高橋流微積分

陳鍾誠 於 金門大學

2013 年 11 月 8 日

話說

- 數學很難
- 微積分更難

工程數學呢？

- 超級無敵難 ...

那些教工程數學的老師

- 到底知不知道他們在講甚麼呢？

舉例而言

- 這個是甚麼意思？

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{inx}$$

而這又是甚麼意思？

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

數學

- 一定要這麼難懂嗎？

能不能

- 簡單一點

用 ...

- 人類聽得懂的話

告訴我

- 微積分

還有

- 工程數學

到底有甚麼意義？

因為

- 既然老師們
- 講得出這些數學

它應該

- 就有個意義才對

不是嗎？

?

??

???

好吧！

- 我知道有點難！

但是如果

- 暫時把數學中的嚴謹性丟掉
- 然後把那些惱人的證明拋開

只留下

- 直覺概念

這樣

- 還會那麼難嗎？

所以

- 不要問我

為什麼？

只要告訴我

- 直覺意義就行了！

...

既然如此

那我試試看！

首先

- 先說明的是

微積分

- 到底描述的對象是什麼呢？

各位可能知道

- 離散數學
  - 是描述「不連續事物」的數學

離散數學描述的

- 是像
  - 0 與 1
  - 整數
  - 集合

等等「離散」事物的「數學」

相反的

- 微積分

則是描述

- 「連續事物」
  - 的數學

特別是

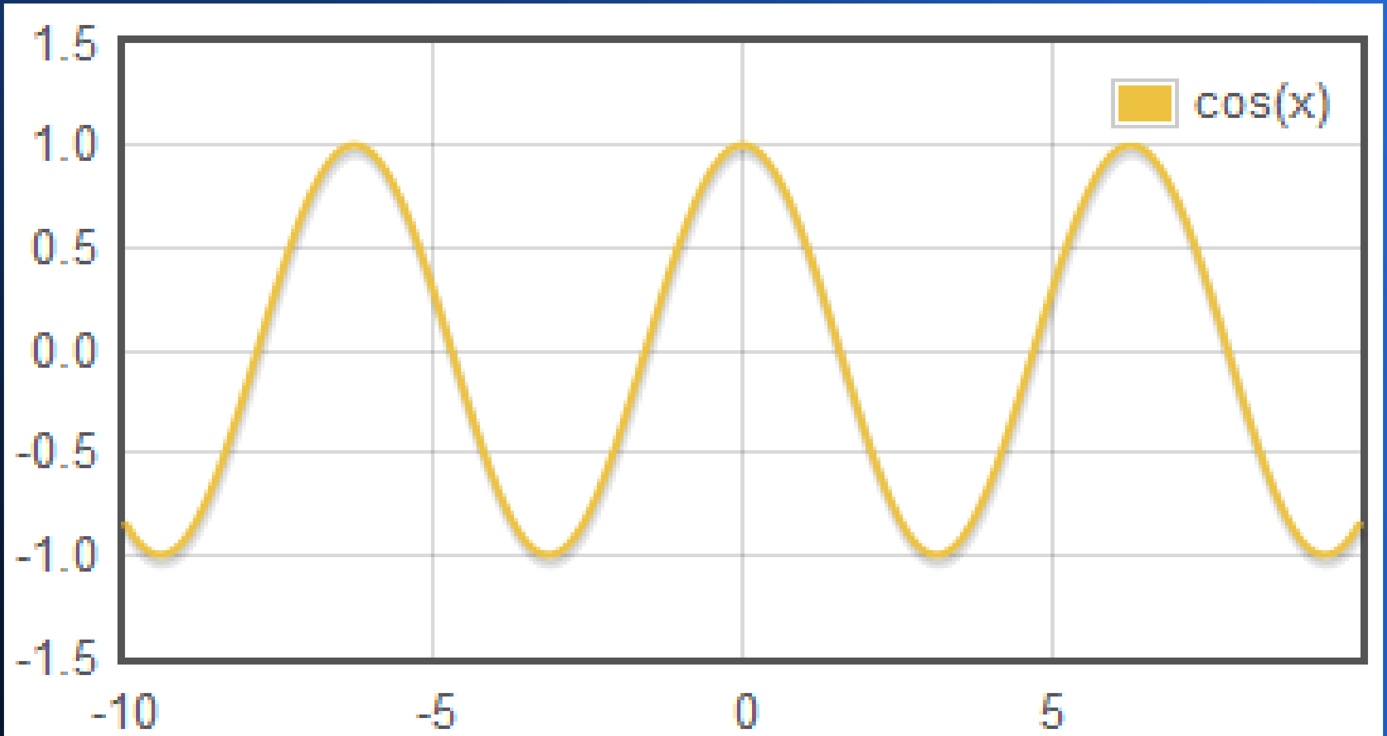
- 實數空間

所以

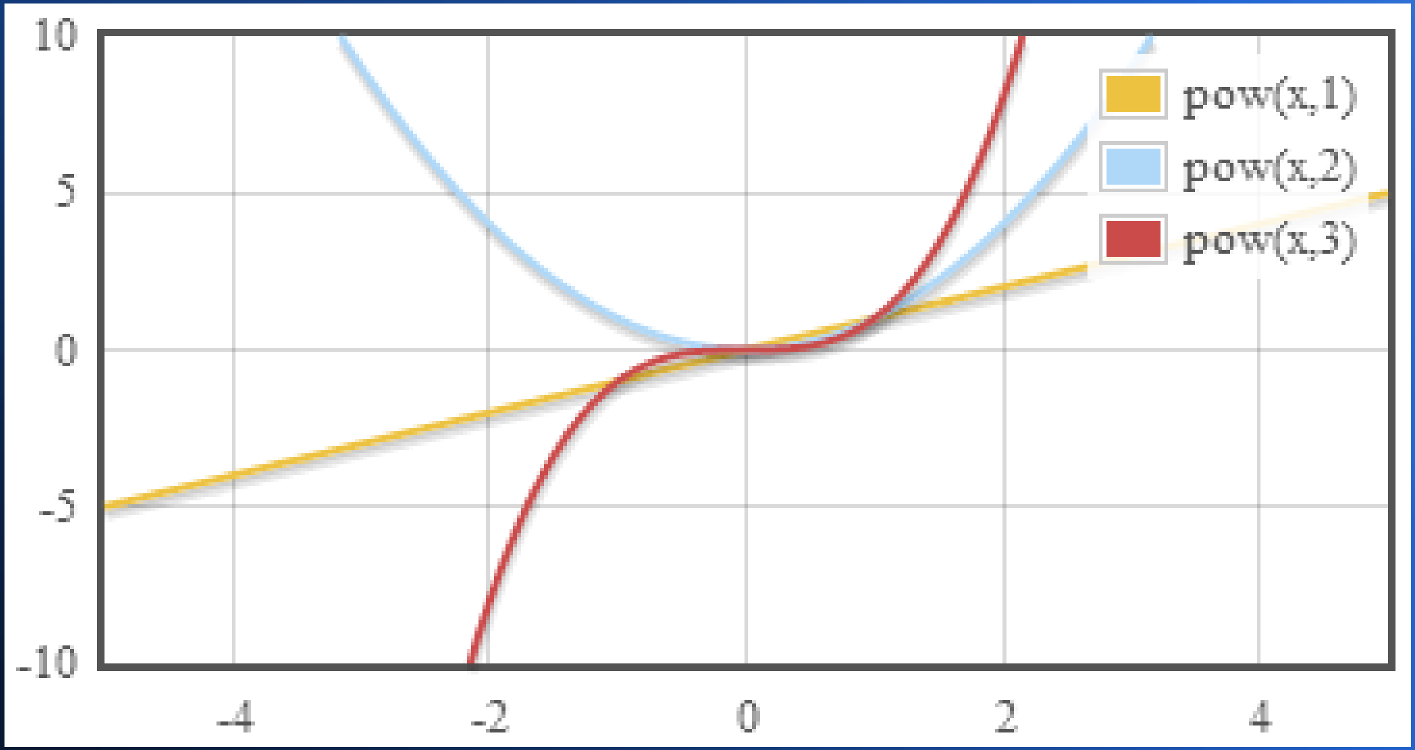
- 對於定義在實數空間上

的函數

- 像是 cos(x)



