88147410

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Jueves 13 de noviembre de 2014 (mañana)

1 hora 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Para esta prueba, se necesita una copia sin usar del *Cuadernillo de fórmulas de* ***Estudios Matemáticos NM***.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán darse como valores exactos o con una aproximación de tres cifras significativas.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[90 puntos]*.

*Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.*

1. *[Puntuación máxima: 21]*

Un biólogo está estudiando la relación que existe entre el número de chirridos que emite el grillo arborícola de las nieves y la temperatura del aire. Va anotando la tasa de chirridos, x, de un grillo y la correspondiente temperatura del aire, T, en grados Celsius.

La siguiente tabla muestra los valores anotados.

Tasa de chirridos del grillo, x, (chirridos por minuto)	20	40	60	80	100	120
Temperatura, T en °C	8,0	12,8	15,0	18,2	20,0	21,1

(a) Con estos datos, dibuje con precisión un diagrama de dispersión. Utilice la siguiente escala: en el eje horizontal, 2 cm para representar 20 chirridos y en el eje vertical, 2 cm para representar 4 °C. *[4]*

(b) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para escribir el coeficiente de correlación, r, entre x y T. *[2]*

(c) Interprete la relación que hay entre x y T utilizando el valor de r que ha hallado. *[2]*

(d) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para escribir la ecuación de la recta de regresión de T sobre x. Dé la ecuación de la forma $T = ax + b$. *[2]*

(e) Calcule cuál es la temperatura del aire cuando la tasa de chirridos del grillo es igual a 70. *[2]*

(f) Sabiendo que $\bar{x} = 70$, dibuje con precisión la recta de regresión de T sobre x en su diagrama de dispersión. *[2]*

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Un guarda forestal emplea su propia fórmula para estimar la temperatura del aire. Cuenta cuántos chirridos se emiten en 15 segundos, z, multiplica este número por 0,45 y a continuación le suma 10.

(g) Escriba la fórmula que emplea el guarda forestal para estimar la temperatura, T. Dé la ecuación de la forma $T = mz + n$. *[1]*

Un grillo emite 20 chirridos en **15** segundos.

(h) Para esta tasa de chirridos

(i) calcule una estimación de la temperatura, T, **utilizando la fórmula del guarda forestal**;

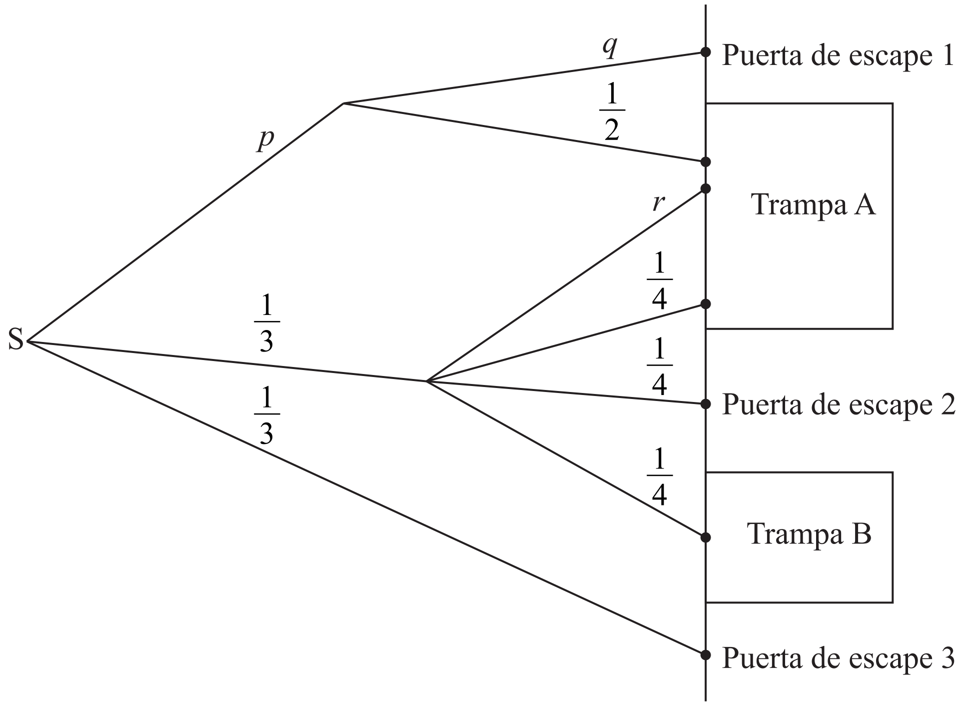
(ii) determine la temperatura real que anotó el biólogo **utilizando la tabla anterior**;

