Modelos para la Media Condicional Multivariados.

December 12, 2022

Contenido

- Series Financieras.
- Modelos Multivariados (VAR).

Vectores Autoregresivos (VAR)

- endogeneidad variables económicas.
- ecuaciones simulataneas.
- sistema de forma reducida.
- generalización del AR
- extension: VARMA, VECM

Notación

- M variables
- T observaciones (muestra).
- p observaciones (pre-muestra).

$$\mathbf{y}^m = \begin{bmatrix} y_{m,1} \\ y_{m,2} \\ . \\ y_{m,T} \end{bmatrix}, \mathbf{y}^m_{-i} = \begin{bmatrix} y_{m,1-i} \\ y_{m,2-i} \\ . \\ y_{m,T-i} \end{bmatrix}$$

para $i = 1, ..., p$ y $m = 1, .., M$.
$\mathbf{y}^m_{-i}$ rezago $\mathbf{y}^m$ i periodos.

Estacionariedad debil

- Vector medias constante α, $E[\mathbf{y}_t] = \alpha \ \forall \ t$.
- Varianza Finita, $var(y_{mt}) < \infty$ for $m = 1, ..., M$ and all t.
- Covarianza entre $\mathbf{y}_t$ y $\mathbf{y}_{t+k}$ función distancia k.
- Matiz de covarianzas constante

$$cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t+k}) = E[(\mathbf{y}_t - \alpha)(\mathbf{y}_{t+k} - \alpha)'] = \Gamma_k \forall t$$

- Polinomio autoregresivo (matrices)

$$\det(I - \Theta_1 z - \Theta_2 z^2 - ... - \Theta_p z^p)$$

Ecuaciones cada variable

ecuación m-esima variable en cada momento t

$$y_{mt} = \alpha_m + \theta_{m1,1} y_{1,t-1} + ... + \theta_{mM,1} y_{M,t-1} + \ldots + \theta_{m1,p} y_{1,t-p} + \ldots \\ + \theta_{mM,p} y_{M,t-p} + \upsilon_{mt}$$

ecuación, vector del tiempo

$$\mathbf{y}^m = \alpha_m \mathbf{j} + \theta_{m1,1} \mathbf{y}^1_{,-1} + \ldots + \theta_{mM,1} \mathbf{y}^M_{,-1} + \ldots \\ + \theta_{m1,p} \mathbf{y}^1_{-p} + \ldots + \theta_{mM,p} \mathbf{y}^M_{,-p} + \mathbf{v}^m$$

$$\mathbf{y}^m = \mathbf{X} \theta_m + \mathbf{v}^m$$

donde $\mathbf{j}$ es $(Tx1)$ vector unos y
$\mathbf{v}^m = (\upsilon_{m1}, ..., \upsilon_{mT})'$ innovaciones.

Sistema de M ecuaciones

$$\mathbf{y} = (I_m \otimes X)\theta + \mathbf{v}$$

donde matriz de covarianza $\mathbf{v}$ is $\Phi = E[\mathbf{v}\mathbf{v}'] = \Sigma_v \otimes I_T$.

- SUR sistema ecuaciones
- X matriz variables explicativas es la misma.
- estimación GLS sistema equivalente OLS cada ecuación.

Sea $Z = (I_m \otimes X)$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= (Z'\Phi^{-1}Z)^{-1}Z'\Phi^{-1}\mathbf{y} \\
&= [(I_m \otimes X')(\Sigma_v^{-1} \otimes I_T)(I_m \otimes X)]^{-1}(I_m \otimes X)'(\Sigma_v^{-1} \otimes I_T)\mathbf{y} \\
&= [\Sigma_v^{-1} \otimes X'X]^{-1}(\Sigma_v^{-1} \otimes X')\mathbf{y} \\
&= [I_m \otimes (X'X)^{-1}X']\mathbf{y} \\
&= [(I_m \otimes X)'(I_m \otimes X)]^{-1}(I_m \otimes X)'\mathbf{y} \\
&= (ZZ)^{-1}Z'\mathbf{y}
\end{aligned}$$

Estimar cada ecuación por separado

$$\hat{\theta}_m = (X'X)^{-1}X'\mathbf{y}^m$$

Elementos matriz Σ_v, componente *ij*th σ_{ij},

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{(\mathbf{y}^i - X\hat{\theta}_i)'(\mathbf{y}^j - X\hat{\theta}_j)}{T - Mp - 1}$$

recuperar $\hat{\Sigma}_v$ la matriz $\hat{\theta}$
mediante $\hat{\Sigma}_v \otimes (X'X)^{-1}$

