplicar la regla [**req1**], se obtiene $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P \xrightarrow{\mathtt{C}}_{p_1} \mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P_1$, y luego el resultado se obtiene al aplicar la hipótesis de inducción sobre s_1.

□

Proposition 15. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ y las características $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathcal{F}$, entonces

$$\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(\mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ P) = [\![\mathtt{A} \not\Rightarrow \mathtt{B}\ \mathtt{in}\ \cdot]\!]^{\mathcal{P}}(\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P))$$

Demostración. Este corolario es una consecuencia directa de la proposición 14 y la definición 13. □

Theorem 1. Dado el término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ y el producto $pr \in \mathtt{prod}(\mathtt{np}(P))$. $(pr, p) \in [\![P]\!]^{\mathcal{P}}$ si y sólo si $(pr, p) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P)$. *Demostración.* La demostración es trivial por inducción estructural sobre P al usar los corolarios 6, 2, 3, 4, 5, 6, 13, y 15. □

6 Ocultando conjuntos de características

El cálculo de la probabilidad de una característica dentro de una línea de productos software, permite determinar cuan utilizado será este componente dentro de la familia de productos. Esta probabilidad se ve afectada por aquellos operadores sintácticos que influyan en la cardinalidad del número de productos válidos a generar, es decir, en los operadores de selección única y en los operadores de selección opcional ($P \vee_p Q$ y $\overline{\mathtt{A}};_p P$ respectivamente) así como sus dependencias y restricciones.

Esta condición es de suma importancia para la optimización de los términos del álgebra, ya que de esa manera todo aquel elemento sintáctico que no influya en la cardinalidad del conjunto de productos válidos puede ser eliminada del modelo.

Definition 16. Dado el conjunto de características $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ y un término $P \in \mathtt{SPLA}^{\mathcal{P}}$, el operador $P[\mathcal{A}]$ representa el ocultamiento sintáctico de las características en el conjunto $\mathcal{A}$ para el término P. □

De esta manera se necesita una nueva característica $\perp \notin \mathcal{F}$. $\mathcal{F}_\perp = \mathcal{F} \cup \{\perp\}$. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$.

6.1 Semántica operacional

A continuación se describen las nuevas reglas de la semántica operacional para el procesamiento de la característica de ocultamiento.

$$[\mathbf{hid1}]\ \frac{P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P', \mathtt{A} \in \mathcal{A}}{P[\mathcal{A}] \xrightarrow{\perp}_p P'[\mathcal{A}]} \qquad\qquad [\mathbf{hid2}]\ \frac{P \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P', \mathtt{A} \notin \mathcal{A}}{P[\mathcal{A}] \xrightarrow{\mathtt{A}}_p P'[\mathcal{A}]}$$

6.2 Semántica denotacional

Definition 17. Dado el producto $pr \subseteq \mathcal{F}$ y el conjunto de características ocultas $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ se define:

$$pr[\mathcal{A}] = \{\mathtt{A} \mid \mathtt{A} \in pr,\ \mathtt{A} \notin \mathcal{A}\} \cup \begin{cases} \{\perp\} & \text{si } pr \cap \mathcal{A} \neq \varnothing \\ \varnothing & \text{si } pr \cap \mathcal{A} = \varnothing \end{cases}$$

Dada la traza $s \in \mathcal{F}^*$, $s[\mathcal{A}]$ representará la substitución de cada ocurrencia en la traza s de cualquier característica en $\mathcal{A}$ por $\perp$. □

Definition 18. Dado el multiconjunto $M \in \mathcal{M}$ y el conjunto de características ocultas $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Se define:

$$[\![\cdot[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}} = \texttt{accum}\Big(\wr (pr[\mathcal{A}], p) \mid (pr, p) \in M \int\Big)$$

□

Proposition 16. Dados los términos $P, Q \in \texttt{SPLA}^{\mathcal{P}}$ y el conjunto de acciones ocultas $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, entonces las siguientes proposiciones mantienen

