

# 程式人十分鐘系列



對程式人有用的

## 幾何學

陳鍾誠

金門大學資訊工程系

2018 年 6 月 20 日

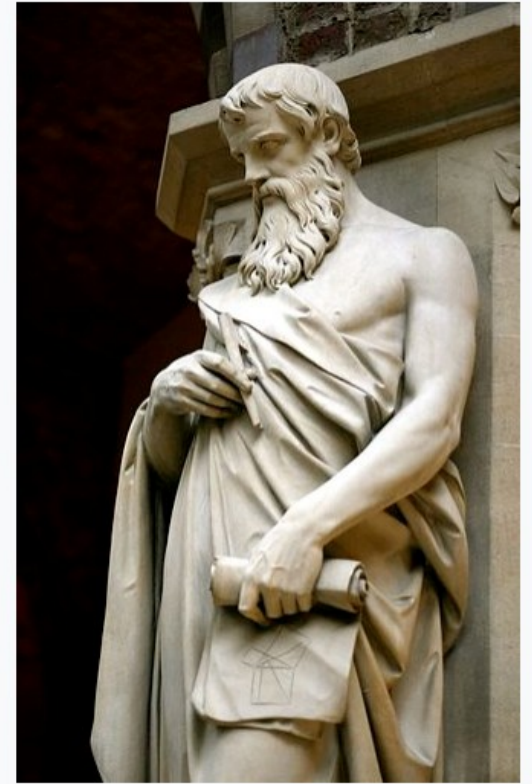
# 兩千多年前

- 在西元前三百年左右

# 希臘時代的歐幾里得

- 總結了當時的幾何學知識  
寫下了《幾何原本》

歐幾里得



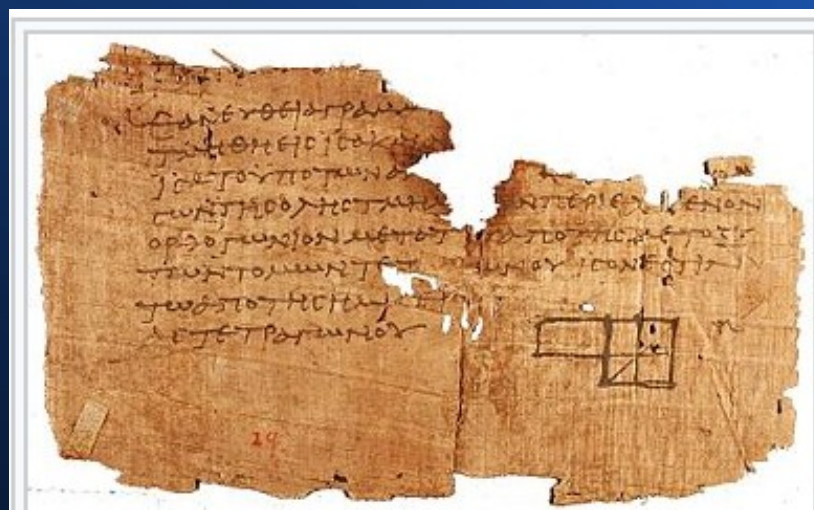
出生	公元前325年
逝世	公元前265年(59-60歲)
居住地	埃及的亞歷山卓
知名於	歐幾里得幾何 幾何原本
	科學生涯
研究領域	數學

# 將近兩千年後

- 歐洲人早已遺忘了這些知識

# 但這些知識

- 卻在穆斯林人的手上傳承

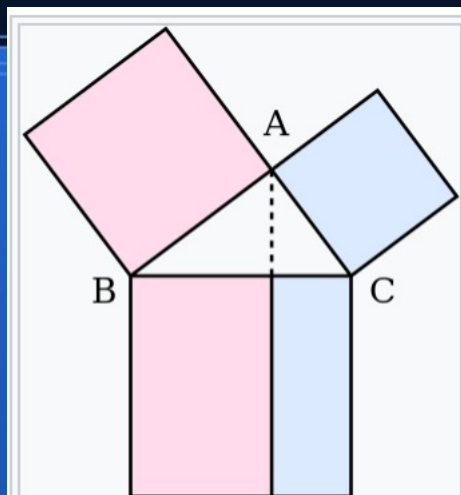


俄克喜林庫斯29號莎草紙，現存最早的  
幾何原本殘頁之一，在俄克喜林庫斯發現的，其年代約為西元後100年。插圖和第2卷的命題5相同<sup>[16]</sup>

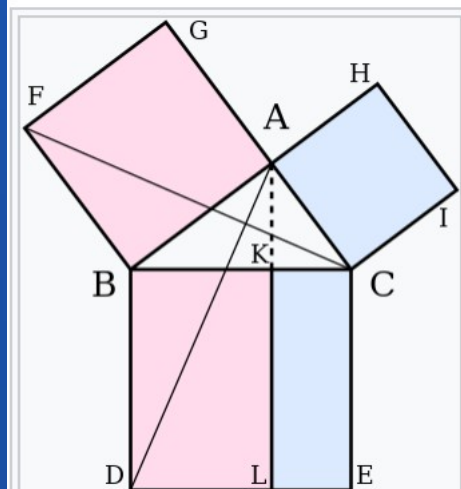
# 在 15 世紀的文藝復興時期

# 這些知識又傳回了歐洲

1. 設 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，其直角為 $CAB$ 。
2. 其邊為 $BC$ 、 $AB$ 、和 $CA$ ，依序繪成四方形 $CBDE$ 、 $BAGF$ 和 $ACIH$ 。
3. 畫出過點 $A$ 之 $BD$ 、 $CE$ 的平行線。此線將分別與 $BC$ 和 $DE$ 直角相交於 $K$ 、 $L$ 。
4. 分別連接 $CF$ 、 $AD$ ，形成兩個三角形 $BCF$ 、 $BDA$ 。
5.  $\angle CAB$ 和 $\angle BAG$ 都是直角，因此 $C$ 、 $A$ 和 $G$ 都是共線的，同理可證 $B$ 、 $A$ 和 $H$ 共線。
6.  $\angle CBD$ 和 $\angle FBA$ 皆為直角，所以 $\angle ABD$ 全等於 $\angle FBC$ 。
7. 因為 $AB$ 和 $BD$ 分別等於 $FB$ 和 $BC$ ，所以 $\triangle ABD$ 必須相等於 $\triangle FBC$ 。
8. 因為 $A$ 與 $K$ 和 $L$ 在同一直線上，所以四方形 $BDLK$ 必須二倍面積於 $\triangle ABD$ 。
9. 因為 $C$ 、 $A$ 和 $G$ 在同一直線上，所以正方形 $BAGF$ 必須二倍面積於 $\triangle FBC$ 。
10. 因此四邊形 $BDLK$ 必須和 $BAGF$ 有相同的面積 $=AB^2$ 。
11. 同理可證，四邊形 $CKLE$ 必須有相同的面積 $ACIH = AC^2$ 。
12. 把這兩個結果相加， $AB^2 + AC^2 = BD \times BK + KL \times KC$
13. 由於 $BD = KL$ ， $BD \times BK + KL \times KC = BD(BK + KC) = BD \times BC$
14. 由於 $CBDE$ 是個正方形，因此 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ 。



