

# 程式人《十分鐘系列》



## 用十分鐘瞭解 愛因斯坦的相對論

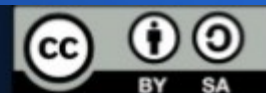
陳鍾誠

2016 年 8 月 26 日

# 就在前天

- 我們介紹了《歐氏幾何》！

程式人《十分鐘系列》



那些我們都曾經學過

但是卻幾乎沒有人知道自己學過的

《歐氏幾何》

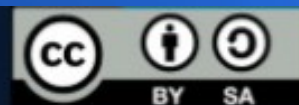
陳鍾誠

2016 年 8 月 24 日

# 然後在昨天

- 我們又介紹了《非歐幾何》

程式人《十分鐘系列》



那些我們幾乎都沒學過

但是也不太會想去學的

《非歐幾何學》

陳鍾誠

2016 年 8 月 25 日

# 《非歐幾何》

- 可以說是理解廣義相對論  
時空扭曲結構的關鍵！

# 所以今天

- 我們將會介紹

# 愛因斯坦的

## ●狹義與廣義相對論！

### 相對論 [編輯]

維基百科，自由的百科全書

**相對論**（英語：**Theory of relativity**）是關於**時空**和**重力**的理論，主要由**愛因斯坦**創立，依其研究對象的不同可分為**狹義相對論**和**廣義相對論**。相對論和**量子力學**的提出給物理學帶來了革命性的變化，它們共同奠定了現代物理學的基礎。相對論極大的改變了人類對宇宙和自然的「常識性」觀念，提出了「同時的相對性」、「**四維時空**」、「**彎曲時空**」等全新的概念。不過近年來，人們對於物理理論的分類有了一種新的認識——以其理論是否是決定論的來劃分古典與非古典的物理學，即「非古典的=量子的」。在這個意義下，相對論仍然是一種古典的理論。


$$E = mc^2$$

# 其實狹義相對論

- 與其說是《愛因斯坦》發明的！

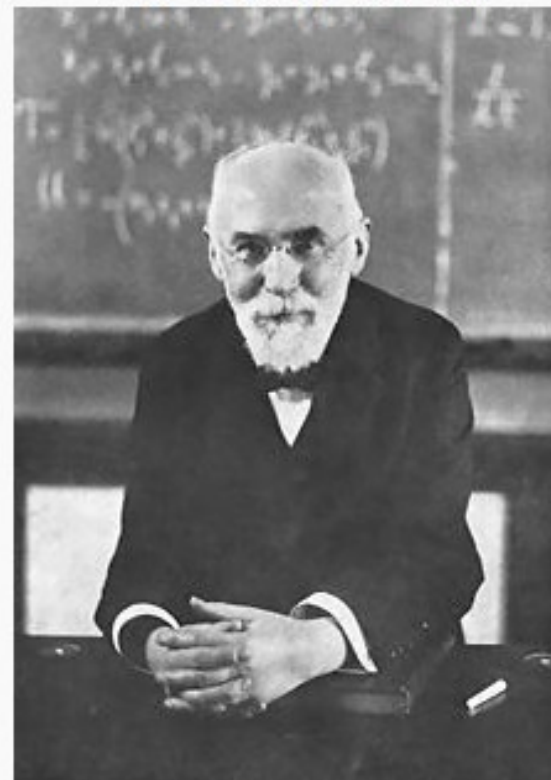


# 或許不如說是

## ● 《羅倫茲》發明的！

亨德里克·安東·勞倫茲（Hendrik Antoon Lorentz，1853年7月18日－1928年2月4日），荷蘭物理學家，他以與彼得·塞曼發現與解釋的「塞曼效應理論」獲得諾貝爾物理獎，他也推知變換（質量與速度）方程式，後來被用在愛因斯坦狹義相對論中，來描述空間與時間。