- $[\![\checkmark[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}} = [\![\checkmark]\!]^{\mathcal{P}}$
- $[\![\texttt{nil}[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}} = [\![\texttt{nil}]\!]^{\mathcal{P}}$
- $[\![(\texttt{A}; P)[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}} = \begin{cases} [\![\perp; (P[\mathcal{A}])]\!]^{\mathcal{P}} & \text{si } A \in \mathcal{A} \\ [\![\texttt{A}; (P[\mathcal{A}])]\!]^{\mathcal{P}} & \text{si } A \notin \mathcal{A} \end{cases}$
- $[\![(\overline{\texttt{A}};_r P)[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}} = \begin{cases} [\![\overline{\perp};_r (P[\mathcal{A}])]\!]^{\mathcal{P}} & \text{si } A \in \mathcal{A} \\ [\![\overline{\texttt{A}};_r (P[\mathcal{A}])]\!]^{\mathcal{P}} & \text{si } A \notin \mathcal{A} \end{cases}$
- $[\![(P \vee_P Q)[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}} = [\![(P[\mathcal{A}]) \vee_P (Q[\mathcal{A}])]\!]^{\mathcal{P}}$
- $[\![(P \wedge Q)[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}} = [\![(P[\mathcal{A}]) \wedge (Q[\mathcal{A}])]\!]^{\mathcal{P}}$
- If $\texttt{A}, \texttt{B} \notin \mathcal{A}$ entonces $[\![(\texttt{A} \Rightarrow \texttt{B in } P)[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}} = [\![\texttt{A} \Rightarrow \texttt{B in } (P[\mathcal{A}])]\!]^{\mathcal{P}}$
- If $\texttt{A}, \texttt{B} \notin \mathcal{A}$ entonces $[\![(\texttt{B} \not\Rightarrow \texttt{P in })[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}} = [\![\texttt{A} \not\Rightarrow \texttt{B in } (P[\mathcal{A}])]\!]^{\mathcal{P}}$

Proof. TO DO [3] □

□

Proposition 17. $P[\mathcal{A}] \overset{s}{\Longrightarrow}_r$ si y sólo si $r = \sum \wr p \mid P \overset{s'}{\Longrightarrow}_p Q, \ s = s'[\mathcal{A}] \int$
Demostración. La demostración es realizada por inducción sobre la longitud de la traza s. Si la longitud es cero el resultado es trivial. Entonces se supone que $s = \texttt{A} \cdot s_1$. Si $\texttt{A} = bot$ entonces cualquier transición $P[\mathcal{A}] \overset{s}{\longrightarrow} pQ[\mathcal{A}]$ puede ser dividida en transiciones, posiblemente mas de una, como por ejemplo.

$$P[\mathcal{A}] \overset{\perp}{\longrightarrow}_{r_1} P_1[\mathcal{A}] \overset{s_1}{\Longrightarrow}_{r2} Q$$

Entonces se tiene

$$r = \sum \wr p \mid P[\mathcal{A}] \overset{s}{\Longrightarrow}_p Q \int = \sum \wr r_1 \cdot r2 \mid P[\mathcal{A}] \overset{\perp}{\longrightarrow}_{r_1} P_1[\mathcal{A}] \overset{s_1}{\Longrightarrow}_{r2} Q \int =$$
$$\sum \wr r_1' \cdot r2 \mid P[\mathcal{A}] \overset{\texttt{B}}{\longrightarrow}_{r_1'} P_1'[\mathcal{A}] \overset{s_1}{\Longrightarrow}_{r2} Q, \ \texttt{B} \in \mathcal{A} \int$$

Ahora por cada una de las r_1', se puede aplicar el método inductivo a cada una de las transiciones $P_1'[\mathcal{A}] \overset{s_1}{\Longrightarrow}_{r2} Q$ para obtener $r_2 = \sum \wr r2' \mid P_1 = \overset{s_1'}{\Longrightarrow} Q, \ s_1 =$

