

1 向量和矩阵的基础

1.1 向量和矩阵的概念

1.1.1 向量

1.1.2 矩阵

定理 1.1.1. 矩阵的乘积满足下列规律:

1. 结合律 $(AB)C = A(BC)$
2. 左分配律 $A(B + C) = AB + AC$, 右分配律 $(B + C)A = BA + CA$.

定理 1.1.2. 分块矩阵乘法, 若 A 的列的分法与 B 的行的分法一致, 就和矩阵乘法一致.

1.1.2.1 特殊结构矩阵

定义 1.1.3. 对称矩阵: $A = A^T$

定理 1.1.4. 对称矩阵 A 的性质

- 存在正交矩阵 Q 使 $Q^T A Q = \Lambda$, Λ 是对角阵
- 存在 n 个 A 的特征向量构成 \mathbb{R}^n 的一个标准正交基

定义 1.1.5. 非奇异矩阵是满秩矩阵.

定义 1.1.6. 正交矩阵: $A^T = A^{-1} \Leftrightarrow A$ 的行向量和列向量均为单位矩阵.

定义 1.1.7. k 阶子式: 取 k 行 k 列. **k 阶主子式:** 取 k 行 k 列, 行列序号相等. **顺序主子式:** 取 $[11 : 11], [11 : 22], \dots, [nn, nn]$.

TODO: Lec 9

1.2 向量空间

1.2.1 向量间线性关系

定义 1.2.1. 如果两个向量组互相可以线性表出, 则称为它们等价。

1.2.1.1 生成集、基底和坐标

定义 1.2.2. 生成集 $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ 张成的子空间 $L(a_1, a_2, \dots, a_r)$ 或 $span(a_1, a_2, \dots, a_r)$

定义 1.2.3. 基为线性无关的生成集.

定义 1.2.4. 维数 $dim(\mathbb{V}) = (\text{秩}) rank\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$

1.2.2 线性组合

例 1.2.1 已知 $\beta = (1, 2, 1, 1)^T$, 以及 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)^T$. 试将向量 β 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合.

解 假设 k_1, k_2, k_3, k_4 为组合系数, 将 β 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合. 即求解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

使用初等变换法求解线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

可得:

$$\beta = \frac{5}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4$$

1.3 线性映射

定义 1.3.1. 线性映射 $\varphi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} \Leftrightarrow \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

定义 1.3.2. (等价和相似是不同基的变换矩阵)

- $A = T^{-1}BS$ 成立, A, B 等价.
- $A = T_S(B) = S^{-1}BS$ 成立, A, B 相似. 称 T 为相似变换.

1.3.1 核空间和像空间

1.3.2 线性变换

定义 1.3.3. 线性变换满足 $\varphi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 的线性映射.

1.3.2.1 初等变换

定义 1.3.4. 由单位矩阵 I 经过一次初等行 (列) 变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

齐次方程组通解?

1.3.3 常见变换

TODO: Lec 8

1.3.3.1 旋转矩阵

1.3.3.2 反射矩阵

1.3.3.3 信号处理

1.3.3.4 逆

定义 1.3.5. n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A = Q_1 Q_2 \dots Q_m$, Q_i 为初等矩阵.

性质 1.3.6. 由 1.3.5 可得: $(Q_1 Q_2 \dots Q_m)^{-1} (AI) = (IA^{-1})$

定义 1.3.7. 广义逆: $(A^T A)^{-1} A^T$

1.4 行列式

定义 1.4.1. 一个排列中, 如果一个大元素在小元素前, 则称这两个数构成一个**逆序**。一个排列中存在的所有逆序的数目称为排列的**逆序数**: $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

定义 1.4.2. n 阶行列式中, 划去元素 a_{ij} 所在第 i 行和第 j 列元素, 剩余的元素按原来的次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**, 记成 M_{ij} 。令 $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$, 称 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

定义 1.4.3. 行列式:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, \dots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \\ = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \text{ (按行展开)}$$