《幾何原本》中的證明



證明輔助圖2





# 1637 年

- 笛卡兒在《方法論》的附錄中提出了《解析幾何》的基本方法。
- 以哲學觀點寫成的這部法語著作為後來牛頓和萊布尼茨各自提出微積分學提供了基礎。



# 問題是

- 甚麼是《歐氏幾何》？
- 甚麼又是《解析幾何》呢？

# 其實

- 中學的時候我們都學過
- 只不過搞不清楚誰是誰？

# 那些有用座標的

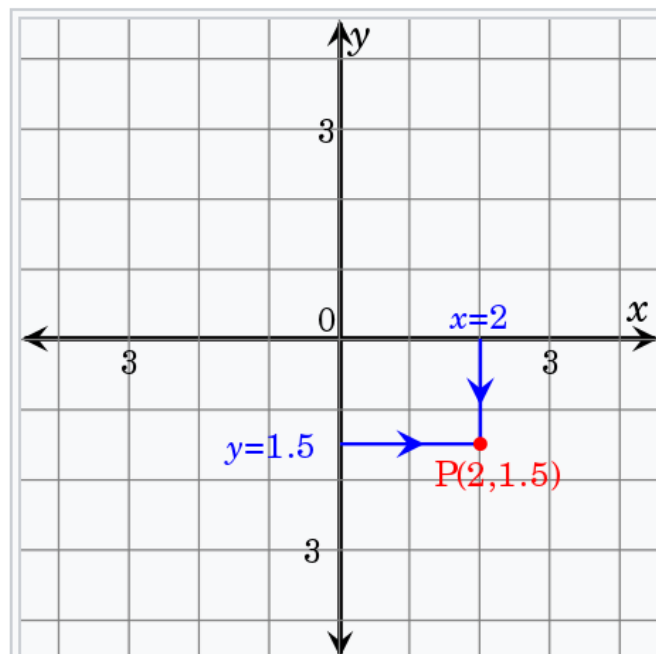
- 就是笛卡兒的解析幾何

解析幾何（英語：**Analytic geometry**），又稱為座標幾何（英語：**Coordinate geometry**）或卡氏幾何（英語：**Cartesian geometry**），早先被叫作笛卡兒幾何，是一種藉助於解析式進行圖形研究的幾何學分支。解析幾何通常使用二維的平面直角座標系研究直線、圓、圓錐曲線、擺線、星形線等各種一般平面曲線，使用三維的空間直角座標系來研究平面、球等各種一般空間曲面，同時研究它們的方程式，並定義一些圖形的概念和參數。

在中學課本中，解析幾何被簡單地解釋為：採用數值的方法來定義幾何形狀，並從中提取數值的信息。然而，這種數值的輸出可能是一個方程式或者是一種幾何形狀。

1637年，笛卡兒在《方法論》的附錄「幾何」中提出了解析幾何的基本方法。以哲學觀點寫成的這部法語著作為後來牛頓和萊布尼茨各自提出微積分學提供了基礎。

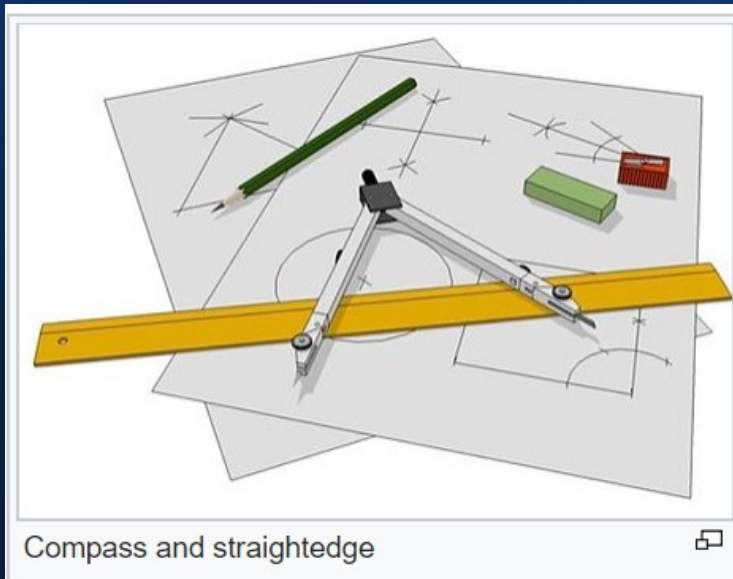
對代數幾何學者來說，解析幾何也指（實或者複）流形，或者更廣義地通過一些複變數（或實變數）的解析函數為零而定義的解析空間理論。這一理論非常接近代數幾何，特別是通過讓-皮埃爾·塞爾在《代數幾何和解析幾何》領域的工作。這是一個比代數幾何更大的領域，不過也可以使用類似的方法。



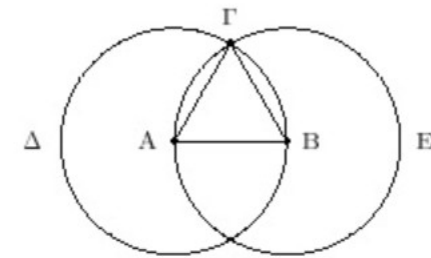
解析幾何

# 而只用圓規和直尺的

- 就是《歐氏幾何》



Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τριγώνων ἰσοπλευρον συστήσασθαι.  
Ἐστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB.  
Δείδῃ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τριγώνων ἰσοπλευρον συστήσασθαι.



Κέντρῳ μὲν τῷ A διαστήματι δὲ τῷ AB κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεία ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

Ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσσεται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τριγώνων ἰσοπλευρον συνέσσεται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

歐幾里得證明的要素，由於一個正三角形的存在必須包含每個線段，包含 ABΓ 等邊三角形的構成，是由 A 和 B 兩點，畫出圓 Δ 與圓 E，並且交叉於第三點 Γ 上。

# 笛卡兒引入的座標

- 看來只是一小步 ...
- 但對學術世界卻有強大的影響

# 座標概念

- 導致《代數》與《幾何》  
兩個領域的融合

# 於是

- 點、線、面、體等幾何形狀
- 都可以用《方程式》表達了



# 然後

- 為了表達《曲線和曲面》，  
於是微積分被發明出來了

# 於是

- 數學的三大領域

《代數、幾何、分析》

全都到齊了 ...

如果用武俠小說來比喻

# 那麼笛卡兒

- 就像是打通數學世界任督二脈的人 ...