還有 $x^1, x^2, x^3, \ldots$



等等函數而言

- 都屬於
  - 連續空間中的事物

因此

- 都是連續數學研究的對象

所以

- 微積分

還有

- 工程數學

就是用來

- 描述這些「連續事物」的數學

好的

- 這我懂！

但是

- 微積分是甚麼呢？

關於

- 這個問題

如果只看概念

- 並不難！

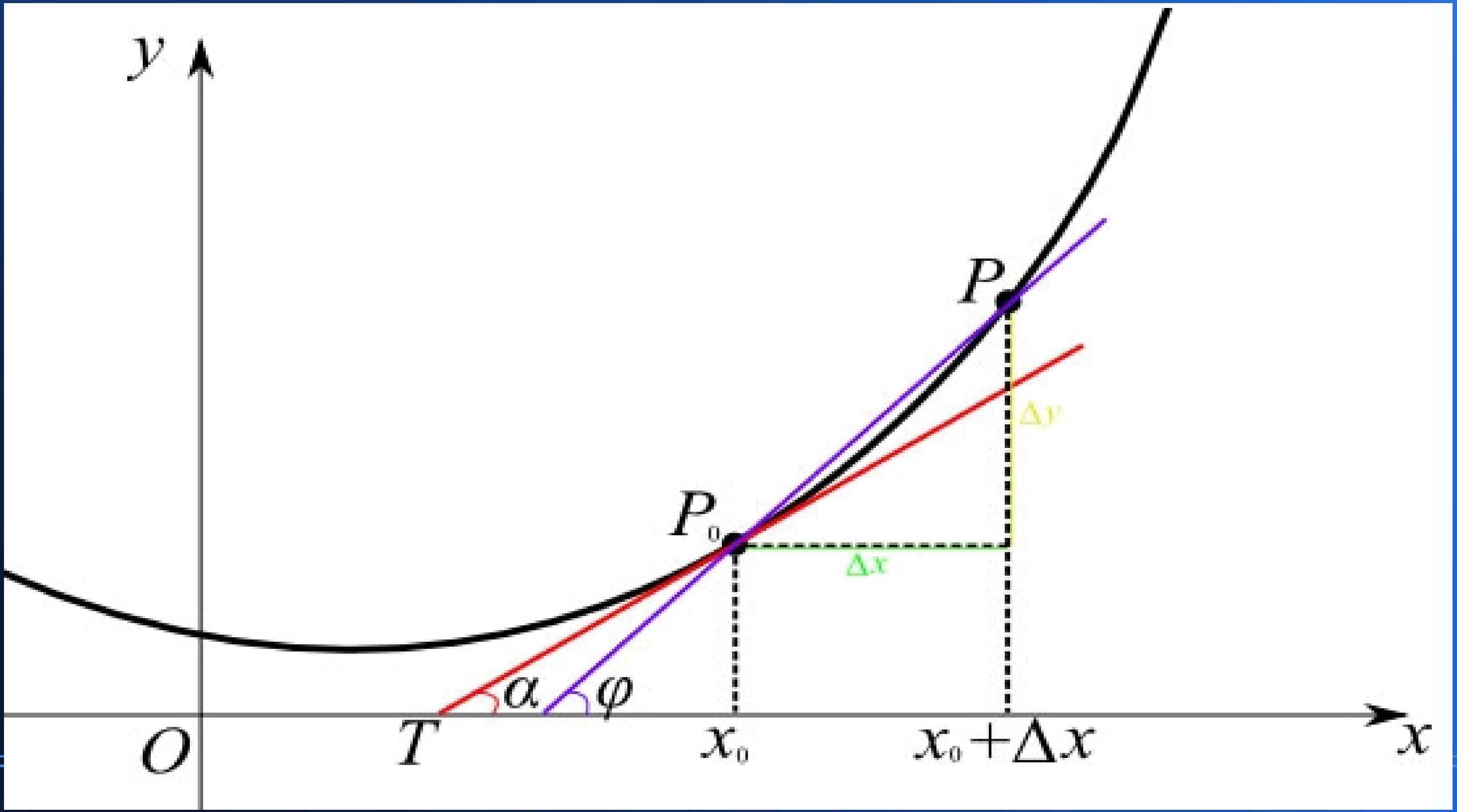
所謂的微分

就是

- 切線的斜率

像是

- 下圖中的紅色線，就是切線

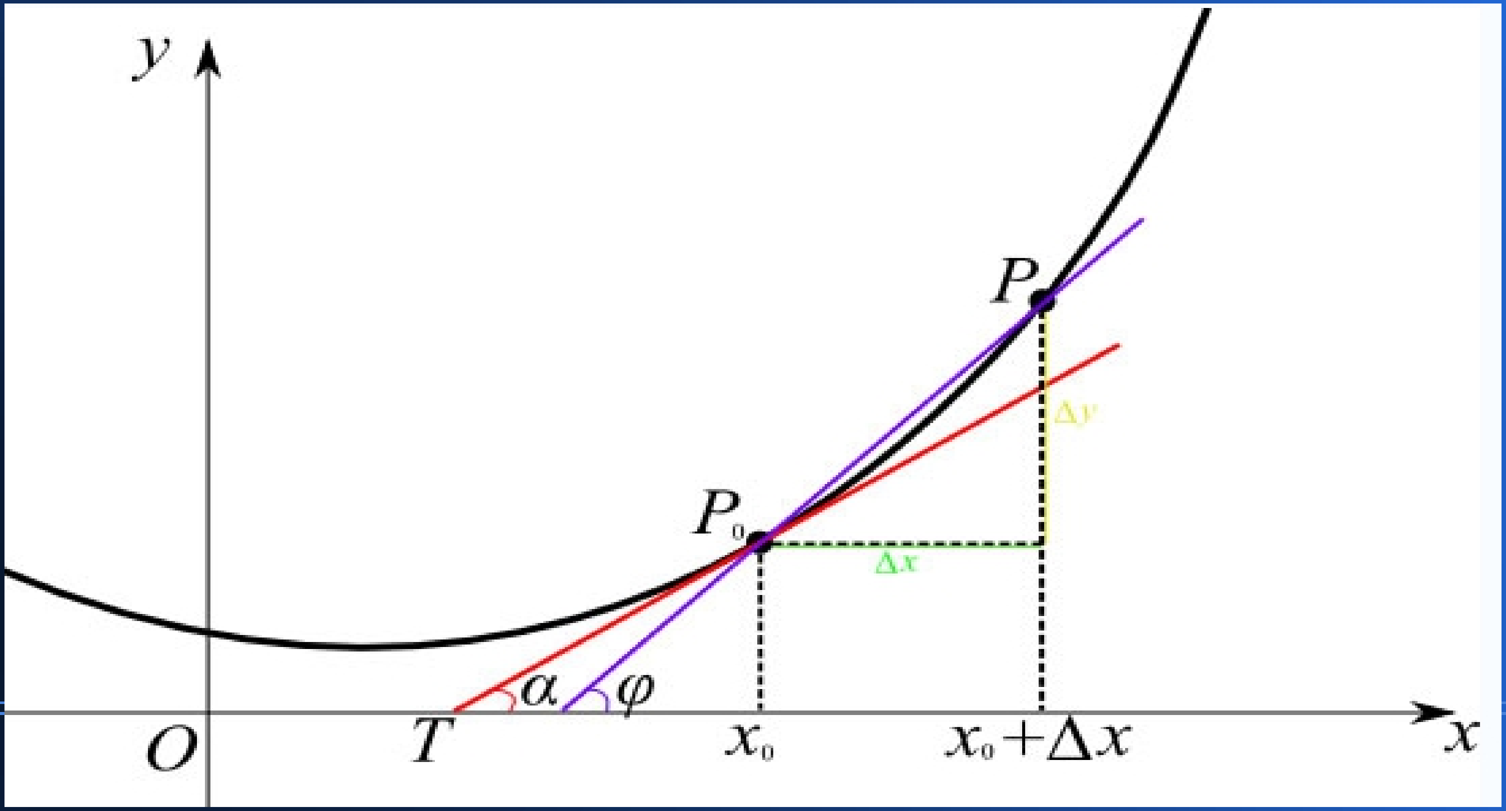


但是

- 切線是甚麼？

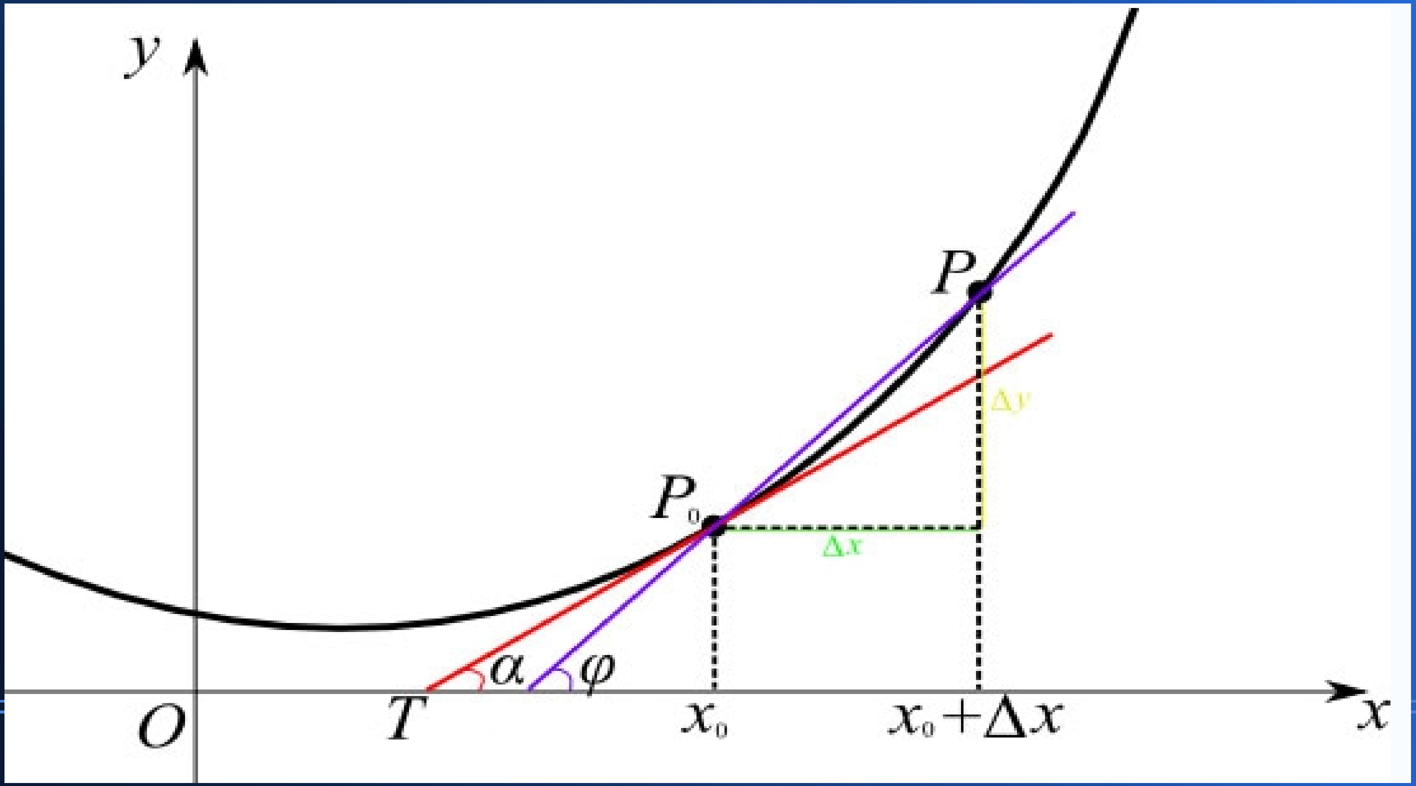
當我們取

