Varianza Condicional
Modelos GARCH

December 30, 2022

Contenido

- Hechos estilizados de la Varianza.
- Modelo heteroscedástico puro.
- ARCH(p).
- GARCH(p,q).
- Filtros.
- EWMA.
- Modelos asimetricos.

Hechos estilizados de la Varianza

- no-observable.
- varianza cambia a traves del tiempo (*volatility clustering*,*leverage effect*).
- Varianza vs saltos.
- predecible.

Modelo heteroscedástico puro

Varianza cambia a traves del tiempo.

$$y_t = \sigma_t(\theta)\varepsilon_t$$

donde $\varepsilon_t \sim iid(0, 1)$

- Ignorar media condicional $E(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0$.
- Autocovarianza, $\gamma(k) = 0 \ \forall k > 0$.
- Varianza Condicional
  $V(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = V(\sigma_t(\theta)\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2(\theta)V(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2(\theta)$.
- Definir σ_t predecible por $\mathcal{F}_{t-1}$.

Ecuación auxiliar

$$\sigma_t^2(\theta) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2$$

ARCH(p)

- $\sigma_t^2 > 0 \Rightarrow \alpha_0 > 0, \ldots, \alpha_p > 0$.
- $V(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2$
- Dependencia intertemporal y_{t-i}.
- p y tamaño de α_i para $i > 0$
  determina retroalimentación de la variación en y_{t-i}.

Ejemplo ARCH(1) $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$

Sustitución recursiva

$$
\begin{aligned}
y_t^2 &= \sigma_t^2(\theta)\varepsilon_t^2 \\
y_t^2 &= (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)\varepsilon_t^2 \\
&\vdots \\
y_1^2 &= (\alpha_0 + \alpha_1 y_0^2)\varepsilon_1^2
\end{aligned}
$$

$$
y_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{t-1} \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 \ldots \varepsilon_{t-j}^2 + \alpha_1^{t+1} y_0 \varepsilon_t^2 \varepsilon_1^2
$$

Ejemplo ARCH(1) $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$

si $0 < \alpha_1 < 1 \Rightarrow$

$$y_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{t-1} \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 \ldots \varepsilon_{t-j}^2$$

y_t^2 es causal no-lineal.

$$V(y_t^2) = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j E(\varepsilon_t^2) E(\varepsilon_{t-1}^2) \ldots E(\varepsilon_{t-j}^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Varianza no condicional es constante
$\Rightarrow$ proceso estacionario.

Metodología Box-Jenkins (MBJ), ARCH

Identificación

- $\gamma_{y_t}(k) = 0 \ \forall \ k \neq 0$
- $\rho_{y_t^2}(k) = \rho(k)$ similar a AR(p)
- $\alpha_{y_t^2}(k) = \alpha(k)$ similar a AR(p)
- MBJ, ACF, PACF de y_t^2 para definir p.

En la practica,

- No se utiliza.
- Priorizar modelos con pocos parámetros.

GARCH(p,q), ecuación auxiliar

$$\sigma_t^2(\theta) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j y_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Solucion estacionaria de y_t

$$V(y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum \alpha_j - \sum \beta_j}$$

require, $0 < \sum \alpha_j + \sum \beta_j < 1$

Filtros: Notación

Precios frecuencia media (diaria),

- T observaciones
- p_i, precio cierre i, $i = 1, \ldots, n$
- r_i, retornos diarios.

$$r_i = log(\frac{p_i}{p_{i-1}})$$

- desviación estandar retornos.

$$s = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(r_i - \bar{r})}$$

- Volatilidad estimada $\hat{\sigma}^2 = s^2$.
- toda la muestra.
- un valor.

Volatilidad a través del tiempo

- σ_t volatilidad en t con información hasta $t-1$.
- estimacion insesgado $m << T$ observaciones,

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(r_{t-i}-\bar{r})^2$$

- retornos diarios $\bar{r}=0$, $m-1$ remplazar por m

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(r_{t-i})^2$$

- Cada observación tiene el mismo peso $\frac{1}{m}$.