# 有了座標的概念

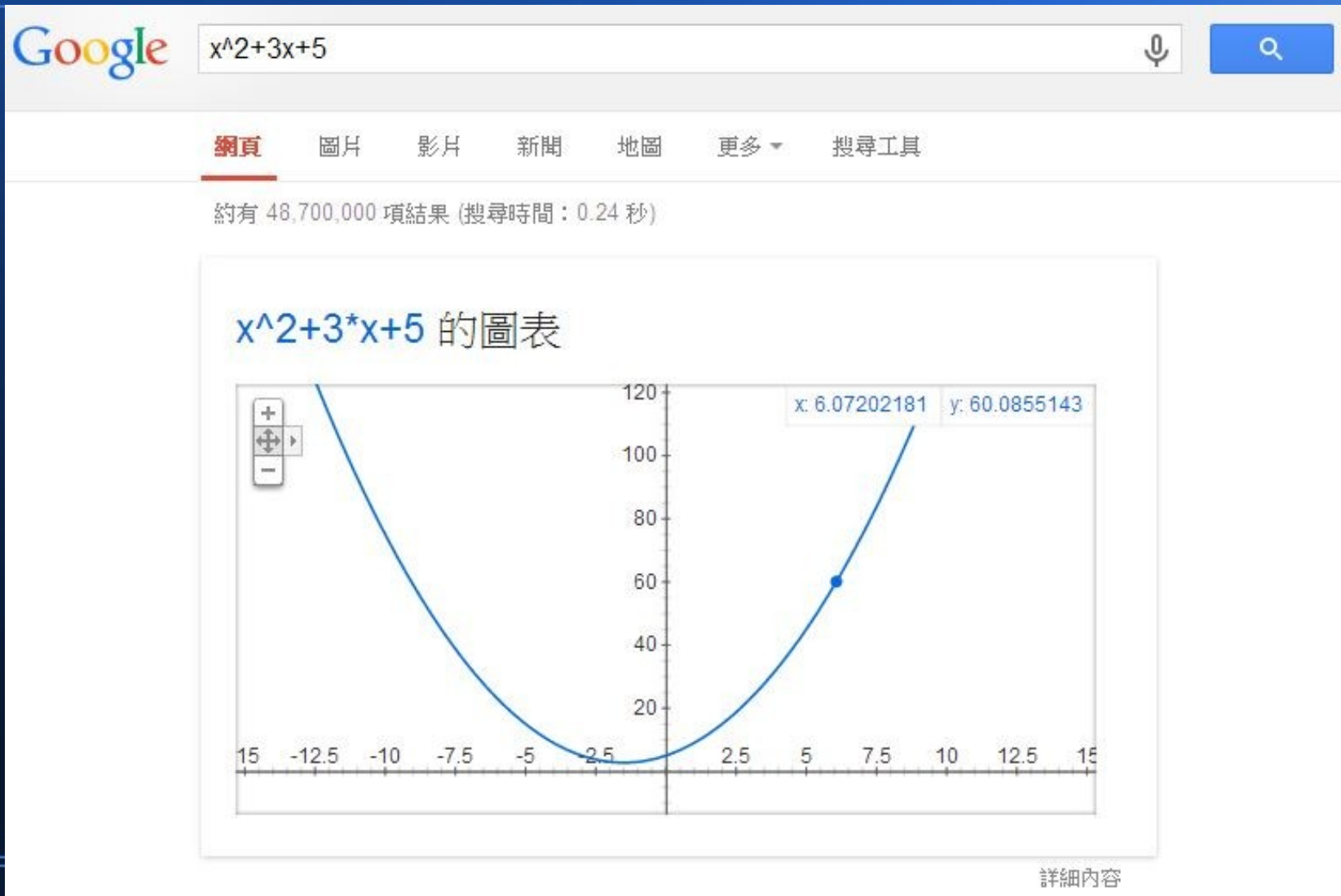
- 電腦這個《數學計算工具》  
也才能開始派上用場

# 程式的基本型態當中

- 除了字元字串之外
- 其他幾乎都是數值
- 像是《浮點數》與《整數》...

# 有了《數值點》的概念

- 就能寫程式畫出函數圖形

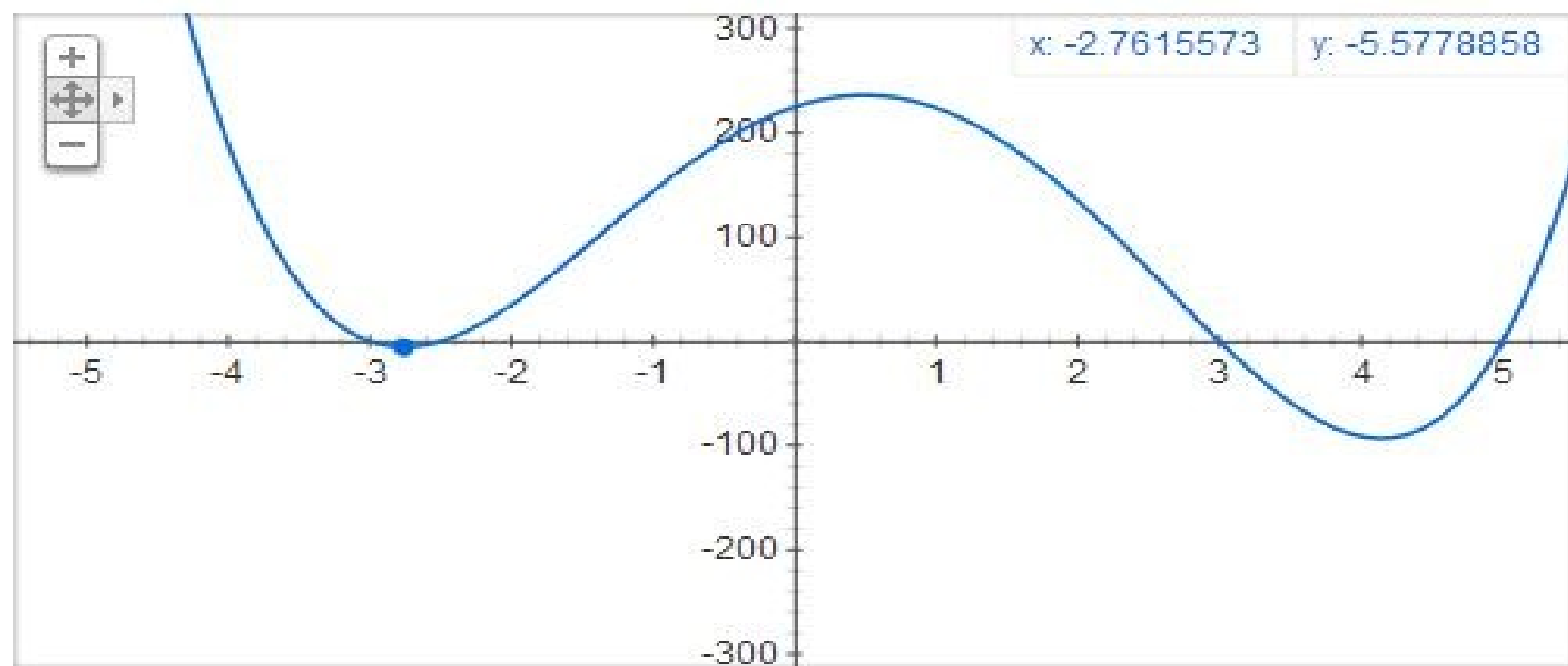




# 而這些圖形的用途

- 從《計算機圖學》到《人工智慧》領域無所不在

$(x-5)*(x-3)*(2*x+5)*(x+3)$  的圖表



# 舉例而言

- 人工智慧裡的爬山演算法
- 主要是在尋找《函數最高點》

# 方法非常簡單，就是一直往更高的方向爬

## 實作：以爬山演算法尋找函數最高點

### 簡介

以下是「爬山演算法」(Hill-Climbing Algorithm) 的一個簡易版本，其方法超簡單，就是一直看旁邊有沒有更好的解，如果有就移過去。然後反覆的作這樣的動作，直到旁邊的解都比現在的更差時，程式就停止，然後將那個位於山頂的解傳回，就完成了。

