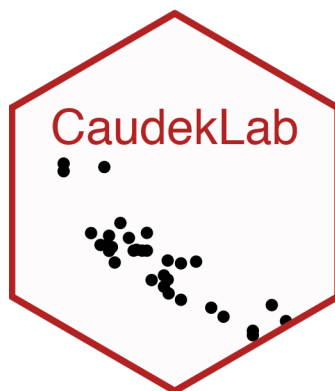


Psicometria

Corrado Caudek

Questo documento è stato realizzato con:

- \LaTeX e la classe memoir (<http://www.ctan.org/pkg/memoir>);
- R (<http://www.r-project.org/>) e RStudio (<http://www.rstudio.com/>);
- bookdown (<http://bookdown.org/>) e memoir (<https://ericmarcon.github.io/memoiR/>).



Nel blog della mia pagina personale sono forniti alcuni approfondimenti degli argomenti qui trattati.

<https://ccaudek.github.io/caudeklab/>

Indice

Indice	iii
Prefazione	v
La psicologia e la Data Science	v
Come studiare	vi
Sviluppare un metodo di studio efficace	vii
 Statistica descrittiva ed analisi esplorativa dei dati	 3
1 Statistica descrittiva	3
1.1 Introduzione all'esplorazione dei dati	3
1.2 Un excursus storico	3
1.3 Riassumere i dati	4
1.4 Distribuzioni di frequenze	5
1.5 Istogramma	9
1.6 Kernel density plot	10
1.7 Forma di una distribuzione	12
1.8 Indici di posizione	13
Quantili	13
Diagramma a scatola	14
L'eccellenza grafica	16
1.9 Indici di tendenza centrale	16
Media	17
Media spuntata	18
Moda e mediana	18
1.10 Indici di dispersione	19
Indici basati sull'ordinamento dei dati	19
Varianza	19
Deviazione standard	20
Deviazione mediana assoluta	21
Indici di variabilità relativi	21
1.11 Le relazioni tra variabili	22
Diagramma a dispersione	22
Covarianza	23
Correlazione	25
1.12 Correlazione e causazione	25
Usi della correlazione	26
Correlazione di Spearman	26

Correlazione nulla	26
Considerazioni conclusive	27
Bibliografia	29
Elenco delle figure	31

Prefazione

Data Science per psicologi contiene il materiale delle lezioni dell'insegnamento di *Psicometria B000286* (A.A. 2021/2022) rivolto agli studenti del primo anno del Corso di Laurea in Scienze e Tecniche Psicologiche dell'Università degli Studi di Firenze.

L'insegnamento di Psicometria si propone di fornire agli studenti un'introduzione all'analisi dei dati in psicologia. Le conoscenze/competenze che verranno sviluppate in questo insegnamento sono quelle della *Data science*, ovvero le conoscenze/competenze che si pongono all'intersezione tra statistica (ovvero, richiedono la capacità di comprendere teoremi statistici) e informatica (ovvero, richiedono la capacità di sapere utilizzare un software).

La psicologia e la Data Science

It's worth noting, before getting started, that this material is hard. If you find yourself confused at any point, you are normal. Any sense of confusion you feel is just your brain correctly calibrating to the subject matter. Over time, confusion is replaced by comprehension [...] — Richard McElreath

Sembra sensato spendere due parole su un tema che è importante per gli studenti: quello indicato dal titolo di questo Capitolo. È ovvio che agli studenti di psicologia la statistica non piace. Se piacesse, forse studierebbero Data Science e non psicologia; ma non lo fanno. Di conseguenza, gli studenti di psicologia si chiedono: “perché dobbiamo perdere tanto tempo a studiare queste cose quando in realtà quello che ci interessa è tutt'altro?” Questa è una bella domanda.

C'è una ragione molto semplice che dovrebbe farci capire perché la Data Science è così importante per la psicologia. Infatti, a ben pensarci, la psicologia è una disciplina intrinsecamente statistica, se per statistica intendiamo quella disciplina che studia la variazione delle caratteristiche degli individui nella popolazione. La psicologia studia *gli individui* ed è proprio la variabilità inter- e intra-individuale ciò che vogliamo descrivere e, in certi casi, predire. In questo senso, la psicologia è molto diversa dall'ingegneria, per esempio. Le proprietà di un determinato ponte sotto certe condizioni, ad esempio, sono molto simili a quelle di un altro ponte, sotto le medesime condizioni. Quindi, per un ingegnere la statistica è poco importante: le proprietà dei materiali sono unicamente dipendenti dalla loro composizione e restano costanti. Ma lo stesso non può dirsi degli individui: ogni individuo è unico e cambia nel tempo. E le variazioni tra gli individui, e di un individuo nel tempo, sono l'oggetto di studio proprio della

psicologia: è dunque chiaro che i problemi che la psicologia si pone sono molto diversi da quelli affrontati, per esempio, dagli ingegneri. Questa è la ragione per cui abbiamo tanto bisogno della *data science* in psicologia: perché la *data science* ci consente di descrivere la variazione e il cambiamento. E queste sono appunto le caratteristiche di base dei fenomeni psicologici.

Sono sicuro che, leggendo queste righe, a molti studenti sarà venuta in mente la seguente domanda: perché non chiediamo a qualche esperto di fare il “lavoro sporco” (ovvero le analisi statistiche) per noi, mentre noi (gli psicologi) ci occupiamo solo di ciò che ci interessa, ovvero dei problemi psicologici slegati dai dettagli “tecnici” della *data science*? La risposta a questa domanda è che non è possibile progettare uno studio psicologico sensato senza avere almeno una comprensione rudimentale della *data science*. Le tematiche della *data science* non possono essere ignorate né dai ricercatori in psicologia né da coloro che svolgono la professione di psicologo al di fuori dell’Università. Infatti, anche i professionisti al di fuori dall’università non possono fare a meno di leggere la letteratura psicologica più recente: il continuo aggiornamento delle conoscenze è infatti richiesto dalla deontologia della professione. Ma per potere fare questo è necessario conoscere un bel po’ di *data science*! Basta aprire a caso una rivista specialistica di psicologia per rendersi conto di quanto ciò sia vero: gli articoli che riportano i risultati delle ricerche psicologiche sono zeppi di analisi statistiche e di modelli formali. E la comprensione della letteratura psicologica rappresenta un requisito minimo nel bagaglio professionale dello psicologo.

Le considerazioni precedenti cercano di chiarire il seguente punto: la *data science* non è qualcosa da studiare a malincuore, in un singolo insegnamento universitario, per poi poterla tranquillamente dimenticare. Nel bene e nel male, gli psicologi usano gli strumenti della *data science* in tantissimi ambiti della loro attività professionale: in particolare quando costruiscono, somministrano e interpretano i test psicometrici. È dunque chiaro che possedere delle solide basi di *data science* è un tassello imprescindibile del bagaglio professionale dello psicologo. In questo insegnamento verranno trattati i temi base della *data science* e verrà adottato un punto di vista bayesiano, che corrisponde all’approccio più recente e sempre più diffuso in psicologia.

Come studiare

I know quite certainly that I myself have no special talent. Curiosity, obsession and dogged endurance, combined with self-criticism, have brought me to my ideas. — Albert Einstein

Il giusto metodo di studio per prepararsi all’esame di Psicometria è quello di seguire attivamente le lezioni, assimilare i concetti via via che essi vengono presentati e verificare in autonomia le procedure presentate a lezione. Incoraggio gli studenti a farmi domande per chiarire ciò che non è stato capito appieno. Incoraggio gli studenti a utilizzare i forum attivi su Moodle e, soprattutto, a svolgere gli esercizi proposti su Moodle. I problemi forniti su Moodle rappresentano il livello di difficoltà richiesto per superare l’esame e consentono allo studente di comprendere se le competenze sviluppate fino a quel punto sono sufficienti rispetto alle richieste dell’esame.

La prima fase dello studio, che è sicuramente individuale, è quella in cui è necessario acquisire le conoscenze teoriche relative ai problemi che saranno presentati all'esame. La seconda fase di studio, che può essere facilitata da scambi con altri e da incontri di gruppo, porta ad acquisire la capacità di applicare le conoscenze: è necessario capire come usare un software (R) per applicare i concetti statistici alla specifica situazione del problema che si vuole risolvere. Le due fasi non sono però separate: il saper fare molto spesso ci aiuta a capire meglio.

Sviluppare un metodo di studio efficace

Memorization is not learning. — Richard Phillips Feynman

Avendo insegnato molte volte in passato un corso introduttivo di analisi dei dati ho notato nel corso degli anni che gli studenti con l'atteggiamento mentale che descriverò qui sotto generalmente ottengono ottimi risultati. Alcuni studenti sviluppano naturalmente questo approccio allo studio, ma altri hanno bisogno di fare uno sforzo per maturarlo. Fornisco qui sotto una breve descrizione del "metodo di studio" che, nella mia esperienza, è il più efficace per affrontare le richieste di questo insegnamento (Burger & Starbird, 2012).

- Dedicate un tempo sufficiente al materiale di base, apparentemente facile; assicuratevi di averlo capito bene. Cercate le lacune nella vostra comprensione. Leggere presentazioni diverse dello stesso materiale (in libri o articoli diversi) può fornire nuove intuizioni.
- Gli errori che facciamo sono i nostri migliori maestri. Istantaneamente cerchiamo di dimenticare subito i nostri errori. Ma il miglior modo di imparare è apprendere dagli errori che commettiamo. In questo senso, una soluzione corretta è meno utile di una soluzione sbagliata. Quando commettiamo un errore questo ci fornisce un'informazione importante: ci fa capire qual è il materiale di studio sul quale dobbiamo ritornare e che dobbiamo capire meglio.
- C'è ovviamente un aspetto "psicologico" nello studio. Quando un esercizio o problema ci sembra incomprensibile, la cosa migliore da fare è dire: "mi arrendo", "non ho idea di cosa fare!". Questo ci rilassa: ci siamo già arresi, quindi non abbiamo niente da perdere, non dobbiamo più preoccuparci. Ma non dobbiamo fermarci qui. Le cose "migliori" che faccio (se ci sono) le faccio quando non ho voglia di lavorare. Alle volte, quando c'è qualcosa che non so fare e non ho idea di come affrontare, mi dico: "oggi non ho proprio voglia di fare fatica", non ho voglia di mettermi nello stato mentale per cui "in 10 minuti devo risolvere il problema perché dopo devo fare altre cose". Però ho voglia di *divertirmi* con quel problema e allora mi dedico a qualche aspetto "marginale" del problema, che so come affrontare, oppure considero l'aspetto più difficile del problema, quello che non so come risolvere, ma invece di cercare di risolverlo, guardo come altre persone hanno affrontato problemi simili, oppure lo stesso problema in un altro contesto. Non mi pongo l'obiettivo "risolvi il problema in 10 minuti", ma invece

quello di farmi un'idea "generale" del problema, o quello di capire un caso più specifico e più semplice del problema. Senza nessuna pressione. Infatti, in quel momento ho deciso di non lavorare (ovvero, di non fare fatica). Va benissimo se "parto per la tangente", ovvero se mi metto a leggere del materiale che sembra avere poco a che fare con il problema centrale (le nostre intuizioni e la nostra curiosità solitamente ci indirizzano sulla strada giusta). Quando faccio così, molto spesso trovo la soluzione del problema che mi ero posto e, paradossalmente, la trovo in un tempo minore di quello che, in precedenza, avevo dedicato a "lavorare" al problema. Allora perché non faccio sempre così? C'è ovviamente l'aspetto dei "10 minuti" che non è sempre facile da dimenticare. Sotto pressione, possiamo solo agire in maniera automatica, ovvero possiamo solo applicare qualcosa che già sappiamo fare. Ma se dobbiamo imparare qualcosa di nuovo, la pressione è un impedimento.