- 黑色線 f(x) 在點 x_0 上的 P_0 點與附近的 P 點
- 連成一條線時，這稱為割線



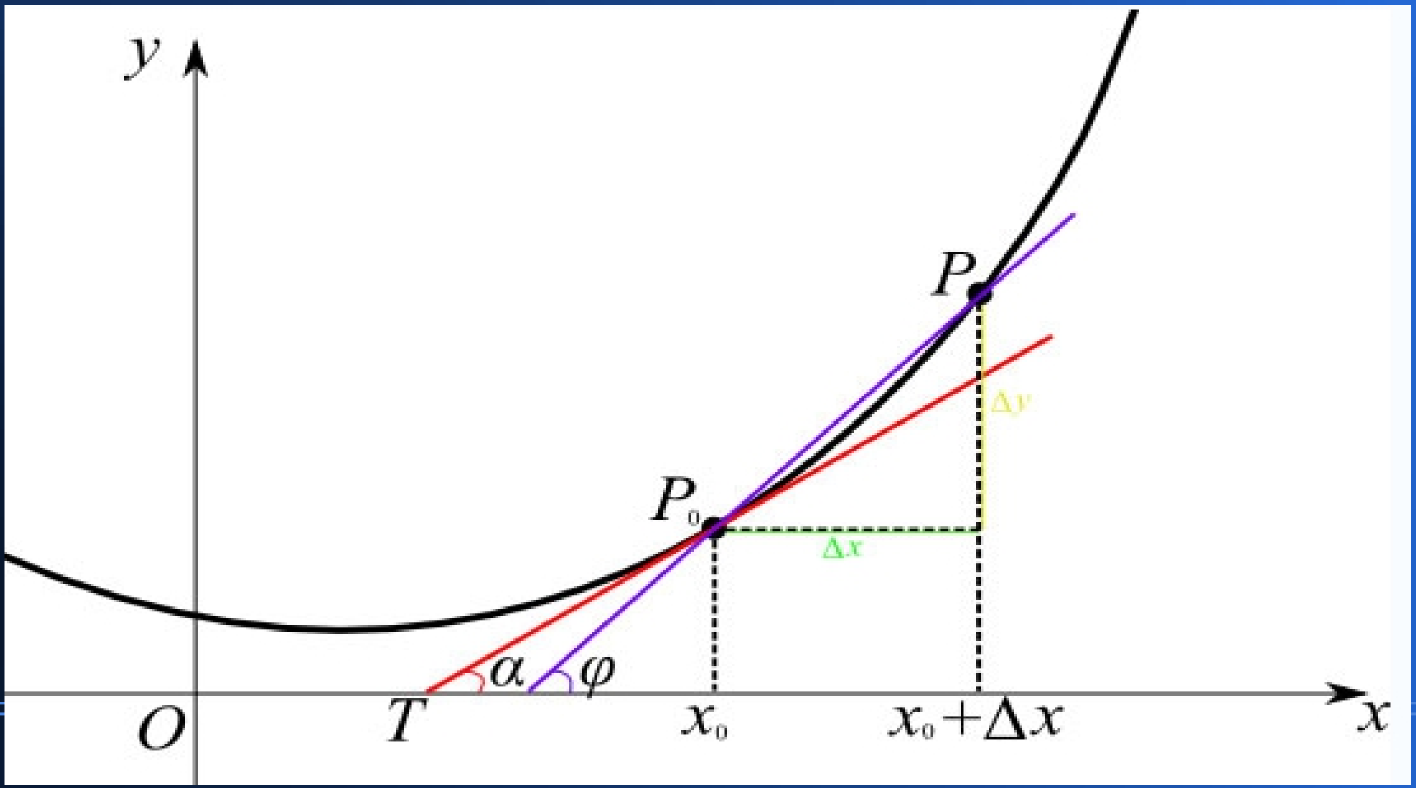
但是當

- P 非常接近 P_0 時，就從紫色的割線，
- 變成了紅色的切線。



我們可以用 f '(x_0) ，代表切線斜率

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



這個描述切線斜率的函數 **f '(x)**

- 就稱為函數 f(x) 的微分式
- 而在特定點 x_0 上的微分值 $f'(x_0)$，就稱為導數

所以

- 函數 f(x) 在 x=3 這點上的切線斜率
- 可以寫成 f '(3)
- 也就是 f 在 3 這點上的導數

就這樣

- 微分的概念

- 就講完了

...