[3] **Comentario de Luis**: Espero que esto salga aplicando las definiciones. No creo que sea dificil, pero sí un conazo

$s'_1[\mathcal{A}]\int$. Continuando la ecuación anterior :

$$\sum \wr r'_1 \cdot r2 \mid P[\mathcal{A}] \xrightarrow{\mathtt{B}}_{r'_1} P'_1[\mathcal{A}] \xRightarrow{s_1}_{r2} Q,\ \mathtt{B} \in \mathcal{A} \int =$$
$$\sum \wr r'_1 \cdot r2' \mid P[\mathcal{A}] \xrightarrow{\mathtt{B}}_{r'_1} P'_1 \xRightarrow{s'_1}_{r2'} Q,\ \mathtt{B} \in \mathcal{A}.\ s_1 = s'_1[\mathcal{A}] \int =$$
$$\sum \wr r_1 \cdot r2' \mid P[\mathcal{A}] \xrightarrow{\perp}_{r_1} P_1 \xRightarrow{s'_1}_{r2'} Q,\ \mathtt{B} \in \mathcal{A}.\ s_1 = s'_1[\mathcal{A}] \int =$$
$$\sum \wr r \mid P \xRightarrow{s'}_{r} Q,\ s = s'[\mathcal{A}] \int$$

El caso cuando $\mathtt{A} \notin \mathcal{A}$ es similar al anterior, solo necesita saltar el paso de $\mathtt{B}$ a $\perp$.

□

Proposition 18.

$$\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P[\mathcal{A}]) = [\![\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P)[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}}$$

Demostración. $(pr, p) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P[\mathcal{A}])$ si y sólo si

$$p = \sum \wr r \mid P[\mathcal{A}] \xrightarrow{s\checkmark}_{r} P'[\mathcal{A}].\ pr = \lfloor s \rfloor \int =$$
$$\sum \wr r \mid P \xrightarrow{s'\checkmark}_{r} P',\ s = s'[\mathcal{A}],\ pr = \lfloor s \rfloor \int =$$
$$\sum \wr r \mid P \xrightarrow{s'\checkmark}_{r} P',\ s = pr[\mathcal{A}] \int =$$
$$\sum \wr r \mid (pr', r) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P),\ pr' = pr[\mathcal{A}] \int =$$

De tal manera $(pr, p) \in \mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P[\mathcal{A}])$ si y sólo si $(pr, p) \in [\![(\mathtt{prod}^{\mathcal{P}}(P))[\mathcal{A}]]\!]^{\mathcal{P}}$

□

7 Implementación

La siguiente sección presenta los resultados obtenidos de la implementación de la semántica denotacional para la extensión probabilística. De igual manera se describen en esta sección detalles sobre posibles usos prácticos de la extensión probabilística.

Han sido utilizados modelos de variabilidad con 1500 características, lo que no permite escribirlos de manera manual. Para llevar a cabo esta tarea ha sido utilizado el generador de modelos de características BeTTy [**?**]. Los parámetros de configuración utilizados en BeTTy han sido los siguientes:

- La probabilidad de que exista una característica obligatoria es de un 20%.
- La probabilidad de que exista una característica opcional es de un 30%.
- La probabilidad de que una característica este dentro de una relación de *selección única* un 25%.
- La probabilidad de que una característica este dentro de una relación de *paralelo* un 25%.

Existen dos aplicaciones prácticas dentro del análisis de líneas de productos usando métodos probabilísticos.

La primera es que es posible calcular la probabilidad de una característica, que permitirá asignar recursos de manera mas eficiente al probar las características con mayor probabilidad de ocurrencia dentro de la línea de productos.

Otra aplicación es la de estimar la cobertura de las pruebas dentro de las líneas de productos ya que es posible determinar cuantos productos serán abarcados por las pruebas, teniendo en cuenta que con este modelo, no es posible determinar que porcentaje representan las características probadas dentro del número total de características que conforman el producto.