- È utile farsi da soli delle domande sugli argomenti trattati, senza limitarsi a cercare di risolvere gli esercizi che vengono assegnati. Quando studio qualcosa mi viene in mente: "se questo è vero, allora deve succedere quest'altra cosa". Allora verifico se questo è vero, di solito con una simulazione. Se i risultati della simulazione sono quelli che mi aspetto, allora vuol dire che ho capito. Se i risultati sono diversi da quelli che mi aspettavo, allora mi rendo conto di non avere capito e ritorno indietro a studiare con più attenzione la teoria che pensavo di avere capito – e ovviamente mi rendo conto che c'era un aspetto che avevo frainteso. Questo tipo di verifica è qualcosa che dobbiamo fare da soli, in prima persona: nessun altro può fare questo al posto nostro.
- Non aspettatevi di capire tutto la prima volta che incontrate un argomento nuovo.¹ È utile farsi una nota mentalmente delle lacune nella vostra comprensione e tornare su di esse in seguito per cercare di colmarle. L'atteggiamento naturale, quando non capiamo i dettagli di qualcosa, è quello di pensare: "non importa, ho capito in maniera approssimativa questo punto, non devo preoccuparmi del resto". Ma in realtà non è vero: se la nostra comprensione è superficiale, quando il problema verrà presentato in una nuova forma, non riusciremo a risolverlo. Per cui i dubbi che ci vengono quando studiamo qualcosa sono il nostro alleato più prezioso: ci dicono esattamente quali sono gli aspetti che dobbiamo approfondire per potere migliorare la nostra preparazione.
- È utile sviluppare una visione d'insieme degli argomenti trattati, capire l'obiettivo generale che si vuole raggiungere e avere chiaro il contributo che i vari pezzi di informazione forniscono al raggiungimento di tale obiettivo. Questa organizzazione mentale del materiale di studio facilita la comprensione. È estremamente utile creare degli schemi di ciò che si sta studiando. Non aspettate che sia io a fornirvi un riepilogo di ciò che dovete imparare: sviluppate da soli tali schemi e tali riassunti.

¹Ricordatevi inoltre che gli individui tendono a sottostimare la propria capacità di apprendere (Horn & Loewenstein, 2021).

-
- Tutti noi dobbiamo imparare l'arte di trovare le informazioni, non solo nel caso di questo insegnamento. Quando vi trovate di fronte a qualcosa che non capite, o ottenete un oscuro messaggio di errore da un software, ricordatevi: "Google is your friend".

Corrado Caudek

Febbraio 2022

Statistica descrittiva ed analisi esplorativa dei dati

Statistica descrittiva

1.1 Introduzione all'esplorazione dei dati

Le analisi esplorative dei dati e la statistica descrittiva costituiscono la prima fase dell'analisi dei dati psicologici. Ci consentono di capire come i dati sono distribuiti. Inoltre, ci aiutano ad individuare outliers ed errori di tabulazione. Sono anche molto utili per studiare le relazioni tra le variabili. Insomma, sono indispensabili per condurre una qualsiasi analisi statistica, dal livello base a quello avanzato, in modo corretto.

Si parla di analisi descrittiva se l'obiettivo è quello di descrivere le caratteristiche di un campione. Si parla di analisi esplorativa dei dati (*Exploratory Data Analysis* o EDA) se l'obiettivo è quello di esplorare i dati alla ricerca di nuove informazioni e relazioni tra variabili. Questa distinzione, seppur importante a livello teorico, nella pratica è più fumosa perché spesso entrambe le situazioni si verificano contemporaneamente nella stessa indagine statistica e le metodologie di analisi che si utilizzano sono molto simili.

Né il calcolo delle statistiche descrittive né l'analisi esplorativa dei dati possono essere condotte senza utilizzare un software. Le descrizioni dei concetti di base della EDA saranno dunque fornite di pari passo alla spiegazione di come le quantità discusse possono essere calcolate in pratica utilizzando R.

1.2 Un excursus storico

Nel 1907 Francis Galton, cugino di Charles Darwin, matematico e statistico autodidatta, geografo, esploratore, teorico della dattiloscopia (ovvero, dell'uso delle impronte digitali a fini identificativi) e dell'eugenetica, scrisse una lettera alla rivista scientifica *Nature* sulla sua visita alla *Fat Stock and Poultry Exhibition* di Plymouth. Lì vide alcuni membri del pubblico partecipare ad un gioco il cui scopo era quello di indovinare il peso della carcassa di un grande bue che era appena stato scuoiato. Galton si procurò i 787 dei biglietti che erano stati compilati dal pubblico e considerò il valore medio di 547 kg come la "scelta demo-

cratica” dei partecipanti, in quanto “ogni altra stima era stata giudicata troppo alta o troppo bassa dalla maggioranza dei votanti”. Il punto interessante è che il peso corretto di 543 kg si dimostrò essere molto simile alla “scelta democratica” basata sulle stime dei 787 partecipanti. Galton intitolò la sua lettera a *Nature Vox Populi* (voce del popolo), ma questo processo decisionale è ora meglio conosciuto come la “saggezza delle folle” (*wisdom of crowds*). Possiamo dire che, nel suo articolo del 1907, Galton effettuò quello che ora chiamiamo un riepilogo dei dati, ovvero calcolò un indice sintetico a partire da un insieme di dati. In questo capitolo esamineremo le tecniche che sono state sviluppate nel secolo successivo per riassumere le grandi masse di dati con cui sempre più spesso ci dobbiamo confrontare. Vedremo come calcolare e interpretare gli indici di posizione e di dispersione, discuteremo le distribuzioni di frequenze e le relazioni tra variabili. Vedremo inoltre quali sono le tecniche di visualizzazione che ci consentono di rappresentare questi sommari dei dati mediante dei grafici. Ma prima di entrare nei dettagli, prendiamoci un momento per capire perché abbiamo bisogno della statistica e, per ciò che stiamo discutendo qui, della statistica descrittiva.

In generale, che cos’è la statistica? Ci sono molte definizioni. Fondamentalmente, la statistica è un insieme di tecniche che ci consentono di dare un senso al mondo attraverso i dati. Ciò avviene tramite il processo di analisi statistica. L’analisi statistica traduce le domande che abbiamo a proposito del mondo in modelli matematici, utilizza i dati per scegliere i modelli matematici che sono appropriati per descrivere il mondo e, infine, applica tali modelli per trovare una risposta alle domande che ci siamo posti. La statistica consente quindi di collegare le nostre domande a proposito del mondo ai dati, di utilizzare i dati per trovare le risposte alle domande che ci siamo posti e di valutare l’impatto delle risposte che abbiamo trovato.

1.3 Riassumere i dati

Iniziamo a porci una domanda. Quando riassumiamo i dati, necessariamente buttiamo via delle informazioni; ma è una buona idea procedere in questo modo? Non sarebbe meglio conservare le informazioni specifiche di ciascun soggetto che partecipa ad un esperimento psicologico, al di là di ciò che viene trasmesso dagli indici riassuntivi della statistica descrittiva? Che dire delle informazioni che descrivono come sono stati raccolti i dati, come l’ora del giorno o l’umore del partecipante? Tutte queste informazioni vengono perse quando riassumiamo i dati. La risposta alla domanda che ci siamo posti è che, in generale, non è una buona idea conservare tutti i dettagli di ciò che sappiamo. È molto più utile riassumere le informazioni perché la semplificazione risultante consente i processi di *generalizzazione*.

In un contesto letterario, l’importanza della generalizzazione è stata sottolineata da Jorge Luis Borges nel suo racconto “Funes o della memoria”, che descrive un individuo che perde la capacità di dimenticare. Borges si concentra sulla relazione tra generalizzazione e pensiero:

Pensare è dimenticare una differenza, generalizzare, astrarre. Nel mondo troppo pieno di Funes, c’erano solo dettagli.

Come possiamo ben capire, la vita di Funes non è facile. Se facciamo riferimento alla psicologia possiamo dire che gli psicologi hanno studiato a lungo l'utilità della generalizzazione per il pensiero. Un esempio è fornito dal fenomeno della formazione dei concetti e lo psicologo che viene in mente a questo proposito è sicuramente Eleanor Rosch, la quale ha studiato i principi di base della categorizzazione. I concetti ci forniscono uno strumento potente per organizzare le conoscenze. Noi siamo in grado di riconoscere facilmente i diversi esemplari di un concetto – per esempio, “gli uccelli” – anche se i singoli esemplari che fanno parte di una categoria sono molto diversi tra loro (l'aquila, il gabbiano, il pettirosso). L'uso dei concetti, cioè la generalizzazione, è utile perché ci consente di fare previsioni sulle proprietà dei singoli esemplari che appartengono ad una categoria, anche se non abbiamo mai avuto esperienza diretta con essi – per esempio, possiamo fare la predizione che tutti gli uccelli possono volare e mangiare vermi, ma non possono guidare un'automobile o parlare in inglese. Queste previsioni non sono sempre corrette, ma sono utili.

