Portafolio Black-Litterman

January 12, 2023

Comparación con MV

- Sensibilidad de pesos w:
- parámetros $(E[R], \Omega)$
- inestabilidad, *ill-posed*.
- acercar estimadores a opinión "experta".
- opinión "experta" $=$ *views*.
- interpretación Bayesiana.

Universo de activos y views

- $\mathbf{X} \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{X}(Nx1)$.
- $\mathbf{P}(KxN)$ matriz de views sobre activos.
- $\mathbf{V} \mid \mathbf{PX} \sim N(\mathbf{Px}, \mathbf{\Omega})$
- $\mathbf{Px} = \mathbf{V} + \varepsilon$
- $\Omega := (\frac{1}{c} - 1)\mathbf{P\Sigma P}'$, c credibilidad views.
- Regla de Bayes

  $$f(V \mid Px) = \frac{f(V, X)}{f(X)}$$

Distribución conjunta $f(V, X)$

$$f(X) = \frac{|\ \Sigma\ |^{\frac{-1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp^{\frac{-1}{2}(x-\mu)'\Sigma(x-\mu)}$$

$$f(V \mid Px) = \frac{|\ \Omega\ |^{\frac{-1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{K}{2}}} \exp^{\frac{-1}{2}(v-Px)'\Omega(v-Px)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(V, X) = &|\ \Sigma^{-1} + P'\Omega^{-1}P\ |^{\frac{-1}{2}} \exp^{\frac{-1}{2}(x-\tilde{\mu}(v))'(\Sigma^{-1}+P'\Omega^{-1}P)^{-1}(x-\tilde{\mu}(v))} \\ &|\ \Omega + P\Sigma P'\ |^{\frac{-1}{2}} \exp^{\frac{-1}{2}(v-\gamma)'(\Omega+P\Sigma P'))^{-1}(v-\gamma)} \end{aligned}$$

Nos interesa $f(X \mid V)$

Apoyamos en Bayes,

$$f(V, X) = f(X \mid V) f(V)$$

Reorganizando términos,

$$f(X \mid V) = \mid \Sigma^{-1} + P'\Omega^{-1}P \mid^{\frac{-1}{2}} \exp^{\frac{-1}{2}(x-\tilde{\mu}(v))'(\Sigma^{-1}+P'\Omega^{-1}P)^{-1}(x-\tilde{\mu}(v))}$$

Vector retornos y matrix var-cov condicional a *views*

- $\tilde{\mu}(v) = \mu + \Sigma P'(P\Sigma P' + \Omega)^{-1}(v - P\mu)$.
- $(v - P\mu)$, diferencia views/mercado.
- $\tilde{\Sigma} = (\Sigma^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1} = \Sigma - \Sigma P'(P\Sigma P + \Omega)^{-1}P\Sigma$

Resultado Media Varianza

$$w^* = f(E[R], \Omega, \gamma, \lambda) := f(\mu, \Sigma)$$

Mas views Black-Litterman

$$w^* = f(\tilde{\mu}(v), \tilde{\Sigma})$$

Credibilidad, c

- $c \to 0$, $\Rightarrow \Omega \to \infty$ no hay confianza en *views*.
- $c = 1$, $\Rightarrow \Omega \to 0$ confianza total en *views* ($\mathbf{Px} = \mathbf{V}$).
- $c = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ confianza equivalente a distribución observada de $\mathbf{X}$.

Retornos de equilibrio o benchmark

Sea w_0 un vector de pesos.
El resultado de Markowitz

$$w^* = \frac{1}{\gamma}\Omega^{-1}E[R]$$

Definamos vector de retornos $\mu := E[\tilde{R}]$

$$E[\tilde{R}] = \gamma\Omega w_0$$

Alternativa para anclar retornos.