

MO824A/MC859A – Tópicos em Otimização Combinatória
Segundo semestre de 2025

Atividade 5

Entrega: 24 de outubro de 2025 até meio-dia

Prof. Fábio Luiz Usberti (fusberty@ic.unicamp.br)

Prof. Celso Cavellucci (celsocv@ic.unicamp.br)

1 Objetivo

O objetivo desta atividade encontra-se na análise comparativa de três metaheurísticas (GRASP, Busca Tabú e Algoritmo Genético) e de um modelo PLI para o problema de maximização de uma função binária quadrática (“quadratic binary function” – QBF) com restrições de cobertura.

2 Problema MAX-QBF

Uma função binária quadrática (QBF) é uma função $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser expressa como uma soma de termos quadráticos:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) são os coeficientes da função f . Em notação matricial, uma QBF pode ser expressa como:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & x_1 & (2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 4x_3^2 \end{aligned}$$

O problema de maximização de uma função binária quadrática (MAX-QBF) pode ser expresso como:

$$Z = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) ,$$

O MAX-QBF é um problema NP-difícil [1], mesmo que nenhuma restrição adicional seja imposta sobre as variáveis binárias \mathbf{x} . No entanto, se os coeficientes a_{ij} forem todos não-negativos, o problema torna-se trivial, uma vez que $x_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) é uma solução ótima.

3 Problema MAX-QBF com Set Cover

No problema MAX-SC-QBF, desejamos maximizar uma função binária quadrática sujeita a restrições de cobertura de conjuntos, onde o universo a ser coberto é o próprio conjunto de variáveis da QBF.

Seja $N = \{1, \dots, n\}$ o conjunto de variáveis da QBF. Seja $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ uma coleção de subconjuntos $S_i \subseteq N$, representando as variáveis que o subconjunto i cobre. Cada subconjunto i está associado a uma variável binária x_i indicando sua seleção. Para cada par (i, j) de subconjuntos, temos um coeficiente $a_{ij} \in \mathbb{R}$ que representa o ganho (positivo ou negativo) por selecionar ambos simultaneamente.

Nosso objetivo é selecionar subconjuntos de forma que:

- todas as variáveis da QBF sejam cobertas, ou seja, para todo $k \in N$, exista ao menos um S_i tal que $k \in S_i$ e $x_i = 1$;
- seja maximizado o ganho quadrático total derivado das interações entre subconjuntos selecionados.

4 Requisitos da atividade

Esta atividade consiste na análise comparativa de desempenho entre as metaheurísticas GRASP, Busca Tabu e Algoritmo Genético e um modelo PLI. Para a análise deverão ser utilizados gráficos *ttt-plots* e *performance profiles*. As quatro metodologias que deverão ser comparadas são:

- *PLI*: modelo PLI desenvolvido na Atividade 1.
- *GRASP*: metaheurística GRASP desenvolvida na Atividade 2.
- *Tabu*: metaheurística Busca Tabu desenvolvida na Atividade 3.
- *AG*: metaheurística Algoritmo Genético desenvolvida na Atividade 4.

Para cada metaheurística, escolha a versão que você considera a mais competitiva para a realização da análise comparativa com as demais metaheurísticas.

O relatório deve apresentar:

- Descrição do modelo PLI e das metodologias utilizadas na avaliação comparativa. Em particular, descreva os métodos construtivos, evolutivos e de diversificação-intensificação adotados, e os valores utilizados para os parâmetros.
- Descrição dos conceitos envolvidos em um gráfico *ttt-plot* e a metodologia de construção desse gráfico.
- Gráficos *ttt-plot* comparando somente as metaheurísticas (excluir o modelo PLI nesse gráfico). Escolha pelo menos três pares (instância, valor alvo) e, para cada par, realize pelo menos 50 execuções por metaheurística, cada execução limitada a 10 minutos e iniciada com uma semente aleatória distinta.
- Discussão sobre o desempenho das metaheurísticas com base nos gráficos *ttt-plot*.
- Descrição dos conceitos envolvidos em um gráfico *performance profile* e a metodologia de construção desse gráfico.
- Gráfico *performance profile* comparando as metaheurísticas e o modelo PLI sobre um conjunto de 15 instâncias do MAX-SC-QBF, utilizando como métrica de comparação o valor da melhor solução obtida.

- Discussão sobre o desempenho das metodologias com base no gráfico *performance profile*.

O relatório deve apresentar uma tabela com os resultados dos testes computacionais comparando as metodologias. A tabela deve conter para cada instância a melhor solução obtida por cada metodologia.

Esta atividade exige a entrega de um relatório de aproximadamente dez páginas. Todos os resultados deverão ser analisados e discutidos. Suas conclusões devem estar sustentadas pelos resultados.

5 Instâncias

Testes computacionais devem ser realizados com um conjunto de pelo menos 15 instâncias que foram desenvolvidas na Atividade 1. Adote um tempo de execução para cada instância de pelo menos 30 minutos para a elaboração do *performance profile*.

6 Referências

1. Kochenberger, et al. The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey. **J Comb Optim** (2014). 28:58–81. DOI:10.1007/s10878-014-9734-0.
2. Michel Gendreau e Jean-Yves Potvin. Tabu Search. In: M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), **Handbook of Metaheuristics**, International Series in Operations Research & Management Science 146, DOI: 10.1007/978-1-4419-1665-5.
3. Manuel López-Ibáñez, Jérémie Dubois-Lacoste, Leslie Pérez Cáceres, Thomas Stützle, and Mauro Birattari. The irace package: Iterated Racing for Automatic Algorithm Configuration. **Operations Research Perspectives**, 3:43?58, 2016.
4. R. M. Aiex, M. G. C. Resende, and C. C. Ribeiro. ttplots - a perl program to create time-to-target plots. AT&T Labs Research Technical Report (TD-6HT7EL), 2005.
5. E. D. Dolan and J. J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. **Mathematical Programming**, 91(2), 2002. DOI: 10.1007/s101070100263.