Le statistiche descrittive, in un certo senso, ci forniscono l'analogo dei “prototipi” che, secondo Eleanor Rosch, stanno alla base del processo psicologico di creazione dei concetti. Un prototipo è l'esemplare più rappresentativo di una categoria. In maniera simile, una statistica descrittiva come la media, ad esempio, potrebbe essere intesa come l'osservazione “tipica”.

La statistica descrittiva ci fornisce gli strumenti per riassumere i dati che abbiamo a disposizione in una forma visiva o numerica. Le rappresentazioni grafiche più usate della statistica descrittiva sono gli istogrammi, i diagrammi a dispersione o i box-plot, e gli indici sintetici più comuni sono la media, la mediana, la varianza e la deviazione standard.

1.4 Distribuzioni di frequenze

Per introdurre i principali strumenti della statistica descrittiva considereremo qui i dati raccolti da Zetsche et al. (2019)¹. Questi autori hanno studiato le aspettative negative le quali sono state evidenziate come un meccanismo chiave nel mantenimento e nella reiterazione della depressione. Zetsche et al. (2019) hanno valutato le aspettative di individui depressi circa il loro umore futuro ed si sono chiesti se queste aspettative fossero accurate oppure distorte negativamente.

In uno degli studi descritti viene esaminato un campione costituito da 30 soggetti con almeno un episodio depressivo maggiore e da 37 controlli sani. Gli autori hanno misurato il livello depressivo con il *Beck Depression Inventory* (BDI-II). Ma qual è la gravità della depressione riportata dai soggetti nel campione esaminato da Zetsche et al. (2019)?

Per rispondere a questa domanda, iniziamo a leggere in R i dati, assumendo che il file `data.mood.csv` si trovi nella cartella `data` contenuta nella *working directory*.

```
df <- read.csv(  
  here("data", "data.mood.csv"),
```

¹Si veda l'Appendice ??.

```
header=TRUE
)
```

C'è un solo valore BDI-II per ciascun soggetto ma tale valore viene ripetuto tante volte quante volte sono le righe del `data.frame` associate ad ogni soggetto (ciascuna riga corrispondente ad una prova diversa). È dunque necessario trasformare il `data.frame` in modo tale da avere un'unica riga per ciascun soggetto, ovvero un unico valore BDI-II per soggetto.

```
bysubj <- df %>%
  group_by(esm_id) %>%
  summarise(
    bdi = mean(bdi)
  ) %>%
  na.omit()
```

Ci sono dunque 66 soggetti i quali hanno ottenuto i valori sulla scala del BDI-II stampati di seguito. Per semplicità, li presentiamo ordinati dal più piccolo al più grande.

```
sort(bysubj$bdi)
#> [1] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
#> [19] 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 5 7 9 12
#> [37] 19 22 22 24 25 25 26 26 26 27 27 28 28 30 30 30 31 31
#> [55] 33 33 34 35 35 35 36 39 41 43 43 44
```

È chiaro che i dati grezzi sono di difficile lettura. Poniamoci dunque il problema di creare una rappresentazione sintetica e comprensibile di questo insieme di valori.

Uno dei modi che ci consentono di effettuare una sintesi dei dati è quello di generare una *distribuzione di frequenze*. Una distribuzione di frequenze è un riepilogo del conteggio della frequenza con cui le modalità osservate in un insieme di dati si verificano in un intervallo di valori.

Per creare una distribuzione di frequenze possiamo procedere effettuando una partizione delle modalità della variabile di interesse in m classi (denotate con Δ_i) tra loro disgiunte. In tale partizione, la classe i -esima coincide con un intervallo di valori aperto a destra $[a_i, b_i)$ o aperto a sinistra $(a_i, b_i]$. Ad ogni classe Δ_i avente a_i e b_i come limite inferiore e superiore associamo l'ampiezza $b_i - a_i$ (non necessariamente uguale per ogni classe) e il valore centrale \bar{x}_i . La scelta delle classi è arbitraria, ma è buona norma non definire classi con un numero troppo piccolo (< 5) di osservazioni. Poiché ogni elemento dell'insieme $\{x_i\}_{i=1}^n$ appartiene ad una ed una sola classe Δ_i , possiamo calcolare le quantità elencate di seguito.

- La *frequenza assoluta* n_i di ciascuna classe, ovvero il numero di osservazioni che ricadono nella classe Δ_i . Proprietà: $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.
- La *frequenza relativa* $f_i = n_i/n$ di ciascuna classe. Proprietà: $f_1 + f_2 + \dots + f_m = 1$.

- La *frequenza cumulata* N_i , ovvero il numero totale delle osservazioni che ricadono nelle classi fino alla i -esima compresa: $N_i = \sum_{i=1}^m n_i$.
- La *frequenza cumulata relativa* F_i , ovvero $F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_m = \frac{N_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m f_i$.

Calcoliamo ora la distribuzione di frequenza assoluta e la distribuzione di frequenza relativa per i valori del BDI-II del campione clinico di Zetsche et al. (2019). Per costruire una distribuzione di frequenza è innanzitutto necessario scegliere gli intervalli delle classi. Facendo riferimento ai cut-off usati per l'interpretazione del BDI-II, definiamo i seguenti *intervalli aperti a destra*:

- depressione minima: $[0, 13.5)$,
- depressione lieve: $[13.5, 19.5)$,
- depressione moderata: $[19.5, 28.5)$,
- depressione severa: $[28.5, 63)$.

Esaminando i dati, possiamo notare che 36 soggetti cadono nella prima classe, uno nella seconda classe, e così via. La distribuzione di frequenza della variabile `bdi2` è riportata nella tabella seguente. Questa distribuzione di frequenza ci aiuta a capire meglio cosa sta succedendo. Se consideriamo la frequenza relativa, ad esempio, possiamo notare che ci sono due valori maggiormente ricorrenti e tali valori corrispondono alle due classi più estreme. Questo ha senso nel caso presente, in quanto il campione esaminato da Zetsche et al. (2019) includeva due gruppi di soggetti: soggetti sani (con valori BDI-II bassi) e soggetti depressi (con valori BDI-II alti).² In una distribuzione di frequenza tali valori tipici vanno sotto il nome di *mode* della distribuzione.

²In una sezione successiva di questo capitolo discuteremo i principi che, secondo Edward Tufte, devono guidare la Data Science. Parlando delle rappresentazioni grafiche dei dati, Edward Tufte ci dice che la prima cosa da fare è “mostrare i dati”. Questa può sembrare una tautologia, considerato che questo è lo scopo della statistica descrittiva: trasformare i dati attraverso vari indici riassuntivi o rappresentazioni grafiche, in modo tale da renderli *comprensibili*. Tuttavia, spesso le tecniche statistiche vengono usate per *nascondere* e non per *mostrare* i dati. L'uso delle frequenze relative offre un chiaro esempio di questo. Di questi tempi capita spesso di incontrare, sulla stampa, notizie a proposito di un nuovo farmaco che, in una prova clinica, ha mostrato risultati incoraggianti che suggeriscono la sua efficacia come possibile trattamento del COVID-19. Alle volte i risultati della sperimentazione clinica sono riportati nei termini di una *frequenza relativa*. Ad esempio, potremmo leggere che l'uso del farmaco ha portato ad una riduzione del 21% dei ricoveri o dei decessi. Sembra tanto. Ma è necessario guardare i dati! Ovvero, molto spesso, quello che *non* viene riportato dai comunicati stampa. Infatti, una riduzione del 21% può corrispondere ad un cambiamento dal 5% al 4%. E una riduzione del 44% può corrispondere ad una differenza di 10 contro 18, o di 5 contro 9, o di 15 contro 27. In altri termini, una proporzione, anche grande, può corrispondere ad una differenza *assoluta* piuttosto piccola: un piccolo passo in avanti, ma non ad un balzo! Per questa ragione, per capire cosa i dati significano, è necessario guardare i dati da diversi punti di vista, utilizzando diverse statistiche descrittive, senza limitarci alla statistica descrittiva che racconta la storia che piace di più. Perché la scelta della statistica descrittiva da utilizzare per riassumere i dati dipende dagli scopi di chi esegue l'analisi statistica: il nostro scopo è quello di capire se il farmaco funziona; lo scopo delle compagnie farmaceutiche è quello di vendere il farmaco. Sono obiettivi molto diversi.

Limiti delle classi	Freq. ass.	Freq. rel.	Freq. ass. cum.	Freq. rel. cum.
[0, 13.5)	36	36/66	36	36/66
[13.5, 19.5)	1	1/66	37	37/66
[19.5, 28.5)	12	12/66	49	49/66
[28.5, 63)	17	17/66	66	66/66

Poniamoci ora il problema di costruire la tabella precedente utilizzando R. Per fare questo useremo la funzione `cut()` che divide il *campo di variazione* (ovvero, la differenza tra il valore massimo di una distribuzione ed il valore minimo) di una variabile continua x in intervalli e codifica ciascun valore x nei termini dell'intervallo a cui appartiene. Così facendo otteniamo:

```
bysubj$bdi_level <- cut(
  bysubj$bdi,
  breaks = c(0, 13.5, 19.5, 28.5, 63),
  include.lowest = TRUE,
  labels = c(
    "minimal", "mild", "moderate", "severe"
  )
)

bysubj$bdi_level
#> [1] moderate severe   severe   moderate severe   severe
#> [7] severe   severe   moderate severe   moderate mild
#> [13] severe   minimal minimal minimal severe   moderate
#> [19] minimal minimal minimal minimal minimal moderate
#> [25] minimal minimal minimal minimal minimal minimal
#> [31] minimal severe   minimal minimal severe   minimal
#> [37] moderate minimal minimal minimal severe   minimal
#> [43] minimal severe   severe   moderate severe   severe
#> [49] minimal moderate minimal moderate severe   moderate
#> [55] moderate minimal minimal minimal minimal minimal
#> [61] minimal minimal minimal minimal minimal minimal
#> Levels: minimal mild moderate severe
```

Possiamo ora usare la funzione `table()` la quale ritorna un elenco che associa la frequenza assoluta a ciascuna modalità della variabile – ovvero, ritorna la distribuzione di frequenza assoluta.

```
table(bysubj$bdi_level)
#>
#> minimal      mild moderate   severe
#>      36         1       12       17
```

La distribuzione di frequenza relativa si ottiene dividendo ciascuna frequenza assoluta per il numero totale di osservazioni:

```
table(bysubj$bdi_level) / sum(table(bysubj$bdi_level))
#>
#>    minimal      mild  moderate    severe
#> 0.54545455 0.01515152 0.18181818 0.25757576
```

I risultati sono riportati qui sotto:

Limiti delle classi	Frequenza assoluta	Frequenza relativa
[0, 13.5)	36	36/66
[13.5, 19.5)	1	1/66
[19.5, 28.5)	12	12/66
[28.5, 63]	17	17/66

1.5 Istogramma

I dati che sono stati sintetizzati in una distribuzione di frequenze possono essere rappresentati graficamente in un istogramma. Un istogramma si costruisce riportando sulle ascisse i limiti delle classi Δ_i e sulle ordinate i valori della funzione costante a tratti

$$\varphi_n(x) = \frac{f_i}{b_i - a_i}, \quad x \in \Delta_i, i = 1, \dots, m$$

che misura la *densità della frequenza relativa* della variabile X nella classe Δ_i , ovvero il rapporto fra la frequenza relativa f_i e l'ampiezza $(b_i - a_i)$ della classe. In questo modo il rettangolo dell'istogramma associato alla classe Δ_i avrà un'area proporzionale alla frequenza relativa f_i . Si noti che l'area totale dell'istogramma delle frequenze relative è data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli e quindi vale 1.0.