La figura 5 muestra el tiempo en calcular la probabilidad de cada característica dentro del modelo, es importante destacar que los tiempos calculados son lineales de acuerdo a la longitud del término. Para todas las características es similar porque para cada característica debe recorrerse el término completo.

Existe una variación entre el tiempo en calcular la probabilidad de cada característica y es posible que sea por el estado actual del nodo donde se ha ejecutado la simulación.

Al ser tiempos de ejecución tan cortos cualquier retraso en la planificación del proceso puede tener como consecuencia un pequeño retraso en su ejecución lo que repercutirá en el resultado final, esta variación puede considerarse insignificante ya que los tiempos de ejecución están en el rango de 15 y 38 milisegundos para cada característica dentro del modelo.

El modelo utilizado en la simulación ha sido ejecutado en varias ocasiones, teniendo resultados similares en la banda de 15 y 20 milisegundos, con algunas características procesándose en la banda superior entre 20 y 38 milisegundos.

La figura 6 muestra gráficamente la probabilidad de cada característica dentro del modelo a medida que este se procesa.

Gracias a esta representación gráfica es posible distinguir claramente agrupaciones de características con mayor probabilidad.

La figura 7 muestra los resultados de la figura 6 ordenados de manera descendiente, esto permite describir con un detalle mayor aquellas características con mayor probabilidad de ocurrencia.

En este caso particular es posible identificar que aquellas características con probabilidad mayor a 0.75 se encuentran en solo 450 características de las 1500 del modelo. Este análisis permitiría establecer que probando aproximadamente el 28% de los componentes de la línea de producto se abarcarían pruebas sobre componentes que estarían en el 75% del total de productos.

8 Conclusiones

Una vez descritos los problemas asociados a la explosión combinatoria de algunos operadores del álgebra, se busca generar información suficiente que permita determinar la probabilidad de que una característica cualquiera se encuentre presente en el conjunto de productos válidos del término a representar. Para llevar a cabo esto, han sido descritos los nuevos operadores sintácticos de la extensión probabilística. Una vez definidos, han de representarse las extensiones para las reglas de las semánticas descritas en secciones anteriores, como lo son la semántica operacional y la semántica denotacional. Al haber mostrado por completo la definición formal de la extensión probabilística es imprescindible mostrar que la extensión es consistente con las definiciones de las secciones anteriores. Una vez definida la extensión, son mostradas las ventajas de ocultar aquellos elementos sintácticos que no afectan la cardinalidad del conjunto de productos válidos del sistema. Esto permite analizar el término de manera mas eficiente reduciendo la complejidad del algoritmo a orden N, posiblemente siendo este término de una longitud considerable.