蝦米？

- 你有沒有搞錯！

就這麼簡單？

那積分呢？

- 積分是甚麼？

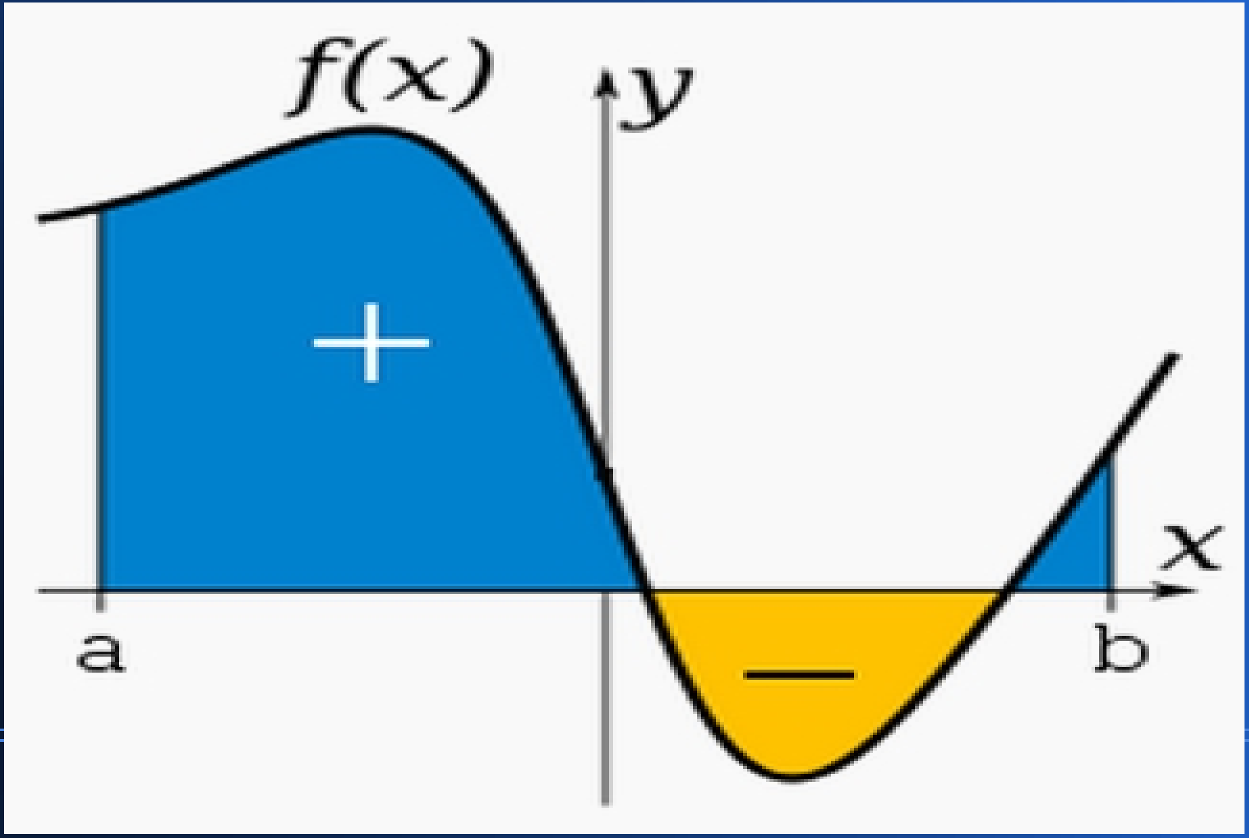
積分？

- 那更簡單

積分就是算面積

舉例而言

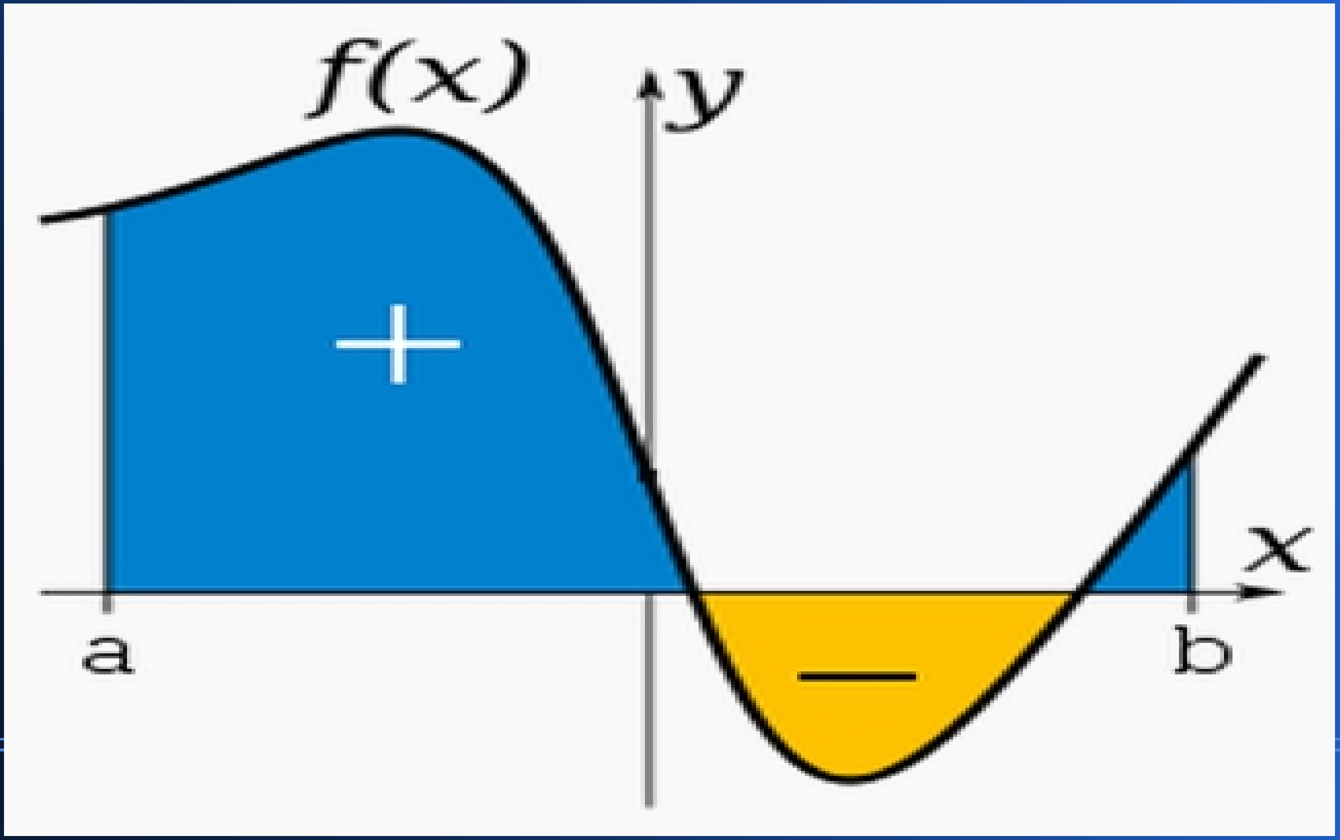
- 下列圖形中， f(x) 從 a 到 b 之間的積分
- 就是藍色面積減掉黃色面積