Poniamoci ora il problema di costruire in R un istogramma per i dati BDI-II di Zetsche et al. (2019). Per fare ciò è possibile usare le funzioni del pacchetto `ggplot2`, come indicato di seguito.

```
bysubj %>%
  ggplot(aes(x = bdi)) +
  geom_histogram(
    aes(y = ..density..),
    breaks = c(0, 13.5, 19.5, 28.5, 44.1)
    # il valore BDI-II massimo è 44
  ) +
  scale_x_continuous(
    breaks = c(0, 13.5, 19.5, 28.5, 44.1)
  ) +
  labs(
    x = "BDI-II",
    y = "Densità di frequenza"
  )
```

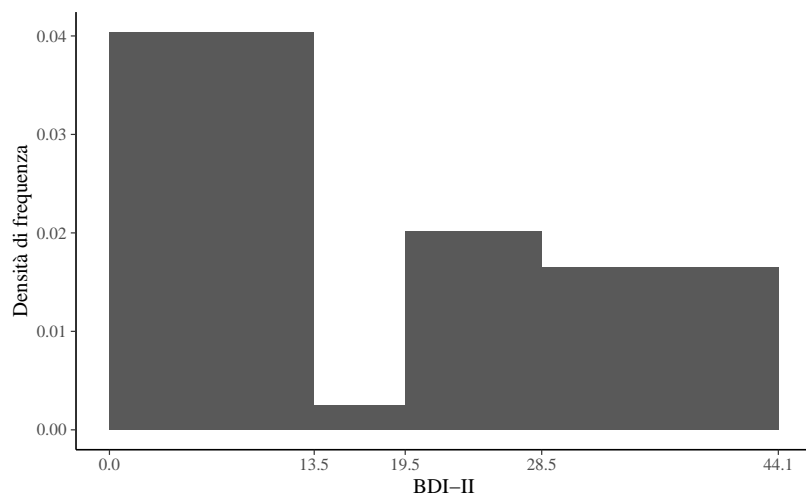


Figura 1.1: Istogramma per i valori BDI-II riportati da Zetsche et al. (2019).

Con i quattro intervalli individuati dai cut-off del BDI-II otteniamo la rappresentazione riportata nella figura 1.1. Per chiarezza, precisiamo che `ggplot()` utilizza intervalli aperti a destra.

Nel caso della prima barra dell'istogramma, l'ampiezza dell'intervallo è pari a 13.5 e l'area della barra (ovvero, la frequenza relativa) è uguale a $36/66$. Dunque l'altezza della barra è uguale a $(36/66)/13.5 = 0.040$. Lo stesso procedimento si applica per il calcolo dell'altezza degli altri rettangoli.

Anche se nel caso presente è sensato usare ampiezze diverse per gli intervalli delle classi, in generale gli istogrammi si costruiscono utilizzando intervalli riportati sulle ascisse con un'ampiezza uguale. Questo è il caso dell'istogramma della figura 1.2.

```
bysubj %>%
  ggplot(aes(x = bdi)) +
  geom_histogram(
    aes(y = ..density..),
    breaks = seq(0, 44.1, length.out = 7)
  ) +
  scale_x_continuous(
    breaks = c(0.00, 7.35, 14.70, 22.05,
              29.40, 36.75, 44.10)
  ) +
  labs(
    x = "BDI-II",
    y = "Densità di frequenza"
  )
)
```

1.6 Kernel density plot

Il confronto tra le figure 1.1 e 1.2 rende chiaro il limite dell'istogramma: il profilo dell'istogramma è arbitrario, in quanto dipende dal numero e dall'ampiezza

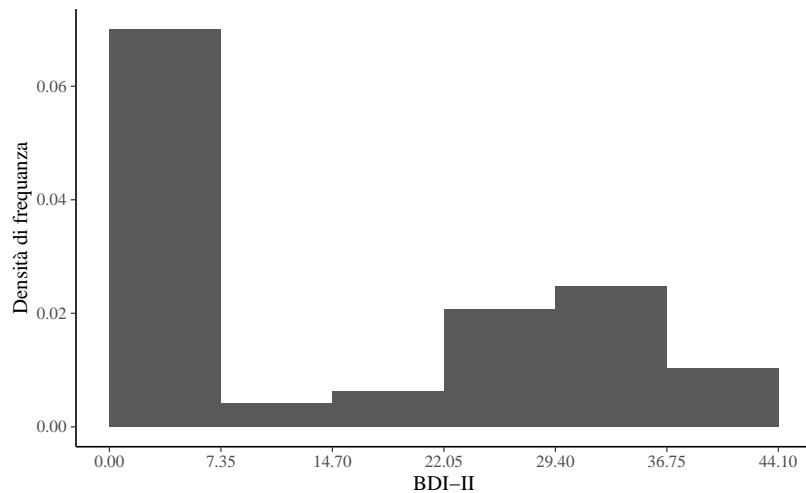


Figura 1.2: Una rappresentazione più comune per l'istogramma dei valori BDI-II nella quale gli intervalli delle classi hanno ampiezze uguali.

delle classi. Questo rende difficile l'interpretazione.

Il problema precedente può essere alleviato utilizzando una rappresentazione alternativa della distribuzione di frequenza, ovvero la stima della densità della frequenza dei dati (detta anche stima *kernel di densità*). Un modo semplice per pensare a tale rappresentazione, che in inglese va sotto il nome di *kernel density plot* (cioè i grafici basati sulla stima kernel di densità), è quello di immaginare un grande campione di dati, in modo che diventi possibile definire un enorme numero di classi di equivalenza di ampiezza molto piccola, le quali non risultino vuote. In tali circostanze, la funzione di densità empirica non è altro che il profilo *lisciato* dell'istogramma. La stessa idea si applica anche quando il campione è piccolo. In tali circostanze, invece di raccogliere le osservazioni in barre come negli istogrammi, lo stimatore di densità kernel colloca una piccola “gobba” (*bump*), determinata da un fattore K (kernel) e da un parametro h di smussamento detto ampiezza di banda (*bandwidth*), in corrispondenza di ogni osservazione, quindi somma le gobbe risultanti generando una curva smussata.

L'interpretazione che possiamo attribuire al kernel density plot è simile a quella che viene assegnata agli istogrammi: l'area sottesa al kernel density plot in un certo intervallo rappresenta la proporzione di casi della distribuzione che hanno valori compresi in quell'intervallo.

Esempio 1.1. Vediamo ora come rappresentare con R sia l'istogramma sia il kernel density plot di una variabile numerica impiegando i valori BDI-II di Zetsche et al. (2019).

```
bysubj %>%
  ggplot(aes(x = bdi)) +
  geom_histogram(
    aes(y = ..density..),
    breaks = seq(0, 44.1, length.out = 7)
  ) +
  geom_density(
```

```
aes(x = bdi),  
  adjust = 0.5,  
  size = 0.8,  
  #fill = colors[2],  
  alpha = 0.5  
) +  
labs(  
  x = "BDI-II",  
  y = "Densità di frequenza"  
)
```

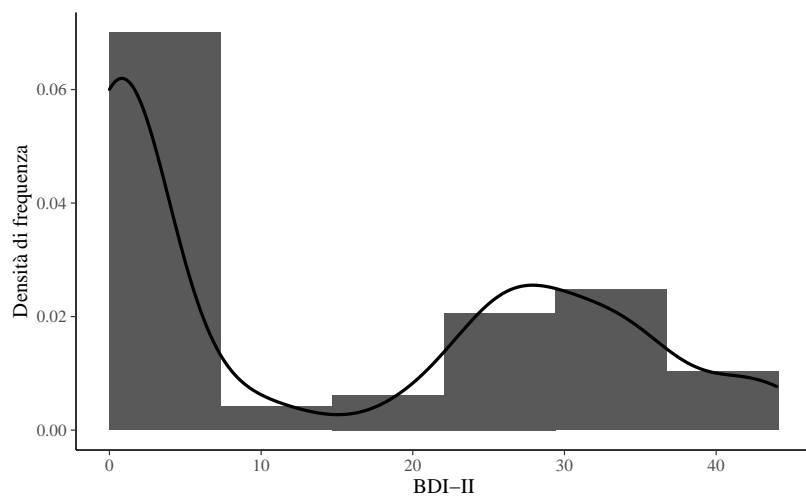


Figura 1.3: Kernel density plot e corrispondente istogramma per i valori BDI-II.

1.7 Forma di una distribuzione

In generale, la forma di una distribuzione descrive come i dati si distribuiscono intorno ai valori centrali. Distinguiamo tra distribuzioni simmetriche e asimmetriche, e tra distribuzioni unimodali o multimodali. Un'illustrazione grafica è fornita nella figura 1.4. Nel pannello 1 la distribuzione è unimodale con asimmetria negativa; nel pannello 2 la distribuzione è unimodale con asimmetria positiva; nel pannello 3 la distribuzione è simmetrica e unimodale; nel pannello 4 la distribuzione è bimodale.

Esempio 1.2. Il kernel density plot della figura 1.3 indica che la distribuzione dei valori del BDI-II nel campione di Zetsche et al. (2019) è bimodale. Ciò indica che le osservazioni della distribuzione si addensano in due cluster ben distinti: un gruppo di osservazioni tende ad avere valori BDI-II bassi, mentre l'altro gruppo tende ad avere BDI-II alti. Questi due cluster di osservazioni corrispondono al gruppo di controllo e al gruppo clinico nel campione di dati esaminato da Zetsche et al. (2019).