性质 1.4.4. 行列式即有向体积

性质 1.4.5. 设 $A, B \in R^{n \times n}$

- $\det(A) = \det(A^T)$

- $\det(aA) = a^n \det(A)$
- $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$

定理 1.4.6. 克莱姆法则? (Lec5#12)

性质 1.4.7. 交换矩阵两行 (或两列) 改变矩阵行列式的符号

性质 1.4.8. 行列式关于矩阵的每行 (或每列) 是线性的。

性质 1.4.9. 如果将行列式的某一行 (列) k 倍加到另一行 (列), 则行列式的值不变。

定义 1.4.10. 伴随矩阵: $A_{ij}^* = A_{ji}$

定理 1.4.11.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

1.5 迹

定义 1.5.1. 迹: $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

性质 1.5.2. 迹的循环不变性

$$Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$$

同理相似矩阵的迹相等:

$$Tr(Q^{-1}AQ) = Tr(QQ^{-1}A) = Tr(A)$$

1.6 二次型

定义 1.6.1. 定义 f 为二次型, A 为二次型矩阵 (对称矩阵).

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ &= x^T Ax = Tr(x^T Ax) \end{aligned}$$

定义 1.6.2. A 合同于 B , $A \simeq B$: $C^T AC = B$. (即不同基下的二次型)

性质 1.6.3. 合同变换:

- 交换 A 的第 i 行和第 j 行, 再交换其第 i 列和第 j 列;
- 将 A 的第 i 行乘以非零常数 k , 再将其第 i 列乘以 k ;

- 将 A 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行, 再将其第 i 列乘以 k 加到第 j 列。

定义 1.6.4. 设 A 是属于 K 上的非零对称矩阵, 则必存在非奇异矩阵 C , 使 $C^T A C$ 的第 1 行第 1 个元素不为零.

定义 1.6.5. 设 A 是属于 K 上的非零对称矩阵, 则必存在非奇异矩阵 C , 使 A 合同于 $C^T A C = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0_{1 \times k} \\ 0_{k \times 1} & \lambda k \times k \end{pmatrix}$.

1.6.1 标准型

定义 1.6.6. 线性替换: 使用 y_i 替换 x_i , $x_{n \times 1} = C_{n \times n} y_{n \times 1}$. 当 $\det(C) > 0$ 时, 线性替换非退化.

定义 1.6.7. 每一个二次型都能非退化的线性替换化为平方和, 称为**标准型**. 标准型不唯一.

定理 1.6.8. 每一个二次型矩阵都能通过合同变化为对角矩阵.

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对 } A \text{ 合同变化}} \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$$

D 是对角矩阵, C 是非退化的线性替换矩阵.

例如将 $f(x)$ 替换为标准型 $g(y) = y^T D y$, $x = C y$.

定理 1.6.9. 二次型矩阵的特征值即标准型的系数.

1.6.2 规范型

定义 1.6.10. 规范性即在**标准型**的基础上把系数变成 1 和 -1 . **正惯性指数** p 为 1 的数量. **负惯性指数** $r - p$ 为 -1 的数量.

1.6.3 正定型

定义 1.6.11. 令 $x \neq 0$. **正定二次型**: $x^T A x > 0$, A 为**正定矩阵**. **半正定二次型**: $x^T A x \geq 0$, A 为**半正定矩阵**

性质 1.6.12. 正定二次型的等价条件:

1. $x^T A x > 0$ (定义).
2. 标准型/规范型系数全部为正数, 正惯性指数等于 A 的秩.
3. 顺序主子式全大于 0 (对于负定二次型: 奇数阶全小于 0, 偶数阶全大于 0).