這就是積分！

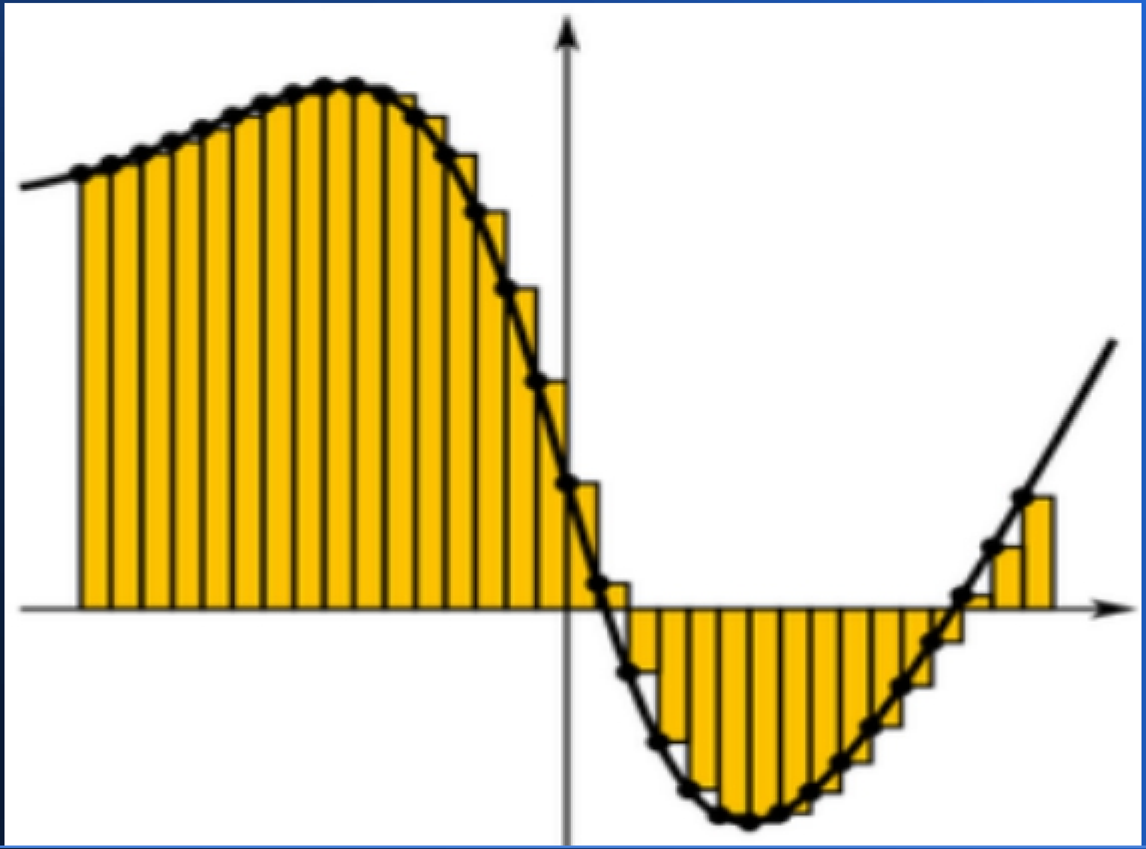
在數學中

- 我們用積分符號 $\int_a^b f(x)dx$ 代表該面積。



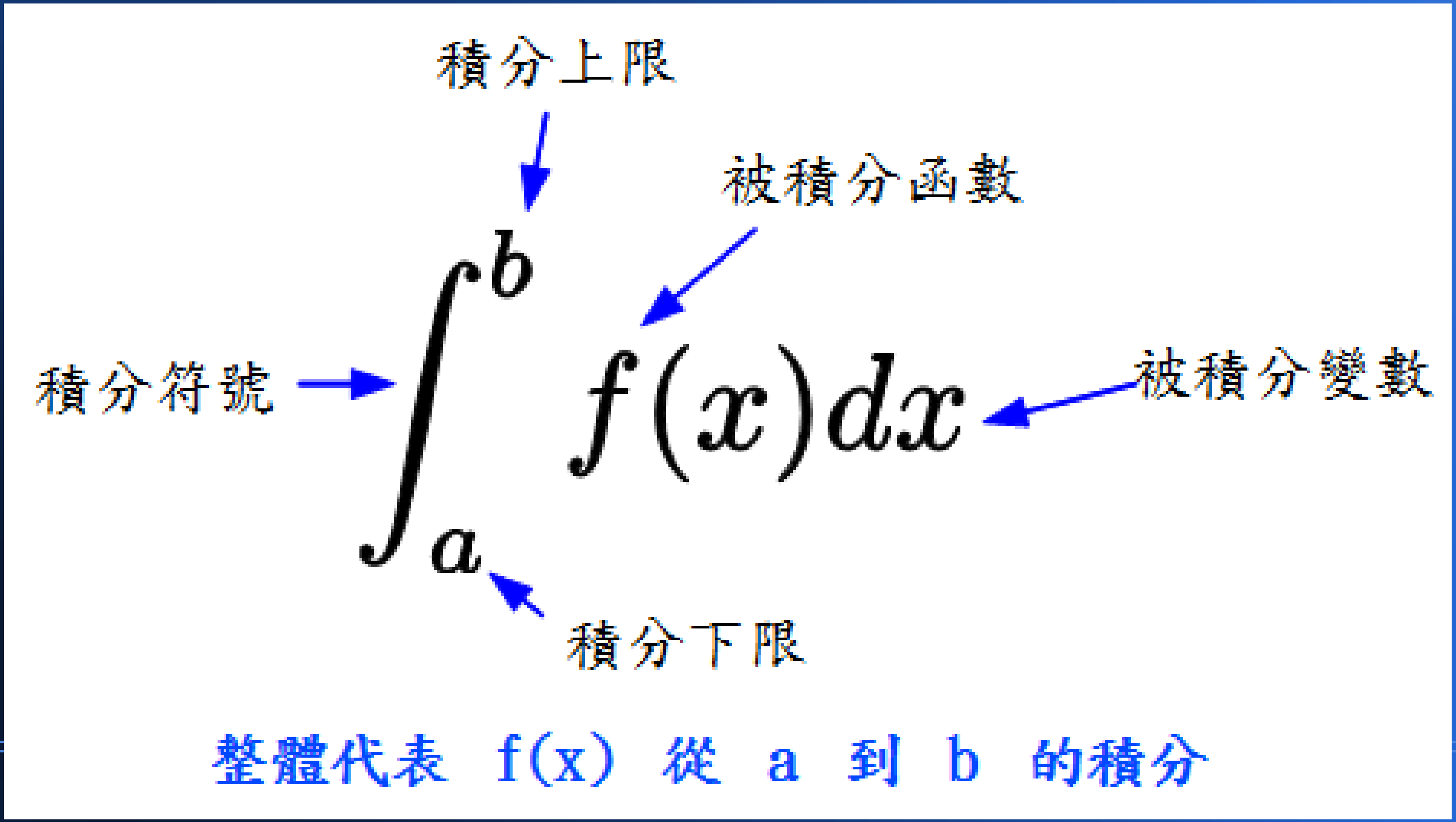
而這個面積

- 可以用很多「小長條形狀」的面積加總來逼近



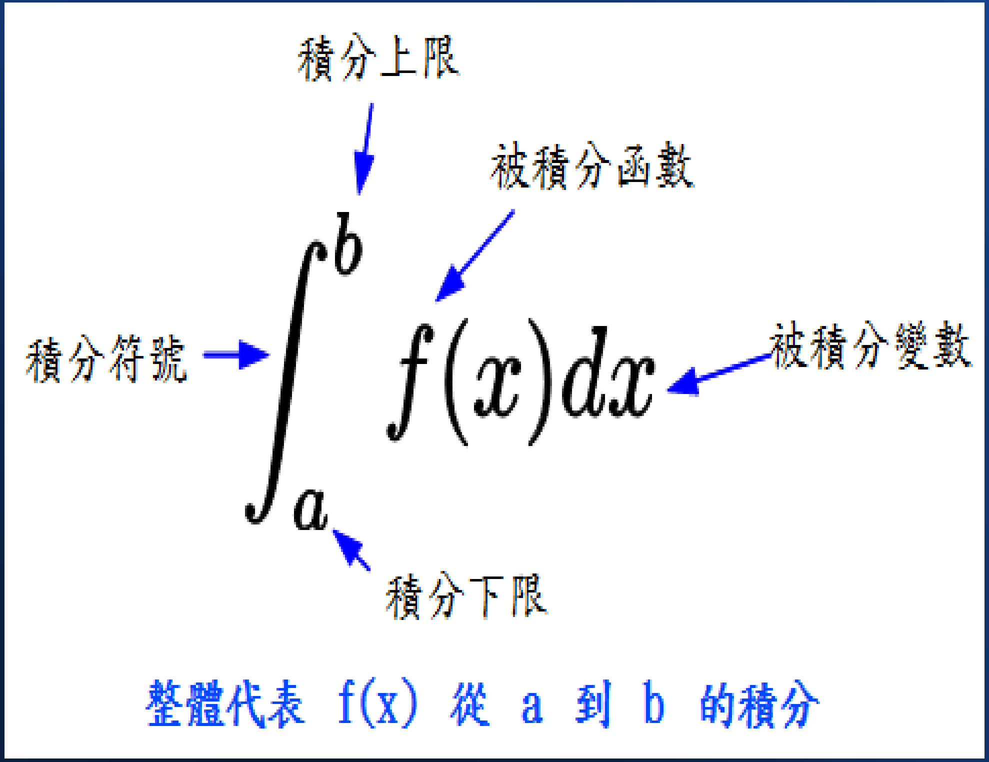
以下圖形

- 可以說明積分式中每個符號的意義。

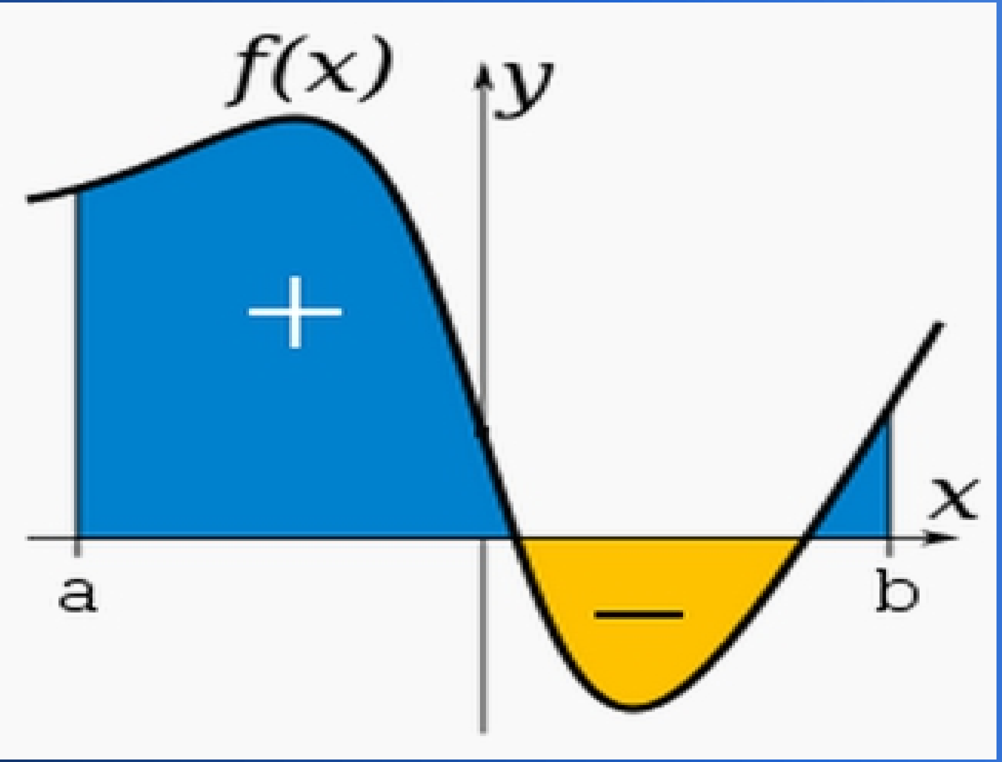


對照一下

- 應該會更清楚



積分上限
被積分函數
積分符號
$\int_a^b f(x)dx$
被積分變數
積分下限
整體代表 f(x) 從 a 到 b 的積分



f(x)
y
+
x
a
−
b

這就是積分！

就這樣？

- 是的！
- 就這樣，沒了！

那 ...

- 學微積分可以作甚麼？

好像 ...

- 也不能作甚麼？

因為

- 菜市場賣菜，也只要用加、減、乘法，就夠了！

進銀行工作？

- 那就多學個除法吧！

我沒看過

- 哪個銀行經理，需要算微積分的！

不過

- 寫程式的人，可能會用得到！
- 像是數值分析，就有數值微分與積分。

數值微分程式

```
// 數值微分的主要函數
double df(double (*f)(double), double x) {
    double dy = f(x+dx)-f(x);
    return dy/dx;
}
```

數值積分程式

```c

// 數值積分的主要函數
double intergal(double (*f)(double), double a, double b) {
    double sum=0.0;
    double x;
    for (x = a; x <=b; x+=dx) {
        sum += f(x)*dx;
    }
    return sum;
}
```