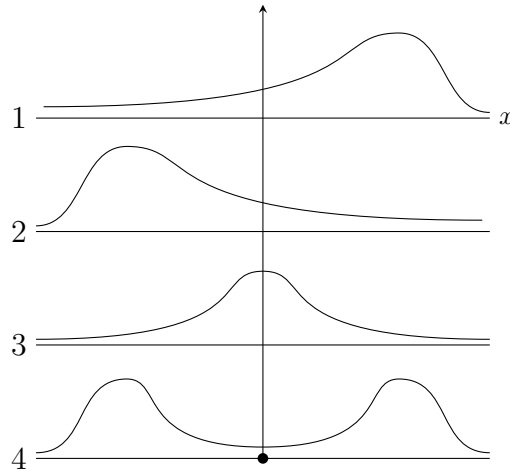


Figura 1.4: 1: *Asimmetria negativa*. 2: *Asimmetria positiva*. 3: *Distribuzione unimodale*. 4: *Distribuzione bimodale*.

1.8 Indici di posizione

Nuovamente, se preferite un'introduzione “soft” alla nozione di “tendenza centrale” di una distribuzione statistica, vi rimando nuovamente al [link](#) che ho già suggerito in precedenza.

Quantili

La descrizione della distribuzione dei valori BDI-II di Zetsche et al. (2019) può essere facilitata dalla determinazione di alcuni valori caratteristici che sintetizzano le informazioni contenute nella distribuzione di frequenze. Si dicono *quantili* (o *frattili*) quei valori caratteristici che hanno le seguenti proprietà. I *quartili* sono quei valori che ripartiscono i dati x_i in quattro parti ugualmente numerose (pari ciascuna al 25% del totale). Il primo quartile, q_1 , lascia alla sua sinistra il 25% del campione pensato come una fila ordinata (a destra quindi il 75%). Il secondo quartile q_2 lascia a sinistra il 50% del campione (a destra quindi il 50%). Esso viene anche chiamato *mediana*. Il terzo quartile lascia a sinistra il 75% del campione (a destra quindi il 25%). Secondo lo stesso criterio, si dicono *decili* i quantili di ordine p multiplo di 0.10 e *percentili* i quantili di ordine p multiplo di 0.01.

Come si calcolano i quantili? Consideriamo la definizione di quantile *non interpolato* di ordine p ($0 < p < 1$). Si procede innanzitutto ordinando i dati in ordine crescente, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ci sono poi due possibilità. Se il valore np non è intero, sia k l'intero tale che $k < np < k + 1$ – ovvero, la parte intera di np . Allora $q_p = x_{k+1}$. Se $np = k$ con k intero, allora $q_p = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$. Se vogliamo calcolare il primo quartile q_1 , ad esempio, utilizziamo $p = 0.25$. Dovendo calcolare gli altri quantili basta sostituire a p il valore appropriato [2].

Gli indici di posizione, tra le altre cose, hanno un ruolo importante, ovvero vengono utilizzati per creare una rappresentazione grafica di una distribuzione di valori che è molto popolare e può essere usata in alternativa ad un istogramma (in realtà vedremo poi come possa essere combinata con un istogramma). Tale rappresentazione va sotto il nome di box-plot.

Esempio 1.3. Per fare un esempio, consideriamo i nove soggetti del campione clinico di Zetsche et al. (2019) che hanno riportato un unico episodio di depressione maggiore. Per tali soggetti i valori ordinati del BDI-II (per semplicità li chiameremo x) sono i seguenti: 19, 26, 27, 28, 28, 33, 33, 41, 43. Per il calcolo del secondo quartile (non interpolato), ovvero per il calcolo della mediana, dobbiamo considerare la quantità $np = 9 \cdot 0.5 = 4.5$, non intero. Quindi, $q_1 = x_{4+1} = 27$. Per il calcolo del quantile (non interpolato) di ordine $p = 2/3$ dobbiamo considerare la quantità $np = 9 \cdot 2/3 = 6$, intero. Quindi, $q_{2/3} = \frac{1}{2}(x_6 + x_7) = \frac{1}{2}(33 + 33) = 33$.

Diagramma a scatola

Il *diagramma a scatola* (o box plot) è uno strumento grafico utile al fine di ottenere informazioni circa la dispersione e l'eventuale simmetria o asimmetria di una distribuzione. Per costruire un box-plot si rappresenta sul piano cartesiano un rettangolo (cioè la “scatola”) di altezza arbitraria la cui base corrisponde alla distanza interquartile ($IQR = q_{0.75} - q_{0.25}$). La linea interna alla scatola rappresenta la mediana $q_{0.5}$. Si tracciano poi ai lati della scatola due segmenti di retta i cui estremi sono detti “valore adiacente” inferiore e superiore. Il valore adiacente inferiore è il valore più piccolo tra le osservazioni che risulta maggiore o uguale al primo quartile meno la distanza corrispondente a 1.5 volte la distanza interquartile. Il valore adiacente superiore è il valore più grande tra le osservazioni che risulta minore o uguale a $Q_3 + 1.5 IQR$. I valori esterni ai valori adiacenti (chiamati *valori anomali*) vengono rappresentati individualmente nel box-plot per meglio evidenziarne la presenza e la posizione.

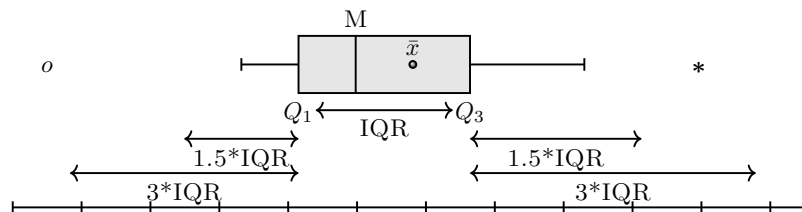


Figura 1.5: Box-plot: M è la mediana, \bar{x} è la media aritmetica e IQR è la distanza interquartile ($Q_3 - Q_1$).

Esempio 1.4. Consideriamo ora un caso concreto nel quale viene utilizzato un box-plot. Nel caso dei dati di Zetsche et al. (2019) ci chiediamo in che modo si differenziano le distribuzioni del BDI-II tra i due gruppi considerati, ovvero tra il gruppo dei pazienti e il gruppo di controllo. La figura 1.6 fornisce due rappresentazioni grafiche che possono essere utilizzate per rispondere a questa domanda.

```
library("patchwork")
bysubj <- df %>%
  group_by(esm_id, group) %>%
  summarise(
    bdi = mean(bdi),
    nr_of_episodes = mean(nr_of_episodes, na.rm = TRUE)
  ) %>%
```



```

na.omit()
p1 <- bysubj %>%
  ggplot(aes(x=group, y=bdi)) +
  geom_violin(trim=FALSE) +
  geom_dotplot(binaxis='y', stackdir='center', dotsize=0.7) +
  labs(
    x = "Gruppo",
    y = "BDI-II"
  )
p2 <- bysubj %>%
  ggplot(aes(x=group, y=bdi)) +
  geom_violin(trim=FALSE) +
  geom_boxplot(width=0.05) +
  labs(
    x = "Gruppo",
    y = "BDI-II"
  )
p1 + p2

```

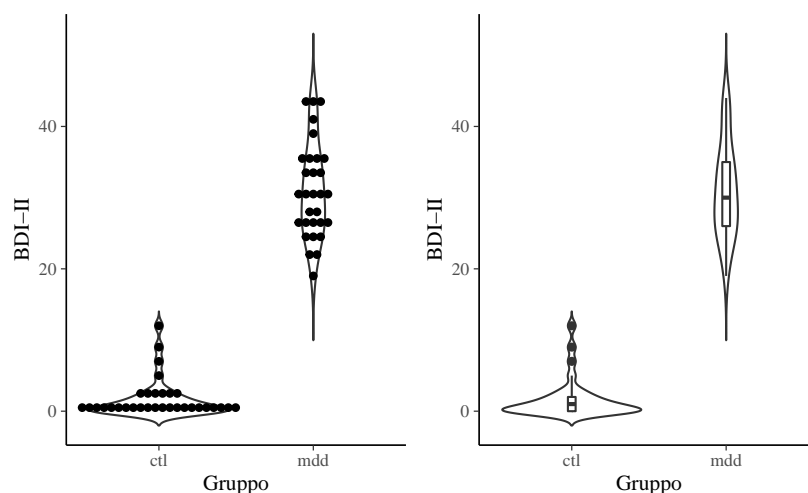


Figura 1.6: Due versioni di un violin plot per i valori BDI-II di ciascuno dei due gruppi di soggetti esaminati da @zetschefuture2019.

Nella figura 1.6 sinistra sono rappresentati i dati grezzi: questa è la pratica migliore quando il numero di osservazioni è piccolo. La linea curva che circonda (simmetricamente) le osservazioni è l'*istogramma liscio* (kernel density plot) che abbiamo descritto in precedenza. Nella figura 1.6 destra sono rappresentati gli stessi dati: il kernel density plot è lo stesso di prima, ma al suo interno è stato collocato un box-plot. Questa seconda rappresentazione è da preferire quando ci sono molte osservazioni e non è utile rappresentare singolarmente ciascun dato. Entrambe le rappresentazioni suggeriscono che la distribuzione dei dati è all'incirca simmetrica nel gruppo clinico (codificato come mdd). Il gruppo di controllo (ctl) mostra invece un'asimmetria positiva, con tre osservazioni evidenziate nel boxplot come "valori anomali", ovvero, valori che si discostano dalla mediana di una quantità maggiore di 1.5 IQR.