Hendrik Antoon Lorentz  
亨德里克·安東·勞倫茲



出生	1853年7月18日  荷蘭阿納姆
逝世	1928年2月4日（74歲）  荷蘭哈勒姆
居住地	 荷蘭
國籍	 荷蘭
研究領域	物理學家
機構	萊頓大學



# 這個羅倫茲的發明

## ● 就稱為《羅倫茲變換》！

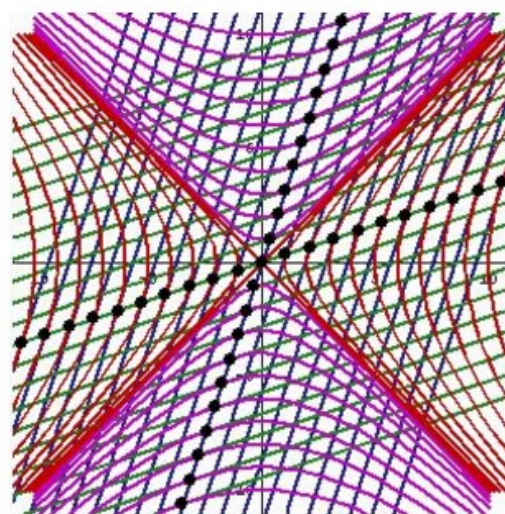
### 勞侖茲變換 [編輯]

維基百科，自由的百科全書

勞侖茲變換是觀測者在不同慣性參照系之間對物理量進行測量時所進行的轉換關係，在數學上表現為一套方程組。勞侖茲變換因其創立者——荷蘭物理學家亨德里克·勞侖茲而得名。勞侖茲變換最初用來調和19世紀建立起來的古典電動力學同牛頓力學之間的矛盾，後來成為狹義相對論中的基本方程組。

#### 目錄 [隱藏]

- 1 勞侖茲變換的提出
- 2 勞侖茲變換的數學形式
- 3 勞侖茲變換的四維形式
- 4 勞侖茲變換的推導
  - 4.1 從群論出發的推導
  - 4.2 符合群公理的轉換矩陣
  - 4.3 伽利略轉換
  - 4.4 勞侖茲變換



# 羅倫茲變換的數學如下

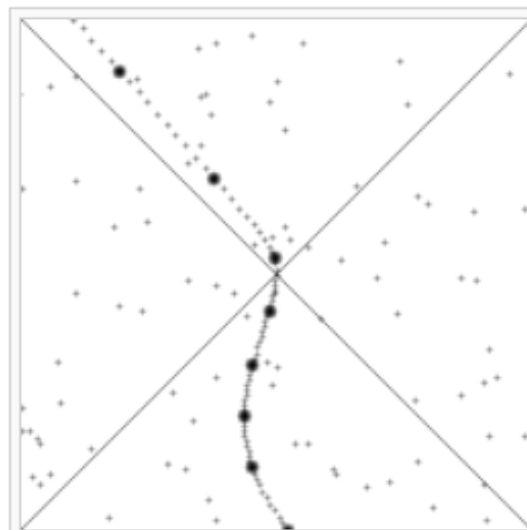
## 勞倫茲變換的數學形式 [編輯]

勞倫茲提出勞倫茲變換是基於以太存在的前提的，然而以太被證實是不存在的，根據光速不變原理，相對於任何慣性參照系，光速都具有相同的數值。愛因斯坦據此提出了狹義相對論。在狹義相對論中，空間和時間並不相互獨立，而是一個統一的四維時空整體，不同慣性參照系之間的變換關係式與勞倫茲變換在數學表達式上是一致的，即：

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

其中 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $t$ 分別是慣性座標系 $\Sigma$ 下的座標和時間， $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$ 、 $t'$ 分別是慣性座標系 $\Sigma'$ 下的座標和時間。 $v$ 是 $\Sigma'$ 座標系相對於 $\Sigma$ 座標系的運動速度，方向沿 $x$ 軸。

由狹義相對性原理，只需在上述勞倫茲變換中把 $v$ 變成 $-v$ ， $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$ 、 $t'$ 分別與 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $t$ 互換，就得到勞倫茲變換的逆變換式：