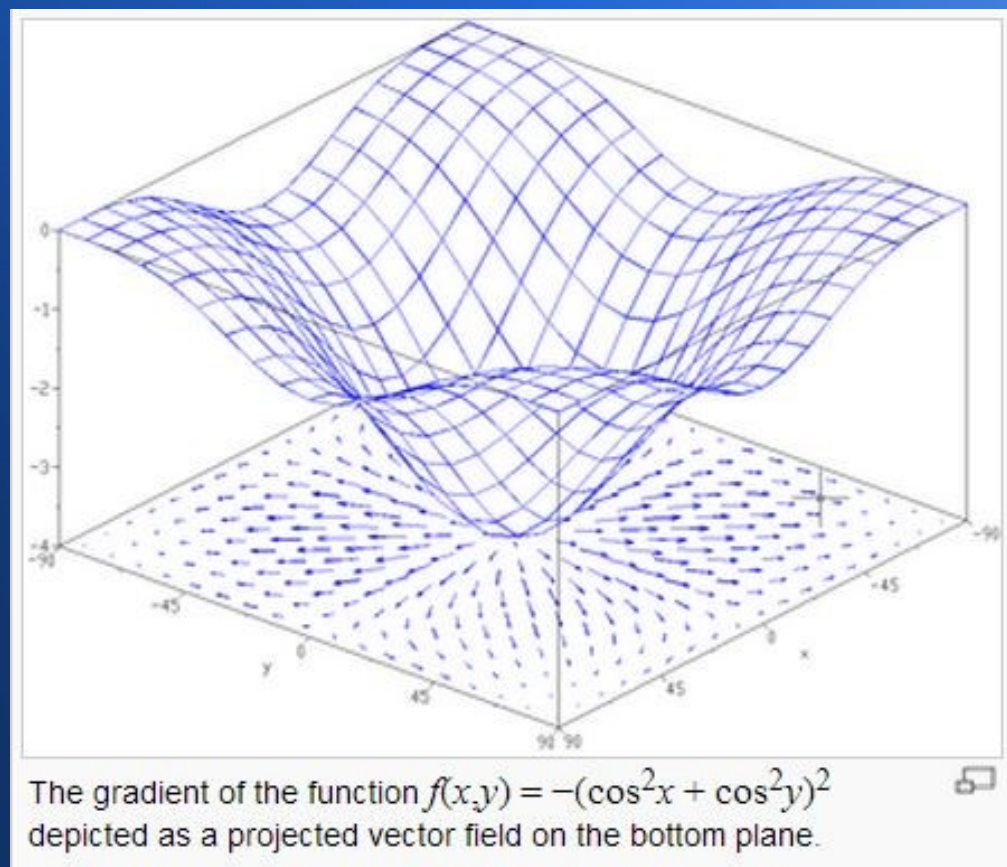
```
Algorithm HillClimbing(f, x)
  x = 隨意設定一個解。
  while (x 有鄰居 x' 比 x 更高)
    x = x';
  end
  return x;
end
```

當然、這種演算法只能找到「局部最佳解」(local optimal)，當整個空間有很多山頂的時候，這種方法會爬到其中一個山頂就停了，並不一定會爬到最高的山頂。

# 而神經網路裡的梯度下降法

- 和爬山演算法做的事情幾乎一樣
- 只是方向永遠是梯度方向而已

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \vec{e}_n$$



# 這些方法

- 不管是在 1 維、2 維、3 維、4 維  
還是更高維空間，都是管用的

# 但是

- 通常只能找到《區域最高點或最低點》，無法保證找到全域最高點或最低點。

# 在上面的例子中

- 圖形最後都對應到了《函數》
- 而函數畫出來的圖形，讓我們對結果有了視覺化的感受 ...



# 而且不只如此

- 函數還可以用來轉換圖形

# 像是計算機圖學裏的

- 《縮放、旋轉》等變換都可以用矩陣函數表示

## 旋轉 [編輯]

繞原點逆時針旋轉 $\theta$ 度角的變換公式是 $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ 與 $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$ ，用矩陣表示為：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## 縮放 [編輯]

縮放(反矩陣)公式為 $x' = s_x \cdot x$ 與 $y' = s_y \cdot y$ ，用矩陣表示為：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

# 如果把矩陣加大一維

- 那麼就可以納入《平移》變換

## 仿射變換 [編輯]

為了表示仿射變換，需要使用齊次坐標，即用三維向量  $(x, y, 1)$  表示二維向量，對於高維來說也是如此。按照這種方法，就可以用矩陣乘法表示變換。 $x' = x + t_x$ ;  
 $y' = y + t_y$  變為

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

在矩陣中增加一列與一行，除右下角的元素為1外其它部分填充為0，通過這種方法，所有的線性變換都可以轉換為仿射變換。例如，上面的旋轉矩陣變為

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

通過這種方法，使用與前面一樣的矩陣乘積可以將各種變換無縫地集成到一起。

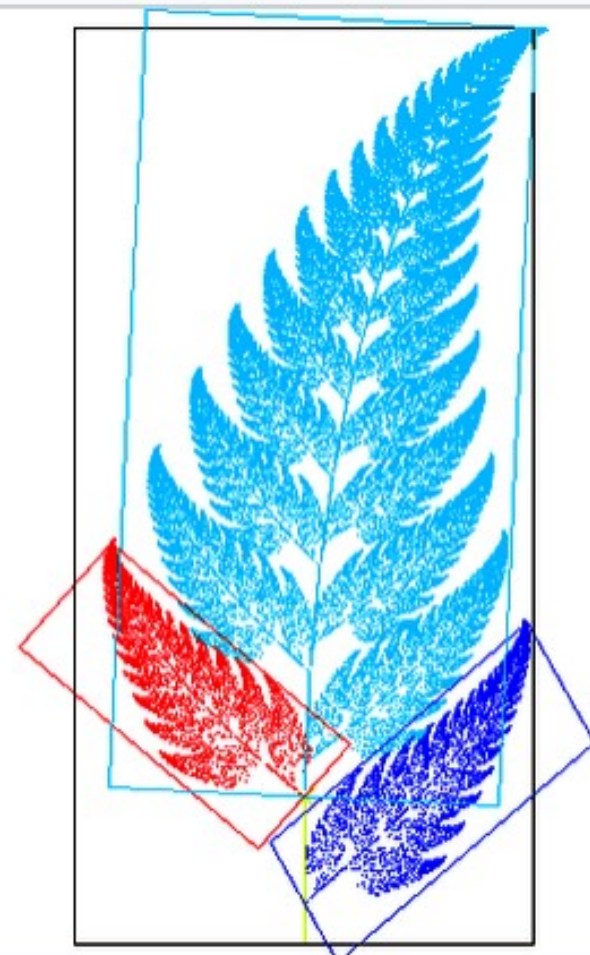
當使用仿射變換時，齊次坐標向量  $w$  從來不變，這樣可以把它當作為1。但是，透視投影中並不是這樣。

# 平移、縮放、旋轉三種運算

- 形成的變換屬於仿射變換  
(affine transformation)
- 因此是仿射幾何學的特例 ...

# 仿射變換

- 是碎形幾何的基礎



一個使用仿射變換所製造有自相似性的碎形



# 如果把旋轉運算放到三維空間

- 就可以得到針對不同軸心的三種旋轉運算

對 x 軸旋轉

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta_x) & -\sin(-\theta_x) \\ 0 & \sin(-\theta_x) & \cos(-\theta_x) \end{bmatrix}$$

對 y 軸旋轉

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta_y) & 0 & \sin(-\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\theta_y) & 0 & \cos(-\theta_y) \end{bmatrix}$$

對 z 軸旋轉

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta_z) & -\sin(-\theta_z) & 0 \\ \sin(-\theta_z) & \cos(-\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 於是圖形的呈現問題