L'eccellenza grafica

Non c'è un modo “corretto” per rappresentare in forma grafica un insieme di dati. Ciascuno dei grafici che abbiamo discusso ha i suoi pregi e i suoi difetti. Un ricercatore che ha influenzato molto il modo in cui viene realizzata la visualizzazione dei dati scientifici è Edward Tufte, soprannominato dal New York Times il “Leonardo da Vinci dei dati.” Secondo Tufte, “l'eccellenza nella grafica consiste nel comunicare idee complesse in modo chiaro, preciso ed efficiente”. Nella visualizzazione delle informazioni, l’“eccellenza grafica” ha l'obiettivo di comunicare al lettore il maggior numero di idee nel minor tempo possibile, con meno inchiostro possibile, usando il minor spazio possibile. Secondo Tufte (2001), le rappresentazioni grafiche dovrebbero:

1. mostrare i dati;
2. indurre l'osservatore a riflettere sulla sostanza piuttosto che sulla progettazione grafica, o qualcos'altro;
3. evitare di distorcere quanto i dati stanno comunicando (“integrità grafica”);
4. presentare molte informazioni in forma succinta;
5. rivelare la coerenza tra le molte dimensioni dei dati;
6. incoraggiare l'osservatore a comparare differenti porzioni di dati;
7. rivelare i dati a diversi livelli di dettaglio, da una visione ampia alla struttura di base;
8. servire ad uno scopo preciso (descrizione, esplorazione, o la risposta a qualche domanda);
9. essere fortemente integrate con le descrizioni statistiche e verbali dei dati fornite nel testo.

In base a questi principi, la funzione di densità empirica fornisce una rappresentazione migliore dei dati di Zetsche et al. (2019) di quanto lo faccia un istogramma. Inoltre, se oltre al gruppo di appartenenza non ci sono altre dimensioni importanti da mettere in evidenza, allora la nostra scelta dovrebbe ricadere sul pannello di sinistra della figura 1.6. Il seguente [link](#) fornisce diverse interessanti illustrazioni dei principi elencati sopra.

1.9 Indici di tendenza centrale

L'analisi grafica, esaminata in precedenza, costituisce la base di partenza di qualsivoglia analisi quantitativa dei dati. Tramite l'analisi grafica possiamo capire alcune caratteristiche importanti di una distribuzione: per esempio, se è simmetrica o asimmetrica; oppure se è unimodale o multimodale. Successivamente, possiamo calcolare degli indici numerici che descrivono in modo sintetico le caratteristiche di base dei dati esaminati. Tra le misure di tendenza centrale, ovvero tra gli indici che forniscono un'idea dei valori attorno ai quali sono prevalentemente concentrati i dati di un campione, quella più comunemente usata è la media.

Media

Tutti conosciamo la media aritmetica di $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ovvero il numero reale \bar{x} definito da

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.1)$$

Nell'eq. (1.1) abbiamo usato la notazione delle sommatorie per descrivere una somma di valori. Questa notazione è molto usata in statistica e viene descritta in Appendice.

La media gode della seguente importante proprietà: la somma degli scarti tra ciascuna modalità x_i e la media aritmetica \bar{x} è nulla, cioè

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) &= \sum_i x_i - \sum_i \bar{x} \\ &= \sum_i x_i - n\bar{x} \\ &= \sum_i x_i - \sum_i x_i = 0. \end{aligned}$$

Ciò ci consente di pensare alla media come al baricentro della distribuzione.

Un'altra proprietà della media è la seguente. La somma dei quadrati degli scarti tra ciascuna modalità x_i e una costante arbitraria $a \in \mathfrak{R}$, cioè

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2,$$

è minima per $a = \bar{x}$.

Il concetto statistico di media ha suscitato molte battute. Per esempio, il fatto che, in media, ciascuno di noi ha un numero di gambe circa pari a 1.9999999. Oppure, il fatto che, in media, ciascuno di noi ha un testicolo. Ma la media ha altri problemi, oltre al fatto di ispirare battute simili alle precedenti. In particolare, dobbiamo notare che la media non è sempre l'indice che meglio rappresenta la tendenza centrale di una distribuzione. In particolare, ciò non accade quando la distribuzione è asimmetrica, o in presenza di valori anomali (*outlier*) – si veda il pannello di destra della figura 1.6. In tali circostanze, la tendenza centrale della distribuzione è meglio rappresentata dalla mediana o dalla media spuntata.

Esempio 1.5. Calcoliamo la media dei valori BDI-II per i due gruppi di soggetti di Zetsche et al. (2019).

```
bysubj %>%
  group_by(group) %>%
  summarise(
    avg_bdi = mean(bdi)
  )
```

```
#> # A tibble: 2 x 2
#>   group avg_bdi
#>   <chr>   <dbl>
#> 1 ctl     1.69
#> 2 mdd    30.9
```

Media spuntata

La *media spuntata* \bar{x}_t (*trimmed mean*) non è altro che la media dei dati calcolata considerando solo il 90% (o altra percentuale) dei dati centrali. Per calcolare \bar{x}_t si ordinano i dati secondo una sequenza crescente, $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$, per poi eliminare il primo 5% e l'ultimo 5% dei dati della serie così ordinata. La media spuntata è data dalla media aritmetica dei dati rimanenti.

Esempio 1.6. Calcoliamo la media spuntata dei valori BDI-II per i due gruppi di soggetti di Zetsche et al. (2019) escludendo il 10% dei valori più estremi in ciascun gruppo.

```
bysubj %>%
  group_by(group) %>%
  summarise(
    avg_trim_bdi = mean(bdi, trim = 0.1)
  )
#> # A tibble: 2 x 2
#>   group avg_trim_bdi
#>   <chr>   <dbl>
#> 1 ctl     1
#> 2 mdd    30.6
```

Moda e mediana

In precedenza abbiamo già incontrato altri due popolari indici di tendenza centrale: la *moda* (*Mo*), ovvero il valore centrale della classe con la frequenza massima (può succedere che una distribuzione abbia più mode; in tal caso si dice *multimodale* e questo operatore perde il suo significato di indice di tendenza centrale) e la *mediana* \tilde{x} .

Esempio 1.7. Calcoliamo i quantili di ordine 0.25, 0.5 e 0.75 dei valori BDI-II per i due gruppi di soggetti di Zetsche et al. (2019).

```
bysubj %>%
  group_by(group) %>%
  summarise(
    q25 = quantile(bdi, probs = 0.25),
    q50 = quantile(bdi, probs = 0.50),
    q75 = quantile(bdi, probs = 0.75)
  )
#> # A tibble: 2 x 4
#>   group  q25  q50  q75
#>   <chr> <dbl> <dbl> <dbl>
```

```
#>   <chr> <dbl> <dbl> <dbl>
#> 1 ctl      0      1      2
#> 2 mdd     26     30     35
```

Si noti che solitamente i software restituiscono un valore **interpolato** del p -esimo quantile q_p ($0 < p < 1$), il quale viene calcolato mediante specifiche procedure. Il risultato fornito dai software, dunque, non sarà identico a quello trovato utilizzando la definizione non interpolata di quantile che abbiamo presentato qui. Se, per qualche ragione, vogliamo conoscere l'algoritmo usato per la determinazione dei quantili interpolati, dobbiamo leggere la documentazione del software.

1.10 Indici di dispersione

Le medie e gli indici di posizione descritti in precedenza forniscono delle sintesi dei dati che mettono in evidenza la tendenza centrale delle osservazioni. Tali indici, tuttavia, non considerano un aspetto importante della distribuzione dei dati, ovvero la variabilità dei valori numerici della variabile statistica. È dunque necessario sintetizzare la distribuzione di una variabile statistica oltre che con le misure di posizione anche tramite l'utilizzo di indicatori che valutino la dispersione delle unità statistiche.

Anche in questo caso, un'introduzione "soft" è fornita nel [link](#).

Indici basati sull'ordinamento dei dati

È possibile calcolare degli indici di variabilità basati sull'ordinamento dei dati. L'indice più ovvio è l'intervallo di variazione, ovvero la distanza tra il valore massimo e il valore minimo di una distribuzione di modalità, mentre in precedenza abbiamo già incontrato la differenza interquartile. Questi due indici, però, hanno il limite di essere calcolati sulla base di due soli valori della distribuzione (x_{\max} e x_{\min} , oppure $x_{0.25}$ e $x_{0.75}$). Pertanto non utilizzano tutte le informazioni che sono disponibili. Inoltre, l'intervallo di variazione ha il limite di essere pesantemente influenzato dalla presenza di valori anomali.

Varianza

Dati i limiti delle statistiche precedenti è più comune misurare la variabilità di una variabile statistica come la dispersione dei dati attorno ad un indice di tendenza centrale. Infatti, la misura di variabilità di gran lunga più usata per valutare la variabilità di una variabile statistica è senza dubbio la varianza. La varianza

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.2)$$

è la media dei quadrati degli scarti $x_i - \bar{x}$ tra ogni valore e la media della distribuzione. La varianza è una misura di dispersione più complessa di quelle esaminate in precedenza. È appropriata solo nel caso di distribuzioni simmetriche e, anch'essa, è fortemente influenzata dai valori anomali. Inoltre, è espressa in

un'unità di misura che è il quadrato dell'unità di misura dei dati originari e quindi ad essa non può essere assegnata un'interpretazione intuitiva.

Esempio 1.8. Calcoliamo la varianza dei punteggi BDI-II nei due gruppi di soggetti di Zetsche et al. (2019).

```
bysubj %>%
  group_by(group) %>%
  summarise(
    variance = var(bdi)
  )
#> # A tibble: 2 x 2
#>   group variance
#>   <chr>    <dbl>
#> 1 ctl      8.03
#> 2 mdd     43.7
```

Deviazione standard

Per le ragioni espresse sopra, la misura più usata della dispersione di una distribuzione di dati è la *deviazione standard*, ovvero la radice quadrata della varianza. A differenza della varianza, dunque, la deviazione standard è espressa nella stessa unità di misura dei dati. Come nel caso della varianza, anche la deviazione standard s dovrebbe essere usata soltanto quando la media è adeguata per misurare il centro della distribuzione, ovvero, nel caso di distribuzioni simmetriche. Come nel caso della media \bar{x} , anche la deviazione standard è fortemente influenzata dai dati anomali (*outlier*), ovvero dalla presenza di uno o di pochi dati che sono molto più distanti dalla media rispetto agli altri valori della distribuzione. Quando tutte le osservazioni sono uguali, $s = 0$, altrimenti $s > 0$.

Alla deviazione standard può essere assegnata una semplice interpretazione: la deviazione standard è **simile** (ma non identica) allo scostamento medio semplice dalla media. La deviazione standard ci dice, dunque, quanto sono distanti, in media, le singole osservazioni dal centro della distribuzione.