(iii) calcule el porcentaje de error de la estimación de la temperatura basada en la fórmula del guarda forestal, en comparación con la temperatura real anotada por el biólogo. *[6]*

2. *[Puntuación máxima: 15]*

Mike, el ratón de laboratorio, se coloca en la línea de salida, S, de un laberinto. Algunos caminos del laberinto llevan a la Trampa A, algunos a la Trampa B, y otros conducen a puertas de escape. Algunos caminos constan de un único ramal y otros constan de dos ramales. Si el camino elegido se bifurca, Mike elige aleatoriamente un ramal que vaya hacia **adelante**.

El siguiente diagrama de árbol representa el laberinto: muestra todos los posibles caminos y la probabilidad de que Mike escoja un ramal determinado de un camino del laberinto.



(a) Escriba el valor de

(i) p;

(ii) q;

(iii) r. *[3]*

(b) (i) Halle la probabilidad de que Mike llegue hasta la Trampa B.

(ii) Halle la probabilidad de que Mike llegue hasta la Trampa A.

(iii) Halle la probabilidad de que Mike consiga escapar del laberinto. *[7]*

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Sonya, una ayudante de laboratorio, cuenta el número de caminos que llevan a una trampa o a una puerta de escape. Ella cree que la probabilidad que Mike tiene de caer en una trampa es mayor que la probabilidad que tiene de escapar.

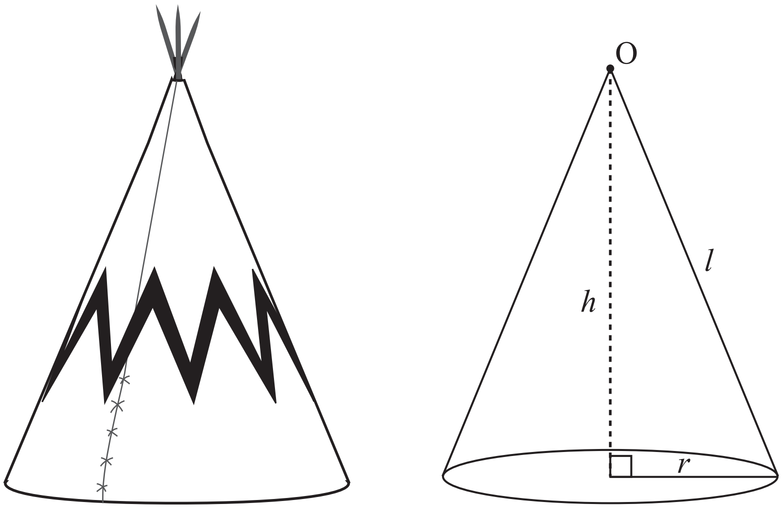
(c) Indique si Sonya está o no en lo cierto. Dé una justificación matemática que respalde dicha conclusión. *[2]*

En el primer intento Mike consigue escapar.

