Contrôle continu du 7 Mars 2023

Durée 1h30-Notes de cours et calculatrices autorisées

1 Comparaison de *Loss* en débruitage

Soit n un entier naturel non nul. Pour $i = 1, \cdots, n$, on considère des variables indépendantes ε_i. On suppose que ces variables sont centrées et de même variance σ_*^2. Soit m^* un paramètre inconnu, pour $i = 1, \cdots, n$ on observe $Y_i = m^* + \varepsilon_i$. L'objectif est d'estimer le paramètre inconnu m^*.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. a est fixé et on pose
$$P_a(x) = x(x - 2a).$$
   (a) Montrer que l'unique minimum de P_a sur $\mathbb{R}$ est $x = a$.
   (b) On suppose $a \leq 0$. Montrer que l'unique minimum de P_a sur $\mathbb{R}^+$ est $x = 0$.
   (c) On suppose $a \geq 0$. Montrer que l'unique minimum de P_a sur $\mathbb{R}^-$ est $x = 0$.
2. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la fonction de perte
$$L_2(m) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - m)^2, \ (m \in \mathbb{R}).$$
   (a) Montrer que la fonction L_2 possède un unique minimum sur $\mathbb{R}$. On appelle $\widehat{m}_0$ ce minimum.
   (b) Montrer que $\widehat{m}_0$ est sans biais ($\mathbb{E}(\widehat{m}_0) = m^*$).
   (c) Montrer que son risque quadratique $r_2(\widehat{m}_0, m^*) := \mathbb{E}[(\widehat{m}_0 - m^*)^2]$ vaut $\mathrm{Var}(\widehat{m}_0) = \frac{\sigma_*^2}{n}$.
3. Pour $\lambda > 0$ fixé, on considère maintenant la version *ridge* de la perte L_2 :
$$L_2^{\text{ridge}}(m, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - m)^2 + n\lambda m^2, \ (m \in \mathbb{R}).$$
   (a) Déterminer l'unique minimiseur $\widehat{m}_\lambda$ de L_2^{ridge} sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il peut s'écrire
$$\widehat{m}_\lambda = \widehat{m}_0 \left(1 - \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right).$$
   (b) Montrer que
$$\begin{aligned} r_2(\widehat{m}_\lambda, m^*) &= \mathbb{E}[(\widehat{m}_\lambda - \mathbb{E}[\widehat{m}_\lambda] + \mathbb{E}[\widehat{m}_\lambda] - m^*)^2] \\ &= (\mathbb{E}[\widehat{m}_\lambda] - m^*)^2 + \mathrm{Var}(\widehat{m}_\lambda) \\ &= \frac{(m^*)^2\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{\sigma_*^2}{n}\left(1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2 = \frac{(m^*)^2\lambda^2 + \frac{\sigma_*^2}{n}}{(1+\lambda)^2}. \end{aligned}$$
   La première égalité est générale et est appelée la décomposition biais variance du risque quadratique. Justifier cette appellation.
4. Pour $\lambda > 0$ fixé, on considère maintenant la version *LASSO* de la perte L_2 :
$$L_2^{\text{LASSO}}(m, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - m)^2 + 2n\lambda |m|, \ (m \in \mathbb{R}).$$
   (a) Pour $\lambda > 0$ fixé, tracer la courbe représentative sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\psi(m) := L_2^{\text{LASSO}}(m, \lambda)$.
   (b) Montrer que le minimiseur de $L_2^{\text{LASSO}}(m, \lambda)$ est
$$\widehat{\widehat{m}}_\lambda = \begin{cases} \widehat{m}_0 - \lambda & \text{si } \widehat{m}_0 > 0 \ \text{ et } \ \widehat{m}_0 - \lambda > 0, \\ \widehat{m}_0 + \lambda & \text{si } \widehat{m}_0 < 0 \ \text{ et } \ \widehat{m}_0 + \lambda < 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
   (c) Quelle est votre intuition sur cet estimateur ?
   (d) Dans quelle circonstance pensez-vous qu'il peut être judicieux de l'utiliser ?

2 Régression linéaire multiple

Dans le plan, on considère les quatre coins $C_i,\ i = 1, \cdots, 4$ du carré centré à l'origine et de côté de longueur 2. On pose, pour $i = 1, \cdots, 4$, $C_i = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix}$. On considère le modèle linéaire

$$Y^{(i)} = \theta_0^* + \theta_1^* x_1^{(i)} + \theta_2^* x_2^{(i)} + \varepsilon_i,\ i = 1, \cdots, 4.$$

Ici les variables aléatoires $\varepsilon_i,\ i = 1, \cdots, 4$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_*^2)$.

1. Écrire le modèle de façon vectorielle (le vecteur d'observation de dimension 4 est $\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \\ Y^{(3)} \\ Y^{(4)} \end{pmatrix}$ et le paramètre vectoriel de dimension 3 est $\theta^* = \begin{pmatrix} \theta_0^* \\ \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{pmatrix}$).
2. Déterminer, en fonction des observations $\mathcal{Y}$, les estimateurs du maximum de vraisemblance du vecteur θ^*.
3. Déterminer l'estimateur sans biais de σ_*^2