- 就成了《矩陣運算》的問題

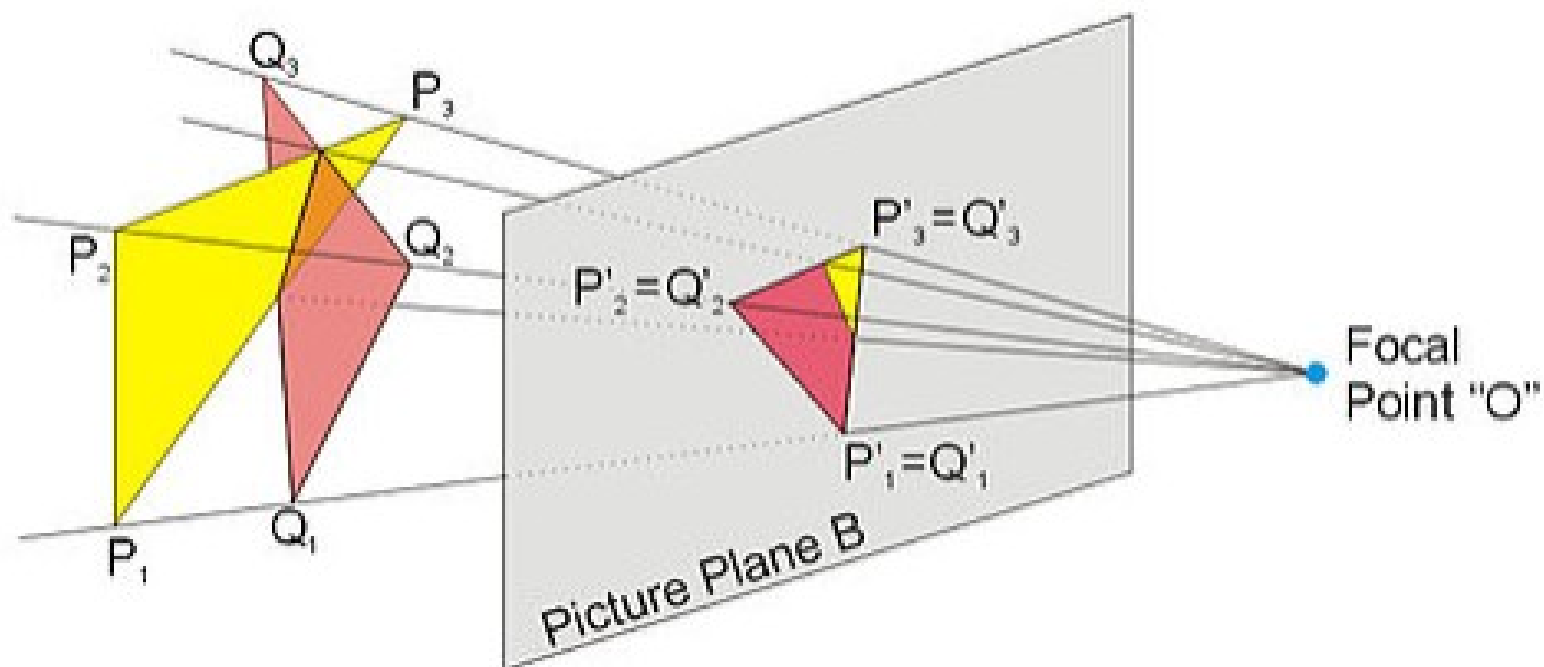


# 但是

- 由於我們的顯示器通常是二維的
- 要把三維物體顯示在二維平面中

那該怎麼辦呢？

# 透視投影可以解決這個問題



透視投影



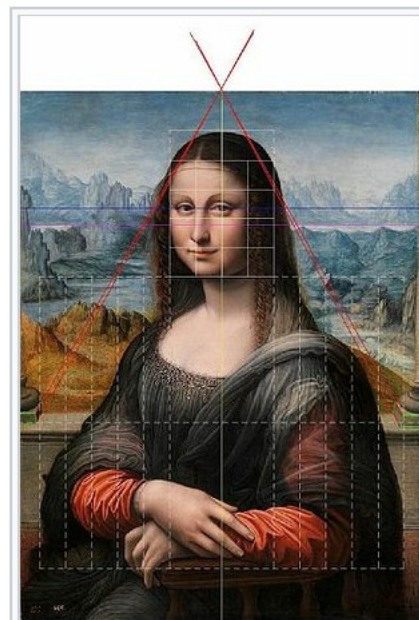
# 西洋文藝復興時期

## 單點透視法也成了繪畫的一大特色

單點透視法是一種把立體三維空間的形象表現在二維平面上的繪畫方法，使觀看的人對平面的畫有立體感，如同透過一個透明玻璃平面看立體的景物。透視畫法要遵循一定的規律，其中幾個要素為：

- 原線：和畫面平行的線，在畫面中仍然平行，原線和地面可以是水平、垂直或傾斜的，在畫面中和地面的相對位置不變，互相平行的原線在畫面中仍然互相平行，離畫面越遠越短，但其中各段的比例不變；
- 變線：不與畫面平行的線都是變線，互相平行的變線在畫面中不再平行，而是向一個滅點集中，消失在滅點，其中各段的比例離畫面越遠越小；
- 滅點包括四種：
  - 焦點，是作畫者和觀眾看的主要視點，與地面平行，與畫面垂直的線向焦點消失；
  - 天點，畫中近低遠高的，與地面不平行的線都向天點集中消失，天點和焦點在同一垂直線上；
  - 地點，畫中近高遠低的，與地面不平行的線都向地點集中消失，地點和焦點在同一垂直線上；
  - 余點，與地面平行，但與畫面不垂直的線向余點集中消失，余點有許多個，和焦點處於同一水平線上，每個和畫面不同的角度都有一個不同的余點。

當畫家平視時，焦點和余點都處於地平線上，仰視圖焦點向天點靠攏，俯視圖焦點向地點靠攏，余點始終和焦點處於同一水平線上。



運用透視法的《蒙娜麗莎》  
(普拉多博物館)

中國的繪畫就沒有經過這樣的時期（水墨畫完全不管比例問題）

# 所以

- 笛卡兒的《解析幾何》對程式人而言，可以說是一種《常識》

# 因為寫程式常常用到

- 但程式人卻不太知道自己正在使用《幾何學知識》...

# 以座標代表《點》

- 然後以《函數或方程式》代表《線》的方式，早已深深地烙印在程式人的腦海裡，不需要特別強調背後的數學了...

# 接著

- 我們如果把這些概念擴充到《高維空間》，就可以一窺近代幾何學的奧秘了...



# 首先讓我們看看非歐幾何

- 這是一切《非歐氏幾何》的幾何學總稱
- 包含
  - 羅氏幾何（雙曲幾何）
  - 黎曼幾何（橢圓幾何）



# 非歐幾何和歐氏幾何的主要區別

在於否定平行公設

# 因為歐氏幾何的第五條公設

數學家覺得有點多餘，卻又一直拿不掉（拿掉後畢氏定理就證明不出來了）

## 幾何原本第五公設 [編輯]

古希臘數學家歐幾里得的《幾何原本》提出了五條公設：

1. 從一點向另一點可以引一條直線。
2. 任意線段能無限延伸成一條直線。
3. 給定任意線段，可以以其一個端點作為圓心，該線段作為半徑作一個圓。
4. 所有直角都相等。
5. 若兩條直線都與第三條直線相交，並且在同一邊的內角之和小於兩個直角，則這兩條直線在這一邊必定相交。

長期以來，數學家們發現第五公設和前四個公設比較起來，顯得文字敘述冗長，而且也不那麼顯而易見。有些數學家還注意到歐幾里得在《幾何原本》一書中直到第29個命題中才用到，而且以後再也沒有使用。也就是說，在《幾何原本》中可以不依靠第五公設而推出前28個命題。因此，一些數學家提出，第五公設能不能不作為公設，而作為定理？能不能依靠前四個公設來證明第五公設？這就是幾何發展史上最著名的，爭論了長達兩千多年的關於「平行線理論」的討論。由於證明第五公設的問題始終得不到解決，人們逐漸懷疑證明的路子走的對不對？第五公設到底能不能證明？