1.7 特征值

定义 1.7.1. $Ax = \lambda x \Rightarrow \det(\lambda I - A) = 0$

1.8 内积和范数

1.8.1 范数

定义 1.8.1. 范数 $\|x\|$ 满足:

1. 非负性: $\begin{cases} \|x\| > 0 & x \neq 0 \\ \|x\| = 0 & x = 0 \end{cases}$
2. 齐次性: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

定义 1.8.2. l_p 范数:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

l_1 范数, 1 范数, Manhattan 范数

l_2 范数, 2 范数, 欧几里得范数

定义 1.8.3. l_0 = 非零元素个数, l_0 并不符合范数定义

$$l_\infty = \max_j |x_i|$$

1.8.2 内积

定义 1.8.4. 内积: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, 并满足以下条件

1. 非负性: $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$
2. 对称性: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. 齐次性: $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. 线性性: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

定义 1.8.5. 点积 (标准内积): $\langle x, y \rangle = x^T y$

1.8.3 距离

定义 1.8.6. 距离: $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足:

1. 非负性: $d(x, y) \geq 0$, 且 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. 对称性: $d(x, y) = d(y, x)$
3. 三角不等式: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

定义 1.8.7. 欧式距离: $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$. 其中内积定义为点积.

1.8.4 夹角

定义 1.8.8. 夹角: $\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}$

定义 1.8.9. 正角: $\langle x, y \rangle = 0$, 如果 $\|x\| = \|y\| = 1$, 则为标准正交.

1.8.5 矩阵内积和范数

定义 1.8.10. 向量化: $\text{vec}(A)$: 将 $m \times n$ 的矩阵拉长为 $mn \times 1$ 向量

定义 1.8.11. 矩阵内积: $\langle A, B \rangle = \langle \text{vec}(A), \text{vec}(B) \rangle = \text{vec}(A)^T \text{vec}(B) = \text{Tr}(A^T B)$

定义 1.8.12. 广义矩阵范数: 和向量范数的条件类似.

矩阵范数: 附加相容性条件: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

定义 1.8.13. 常见矩阵范数

- l_1 范数: $\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
- l_2 范数, Frobenius 范数: $\|A\|_F = (\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$
- l_∞ 范数 (广义): $\|A\|_{m_\infty} = \max |a_{ij}|$

1.8.5.1 算子范数

定义 1.8.14. 相容的向量范数和矩阵范数: $\|Ax\|_v \leq \|A\|_M \|x\|_v$

定义 1.8.15. 由向量范数 $\|\cdot\|_v$ 诱导出的算子范数: $\|A\| = \max\{\|Ax\|_v : \|x\|_v = 1\}$

定义 1.8.16. 常见的算子范数, 对于 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- 1 范数: $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$, 列向量的 l_1 范数最大值
- ∞ 范数: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, 行向量的 l_1 范数最大值
- 2 范数: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

2 子空间

2.1 向量子空间基础

2.1.1 向量子空间

定义 2.1.1. 如果 \mathbb{Y} 中的每个向量 x 可唯一地表成 $x = y_1 + y_2 (y_1 \in \mathbb{Y}_1, y_2 \in \mathbb{Y}_2)$ 的形式, 则称 \mathbb{Y} 为 \mathbb{Y}_1 与 \mathbb{Y}_2 的直和。记作 $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 + \mathbb{Y}_2$ 或 $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Y}_2 \Leftrightarrow \mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2 = 0$

2.1.2 仿射子空间

定义 2.1.2. 仿射子空间即向量子空间偏移向量 x_0

2.1.3 正交和正交补

定义 2.1.3. $\forall v \in \mathbb{S}, \forall w \in \mathbb{T}$, 均有: $v^T w = 0$ 记做 \mathbb{S} 垂直于 \mathbb{T} , 或正交.

定义 2.1.4. 正交补: $\{w \in \mathbb{R}^n | v^T w = 0, \forall v \in \mathbb{V}\}$

例 2.1.1 求 $\text{span}(1, 2, 0)^T, (0, 1, 2)^T$ 的正交补空间:

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T x = 0 \Rightarrow x = k(4, -2, 1)^T$$

正交补空间为 $\text{span}\{(4, -2, 1)^T\}$

2.1.4 四个基本子空间

- 列空间 $\text{Col}(A) = \text{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$
- 行空间 $\text{Row}(A) = \text{Col}(A^T)$
- 零空间 $\text{Null}(A) = \{x | Ax = 0\}$
- 左零空间 $\text{Null}(A^T)$