Orden del VAR(p)

- Final Prediction Error Criterion (Akaike, 1969)

$$FPE(n) = \left[\frac{T + Mn + 1}{T - Mn - 1}\right]^M \det(\hat{\Sigma}_n)$$

- Akaike's Information Criteria (1973,1974)

$$AIC(n) = \ln\det(\hat{\Sigma}_n) + \frac{2M^2 n}{T}$$

- Schwarz Information Criteria (1978)

$$SC(n) = \ln\det(\hat{\Sigma}_n) + \frac{M^2 n \ln T}{T}$$

- Hannan-Quinn Information Criteria (1978)

$$HQ(n) = \ln\det(\hat{\Sigma}_n) + \frac{2\ln\ln T}{T} nM^2$$

- Alto numero de parámetros (matrices)
- Minimizar criterios.

Diagnostico

Test Portmanteu (Matrices autocovarianza errores sistema)

$$\hat{C}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^{T} v_t v'_{t-i}$$

Estadístico con distribución $\chi^2(M^2(k-p))$.

$$P_k = T \sum_{i=1}^{k} tr(\hat{C}'_i \hat{C}_0^{-1} \hat{C}'_i \hat{C}_0^{-1})$$

Test de Normalidad (Multivariada).
Jarque-Bera, 3ro y 4to momentos centrados.
asimetria y curstosis, respectivamente.

Pronostico con VAR(p)

- h periodos adelante.
- Minimizar MSE, proyección lineal ortogonal.
- Errores ruido blanco $v_t \perp v_s$ para $(s \neq t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_T(h) &= E_T[\mathbf{y}_{T+h}] = \alpha + \mathbf{\Theta}_1 E_T[\mathbf{y}_{T+h-1}] + ... + \mathbf{\Theta}_p E_T[\mathbf{y}_{T+h-p}] \\
&= \alpha + \mathbf{\Theta}_1 \mathbf{y}_T(h-1) + ... + \mathbf{\Theta}_p \mathbf{y}_T(h-p)
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{y}_T(h-i) = E_T[\mathbf{y}_{T+h-i}]$ para $i \geq h$ y $E_T[\mathbf{v}_{T+h}] = 0$

Ejemplo VAR(1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_T(1) &= \alpha + \mathbf{\Theta}_1 \mathbf{y}_T \\
\mathbf{y}_T(2) &= \alpha + \mathbf{\Theta}_1 \mathbf{y}_T(1) = \mathbf{v} + \mathbf{\Theta_1}\alpha + \mathbf{\Theta}_1^2 \mathbf{y}_T \\
\mathbf{y}_T(3) &= \alpha + \mathbf{\Theta}_1 \mathbf{y}_T(2) = (\mathbf{I} + \mathbf{\Theta_1} + \mathbf{\Theta_1^2})\alpha + \mathbf{\Theta}_1^3 \mathbf{y}_T
\end{aligned}$$

Incertidumbre pronóstico ex-ante

Matriz MSE

$$MSE = \Sigma(h) = E[[\mathbf{y}_{T+h} - \mathbf{y}_T(h)][\mathbf{y}_{T+h} - \mathbf{y}_T(h)]']$$

Pronóstico es insesgado $\rightarrow$ perdida matriz var-cov $\Sigma(h)$

$$\Sigma(h) = \Sigma_v + M_1 \Sigma_v M_1' + ... + M_{h-1} \Sigma_v M_{h-1}'$$

donde M_i son matrices de representación MA del proceso VAR.

$$M_0 = I \text{ and } M_i = \sum_{j=1}^{\min(p,i)} \Theta_j M_{i-j}$$

Ejemplo, VAR(1), h=3

$M_i = \Theta_1^i$,

$$\begin{aligned}
\Sigma(1) &= \Sigma_v \\
\Sigma(2) &= \Sigma_v + \Theta_1 \Sigma_v \Theta_1' \\
\Sigma(3) &= \Sigma_v + \Theta_1 \Sigma_v \Theta_1' + \Theta_1^2 \Sigma_v \Theta_1^{2\prime}
\end{aligned}$$

"Causalidad" de Granger

- Exogeneidad en modelos dinámicos (parametros).
- No es inferencia causal.
- Predicción vs asociación dentro de muestra.