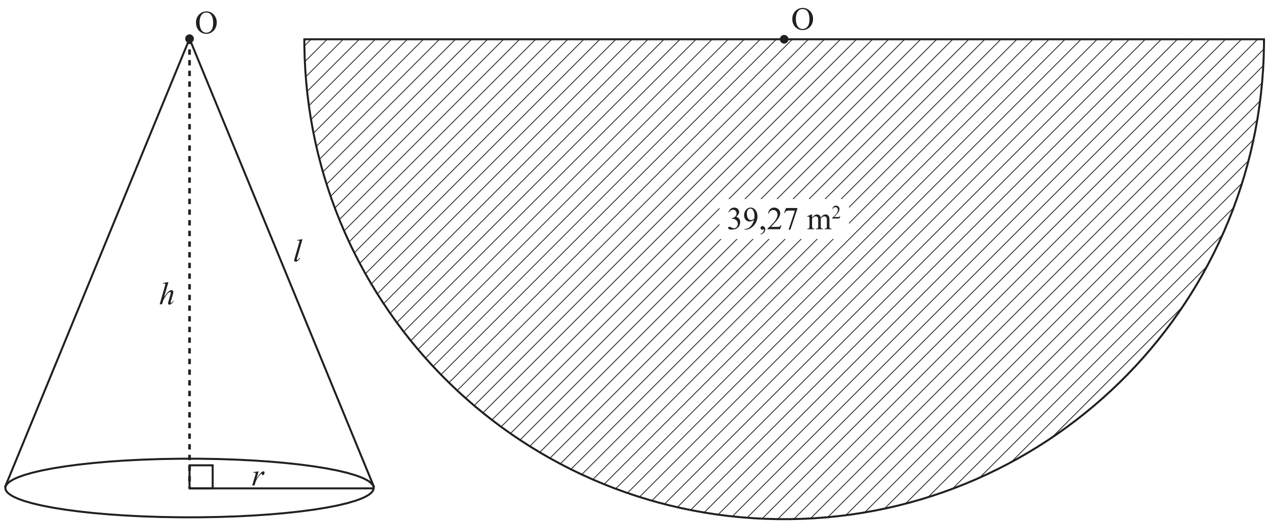
(d) Sabiendo que Mike ha conseguido escapar, halle la probabilidad de que haya ido directamente de S a la Puerta de escape 3. *[3]*

3. *[Puntuación máxima: 16]*

Los tipis eran tiendas de campaña típicas de los indios americanos que vivían en las Grandes Llanuras de Norteamérica. Son viviendas en forma cónica y se pueden modelar como un cono, de vértice O, como se muestra debajo. El cono tiene radio r, altura h y generatriz l.



En la exposición de Las Grandes Llanuras se muestra un modelo de tipi. La superficie curvada de este tipi se cubre con una lona de **39,27 m²**, que tiene forma de semicírculo, tal y como se muestra en la siguiente figura.



la figura no está dibujada a escala

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 3: continuación)

(a) Muestre que la generatriz, l, mide 5 m, redondeando al número entero de metros más cercano. *[2]*

(b) (i) Halle la circunferencia de la base del cono.

(ii) Halle el radio, r, de la base.

(iii) Halle la altura, h. *[6]*

Una empresa diseña tiendas de campaña en forma cónica para que se parezcan a los tipis tradicionales.

Estas tiendas de campaña en forma cónica vienen en varios tamaños tales que la suma del diámetro y de la altura es igual a **9,33 m**.

(c) Escriba una expresión para la altura, h, en función del radio, r, de estas tiendas de campaña de forma cónica. *[1]*

(d) Muestre que el volumen de la tienda de campaña, V, se puede escribir como,

$$V = 3{,}11\pi r^2 - \frac{2}{3}\pi r^3.$$ *[1]*

(e) Halle $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$. *[2]*

(f) (i) Determine el valor **exacto** de r para el cual el volumen es máximo.

