N11/5/MATSD/SP2/SPA/TZ0/XX

88117410

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Jueves 3 de noviembre de 2011 (mañana)

1 hora 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán darse como valores exactos o con una aproximación de tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. *[Puntuación máxima: 18]*

Se mide la velocidad s en km h^{-1} de 120 vehículos al pasar por un determinado punto de la carretera. Los resultados de dicha medición se muestran a continuación.

Velocidad s (km h^{-1})	$0 < s \le 50$	$50 < s \le 60$	$60 < s \le 70$	$70 < s \le 80$	$80 < s \le 90$	$90 < s \le 100$
Número de vehículos	30	46	22	12	8	2

(a) Escriba el punto medio del intervalo $60 < s \le 70$. *[1 punto]*

(b) Utilice su calculadora de pantalla gráfica para obtener una estimación de

(i) la velocidad media de los vehículos;

(ii) la desviación típica de las velocidades de los vehículos. *[3 puntos]*

(c) Escriba el número de vehículos que van a una velocidad igual o menor a $60\ \text{km h}^{-1}$. *[1 punto]*

Considere la siguiente tabla de frecuencias acumuladas.

Velocidad s (km h^{-1})	$s \le 50$	$s \le 60$	$s \le 70$	$s \le 80$	$s \le 90$	$s \le 100$
Número de vehículos	30	a	b	110	c	120

(d) Escriba el valor de a, de b y de c. *[2 puntos]*

(e) Dibuje con precisión una gráfica de frecuencias acumuladas que refleje la información que aparece en la tabla. Utilice 1 cm para representar $10\ \text{km h}^{-1}$ sobre el eje horizontal, y 1 cm para representar 10 vehículos en el eje vertical. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 1: continuación)

(f) Utilice su gráfica de frecuencias acumuladas para estimar

(i) el valor de la mediana de las velocidades de los vehículos;

(ii) el número de vehículos que han pasado a una velocidad igual o menor a 65 km h^{-1}. *[4 puntos]*

Todos los conductores cuyos vehículos midan una velocidad mayor que una desviación típica por encima del límite de velocidad de 50 km h^{-1} serán multados.

(g) Utilice su gráfica para estimar cuántos conductores serán multados. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 19]*

Pam ha estado recabando datos de un grupo de 400 alumnos del Diploma del BI. Les ha preguntado qué asignatura de Matemáticas han estudiado y en qué idioma han hecho el examen (inglés, español o francés). A continuación se muestra un resumen de los datos recogidos.

	Matemáticas NS	Matemáticas NM	Estudios Matemáticos NM	**Total**
Inglés	50	70	80	200
Español	30	50	30	110
Francés	20	30	40	90
Total	100	150	150	400

Se elige al azar a un estudiante del grupo.

(a) Halle la probabilidad de que el estudiante

(i) haya estudiado Matemáticas NS;

(ii) haya hecho el examen en francés;

(iii) haya estudiado Matemáticas NS y haya hecho el examen en francés;

(iv) no haya estudiado Matemáticas NM y no haya hecho el examen en inglés;

(v) haya estudiado Estudios Matemáticos NM, sabiendo que dicho estudiante hizo el examen en español. *[8 puntos]*

Pam cree que la asignatura de Matemáticas que elige cada estudiante es independiente del idioma en el que dicho estudiante hace el examen.

(b) Utilizando las respuestas anteriores de los apartados (a) (i), (ii) y (iii), indique si hay o no pruebas que sustenten la teoría de Pam. Dé una respuesta razonada. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 2: continuación)

Pam decide poner a prueba su teoría utilizando una prueba de chi-cuadrado a un nivel de significación del 5 % .

(c) (i) Establezca la hipótesis nula para esta prueba.