Esempio 1.9. Calcoliamo la deviazione standard per il BDI-II dei due gruppi di soggetti di Zetsche et al. (2019).

```
bysubj %>%
  group_by(group) %>%
  summarise(
    stdev = sd(bdi)
  )
#> # A tibble: 2 x 2
#>   group stdev
#>   <chr> <dbl>
#> 1 ctl    2.83
#> 2 mdd    6.61
```

Deviazione mediana assoluta

Una misura robusta della dispersione statistica di un campione è la deviazione mediana assoluta (Median Absolute Deviation, MAD) definita come la mediana del valore assoluto delle deviazioni dei dati dalla mediana, ovvero:

$$\text{MAD} = \text{median}(|X_i - \text{median}(X)|)$$

Nel caso di una distribuzione dei dati unimodale simmetrica di forma campanulare (ovvero, normale) si ha che

$$\text{deviazione standard} \approx 1.4826 \text{ MAD}.$$

Pertanto, solitamente i software restituiscono il valore MAD moltiplicato per una tale costante.

Esempio 1.10. Calcoliamo il valore MAD per il BDI-II dei due gruppi di soggetti di Zetsche et al. (2019).

```
1.4826 * median(abs(bysubj$bdi - median(bysubj$bdi)))
#> [1] 15.5673
```

Oppure, per i due gruppi:

```
bysubj %>%
  group_by(group) %>%
  summarise(
    MAD = mad(bdi)
  )
#> # A tibble: 2 x 2
#>   group  MAD
#>   <chr> <dbl>
#> 1 ctl   1.48
#> 2 mdd   6.67
```

Indici di variabilità relativi

A volte può essere interessante effettuare un confronto fra due misure di variabilità di grandezze incommensurabili, ovvero di caratteri rilevati mediante differenti unità di misura. In questi casi, le misure di variabilità precedentemente descritte si rivelano inadeguate in quanto dipendono dall'unità di misura adottata. Diventa dunque necessario ricorrere a particolari numeri adimensionali detti indici relativi di variabilità. Il più importante di tali indici è il coefficiente di variazione, ovvero il numero puro

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

ottenuto dal rapporto tra la deviazione standard e la media dei dati. Un altro indice relativo di variabilità è la differenza interquartile rapportata al primo quartile oppure al terzo quartile oppure alla mediana, cioè:

$$\frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{x_{0.25}}, \quad \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{x_{0.75}}, \quad \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{x_{0.50}}.$$

1.11 Le relazioni tra variabili

Zetsche et al. (2019) hanno misurato il livello di depressione dei soggetti del loro esperimento utilizzando due scale psicometriche: il Beck Depression Inventory II (BDI-II) e la Center for Epidemiologic Studies Depression Scale (CES-D). Il BDI-II è uno strumento self-report che valuta la presenza e l'intensità di sintomi depressivi in pazienti adulti e adolescenti di almeno 13 anni di età con diagnosi psichiatrica mentre la CES-D è una scala self-report progettata per misurare i sintomi depressivi che sono stati vissuti nella settimana precedente nella popolazione generale, specialmente quella degli adolescenti/giovani adulti. Una domanda ovvia che ci può venire in mente è: quanto sono simili le misure ottenute mediante queste due scale?

È chiaro che i numeri prodotti dalle scale BDI-II e CES-D non possono essere identici, e questo per due motivi: (1) la presenza degli errori di misurazione e (2) l'unità di misura delle due variabili. L'errore di misurazione corrompe sempre, almeno in parte, qualunque operazione di misurazione. E questo è vero specialmente in psicologia dove l'*attendibilità* degli strumenti di misurazione è minore che in altre discipline (quali la fisica, ad esempio). Il secondo motivo per cui i valori delle scale BDI-II e CES-D non possono essere uguali è che l'unità di misura delle due scale è arbitraria. Infatti, qual è l'unità di misura della depressione? Chi può dirlo! Ma, al di là delle differenze derivanti dall'errore di misurazione e dalla differente unità di misura, ci aspettiamo che, se le due scale misurano entrambe lo stesso costrutto, allora i valori prodotti dalle due scale dovranno essere tra loro *linearmente associati*. Per capire cosa si intende con "associazione lineare" iniziamo a guardare i dati. Per fare questo utilizziamo una rappresentazione grafica che va sotto il nome di diagramma a dispersione.

Diagramma a dispersione

Il diagramma di dispersione è la rappresentazione grafica delle coppie di punti individuati da due variabili X e Y .

Il diagramma di dispersione per le variabili BDI-II e CES-D si ottiene ponendo, ad esempio, i valori BDI-II sull'asse delle ascisse e quelli del CES-D sull'asse delle ordinate. In tale grafico, fornito dalla figura 1.7, ciascun punto corrisponde ad un individuo del quale, nel caso presente, conosciamo il livello di depressione misurato dalle due scale psicometriche.

```
bysubj <- df %>%
  group_by(esm_id, group) %>%
  summarise(
    bdi = mean(bdi),
    cesd = mean(cesd_sum)
  ) %>%
  na.omit() %>%
  ungroup()
```

```
m_cesd <- mean(bysubj$cesd)
m_bdi <- mean(bysubj$bdi)
```



```

FONT_SIZE <- 10

bysubj %>%
  ggplot(
    aes(x=bdi, y=cesd, color=group)) +
  geom_point(size=1) +
  geom_hline(yintercept= m_cesd, linetype="dashed", color = "gray") +
  geom_vline(xintercept = m_bdi, linetype="dashed", color = "gray") +
  geom_text(x=-1, y=16, label="I", color = "gray", size=FONT_SIZE) +
  geom_text(x=0, y=46, label="IV", color = "gray", size=FONT_SIZE) +
  geom_text(x=18, y=46, label="III", color = "gray", size=FONT_SIZE) +
  geom_text(x=18, y=16, label="II", color = "gray", size=FONT_SIZE) +
  labs(
    x = "BDI-II",
    y = "CESD"
  ) +
  theme(legend.position="none")

```

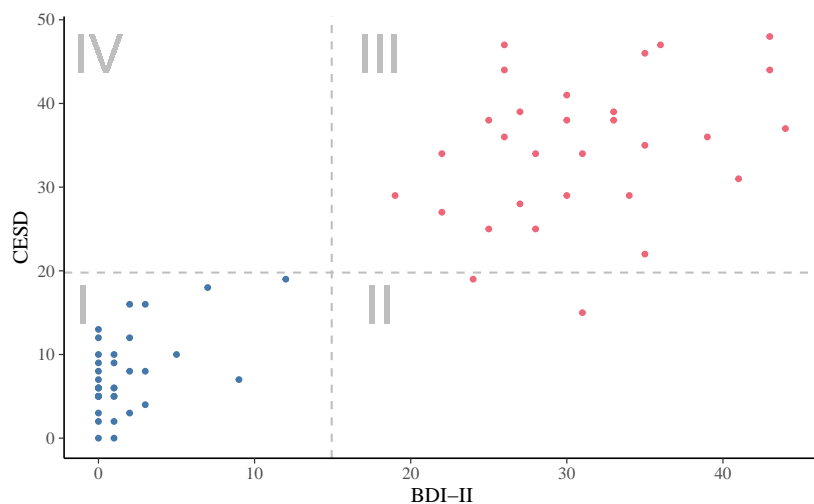


Figura 1.7: Associazione tra le variabili BDI-II e CES-D nello studio di @zetschefuture2019. In rosso sono rappresentate le osservazioni del gruppo di controllo; in blu quelle dei pazienti.

Dalla figura 1.7 possiamo vedere che i dati mostrano una tendenza a disporsi attorno ad una retta – nel gergo statistico, questo fatto viene espresso dicendo che i punteggi CES-D tendono ad essere linearmente associati ai punteggi BDI-II. È ovvio, tuttavia, che tale relazione lineare è lungi dall'essere perfetta – se fosse perfetta, tutti i punti del diagramma a dispersione si disporrebbero esattamente lungo una retta.

Covarianza

Il problema che ci poniamo è quello di trovare un indice numerico che descriva di quanto la nube di punti si discosta da una perfetta relazione lineare tra le due variabili. Per risolvere tale problema dobbiamo specificare un indice statistico

che descriva la direzione e la forza della relazione lineare tra le due variabili. Ci sono vari indici statistici che possiamo utilizzare a questo scopo.

Iniziamo a considerare il più importante di tali indici, chiamato *covarianza*. In realtà la definizione di questo indice non ci sorprenderà più di tanto in quanto, in una forma solo apparentemente diversa, l'abbiamo già incontrato in precedenza. Ci ricordiamo infatti che la varianza di una generica variabile X è definita come la media degli scarti quadratici di ciascuna osservazione dalla media:

$$S_{XX} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X}). \quad (1.3)$$

Infatti, la varianza viene talvolta descritta come la “covarianza di una variabile con sé stessa”.

Adesso facciamo un passo ulteriore. Invece di valutare la dispersione di una sola variabile, chiediamoci come due variabili X e Y “variano insieme” (co-variano). È facile capire come una risposta a tale domanda possa essere fornita da una semplice trasformazione della formula precedente che diventa:

$$S_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}). \quad (1.4)$$

L'eq. (1.4) ci fornisce dunque la definizione della covarianza.

Per capire il significato dell'eq. (1.4), supponiamo di dividere il grafico della figura 1.7 in quattro quadranti definiti da una retta verticale passante per la media dei valori BDI-II e da una retta orizzontale passante per la media dei valori CES-D. Numeriamo i quadranti partendo da quello in basso a sinistra e muovendoci in senso antiorario.

Se prevalgono punti nel I e III quadrante, allora la nuvola di punti avrà un andamento crescente (per cui a valori bassi di X tendono ad associarsi valori bassi di Y e a valori elevati di X tendono ad associarsi valori elevati di Y) e la covarianza segno positivo. Mentre se prevalgono punti nel II e IV quadrante la nuvola di punti avrà un andamento decrescente (per cui a valori bassi di X tendono ad associarsi valori elevati di Y e a valori elevati di X tendono ad associarsi valori bassi di Y) e la covarianza segno negativo. Dunque, il segno della covarianza ci informa sulla direzione della relazione lineare tra due variabili: l'associazione lineare si dice positiva se la covarianza è positiva, negativa se la covarianza è negativa.

Il segno della covarianza ci informa sulla direzione della relazione, ma invece il valore assoluto della covarianza ci dice ben poco. Esso, infatti, dipende dall'unità di misura delle variabili. Nel caso presente questo concetto è difficile da comprendere, dato che le due variabili in esame non hanno un'unità di misura (ovvero, hanno un'unità di misura arbitraria e priva di significato). Ma quest'idea diventa chiara se pensiamo alla relazione lineare tra l'altezza e il peso delle persone, ad esempio. La covarianza tra queste due quantità è certamente positiva, ma il valore assoluto della covarianza diventa più grande se l'altezza viene misurata in millimetri e il peso in grammi, e diventa più piccolo l'altezza viene misurata in metri e il peso in chilogrammi. Dunque, il valore della covarianza cambia al mutare dell'unità di misura delle variabili anche se l'associazione tra le variabili resta costante.

