# Estimación Volatilidad Realizada y Saltos

December 30, 2022

# Contenido

- Información intradia.
- Variación cuadrática.
- Volatilidad realizada.
- Medidas realizadas para volatilidad.
- Saltos.

# Andersen, Bollerslev, Diebold, and Labys (2001).

*"By sampling intraday returns sufficiently frequently, the realized volatility can be made arbitrarily close to the underlying integrated volatility, the integral of the instantaneous volatility over the interval of interest, which is a natural volatility measure".*

- Entre dias $t = 1, 2, \ldots, T$.
- Intradia (obs. en el dia $m$) $m > 1$ intradia, $m < 1$ entre dias.
- Obs. totales $mT$.

retorno en intevalo $(t - \frac{1}{m}, t)$

$$r_m(t) = p(t) - p(t - \frac{1}{m}), t = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, T$$

- acciones 8:30-14:55, 6h25 horas.
- 385min, cada 5min $\Rightarrow m = 77$

# Variación cuadratica en tiempo continuo

Varicion cuadratica del proceso $X_t$

$$(X,X)_t = X^2 - 2\int X_s ds$$

Variacion aplicada a la parte estrictamente continua (en $(0, T)$) del componente estocastico.

$$(p,p)_t = (M_t^c, M_t^c)$$

Variacion cuadratica en intervalo $h$

$$Qvar_h(t) = (p,p)_t - (p,p)_{t-h}$$

- Estimación no depende de model (e.g. ecuacion auxiliary GARCH).
- Medicion ex-post.
- Acumulando retornos instantaneos al cuadrado.

# Ejemplo, proceso de tendencia-difusión

$$dp_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

$$p(t) - p(t-1) = r(t) = \int_{t-1}^{t} \mu(s)ds + \int_{t-1}^{t} \sigma(s)dW(s)$$

volatilidad relacionada con variación cuadrática del modelo.

$$Qvar_1(t) = (p,p)_t - (p,p)_{t-1} = \int_{t-1}^{t} \sigma^2(s)d(s)$$

ultima expresión es volatilidad integrada ($h = 1$)

$$Qvar_1(t) \sim N(0, \int_{t-1}^{t} \sigma^2(s)d(s))$$

# Aproximación de la variación cuadrática

- $h$ intervalo variación (h=1, un dia) .
- Entre dias $t = h, 2h, \ldots, T$.
- Intradia (obs. en el dia $m$).

$$RV_t^m := var_h(t; m) = \sum_{i=1,\ldots,mh} r_m(t - h + \frac{i}{m})^2$$

Que tan buena es la aproximación? Barndorff-Nielsen and Shephard (2002).

$$_{m \to \infty} var_h(t; m) = Qvar_h(t)$$

# Volatilidad realizada, Andersen et al. 2001

- $p_{i,t}, i = 1, \ldots, n(\delta) = n_{sec}/\delta$ log precio en el dia $t$ con una muestra de frecuencia $\delta$.
- $n_{sec}$ numero de segundos en un dia de transacciones. e.i. $n(1min) = 385$ obs.
- serie construida mediante tiempo de calendario (CTC) o tiempo de tick (TTS). Naturaleza muestreo.

$$rv_{(V,\delta)t} := \sum_{i=2}^{n(\delta)} (p_{i,t} - p_{i-1,t})^2$$

En ausencia de saltos y ruido (microestructura) $rv_{(V,\delta)t}$ converge a la volatilidad latente (no observada) en la medida en que la frecuancia del muestreo incrementa (e.i. minutos a segundos)

# Volatilidad realizada bipower, Barndorff-Nielsen y Shepard, (2004)

Método robusto a la presencia de saltos (poco frecuentes)

$$rv_{(B,\delta)t} := \frac{\pi}{2} \sum_{i=3}^{n(\delta)} | \, p_{i,t} - p_{i-1,t} \, || \, p_{i-1,t} - p_{i-2,t} \, |$$

# Volatilidad realizada dos escalas, Zhang et al, (2005)

Estimador consistente a la presencia de ruido (microestructura) independiente.

- $p^{f}_{i,t}$ precio en logaritmos intra-dia, muestreo alta frecuencia $\delta_f$
- $p^{g}_{j,t} = p_{g+(\delta/\delta_f)(j-1)t}$ $g = 1,\ldots,G = \delta/\delta_f$. precio logaritmo intra-dia, muestra en frecuencia $\delta$ desde $G$ iniciando en diferentes momentos de tiempo.
- Sea $rv^{g}_{(V,\delta)t} := \sum_{i=2}^{n(\delta)_g}(p^{g}_{i,t} - p^{g}_{i-1,t})^2$
- Sea $rv^{f}_{(V,\delta)t} := \sum_{i=2}^{n}(p^{f}_{i,t} - p^{f}_{i-1,t})^2$

$$rv_{(T,\delta)t} := \frac{1}{G}\sum_{g=1}^{G} rv^{g}_{(V,\delta)t} - \frac{n(\delta)_g}{n} rv_{(V,\delta_f)t}$$

Se denomina un estimador de dos escalas porque combina informacion de una escala de tiempo lenta ($\delta$) y una rapida ($\delta_f$)

# Kernel realizado, Barndorff-Nielsen et al (2008)

Analogo HAC matriz varianza y covarianza serie estacionaria, robusto a ruido (microestructura) dependiente.

$$rv_{K,\delta} = \gamma_0 p_t + \sum_{h=1}^{H} k(\frac{h-1}{H})(\gamma_h(p_t) + \gamma_{-h}(p_t))$$

donde $\gamma_h(p_t) = \sum_{i=1}^{n(\delta)}(p_{i,t} - p_{i-h,t} - p_{i-h-1,t})$, $k(.)$ función de pesos.

# Rango diario, Alizadeh et al. (2002)

$$rv_{(R)t} = \frac{1}{4\log(2)}(p_{high,t} - p_{low,t})^2$$

- $p_{high,t}$ log precio mas alto.
- $p_{low,t}$ log precio mas bajo.

# Proceso tendencia-difusion-salto

$$dp_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + dL_J(t)$$

- proceso salto puro tipo Levy (ocurrencia y magnitud son estocasticos e iid).
- magnitud salto, $L_J(t) - L_J(s) = \sum_{s \leq \tau \leq t} \kappa(\tau)$.
- saltos Poisson($\lambda$), intensidad del salto.

Variacion cuadratica de este modelo,

$$\langle r, r \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{j=1}^{N_t} \kappa_{t,j}^2$$

# Estimador de volatilidad realizada incluye salto

$$\lim_{m\to\infty} RV_t = \int_{t-1}^{t} \sigma_s^2 ds + \sum_{j=1}^{N_t} \kappa_{t,j}^2$$

Estimador bipower, robusto a saltos.

$$\lim_{m\to\infty} BV_t = \int_{t-1}^{t} \sigma_s^2 ds \tag{1}$$

# Estimación de saltos

$$RV_t - BV_t \to \sum_{t-1 \le \tau \le t} \kappa_\tau^2$$

Estadistico Test de Saltos,

$$JS_t = \frac{\log(RV_t) - \log(BV_t)}{\sqrt{\left(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5\right) \max\left(BV_t^2, TQ_t\right)}}$$

- $JS_t \sim N(0,1)$.
- cuarticidad *tripower*

$$TQ_t = m\mu_{4/3}^{-3}\left(\frac{m}{m-2}\right)\sum_{j=3}^{m} |r_{t,j-2}|^{4/3}|r_{t,j-1}|^{4/3}|r_{t,j}|^{4/3} \to \int_{t-1}^{t} \sigma_s^4 ds$$