Pronósticos Volatilidad

December 30, 2022

Andersen, Bollerslev, Diebold, and Labys (2001).

- volatilidad no es observada.
- desafio evaluación de pronostico.
- Volatilidad observada diaria.
  - Retornos al cuadrado.
  - Volatilidad realizada.
- Resultados favorecen modelos simples.
- The Volatility Institute (V-Lab) NYU Stern.

Pronostico con modelo GARCH (1,1)

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu + \beta X_{t-1} + \nu_t \\
\nu_t &= \sigma_t(\theta)\varepsilon_t \\
\sigma_t^2(\theta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \nu_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V[y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = && V[\nu_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] \\
= && \sigma_t^2(\theta) V[\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] \\
= && \alpha_0 + \alpha_1 \nu_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

- $\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{\nu}_t^2 + \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_t^2$ con $\mathcal{F}_t$.
- Estimación de parámetros permite obtener prosticos.

Que tan bueno es model GARCH (1,1)?

Hansen y Lunde (2005)

- Pronosticos diarios.
- Modelos complejos (asimetricos) no tienen mejor desempeño en pronotico.
- No se rechaza hipotesis que desempeño es similar.
- tasa de cambio (DM/US), acción IBM.

Hansen y Lunde (2005)

ARCH: $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$

GARCH: $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$

IGARCH $\sigma_t^2 = \omega + \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i (\varepsilon_{t-i}^2 - \varepsilon_{t-1}^2) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j (\sigma_{t-j}^2 - \varepsilon_{t-1}^2)$

Taylor/Schwert: $\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}$

A-GARCH: $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \left[\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-i}\right] + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$

NA-GARCH: $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(\varepsilon_{t-i} + \gamma_i \sigma_{t-i}\right)^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$

V-GARCH: $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(e_{t-i} + \gamma_i\right)^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$

Thr.-GARCH: $\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left[(1 - \gamma_i)\varepsilon_{t-i}^{+} - (1 + \gamma_i)\varepsilon_{t-i}^{-}\right] + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}$

GJR-GARCH: $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p_1} \left[\alpha_i + \gamma_i I_{\{\varepsilon_{t-i} > 0\}}\right] \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$

log-GARCH: $\log(\sigma_t) = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i |e_{t-i}| + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \log(\sigma_{t-j})$

EGARCH: $\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^{p} \left[\alpha_i e_{t-i} + \gamma_i (|e_{t-i}| - E|e_{t-i}|)\right] + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$,

Hansen y Lunde (2005)

NGARCH[a]: $\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\varepsilon_{t-i}|^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$

A-PARCH: $\sigma^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left[|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i}\right]^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$

GQ-ARCH: $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^p \alpha_{ii} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i<j}^p \alpha_{ij} \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$

H-GARCH: $\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta \sigma_{t-i}^\delta \left[|e_t - \kappa| - \tau\,(e_t - \kappa)\right]^\nu + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$

Aug-GARCH[b]: $\sigma_t^2 = \begin{cases} |\delta\phi_t - \delta + 1|^{1/\delta} & \text{if } \delta \neq 0 \\ \exp(\phi_t - 1) & \text{if } \delta = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\phi_t = \omega &+ \sum_{i=1}^p \left[\alpha_{1i} |\varepsilon_{t-i} - \kappa|^\nu + \alpha_{2i} \max(0, \kappa - \varepsilon_{t-i})^\nu\right] \phi_{t-j} \\ &+ \sum_{i=1}^p \left[\alpha_{3i} f(|\varepsilon_{t-i} - \kappa|, \nu) + \alpha_{4i} f(\max(0, \kappa - \varepsilon_{t-i}), \nu)\right] \phi_{t-j} \\ &+ \sum_{j=1}^q \beta_j \phi_{t-j}^2\end{aligned}$$

[a] This is A-PARCH without the leverage effect.

[b] Here $f(x, \nu) = (x^\nu - 1)/\nu$.

Brownlees, Engle, Kelly (2012).

Desempeño modelos GARCH (pre and post crisis sub-prime US).

- No deterioro capacidad predictiva (fuera de muestra pronósticos 1 día).
- Pronósticos de largo plazo dentro de intervalos.
- Thresold GARCH (modelo asimetrico)
- Muestra (antes de pronostico) mas grande mejores resultados (estabilidad proceso y parámetros).
- No beneficio de colas pesadas.

EWMA a veces tiene buenos resultados!

Evaluacion de pronostico

Funciones de perdida robusta (QL) Patton (2011).

$$QL : L(\hat{\sigma}_t^2, \hat{\sigma}_{t|t-k}) = \frac{\hat{\sigma}_t^2}{\hat{\sigma}_{t|t-k}} - log \frac{\hat{\sigma}_t^2}{\hat{\sigma}_{t|t-k}} - 1$$

$$MSE : L(\hat{\sigma}_t^2, \hat{\sigma}_{t|t-k}) = (\hat{\sigma}_t^2 - \hat{\sigma}_{t|t-k})^2$$

$\hat{\sigma}_t^2$ "observada"

- retornos diarios al cuadrado.
- volatilidad realizada.

Modelos de Volatilidad Realizada

HARV-RV, Corsi (2008)

$$RV_t = \beta_0 + \beta_D RV_{t-1} + \beta_D RV_{t-5} + \beta_M RV_{t-22} + \varepsilon_t$$

donde $RV_{t-5} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} RV_{t-i}$ y $RV_{t-22} = \frac{1}{22}\sum_{i=1}^{22} RV_{t-i}$.

Modelos de Volatilidad Realizada con saltos

HARV-CJ, Andersen, et al (2007)

$$
\begin{aligned}
RV_t = \beta_0 + \beta_D CV^{JT}_{t-1} + \beta_W CV^{JT}_{t-1:t-5} + \beta_M CV^{JT}_{t-1:t-22} + \\
\delta_D J^{JT}_{t-1} + \delta_W J^{JT}_{t-1:t-5} + \delta_M J^{JT}_{t-1:t-22} + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

- CV es variación continua.
- J saltos identificados con el test JT.

donde $CV^{JT}_{t-1:t-k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} CV^{JT}_{t-i}$ y $J_{t-1:t-k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} J^{JT}_{t-i}$.

Modelos Hibrido GARCH Volatilidad Realizada

RealGARCH(1,1) asimétrico

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 RV_{t-1} + \gamma_1 RV_{t-1} \mathbf{1}_{r_{t-1}<0} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$