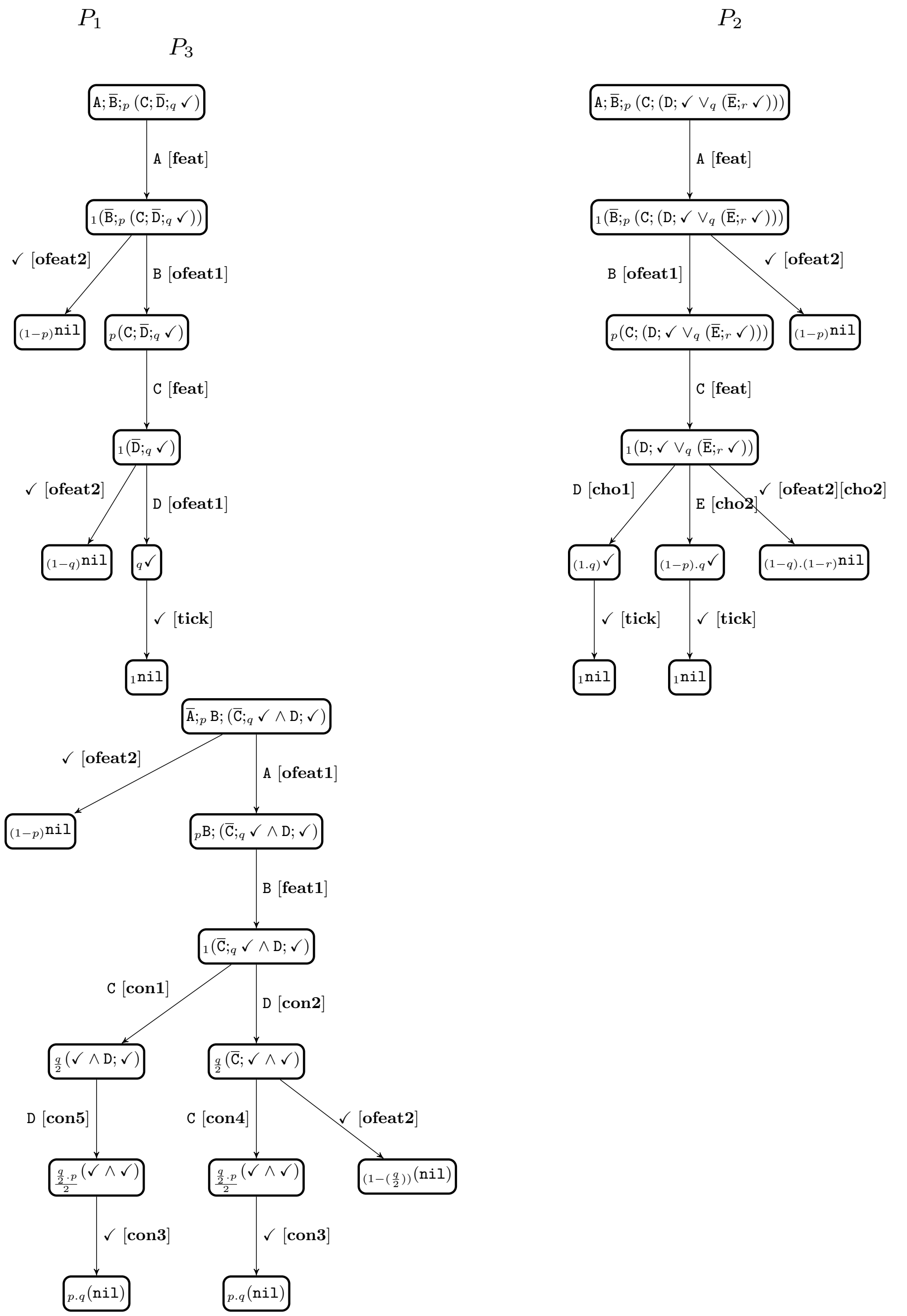

Fig. 2. Ejemplos de la ejecución de la reglas de la semántica operacional del modelo probabilístico.

$$P_1 = \mathtt{A}; \overline{\mathtt{B}};_p \checkmark$$

$$\begin{aligned}
\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \{(\varnothing, 1)\} \\
\llbracket \overline{\mathtt{B}};_p \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \overline{\mathtt{B}};_p \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \llbracket \overline{\mathtt{B}};_p \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\varnothing, 1)\}) = \\
&\quad \{(\varnothing, (1-p)), (\mathtt{B}, p)\} \\
\llbracket \mathtt{A}; \overline{\mathtt{B}};_p \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \overline{\mathtt{B}};_p \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\varnothing, (1-p)), (\mathtt{B}, p)\}) = \\
&\quad \{(\mathtt{A}, (1-p)), (\mathtt{AB}, p)\}
\end{aligned}$$

$$P_2 = \mathtt{A}; (\overline{\mathtt{B}};_p \checkmark \vee_q \overline{\mathtt{B}};_r \checkmark)$$