(ii) Halle el volumen máximo. *[4]*

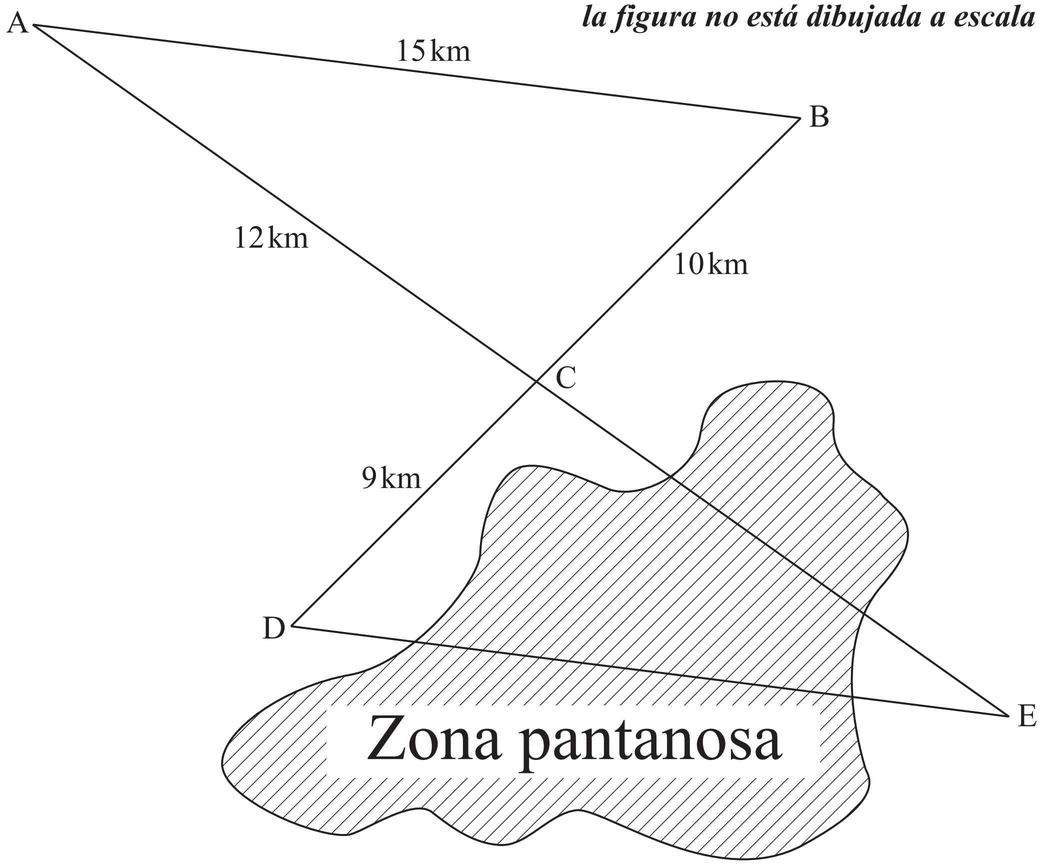
4. *[Puntuación máxima: 13]*

Un agrimensor tiene que calcular el área de un terreno triangular, DCE.
La longitud de CE y la de DE no se pueden medir directamente porque atraviesan una zona pantanosa.

AB, DE, BD y AE son todos caminos rectos. Los caminos AE y DB se cortan en el punto C.
La longitud de AB es igual a 15 km, la de BC es 10 km, la de AC es 12 km, y la de DC es 9 km.

La figura que aparece a continuación muestra los datos que ha recogido el agrimensor.

la figura no está dibujada a escala



(a) (i) Halle el valor del ángulo ACB.

(ii) Muestre que el ángulo DCE mide $85,5^{\circ}$, redondeando a un lugar decimal. *[4]*

El agrimensor mide el ángulo CDE y ve que mide el doble que el ángulo DEC.

(b) (i) Utilizando el valor del ángulo DCE $= 85,5^{\circ}$, halle el valor del ángulo DEC.

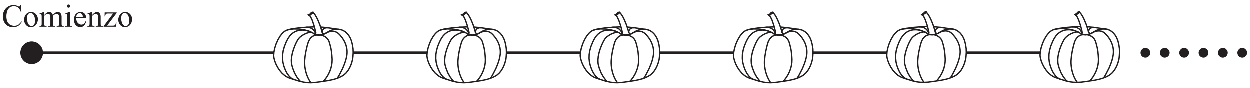
(ii) Halle la longitud de DE. *[5]*

(c) Calcule el área del triángulo DEC. *[4]*

5. *[Puntuación máxima: 14]*

En un juego se colocan n calabazas pequeñas en línea recta a 1 metro de distancia una de otra. Para empezar a jugar, los jugadores se colocan 3 metros antes de la primera calabaza.