# 後來在 1820 年代

- 羅巴切夫斯基想透過把《平行公設》反過來，用矛盾證法證明平行公設是必要的 …

# 於是羅巴契夫斯基想

- 平行公設：

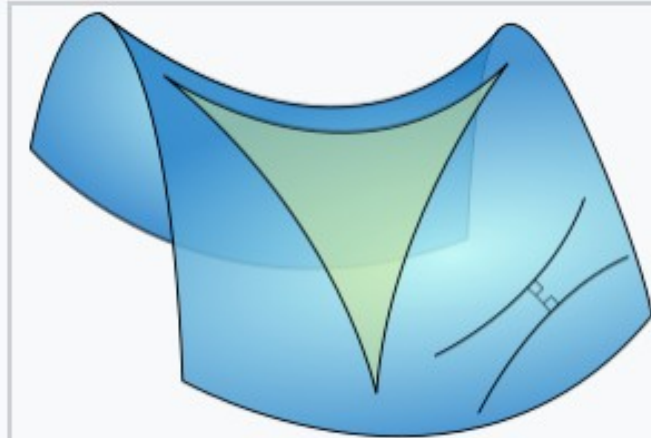
若兩條直線都與第三條直線相交，並且在同一邊的內角之和小於兩個直角，則這兩條直線在這一邊必定相交。

- 如果把平行公設反過來，那就可能是：

通過線外一點可以做無限多條直線與該線平行  
(此處的平行代表不會有交點)

# 結果

- 羅巴切夫斯基一直推導都沒發現矛盾，反而推導出了一整套非常怪異的幾何學定理
- 這套幾何學後來就被稱為羅氏幾何，其實就是一種《鞍形曲面》上的《雙曲幾何學》。



此圖為一三角形於一雙曲拋物面上，另外右下方有兩條在歐式幾何中應平行的分流線。

# 後來黎曼又發展出球面幾何

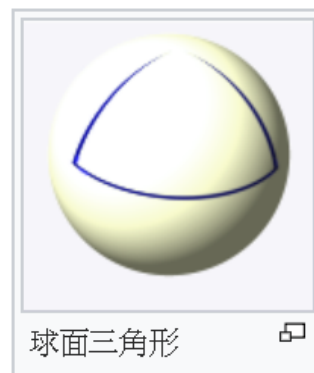
形成了

三種幾何學

## 非歐幾何分類 [編輯]

按幾何特性（曲率），現存非歐幾何的類型可以概括如下：

- 堅持第五公設，引出**歐幾里得幾何**。
- 以「可以引最少兩條平行線」為新公設，引出**羅氏幾何**（雙曲幾何）。
- 以「一條平行線也不能引」為新公設，引出**黎曼幾何**（橢圓幾何）。



球面三角形

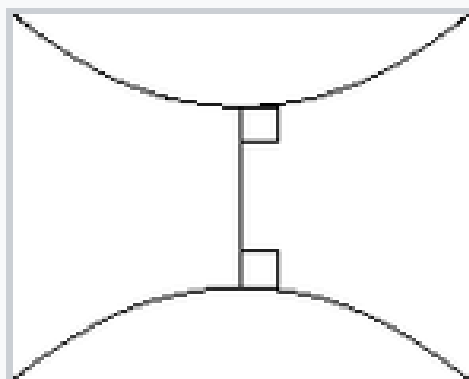
這三種幾何學，都是常曲率空間中的幾何學，分別對應曲率為0、負常數和正常數的情況。

如果完全去掉第五公設，就得到更加一般化的**絕對幾何**。這種幾何不僅可以囊括前面提到的三種幾何，而且允許空間的不同位置有不同的曲率。**黎曼幾何**是描述任意維數任意彎曲的絕對幾何空間的一種微分解析幾何學。

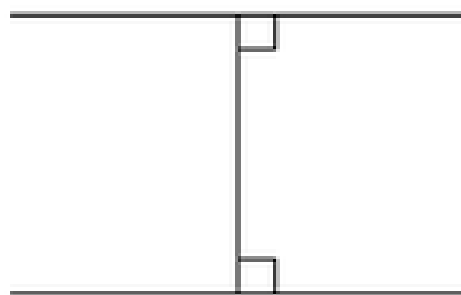
一般來講，非歐幾何有廣義、狹義、通常意義三個不同含義：

- 廣義的非歐幾何：泛指一切和**歐幾里得幾何**不同的幾何學。
- 狹義的非歐幾何：只是指羅氏幾何或黎曼幾何。
- 通常意義的非歐幾何：指羅氏幾何和黎曼幾何二者。

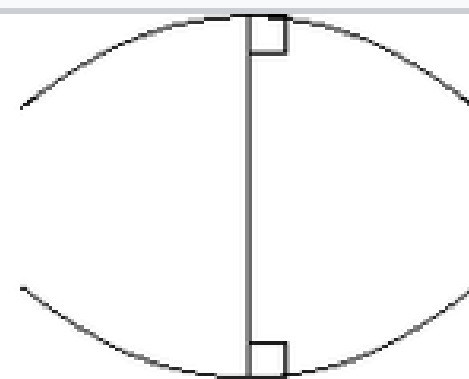
# 這些幾何學可以用下圖區別



Hyperbolic



Euclidean



Elliptic

三種幾何中垂直於同一線段的兩條直線的圖象

左：羅氏幾何（雙曲幾何）

中：歐幾里得幾何

右：黎曼幾何（橢圓幾何）





# 非歐幾何

- 後來在愛因斯坦提出相對論之後  
開始派上用場 ...

# 1905 年提出狹義相對論之後

- 愛因斯坦還不覺得非歐幾何有甚麼重要性
- 甚至在愛因斯坦的數學老《明可夫斯基》用非歐幾何把相對論系統化之後，愛因斯坦還是不覺得這些數學有甚麼重要性...

但是後來愛因斯坦搞了很多年

- 才知道明可夫斯基引入的那套非歐幾何，是發展廣義相對論的關鍵


# 狹義相對論的兩大結論

- 在相對速度很快的等速座標系中，會有：

— 尺縮


— 鐘慢

的效果 ....


$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$


$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

如果改成矩陣形式，會變成

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix}$$

其中

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ 稱為勞倫茲因子。}$$

# 再用張量簡化就會變成

用張量表示方法可以簡單的表示為

$$x'_i = a_{ij} x_j$$

$$\text{其中 } x'_i = \begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} ; x_j = \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} ; a_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

# 在這裏開始引入了《張量》的概念

- 張量概念在近代幾何學中有非常重要的地位 ...

# 最近

- 張量在電腦領域裏也變得極其重要



# 特別是深度學習領域

- 像是 Google 的 tensorflow 深度學習套件
- 之所以取名 tensorflow 的原因就是  
《張量流》 = (tensor + flow)

# 但是在深度學習領域

- 常常就只是把張量等同《高維向量》
- 但是並不去探討背後的《幾何學定理》

# 因為只要用高維的微分運算

- 計算梯度後往反梯度方向走
- 就可以減少損失函數 (loss function) 的能量值，最後找到區域能量最低點 (錯誤率最低)

# 但是高維空間的幾何學

- 對深度學習是否會有甚麼價值呢？

# 關於這點

- 目前的研究還很少...

# 我只看到丘成桐

- 曾經對此下過一番功夫，請參考
  - 虛構的對抗，GAN with the wind  
<http://tuments.com/169071/>

# 我覺得

- 對於程式人而言，要理解《張量》與《微分幾何》那些領域，應該是不會太難...

# 因為程式人經常使用

- 高維度的向量
- 高維度的陣列



# 只是程式人不會去想

- 背後的幾何空間觀念...