(ii) Compruebe que el número esperado de alumnos de Estudios Matemáticos NM que hicieron el examen en español es 41,3, redondeando a 3 cifras significativas. *[3 puntos]*

(d) Escriba

(i) el valor calculado de chi-cuadrado;

(ii) el número de grados de libertad;

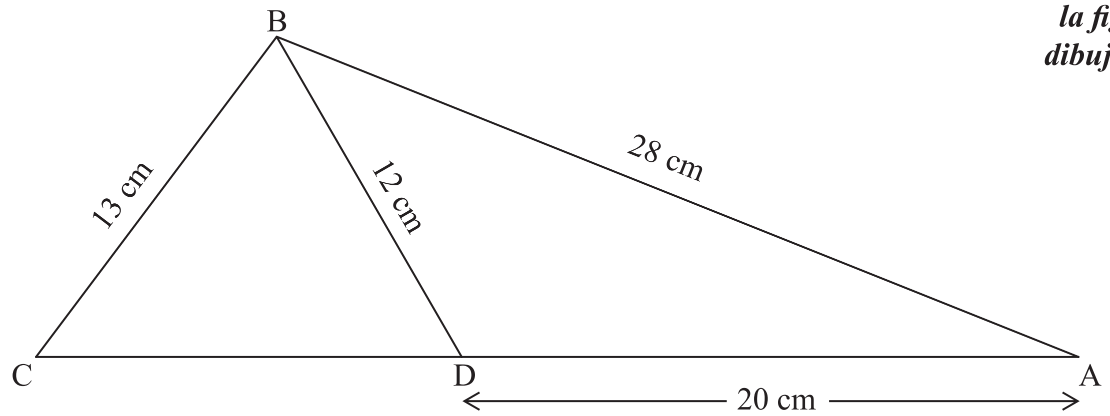
(iii) el valor crítico de chi-cuadrado. *[4 puntos]*

(e) Indique, dando una razón, si a un nivel de significación del 5 % hay suficientes pruebas que indiquen que la teoría de Pam es correcta. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

La figura muestra el triángulo ABC, donde $AB = 28 \text{ cm}$, $BC = 13 \text{ cm}$, $BD = 12 \text{ cm}$ y $AD = 20 \text{ cm}$.

la figura no está dibujada a escala



(a) Calcule el valor del ángulo ADB. *[3 puntos]*

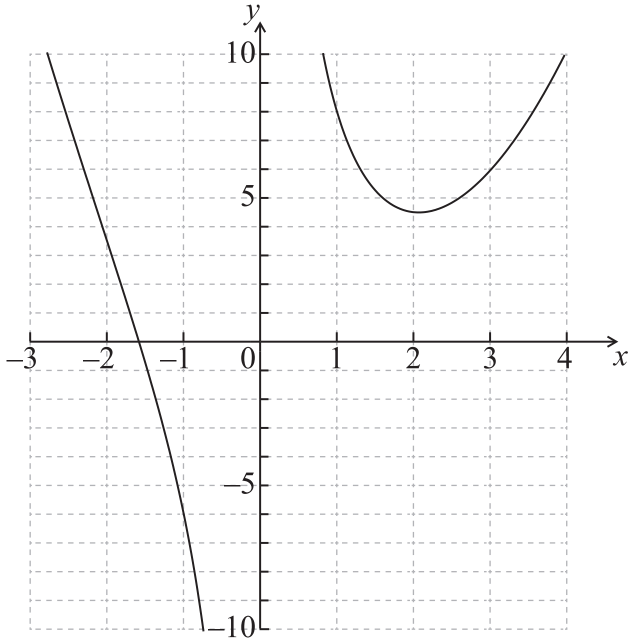
(b) Halle el área del triángulo ADB. *[3 puntos]*

(c) Calcule el valor del ángulo BCD. *[4 puntos]*

(d) Compruebe que el triángulo ABC no es rectángulo. *[4 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 19]*

La siguiente figura muestra una parte de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x + \frac{9}{x}$, donde $x \neq 0$



(a) Escriba

(i) la ecuación de la asíntota vertical de la gráfica de $y = f(x)$;

(ii) la solución de la ecuación $f(x) = 0$;

(iii) las coordenadas del mínimo local. *[5 puntos]*

(b) Halle $f'(x)$. *[4 puntos]*

(c) Compruebe que $f'(x)$ se puede escribir como $f'(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - 9}{x^2}$. *[2 puntos]*

(d) Halle la pendiente de la tangente a $y = f(x)$ en el punto $\mathrm{A}(1, 8)$. *[2 puntos]*

La recta L pasa por el punto A y es perpendicular a la tangente en A.