定理 2.1.5. 四个基本子空间的正交关系

- $\text{Col}(A) \cap \text{Null}(A^T) = \{0\}$
- $\text{Col}(A^T) \cap \text{Null}(A) = \{0\}$
- $\text{Col}(A)^\perp = \text{Null}(A^T)$
- $\text{Col}(A^T)^\perp = \text{Null}(A)$

性质 2.1.6. 初等变换有关的性质

1. 一系列初等行变换不改变矩阵的行空间。
2. 一系列初等行变换不改变矩阵的零空间。
3. 一系列初等列变换不改变矩阵的列空间。
4. 一系列初等列变换不改变矩阵的左零空间。

2.2 投影

定理 2.2.1. 正交投影矩阵为 $B(B^T B)^{-1} B^T$, 其中 B 为是一个有序基底

2.3 正交基

定理 2.3.1. Gram-Schmidt 正交化: $b_n = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_i, a_n \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i$, $q_n = \frac{b_n}{\langle b_n, b_n \rangle}$

例 2.3.1 利用 Gram-Schmidt 正交化的过程, 求下述矩阵列空间的一组正交基:

$$\begin{pmatrix} -10 & 13 & 7 & -11 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ -6 & 3 & 13 & -3 \\ 16 & -16 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 = (-10, 2, -6, 16, 2)^T \\ b_2 &= a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = (3, 3, -3, 0, 3)^T \\ b_3 &= a_3 - \sum_{i=1}^2 \frac{\langle b_i, a_3 \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i = (6, 0, 6, 6, 0)^T \\ b_4 &= a_4 - \sum_{i=1}^3 \frac{\langle b_i, a_4 \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i = (0, 5, 0, 0, -5)^T \end{aligned}$$

单位化:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{10}\right)^T \\ e_2 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T \\ e_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)^T \\ e_4 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T \end{aligned}$$

3 矩阵分解

3.1 LU 分解

主要用于求解 $Ax = b$.

定义 3.1.1. LU 分解: $A = LU$, L 下三角方阵, U 上三角方阵.

3.2 Gauss 变换

1. 利用 Gauss 变换化矩阵 A 为上三角阶梯型矩阵 $U = QA$. 应确保 k 阶顺序主子式始终不为 0 (\Rightarrow 每一步的主元均不为 0).

Gauss 变换: $R_i \pm kR_j, i > j$, 或可描述为 $Q = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & k_3 & 1 & \\ & k_4 & & 1 \end{pmatrix}$

2. 对 I 执行与上一步的初等变换的逆变换, 下三角矩阵 $L = Q^{-1}I$

3. $A = LU$

习题1. 判定矩阵 $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ 能否进行 LU 分解, 为什么? 如果能分解, 试分解之.

解 矩阵 C 的顺序主子式均不为 0, 可以进行 LU 分解.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow[R_3 + \frac{1}{3}R_1]{R_2 + \frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{11}{2}R_2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightarrow U \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_3 + \frac{11}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - \frac{1}{3}R_1]{R_2 - \frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L \end{aligned}$$

矩阵 B 的 1 阶主子式均为 0, 因此 B 不可以进行 LU 分解.

习题2. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的 LU 分解.

解

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + \frac{2}{3}R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \rightarrow U \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_3 - \frac{2}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L \end{aligned}$$

3.2.1 选主元的 LU 分解

如果得到 U 不存在主元为 0 的上三角阵, 可以使用行交换 P 进行选主元 (重排). 即 $U' = PU = PQA \Rightarrow P(PQ)^{-1}PU = PA$.

3.3 QR 分解

定义 3.3.1. QR 分解 (正交三角分解): $A = Q \begin{pmatrix} R \\ O \end{pmatrix}$. $A \in \mathbb{R}^{m \times n} (m \geq n)$, 正交矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, Q 上三角矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

QR 分解主要用于解决最小二乘问题, 矩阵特征值计算.

