

Portafolio Black-Litterman

December 28, 2022

Comparación con MV

- Sensibilidad de pesos w :
- parámetros $(E[R], \Omega)$
- inestabilidad, *ill-posed*.
- acercar estimadores a opinión "experta".
- opinión "experta" = *views*.
- interpretación Bayesiana.

Universo de activos y views

- $\mathbf{X} \sim N(\mu, \Sigma)$, $\mathbf{X}(N \times 1)$.
- $\mathbf{P}(K \times N)$ matriz de views sobre activos.
- $\mathbf{V} \mid \mathbf{P}\mathbf{X} \sim N(\mathbf{P}\mathbf{x}, \Omega)$
- $\Omega := (\frac{1}{c} - 1)\mathbf{P}\Sigma\mathbf{P}'$, c credibilidad views.
- Regla de Bayes

$$f(V \mid P_X) = \frac{f(V, X)}{f(X)}$$

Distribución conjunta $f(V, X)$

$$f(X) = \frac{|\Sigma|^{\frac{-1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp^{\frac{-1}{2}(x-\mu)'\Sigma(x-\mu)}$$

$$f(V | P_X) = \frac{|\Omega|^{\frac{-1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{K}{2}}} \exp^{\frac{-1}{2}(v-P_X)'\Omega(v-P_X)}$$

Por lo tanto,

$$f(V, X) = |\Sigma^{-1} + P'\Omega^{-1}P|^{\frac{-1}{2}} \exp^{\frac{-1}{2}(x-\tilde{\mu}(v))'(\Sigma^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}(x-\tilde{\mu}(v))} \\ | \Omega + P\Sigma P' |^{\frac{-1}{2}} \exp^{\frac{-1}{2}(v-\gamma)'(\Omega + P\Sigma P')^{-1}(v-\gamma)}$$

Nos interesa $f(X | V)$

Apoyamos en Bayes,

$$f(V, X) = f(X | V)f(V)$$

Reorganizando términos,

$$f(X | V) = |\Sigma^{-1} + P'\Omega^{-1}P|^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{-1}{2}(x - \tilde{\mu}(v))'(\Sigma^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}(x - \tilde{\mu}(v))$$

Vector retornos y matrix var-cov condicional a *views*

- $\tilde{\mu}(v) = \mu + \Sigma P'(P\Sigma P' + \Omega)^{-1}(v - P\mu).$
- $\tilde{\Sigma} = (\Sigma^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1} = \Sigma - \Sigma P'(P\Sigma P + \Omega)^{-1}P\Sigma$

Resultado Media Varianza

$$w^* = f(E[R], \Omega, \gamma, \lambda) := f(\mu, \Sigma)$$

Mas views Black-Litterman

$$w^* = f(\tilde{\mu}(v), \tilde{\Sigma})$$

Credibilidad, c

- $c \rightarrow 0, \Rightarrow \Omega \rightarrow \infty$ no hay confianza en *views*.
- $c = 1, \Rightarrow \Omega \rightarrow 0$ confianza total en *views*.
- $c = \frac{1}{2}, \Rightarrow$ confianza equivalente a distribución observada de **X**.