$$\begin{aligned}
\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \{(\varnothing, 1)\} \\
\llbracket \overline{\mathtt{B}};_{\frac{1}{3}} \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \overline{\mathtt{B}};_{\frac{1}{3}} \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \llbracket \overline{\mathtt{B}};_{\frac{1}{3}} \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\varnothing, 1)\}) = \\
&\quad \{(\varnothing, \tfrac{2}{3}), (\mathtt{B}, \tfrac{1}{3})\} \\
\llbracket \overline{\mathtt{B}};_{\frac{1}{3}} \checkmark \vee_{\frac{1}{2}} \overline{\mathtt{B}};_{\frac{1}{3}} \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \cdot \vee_{\frac{1}{2}} \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \overline{\mathtt{B}};_{\frac{1}{3}} \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}, \llbracket \overline{\mathtt{B}};_{\frac{1}{3}} \checkmark) \rrbracket^{\mathcal{P}} \\
&= \llbracket \cdot \vee_{\frac{1}{2}} \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\varnothing, \tfrac{2}{3}), (\mathtt{B}, \tfrac{1}{3})\}, \{(\varnothing, \tfrac{2}{3}), (\mathtt{B}, \tfrac{1}{3})\}) = \\
&= \mathtt{accum}\Big(\big\{(\varnothing, \tfrac{2}{6}), (\mathtt{B}, \tfrac{1}{6})\big\} \uplus \big\{(\varnothing, \tfrac{2}{6}), (\mathtt{B}, \tfrac{1}{6})\big\}\Big) = \\
&= \big\{(\varnothing, \tfrac{2}{3}), (\mathtt{B}, \tfrac{1}{3})\big\}
\end{aligned}$$

$$P_3 = \mathtt{A}; (\mathtt{A}; \checkmark \vee_q \mathtt{B}; \checkmark)$$

$$\begin{aligned}
\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \{(\varnothing, 1)\} \\
\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\varnothing, 1)\}) = \{(\mathtt{A}, 1)\} \\
\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \vee_q \mathtt{B}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \cdot \vee_q \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}, \llbracket \mathtt{B}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \\
&= \llbracket \cdot \vee_q \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\mathtt{A}, 1)\}, \{(\mathtt{B}, 1)\}) = \{(\mathtt{A}, q), (\mathtt{B}, (1-q))\} \\
\llbracket \mathtt{A}; (\mathtt{A}; \checkmark \vee_q \mathtt{B}; \checkmark) \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \vee_q \mathtt{B}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \\
&= \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\mathtt{A}, q), (\mathtt{B}, (1-q))\}) = \{(\mathtt{A}, q), (\mathtt{AB}, (1-q))\}
\end{aligned}$$

Fig. 3. Ejemplo de la ejecución de las reglas de la semántica denotacional (1/2).

$$P_4 = (\mathtt{A}; \checkmark \vee_p \mathtt{B}; \mathtt{nil})$$

$$\begin{aligned}
\llbracket \mathtt{nil} \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \varnothing \\
\llbracket \mathtt{B}; \mathtt{nil} \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \mathtt{B}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \mathtt{nil} \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \llbracket \mathtt{B}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\varnothing) = \varnothing \\
\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \{(\varnothing, 1)\} \\
\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\varnothing, 1)\}) = \{(\mathtt{A}, 1)\} \\
\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \vee_{\frac{1}{7}} \mathtt{B}; \mathtt{nil} \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \cdot \vee_{\frac{1}{7}} \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}, \llbracket \mathtt{B}; \mathtt{nil} \rrbracket^{\mathcal{P}}) \\
&= \llbracket \cdot \vee_{\frac{1}{7}} \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\mathtt{A}, 1)\}, \varnothing) = \{(\mathtt{A}, \tfrac{1}{7})\}
\end{aligned}$$

$$P_5 = (\mathtt{A}; \checkmark \wedge \mathtt{B}; \checkmark)$$

$$\begin{aligned}
\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \{(\varnothing, 1)\} \\
\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \llbracket \mathtt{A}; \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\varnothing, 1)\}) = \{(\mathtt{A}, 1)\} \\
\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \wedge \mathtt{B}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}} &= \llbracket \cdot \wedge \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\llbracket \mathtt{A}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}, \llbracket \mathtt{B}; \checkmark \rrbracket^{\mathcal{P}}) = \llbracket \cdot \wedge \cdot \rrbracket^{\mathcal{P}}(\{(\mathtt{A}, 1)\}, \{(\mathtt{B}, 1)\}) = \\
&\quad \{(\mathtt{AB}, \tfrac{1}{2}), (\mathtt{BA}, \tfrac{1}{2})\}
\end{aligned}$$

Fig. 4. Ejemplo de la ejecución de las reglas de la semántica denotacional (2/2).