# 今天

- 我看到一部講解四維物體的影片

【木鱼微剧场】你见过四维物体吗？

《维度：数学漫步》

<https://www.youtube.com/watch?v=mw8-6SabBIE>

# 裡面提到

- 《三維多面體》在《二維空間》被《二維蜥蜴》看到時會是甚麼狀況
- 然後引申出：  
《四維多面體》在《三維空間》被我們看到時會是甚麼狀況 ...

# 一開始

- 我無法理解《四維多面體》  
到底是甚麼東東 ...

# 但是當我想到

- 高維向量  $(x, y, z, w)$  的表示法，用來表達《四維三角錐》與《四維立方體》的方法後
- 我想我應該理解了何謂《四維多面體》了...

# 換句話說

- 當我們用《笛卡兒座標系》來表達《四維多面體》的頂點時，所謂的《四維多面體》就會變得比較容易懂了...

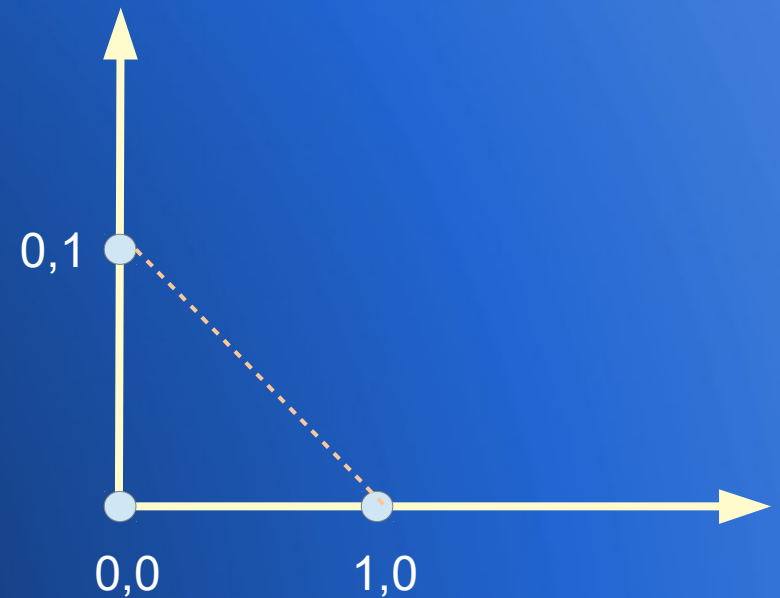
# 首先讓我們看看

- 二維三角形的座標

$$(x, y) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$$

是三角形的頂點

這三個點形成一個二維三角形



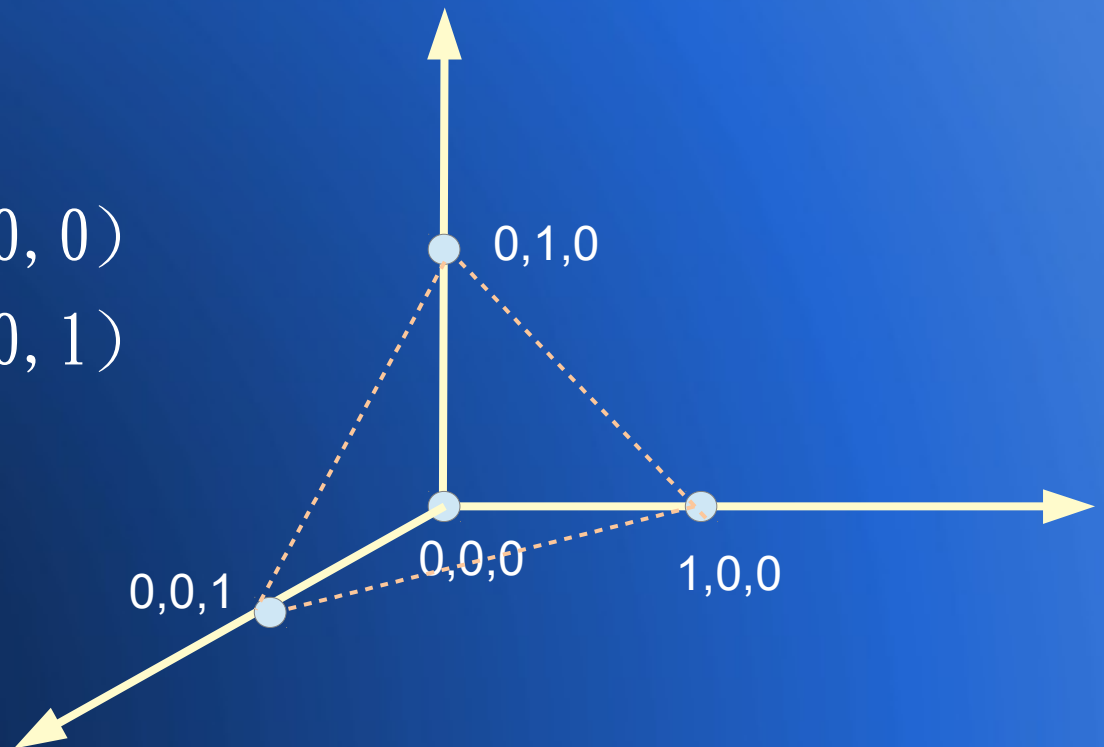
# 擴充到三維空間

- 我們就得到三角錐

$$(x, y, z) = (0, 0, 0), (1, 0, 0) \\ , (0, 1, 0), (0, 0, 1)$$

是三角錐的頂點

這四個點形成一個三維三角錐





# 繼續擴充到四維空間

- 我們就得到四維三角錐

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) = & (0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0) \\ & , (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \\ & , (0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

是四維三角錐的頂點

這五個點形成一個四維三角錐

但問題是、這該怎麼畫？

我們看得懂在《二維平面畫的三維座標》

是因為我們活在三維世界裡，有立體的想像力！

但我們沒在四維空間裏活過，如何能想像四維三角錐呢？

# 辦法不難、我們可以想像第四維

- 四維三角錐的頂點座標是：

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) = & (0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0) \\ & , (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \\ & , (0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