Comienzo



Cada jugador **recoge** una única calabaza levantándola del suelo y trayéndola de vuelta al comienzo. Primero se recoge la calabaza más cercana. A continuación, el jugador recoge la siguiente calabaza más cercana y el juego continúa de esta forma hasta que suena la señal que indica el final del juego.

Sirma echa a correr para levantar cada calabaza y traerla de vuelta al comienzo.

(a) Escriba la distancia, a_1, en metros, que tiene que correr para **recoger** la primera calabaza. *[1]*

Las distancias que tiene que recorrer para **recoger** cada una de las calabazas forman una progresión $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

(b) (i) Halle a_2.

(ii) Halle a_3. *[2]*

(c) Escriba la diferencia común, d, de esta progresión. *[1]*

La última calabaza que Sirma **recoge** estaba situada a 24 metros del comienzo.

(d) (i) Halle el número total de calabazas que ha **recogido** Sirma.

(ii) Halle la distancia total que ha recorrido Sirma para **recoger** todas esas calabazas. *[5]*

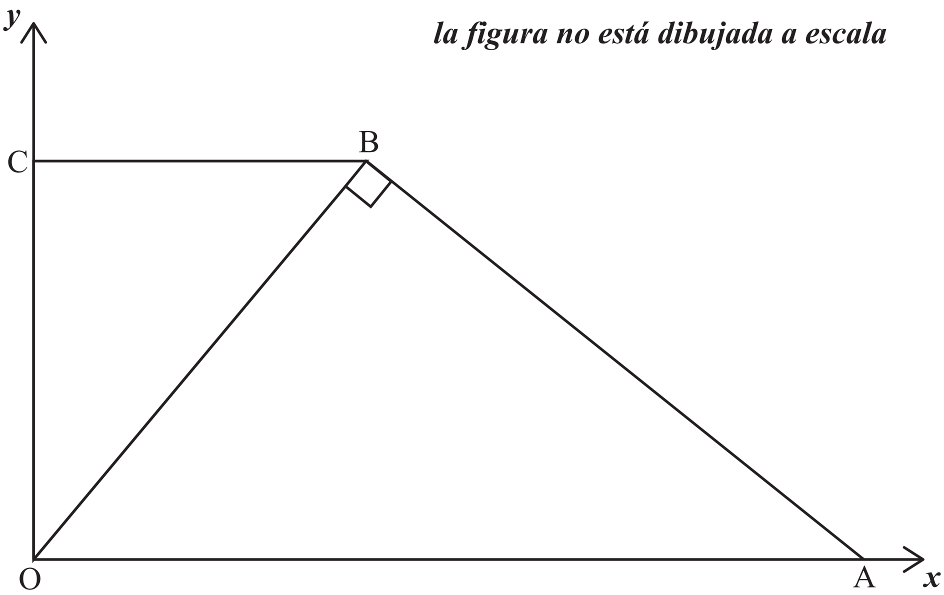
Peter también juega a este juego. Cuando suena la señal que indica el final del juego, Peter ha recorrido 940 metros.

(e) Calcule el número total de calabazas que ha **recogido** Peter. *[3]*

(f) Calcule a qué distancia del comienzo se encuentra Peter cuando suena la señal. *[2]*

6. *[Puntuación máxima: 11]*

La siguiente figura muestra dos triángulos, OBC y OBA, en un sistema de ejes. El punto C se encuentra en el eje y; O es el origen.



La ecuación de la recta BC es $y = 4$.

(a) Escriba las coordenadas del punto C. *[1]*

La coordenada x del punto B es a.

(b) (i) Escriba las coordenadas del punto B;

(ii) Escriba la pendiente de la recta OB. *[2]*

El punto A se encuentra en el eje x y la recta AB es perpendicular a la recta OB.

(c) (i) Escriba la pendiente de la recta AB.

(ii) Muestre que la ecuación de la recta AB es $4y + ax - a^2 - 16 = 0$. *[3]*

El área del triángulo AOB es **el triple** del área del triángulo OBC

(d) Halle una expresión, **en función de *a***, para

(i) el área del triángulo OBC;

(ii) la coordenada x del punto A. *[3]*

(e) Calcule el valor de a. *[2]*