念電子電機的人

- 則要懂很多微積分

因為

- 像是電容、電感等，都是非線性元件
- 要描述電路系統，必須要用到微分方程

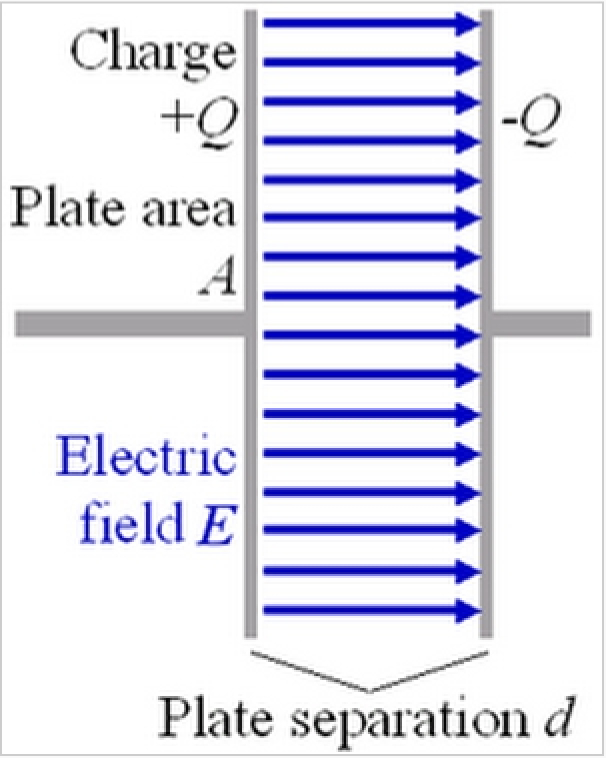
像是電容

- 您可以從維基百科的「電容」主題中，看到以下的算式。

$$C = \frac{Q}{V}。$$

$$\mathrm{d}W = \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q$$

$$Q = \int_0^V C(V')\,\mathrm{d}V'$$

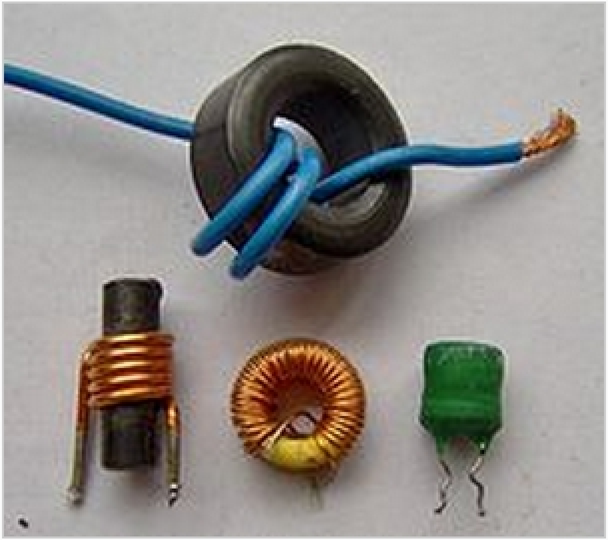


而電感

- 則是個天生需要「微分」才能描述的元件

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$$

電感符號

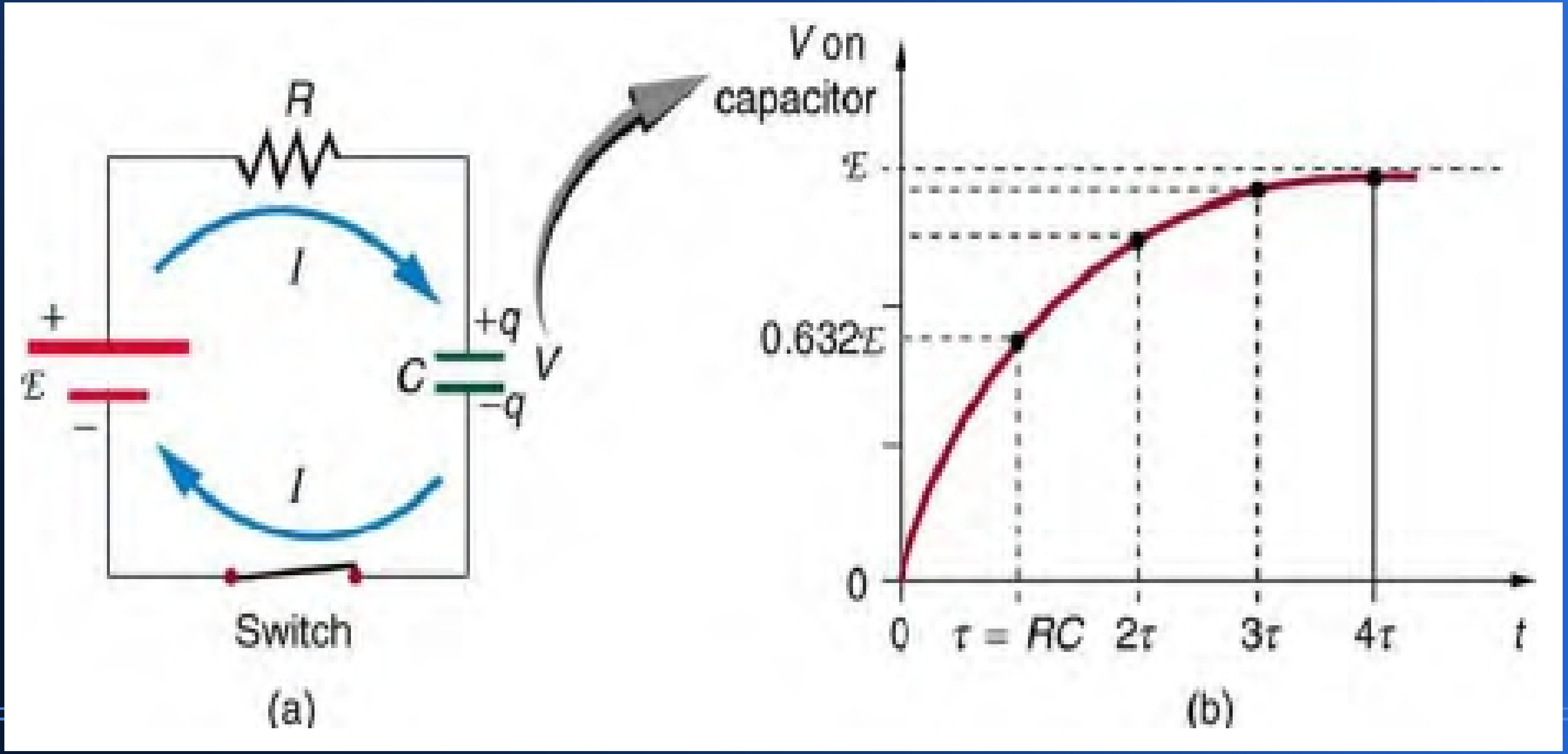


電感元件

電容充電時

- 其行為模式如右邊的微分方程所示。

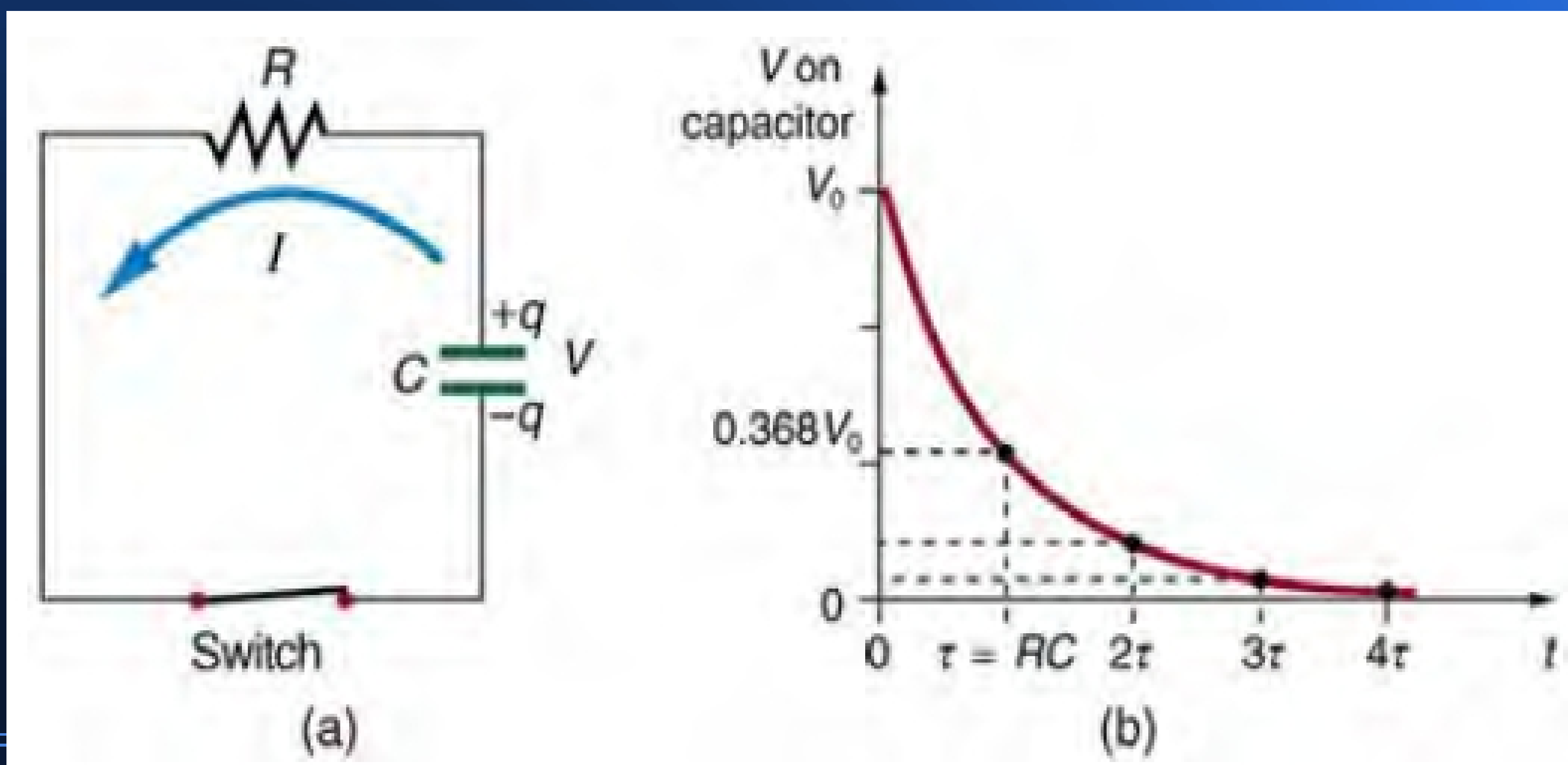
$$I = C\frac{dV_C}{dt} = \frac{V_{in} - V_C}{R}$$



而放電時

- 其行為模式則變成下列曲線。

$$C\frac{dV_C}{dt} = I = -\frac{V_C}{R}$$



要解這些微分方程

- 需要學會微積分

$$
\begin{aligned}
C\frac{dV}{dt} &= -\frac{V}{R} \\
C\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} &= -\frac{1}{R} \\
\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} &= -\frac{1}{RC} \\
\int \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}dt &= -\frac{1}{RC}\int dt + K \\
\ln(V) &= -\frac{t}{RC} + K \\
V &= e^{K}e^{-t/RC} \\
V &= Ae^{-t/RC}
\end{aligned}
$$

而且

- 如果你想研究無線通訊
- 那還需要懂「馬克斯威」方程組

馬克斯威方程？

就是下列這些 ...