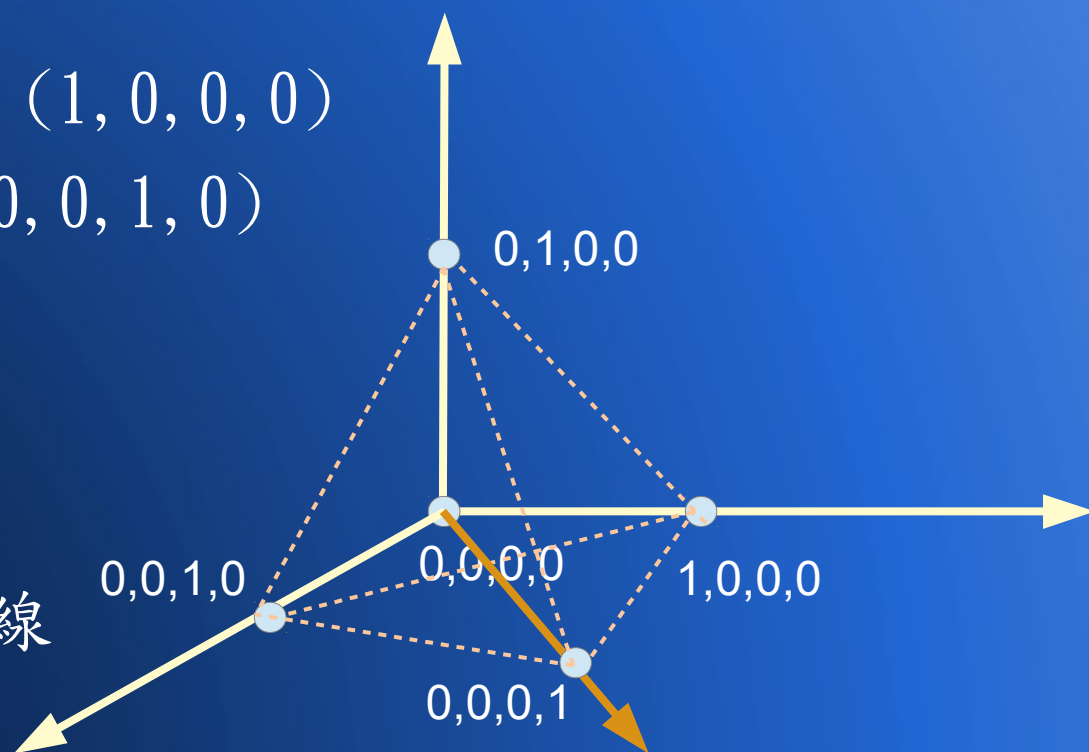
我們伸出第四維度，

在  $(0, 0, 0, 1)$  上加一點

這一點和其他三點都有連線

而且第四維和其他三維

都是互相垂直的 …（這只能想像，在平面上畫不出來的）



# 同樣的

- 在二維空間有《正方形》，其頂點有四個：
  - $(0, 0)(0, 1)(1, 0)(1, 1)$
- 在三維空間有《正方體》，其頂點有八個：
  - $(0, 0, 0)(0, 0, 1)(0, 1, 0)(0, 1, 1)$
  - $(1, 0, 0)(1, 0, 1)(1, 1, 0)(1, 1, 1)$
- 在四維空間就會有《四維正方體》，其頂點有 16 個：
  - 凡是  $(a, b, c, d)$  其中  $a, b, c, d$  可取 0, 1 的所有組合均為此《四維正方體》的頂點

# 透過這樣的方式

- 我們就可以想像《四維多面體》的幾何特性了...

# 建議各位程式人

- 可以仔細看看下列影片：

【木鱼微剧场】你见过四维物体吗？

《维度：数学漫步》

<https://www.youtube.com/watch?v=mw8-6SabBIE>

- 然後想想裡面那些奇形怪狀的多面體，到底代表甚麼意思 ...

# 接著擴大去想想

- 那些非多面體的曲線樣，  
又代表了什麼樣的物體呢？

# 這樣的幾何學

- 似乎就是建構在《張量》這種高維空間的基礎上，所形成的高維幾何學

# 在這種高維空間裏

- 當然也有類似平移、縮放、旋轉、線性映射之類的《仿射幾何學》

## 旋轉 [編輯]

繞原點逆時針旋轉 $\theta$ 度角的變換公式是 $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ 與 $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$ ，用矩陣表示為：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## 縮放 [編輯]

縮放(反矩陣)公式為 $x' = s_x \cdot x$ 與 $y' = s_y \cdot y$ ，用矩陣表示為：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



# 也會有類似非歐幾何

- 像是羅氏幾何（雙曲幾何）、黎曼幾何（橢圓幾何）這樣的幾何學！
- 這應該就是《微分幾何》的起點了 ...

# 然後

- 或許我們就有機會看懂廣義相對論的《重力場方程式》也說不定

愛因斯坦重力場方程式 [編輯]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

其中

- $G_{\mu\nu}$  稱為愛因斯坦張量，
- $R_{\mu\nu}$  是從黎曼張量縮併而成的里奇張量，代表曲率項；
- $R$  是從里奇張量縮併而成的純量曲率(或里奇數量)；
- $g_{\mu\nu}$  是從(3+1)維時空的度量張量；
- $T_{\mu\nu}$  是能量-動量-應力張量，
- $G$  是重力常數，
- $c$  是真空中光速。

# 只是重力場方程

- 是一個張量方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{\mu\nu}.$$

- 其實該說是方程組

希臘字母  $\mu$  和  $\nu$  是標號

每個都可以取 0 1 2 3 的值

代表 t, x, y, z 軸

(t 為時間，原本該有 16 個方程

但由於是對稱的，所以剩下 10 個) ....

$$\begin{aligned}R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} &= \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{00} \\R_{01} - \frac{1}{2}Rg_{01} &= \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{01} \\R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} &= \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{11}\end{aligned}$$

由於 0, 1, 2, 3 對應到 t, x, y, z

- 所以  $R_{01}$  代表 t, x 的  $R(t, x)$

$$R_{01} - \frac{1}{2}Rg_{01} = \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{01}$$

# 問題是

- 我還看不懂廣義相對論
- 還無法理解重力場方程式的意義 …

# 不過就前面的解析

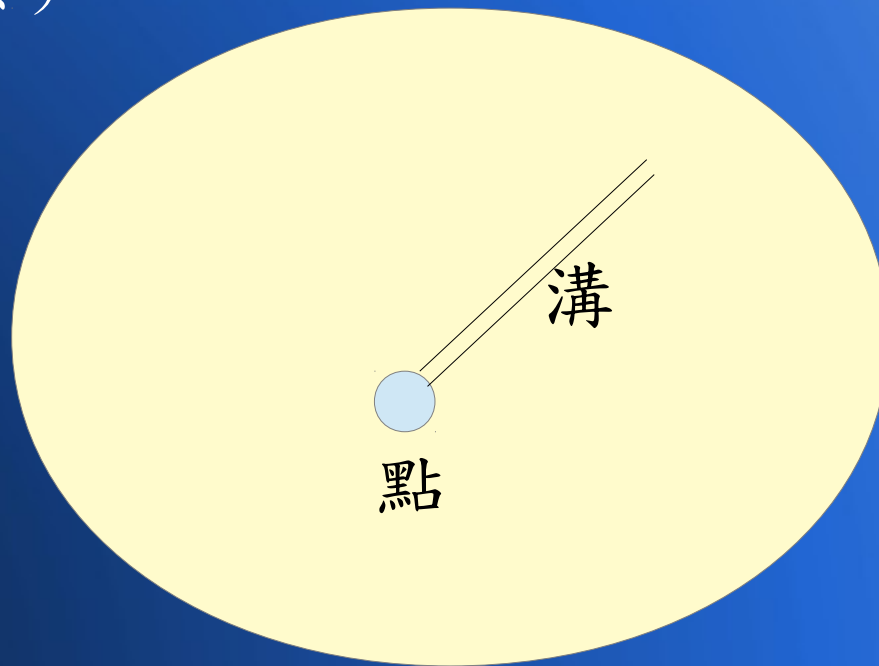
- 高維的幾何學倒是沒那麼難懂
- 只要用高維向量表達《座標》
- 那程式人就可以相對容易的想像這類幾何學的性质了...

# 在高維空間裏

- 梯度下降法還是可以找到區域最佳解
- 但是爬山演算法就會有個困境

# 舉例而言

- 假如在某點旁邊有一條斜斜的小溝，只有這條溝會向下走（我們想下山，所以其實是下山演算法）
- 但是爬山演算法要剛好選到小溝方向的機率很低，於是可能試了幾百次都沒選到該方向結果就被困住了 ...
- 若維度愈高，就愈難選到小溝，結果是明明有路卻怎麼都過不去！這方面梯度下降法就比爬山演算法好一些（但梯度下降法的條件是要連續可微）





# 以上這些

- 就是我這個程式人對幾何學的理解！

這就是我們今天的十分鐘系列！

希望你會喜歡！

我們下回見！

Bye Bye!