X "no causa" Y en el sentido de Granger si

$$l(y_t \mid y_{t-1}, x_{t-1}, \dots, y_1, x_1; \beta) = l(y_t \mid y_{t-1}, \dots, y_1; \beta)$$

Y_t es condicionalmente independiente de $(X_{t-1}, \dots, X_1)$ dado $(Y_{t-1}, \dots, Y_1)$

Ejemplo, VAR(P), bivariado

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11,1} & \theta_{12,1} \\ \theta_{21,1} & \theta_{22,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} \theta_{11,p} & \theta_{12,p} \\ \theta_{21,p} & \theta_{22,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \upsilon_{1t} \\ \upsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

y_2 no causa y_1 si

$$\theta_{12,1} = \theta_{12,2} = ... = \theta_{12,p} = 0$$

y_1 no causa y_2 si

$$\theta_{21,1} = \theta_{21,2} = ... = \theta_{21,p} = 0$$

Representación VAR(p) como $MA(\infty)$

Modelo VAR(p)

$$\mathbf{y}_t = \alpha + \mathbf{\Theta}_1 \mathbf{y}_{t-1} + ... + \mathbf{\Theta}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t$$

Representación de Wold

$$\mathbf{y}_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \mathbf{w}_{t-i}$$

Aplicación

- Impulso Respuesta: impacto de choques sobre el sistema.
- Descomposición de Varianza: contribución error pronostico.

Representación VAR(1)

$$\mathbf{y}_t = \alpha + \mathbf{\Theta}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

Representación $MA(\infty)$ de VAR(1)

$$\mathbf{y}_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{\Theta}_1^i \mathbf{w}_{t-i}$$

donde $\mu = (I_k - \mathbf{\Theta}_1)^{-1} \alpha$

Impulso respuesta, VAR(1) tres variables

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ y_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
y_1 &= \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ y_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11,t-1} \\ A_{21,t-1} \\ A_{31,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ y_{3,0} \end{bmatrix} = A_1 y_0 \\
y_2 &= A_1 y_1 = A_1^2 y_0
\end{aligned}
$$

1. innovaciones $Y_0 = e_k = (1, 0, ..0)'$.
2. shock unitario exogeno.
3. elemento jk-esimo $(\theta_{jk,i})$ impacto variable j

Ortogonalizar innovaciones estimadas

- Σ_v matriz varianza covarianza de errores.
- Descomposición Cholesky $\Sigma_v = PP^{-1}$. P matriz triangular inferior.

$$\mathbf{y}_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i P P^{-1} \mathbf{v}_{t-i} = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \mathbf{w}_{t-i}$$

tal que $\Sigma_w = P^{-1}\Sigma_v P^{-1\prime} = I_k$.

- $\mathbf{w}_t$ innovaciones ortogonales.
- Choques independientes.

Descomposición de Varianza

Error de pronostico h-pasos adelante determinado por variable j-esima de y_t

$$
\begin{aligned}
y_{j,t+h} - y_{j,t}(h) &= \sum_{i=0}^{\infty} (\phi_{j1,i} w_{1,t+h-i} + \ldots + \phi_{jK,i} w_{K,t+h-i}) \\
&= \sum_{k=1}^{K} (\phi_{jk,0} w_{k,t+h} + \ldots + \phi_{jk,h-1} w_{K,t+1})
\end{aligned}
$$

Acumulación de errores de pronosticos pasados.
Elementos $w_{k,t}$ no correlacionados y con varianza 1 $\rightarrow$ MSE $y_{j,t}(h)$

$$
E(y_{j,t+h} - y_{j,t}(h))^2 = \sum_{k=1}^{K} (\phi_{jk,0}^2 + \ldots + \phi_{jk,h-1}^2)
$$

Contribución error de pronostico

$$(\phi_{jk,0}^2 + \phi_{jk,1}^2 + ... + \phi_{jk,h-1}^2) = \sum_{i=0}^{h-1} (e_j' \Phi_i e_k)^2$$

contribución variable k MSE h periodos adelante de variable$j$.
donde e_k es columna k-esima de I_K.

$$MSE[y_{j,t}(h)] = \sum_{i=0}^{h-1} \sum_{k=1}^{K} \phi_{jk,i}^2$$

por lo tanto,

$$\omega_{jk,h} = \sum_{i=0}^{h-1} (e_j' \Phi_i e_k)^2 / MSE[y_{j,t}(h)].$$

Proporción del error de pronóstico de variable j inducida por la innovación de variable k.