Volatilidad a través del tiempo

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{t-i}^2$$

- $\alpha_i > 0$
- $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$

Valor largo plazo como intercepto V_L

$$\sigma_t^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{t-i}^2$$

ARCH(m) integrado $\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{t-i}^2$$

Filtro EWMA, mas peso a observaciones recientes!

$\alpha_{i+1} = \lambda \alpha_i$, where $\lambda \in (0, 1)$.

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$$

Volatilidad estimada en t

- estimación anterior σ_{t-1}.
- nueva información r_{t-1}.

Sustitución recursiva

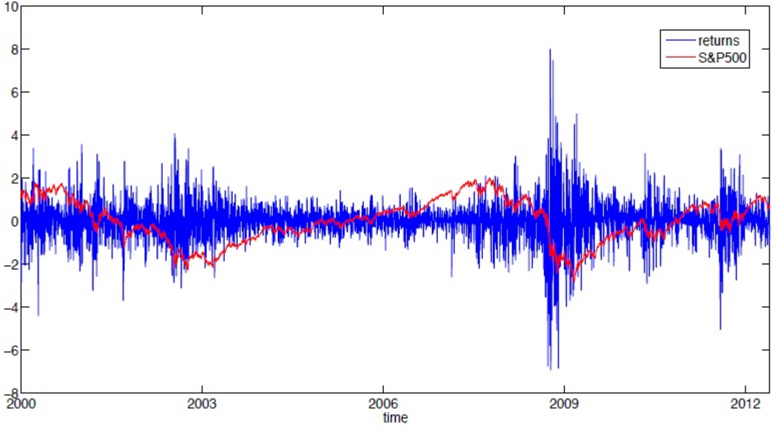
$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2 + \lambda^m \sigma_{t-m}^2$$

$\lambda^m \to 0$

Filtro EWMA

- No requiere estimación (fijando λ).
- Modelo proceso volatilidad sencillo.
- Insumo en riesgo de mercado (RiskMetrics) $\lambda = 0.94$.
- Buen desempeño de pronotico.
- EWMA es caso particular GARCH(1,1) integrado.
- IGARCH(1,1) permite estimar λ.

Asimetría en el proceso e volatilidad



GARCH(1,1) asimétrico

GJR-GARCH, TARCH(1,1).

$$y_t = \sigma_t(\theta)\varepsilon_t$$

$\varepsilon_t \sim iid(0,1)$.
Ecuación auxiliar,

$$\sigma_t^2(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma y_{t-1}^2 \mathbf{1}_{y_{t-1}<0}$$

- retornos positivos (buenas noticias): α_1
- retornos negativos (malas noticias): $\alpha_1 + \gamma$
- Efecto asimétrico $\gamma > 0$

EGARCH(1,1)

$$y_t = \sigma_t(\theta)\varepsilon_t$$

$\varepsilon_t \sim iid(0,1)$.
Ecuación auxiliar,

$$\log \sigma_t^2(\theta) = \alpha_0 + \tilde{\alpha} f(y_{t-1}) + \beta \log \sigma_{t-1}^2$$

donde $\tilde{\alpha} f(y_{t-1}) = \alpha_1 \mid \frac{y_{t-1}}{\sigma_{t-1}^{1/2}} \mid + \gamma \frac{y_{t-1}}{\sigma_{t-1}^{1/2}}$.

- GARCH en Logs
- α, β no restringidos log.
- Efecto asimétrico $\gamma < 0$

ARCH in Mean, GARCH-M

Prima de riesgo de los activos, $r_t = u_t + y_t$, donde $u_t \in \mathcal{F}_{t-1}$ anticipado pero y_t no anticipado.

$$r_t = \delta f(\sigma_t)(\theta) + y_t$$

$$y_t = \sigma_t(\theta)\varepsilon_t$$

$\varepsilon_t \sim iid(0, 1)$.
Ecuación auxiliar,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Prima de riesgo asociada a la mayor variabilidad
no anticipada se captura mediante δ (e.g. $f(\sigma_t) = \hat{\sigma}_{t-1}$).