3.3.1 基于 Gram-Schmidt 正交化

使用 Gram-Schmidt 对满秩矩阵 A 正交化得到正交基 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, 再用 Q 表示 $A = QR$.

3.3.2 Householder

TODO: After lec 8

3.3.3 Givens

TODO: After lec 8

3.4 谱分解/特征分解

3.4.1 特征分解

定义 3.4.1. 特征分解: $A = Q\Lambda Q^{-1}$, Λ 为特征值对角矩阵, Q 为特征向量

例 3.4.1 矩阵的幂 A^k

解 $A^k = (Q\Lambda Q^{-1})^k$

3.4.2 谱分解

定义 3.4.2. 对称矩阵 A , 如果 A 可以本分解为 $A = Q\Lambda Q^T$. 其中 Q 为单位化特征向量矩阵, Λ 是特征值对角矩阵. 称为**谱分解**.

3.4.3 Cholesky 分解

习题3. 求对称正定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

的不带平方根的 Cholesky 分解.

解

$$\begin{aligned} D_1 &= A_{11} = 5 \\ L_{21} &= \frac{1}{D_1} A_{21} = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}, \quad L_{31} = \frac{1}{D_1} A_{31} = \frac{1}{5} \times (-4) = -\frac{4}{5} \\ D_2 &= A_{22} - L_{21}^2 D_1 = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times 5 = \frac{1}{5} \\ L_{32} &= \frac{1}{D_2} (A_{32} - L_{31} L_{21} D_1) = 5 \left(-2 + \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} \times 5\right) = -2 \\ D_3 &= A_{33} - \sum_{k=1}^2 L_{3k}^2 D_k = 5 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times 5 - (2)^2 \times \frac{1}{5} = 1 \\ A &= LDL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

3.5 奇异值分解

索引

- 1 范数, 7
- 2 范数, 7
- 半负定二次型, 5
- 伴随矩阵, 4
- 半正定二次型, 5
- 半正定矩阵, 5
- 标准内积, 6
- 标准型, 5
- 标准正交, 7
- 初等矩阵, 3
- 垂直, 8
- 代数余子式, 3
- 等价, 1, 2
- 点积, 6
- 对称矩阵, 1, 4
- 对角矩阵, 5
- 二次型, 4, 5
- 二次型矩阵, 4, 5
- 范数, 6
- 仿射子空间, 8
- 非奇异矩阵, 1
- Fiobenius 范数, 7
- 负定二次型, 5
- 负惯性指数, 5
- Gram-Schmidt, 11
- Gram-Schmidt 正交化, 9
- 广义矩阵范数, 7
- 广义逆, 3
- 规范型, 5
- 规范性, 5
- 行列式, 3
- 核空间, 2
- 合同, 4
- 合同变化, 5
- 合同变换, 4
- 基, 1
- 迹, 4
 - 循环不变性, 4
- 夹角, 7
- 矩阵范数, 7
- 矩阵内积, 7
- 距离, 6
- k 阶主子式, 1
- k 阶子式, 1
- 克莱姆法则, 4
- lp 范数, 6
- LU 分解, 10
- 满秩矩阵, 1
- 内积, 6
- 逆矩阵, 3
- 逆序, 3
- 逆序数, 3
- 欧式距离, 6
- 谱分解, 12
- QR, 11
- QR 分解, 11
- 生成集, 1
- 顺序主子式, 1, 5
- 算子范数, 7
- 特征分解, 11
- 特征值, 5, 11
- 维数, 1
- 线性变换, 2
- 线性替换, 5
- 线性映射, 2
- 相容性条件, 7
- 相似, 2
- 相似变换, 2
- 相似矩阵, 4

像空间, 2

向量化, 7

向量子空间

直和, 8

余子式, 3

张成的子空间, 1

正定二次型, 5

正定矩阵, 5

正惯性指数, 5

正交, 8

正交补, 8

正交矩阵, 1

正交三角分解, 11

正交投影, 9

正角, 7

秩, 1, 5

∞ 范数, 7