(e) Escriba la pendiente de L. *[1 punto]*

(f) Halle la ecuación de L. Dé la respuesta en la forma $y = mx + c$. *[3 puntos]*

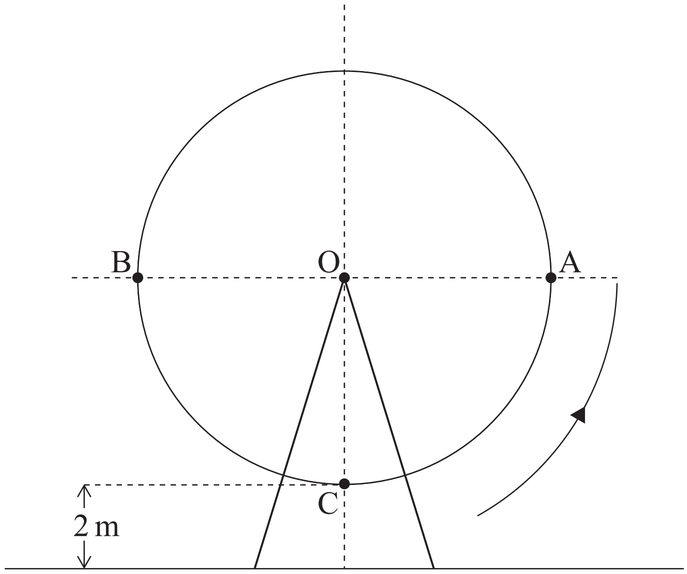
L también corta a la gráfica de $y = f(x)$ en los puntos B y C.

(g) Escriba la **abscisa (coordenada *x*)** de B y de C. *[2 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 20]*

La figura muestra una noria que se mueve a velocidad constante y que completa una vuelta cada 40 segundos. La noria tiene un radio de 12 m y su punto más bajo se encuentra a 2 m del suelo.

la figura no está dibujada a escala



Inicialmente, el asiento C está situado justo debajo del centro de la noria O. A continuación la noria empieza a girar en sentido contrario a las agujas del reloj.

(a) Escriba

(i) la altura sobre el nivel del suelo a la que está O;

(ii) la altura máxima sobre el nivel del suelo que alcanza C. *[2 puntos]*

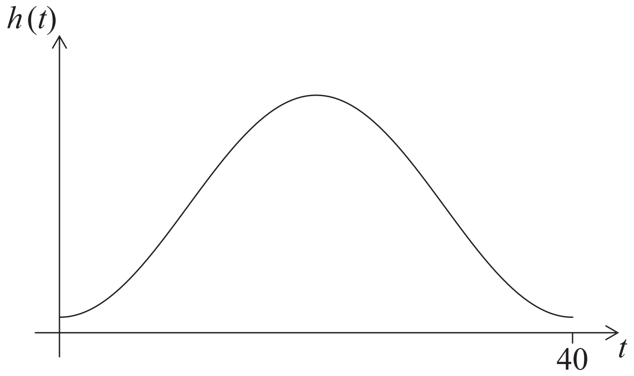
Cuando da una vuelta, C pasa por los puntos A y B, los cuales se encuentran a la misma altura sobre el nivel del suelo que el centro de la noria.

(b) Escriba cuántos segundos tarda C en llegar por primera vez a A y a B. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

El siguiente dibujo aproximado muestra la gráfica de la función $h(t)$. Esta función representa la altura de C sobre el nivel de suelo, donde h se mide en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos, siendo $0 \le t \le 40$.



(c) **Copie** el dibujo y muestre en su diagrama el resultado de los apartados (a) y (b). Rotule claramente los puntos junto con sus coordenadas. *[4 puntos]*

La altura sobre el suelo de C viene dada por la función $h(t) = a\cos(bt) + c$, donde bt está en grados y t es el tiempo transcurrido en segundos.

(d) Halle el valor de

(i) a;

(ii) b;

(iii) c. *[5 puntos]*

C alcanza **por primera vez** una altura de 20 m sobre el suelo cuando han transcurrido T segundos.

(e) (i) Dibuje aproximadamente un diagrama de la noria claramente rotulado donde se muestre la posición de C.

(ii) Halle el ángulo que ha tenido que girar C hasta alcanzar esta posición.

(iii) Halle el valor de T. *[7 puntos]*