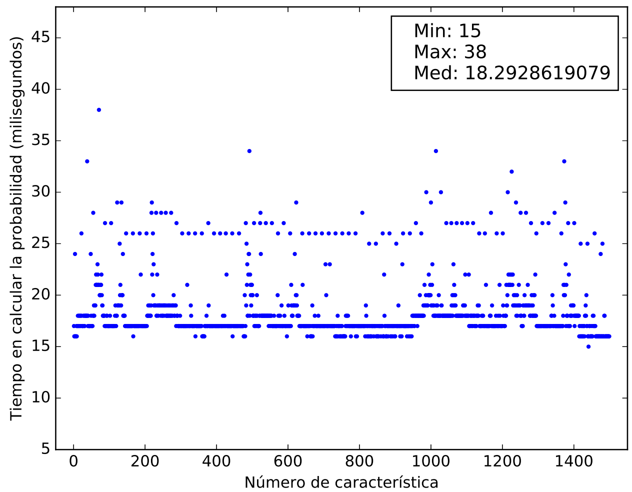

Fig. 5. Tiempo de procesamiento para un modelo con 1500 características

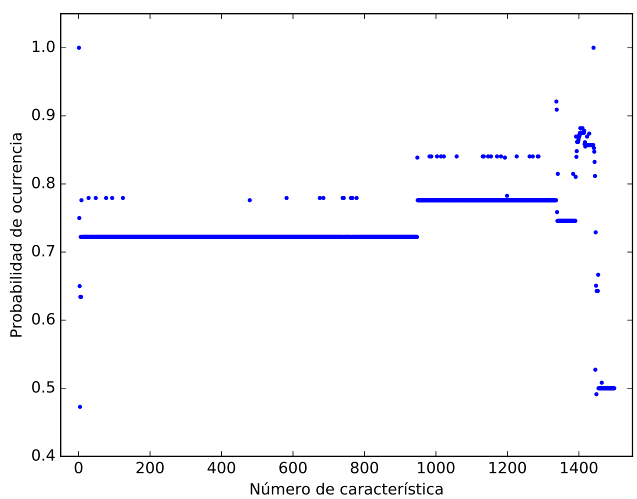

Fig. 6. Cálculo de las probabilidades para un modelo de variabilidad de 1500 características

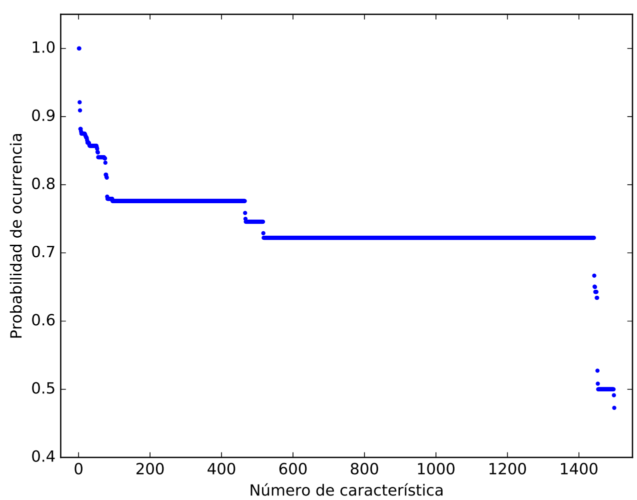

Fig. 7. Cálculo de las probabilidades para un modelo de variabilidad de 1500 características ordenadas decrecientement