Correlazione

Dato che il valore assoluto della covarianza è di difficile interpretazione – in pratica, non viene mai interpretato – è necessario trasformare la covarianza in modo tale da renderla immune alle trasformazioni dell'unità di misura delle variabili. Questa operazione si dice *standardizzazione* e corrisponde alla divisione della covarianza per le deviazioni standard (s_X , s_Y) delle due variabili:

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{s_X s_Y}. \quad (1.5)$$

La quantità che si ottiene in questo modo viene chiamata *correlazione* di Bravais-Pearson (dal nome degli autori che, indipendentemente l'uno dall'altro, la hanno introdotta).

Il coefficiente di correlazione ha le seguenti proprietà:

- ha lo stesso segno della covarianza, dato che si ottiene dividendo la covarianza per due numeri positivi;
- è un numero puro, cioè non dipende dall'unità di misura delle variabili;
- assume valori compresi tra -1 e +1.

Ad esso possiamo assegnare la seguente interpretazione:

1. $r_{XY} = -1 \rightarrow$ perfetta relazione negativa: tutti i punti si trovano esattamente su una retta con pendenza negativa (dal quadrante in alto a sinistra al quadrante in basso a destra);
2. $r_{XY} = +1 \rightarrow$ perfetta relazione positiva: tutti i punti si trovano esattamente su una retta con pendenza positiva (dal quadrante in basso a sinistra al quadrante in alto a destra);
3. $-1 < r_{XY} < +1 \rightarrow$ presenza di una relazione lineare di intensità diversa;
4. $r_{XY} = 0 \rightarrow$ assenza di relazione lineare tra X e Y .

Esempio 1.11. Per i dati della figura 1.7, la covarianza è 207.426. Il segno positivo della covarianza ci dice che tra le due variabili c'è un'associazione lineare positiva. Per capire qual è l'intensità della relazione lineare tra le due variabili calcoliamo la correlazione. Essendo le deviazioni standard del BDI-II e del CES-D rispettivamente uguali a 15.37 e 14.93, la correlazione diventa uguale a $\frac{207.426}{15.38 \cdot 14.93} = 0.904$. Tale valore è prossimo a 1.0, il che vuol dire che i punti del diagramma a dispersione non si discostano troppo da una retta con una pendenza positiva.

1.12 Correlazione e causazione

Facendo riferimento nuovamente alla figura 1.7, possiamo dire che, in molte applicazioni (ma non nel caso presente!) l'asse x rappresenta una quantità nota come *variabile indipendente* e l'interesse si concentra sulla sua influenza sulla *variabile dipendente* tracciata sull'asse y . Ciò presuppone però che sia nota la direzione in cui l'influenza causale potrebbe risiedere. È importante tenere bene a mente che la correlazione è soltanto un indice descrittivo della relazione lineare

tra due variabili e in nessun caso può essere usata per inferire alcunché sulle relazioni **causali** che legano le variabili. È ben nota l'espressione: "correlazione non significa causazione".

Di opinione diversa era invece Karl Pearson (1911), il quale ha affermato:

Quanto spesso, quando è stato osservato un nuovo fenomeno, sentiamo che viene posta la domanda: 'qual è la sua causa?'. Questa è una domanda a cui potrebbe essere assolutamente impossibile rispondere. Invece, può essere più facile rispondere alla domanda: 'in che misura altri fenomeni sono associati con esso?'. Dalla risposta a questa seconda domanda possono risultare molte preziose conoscenze.

Che alla seconda domanda posta da Pearson sia facile rispondere è indubbio. Che la nostra comprensione di un fenomeno possa aumentare sulla base delle informazioni fornite unicamente dalle correlazioni, invece, è molto dubbio e quasi certamente falso.

Usi della correlazione

Anche se non può essere usata per studiare le relazioni causali, la correlazione viene usata per molti altri scopi tra i quali, per esempio, quello di misurare la *validità concorrente* di un test psicologico. Se un test psicologico misura effettivamente ciò che ci si aspetta che misuri (nel caso dell'esempio presente, la depressione), allora dovremo aspettarci che fornisca una correlazione alta con risultati di altri test che misurano lo stesso costrutto – come nel caso dei dati di (Zetsche et al., 2019). Un'altra proprietà desiderabile di un test psicometrico è la *validità divergente*: i risultati di test psicometrici che misurano costrutti diversi dovrebbero essere poco associati tra loro. In altre parole, in questo secondo caso dovremmo aspettarci che la correlazione sia bassa.

Correlazione di Spearman

Una misura alternativa della relazione lineare tra due variabili è fornita dal coefficiente di correlazione di Spearman e dipende soltanto dalla relazione d'ordine dei dati, non dagli specifici valori dei dati. Tale misura di associazione è appropriata quando, del fenomeno in esame, gli psicologi sono stati in grado di misurare soltanto le relazioni d'ordine tra le diverse modalità della risposta dei soggetti, non l'intensità della risposta. Le variabili psicologiche che hanno questa proprietà si dicono *ordinali*. Nel caso di variabili ordinali, non è possibile sintetizzare i dati mediante le statistiche descrittive che abbiamo introdotto in questo capitolo, quali ad esempio la media e la varianza, ma è invece solo possibile riassumere i dati mediante una distribuzione di frequenze per le varie modalità della risposta.

Correlazione nulla

Un ultimo aspetto da mettere in evidenza a proposito della correlazione riguarda il fatto che la correlazione descrive la direzione e l'intensità della relazione lineare tra due variabili. Relazioni non lineari tra le variabili, anche se sono molto forti, non vengono catturate dalla correlazione. È importante rendersi conto

che una correlazione pari a zero non significa che non c'è relazione tra le due variabili, ma solo che tra esse non c'è una relazione *lineare*.

Esempio 1.12. Un esempio di correlazione nulla in presenza di una chiara relazione (non lineare) tra le variabili è fornito dalla figura 1.8.

```
library("datasauRus")
slant <- ggplot(
  datasaurus_dozen_wide,
  aes(x=slant_down_x,y=slant_down_y),
  colour=dataset
)
slant <- slant +
  geom_point()
slant <- slant +
  theme_void()
slant <- slant +
  theme(legend.position = "none",
        panel.border = element_rect(colour = "black", fill=NA, size = 1),
        plot.margin = margin(0,2,0,2), aspect.ratio = 1)

dino <- ggplot(
  datasaurus_dozen_wide,
  aes(x=dino_x,y=dino_y),
  colour=dataset
) +
  geom_point()

dino <- dino +theme_void()
dino <- dino +
  theme(legend.position = "none",
        panel.border = element_rect(colour = "black", fill=NA, size = 1),
        plot.margin = margin(0,2,0,2), aspect.ratio = 1)

slant + dino
```

Considerazioni conclusive

La prima fase dell'analisi dei dati ci porta a riassumere i dati mediante gli strumenti della statistica descrittiva. Le tipiche domande che vengono affrontate in questa fase sono: qual è la distribuzione delle variabili di interesse? Quali relazioni a coppie si possono osservare nel campione? Ci sono delle osservazioni 'anomale', ovvero estremamente discrepanti rispetto alle altre, sia quando si esaminano le statistiche descrittive univariate (ovvero, quelle che riguardano le caratteristiche di una variabile presa singolarmente), sia quando vengono esaminate le statistiche bivariate (ovvero, le statistiche che descrivono l'associazione tra le variabili)? È importante avere ben chiare le idee su questi punti prima



Figura 1.8: Due insiemi di dati (fittizi) per i quali i coefficienti di correlazione di Pearson sono entrambi 0. Ma questo non significa che non vi sia alcuna relazione tra le variabili.

di procedere con qualsiasi procedura statistica di tipo inferenziale. Per rispondere alle domande che abbiamo elencato sopra, ed ad altre simili, è molto utile procedere con delle rappresentazioni grafiche dei dati. È chiaro che, quando disponiamo di grandi moli di dati (come è sempre il caso in psicologia), le operazioni descritte sopra devono essere svolte mediante un software statistico.

Bibliografia

- Burger, E. B. & Starbird, M. (2012). *The 5 elements of effective thinking*. Princeton University Press. (Cit. a p. [vii](#)).
- Horn, S. & Loewenstein, G. (2021). Underestimating Learning by Doing. *Available at SSRN 3941441* (cit. a p. [viii](#)).
- Tufte, E. R. (2001). *The visual display of quantitative information*. Graphics press Cheshire, CT. (Cit. a p. [16](#)).
- Zetsche, U., Bürkner, P.-C. & Renneberg, B. (2019). Future expectations in clinical depression: Biased or realistic? *Journal of Abnormal Psychology*, 128(7), 678–688 (cit. alle pp. [5](#), [7](#), [9](#), [11–14](#), [16–18](#), [20–22](#), [26](#)).

Elenco delle figure

1.1	Istogramma per i valori BDI-II riportati da Zetsche et al. (2019). . .	10
1.2	Una rappresentazione più comune per l'istogramma dei valori BDI-II nella quale gli intervalli delle classi hanno ampiezze uguali.	11
1.3	Kernel density plot e corrispondente istogramma per i valori BDI-II.	12
1.4	1: Asimmetria negativa. 2: Asimmetria positiva. 3: Distribuzione unimodale. 4: Distribuzione bimodale.	13
1.5	Box-plot: M è la mediana, \bar{x} è la media aritmetica e IQR è la distanza interquartile ($Q_3 - Q_1$).	14
1.6	Due versioni di un violin plot per i valori BDI-II di ciascuno dei due gruppi di soggetti esaminati da @zetschefuture2019.	15
1.7	Associazione tra le variabili BDI-II e CES-D nello studio di @zetschefuture2019. In rosso sono rappresentate le osservazioni del gruppo di controllo; in blu quelle dei pazienti.	23
1.8	Due insiemi di dati (fittizi) per i quali i coefficienti di correlazione di Pearson sono entrambi 0. Ma questo non significa che non vi sia alcuna relazione tra le variabili.	28

Abstract This document contains the material of the lessons of Psicometria B000286 (2021/2022) aimed at students of the first year of the Degree Course in Psychological Sciences and Techniques of the University of Florence, Italy.

Keywords Data science, Bayesian statistics.