名稱	微分形式	積分形式
高斯定律	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint\!\!\!\oint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
高斯磁定律	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint\!\!\!\oint_{\mathbb{S}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$
法拉第感應定律	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\mathbb{L}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{B}}}{\mathrm{d}t}$
馬克士威-安培定律	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_{\mathbb{L}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{E}}}{\mathrm{d}t}$

您可以看到

- 裡面有
  - 微分 $$-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{B}}}{\mathrm{d}t}$$
  - 積分 $$\oint\!\!\!\oint_{\mathbb{S}} (\varepsilon \mathbf{E}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$
  - 微分 + 積分 $$\oint_{\mathbb{L}} (\mathrm{B}/\mu) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I_f + \frac{\mathrm{d}\Phi_{\varepsilon\mathbf{E}}}{\mathrm{d}t}$$

而且當時馬克斯威寫的 ...

- 是這個版本
  - 高斯磁定律：

$$\frac{d}{dx}(\mu\alpha) + \frac{d}{dy}(\mu\beta) + \frac{d}{dz}(\mu\gamma) = 0$$

  - 馬克士威 - 安培定律：

$$p = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} - \frac{1}{E^2}\frac{dP}{dt}\right)$$

$$q = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} - \frac{1}{E^2}\frac{dQ}{dt}\right)$$

$$r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} - \frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt}\right)$$

所以

- 學工程的人

需要學

- 微積分

還有

- 工程數學

裏面的那些

- 奇奇怪怪的符號

其實在講的是

- 某個函數的面積
- 等於另一個函數的斜率
- 的平方
- 然後再除以八 ...

像是下面這個

- 它叫波動方程式

$$\boxed{\nabla^2 E = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}$$

是馬克斯威

- 推論出「電磁波」的速度

  正好

- 等於「光速」的關鍵！

於是

- 馬克斯威猜測

光波

- 其實是一種電磁波 ...

另外

- 像是電腦裏、如果

你將一個影像

- 其中一份存成 .BMP 檔
- 另外一份存成 .JPG 檔

你會發現

- 這兩個檔案
- 大小差很大

差多大

- 有時 20 倍，有時到 1000 倍。
- 要看你的影像複雜度。

比較小的那個

- 是 JPG 檔

而 JPG 檔

- 是用傅立葉轉換中的 Cosine 轉換作的。
- 公式如下
  - 傅立葉正轉換：$$F(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}\,dx$$
  - 傅立葉逆轉換：$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(n)e^{inx}\,dn$$

而且

- 上面的那個公式還是「一維」的
- JPG 檔的壓縮，要用二維傅立葉轉換中的一半
- 也就是二維的 Cosine 轉換

傅立葉轉換

- 可以將一個函數
- 轉換成下列函數中的係數 a_n 與 b_n

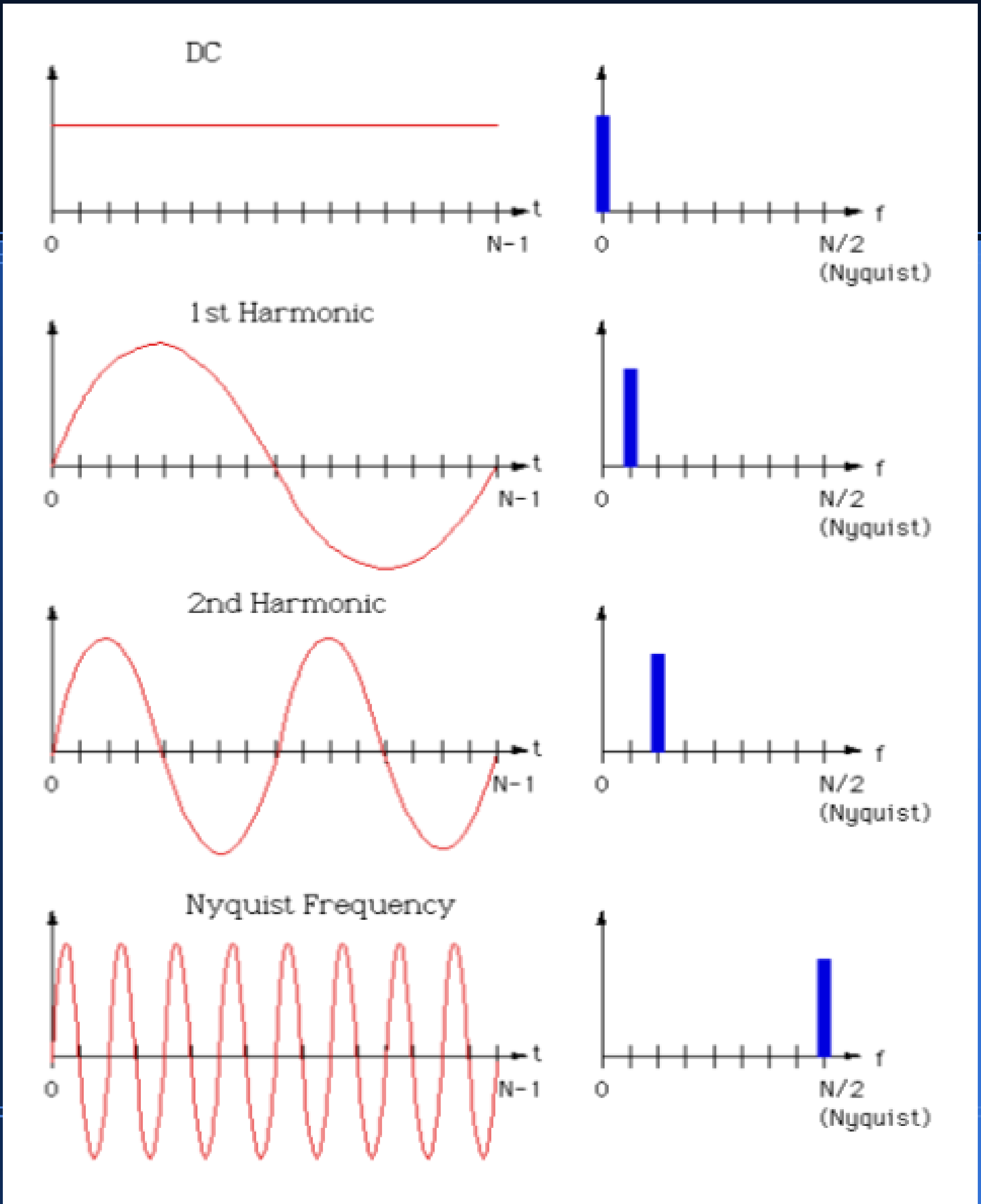
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$

其中

- n 很大的部份
  - 代表高頻區域（變化很快的部份）
  - 最高頻的部份就是每個相鄰點都是「黑白相間」
- n 很小的部份
  - 代表低頻區域（變化很慢的部份）
  - 最低頻的部份就是整張都是同一個顏色。

低頻

高頻


DC
t
0
N-1
f
0
N/2
(Nyquist)
1st Harmonic
t
0
N-1
f
0
N/2
(Nyquist)
2nd Harmonic
t
0
N-1
f
0
N/2
(Nyquist)
Nyquist Frequency
t
0
N-1
f
0
N/2
(Nyquist)

於是 JPEG

- 在編碼的時候
  - 保留了低頻部份的係數 $a_0 \ldots a_k$
  - 去掉了高頻部份的係數 $a_{k+1} \ldots a_n$
- 然後在解碼的時候
  - 將 $a_0 \ldots a_k$ 代回 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n cos(nx)$
  - 然後將 $a_{k+1} \ldots a_n$ 給丟了
  - 於是解回 f(x) 的近似值（高頻被去除了）

而這些

- 也正是為何電子資訊領域的人
- 要學微積分與工程數學的原因

事實上

- 剛剛所說的

在銀行上班

- 不需要學微積分
- 大至上是對的

但是

- 有個例外

假如你在

- 華爾街的某些銀行

他們的旗下

- 有些稱為 Hedge Found 的公司

在這些公司裏

- 也要用很多微積分
- 還有機率統計

以上

- 就是我所知道的
  - 微積分

    與

  - 工程數學
- 的用途了！

或許

- 你會有興趣
- 來學學微積分
- 也說不定！

對了

- 學完之後，記得

- 還要再學

工程數學喔！