沿著快速加速的觀察者的世界線來看的時空。

豎直方向表示時間。水平方向表示距離，虛劃線是觀察者的時空軌跡（「世界線」）。圖的下四分之一表示觀察者可以看到的事件。上四分之一表示光錐-將可以看到觀察者的事件點。小點是時空中的任意的點。世界線的斜率（從豎直方向的偏離）給出了相對於觀察者的速度。注意看時空的圖像隨著觀察者加速時的變化。

# 只是羅倫茲

- 沒有辦法用突破性的想法去解釋自己的數學成果。
- 讓自己受限在，傳統的時空結構當中！

# 而愛因斯坦

- 則用他那狂放不拘思維，徹底的解放了《羅倫茲變換》的物理意義，於是相對論就誕生了！

# 現在、就讓我們看看

- 到底《羅倫茲變換》是甚麼東西！

# 學過古典物理的人都知道

- 牛頓那種粒子觀的世界
- 還有那  $F=ma$  的力學定律



# 然後在法拉第和馬克士威的年代

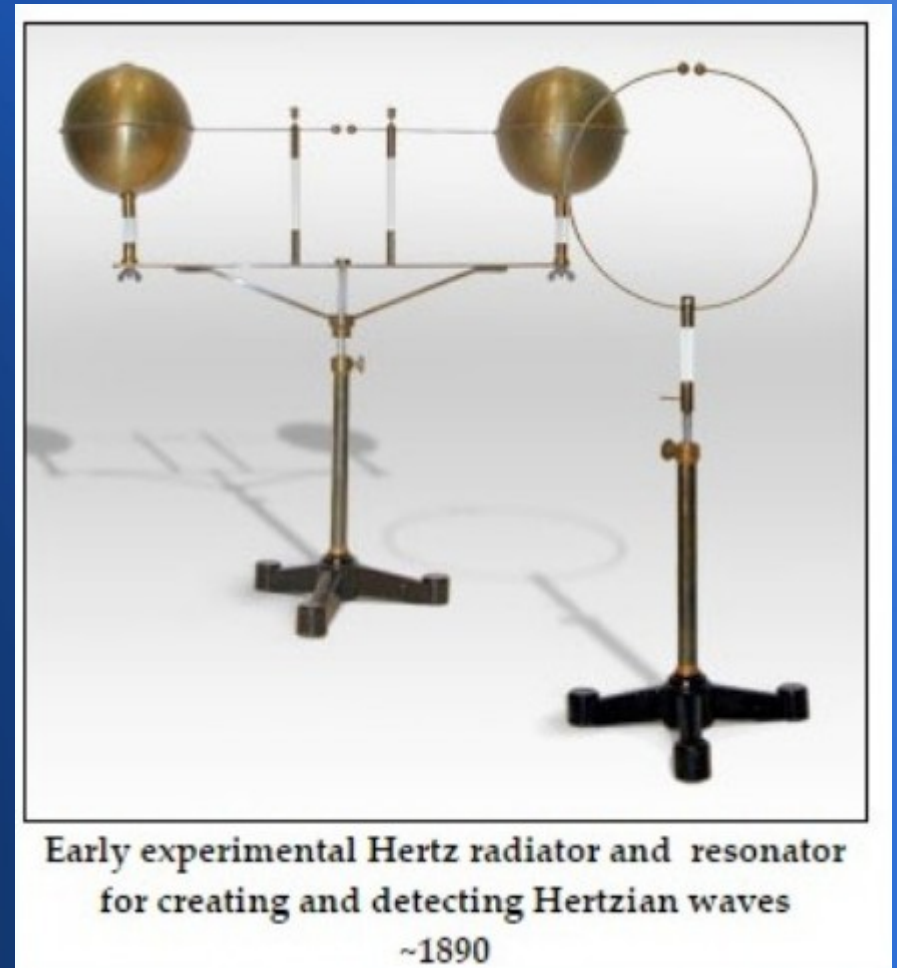
- 逐漸發展出了有別於《粒子觀》的電磁波理論！
- 而且馬克士威計算出電磁波的速度

$$c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ [公尺/秒]}$$

- 由於和光速相同，因此推論光是一種電磁波

# 後來《赫茲》在 1888 年

- 用圖中的儀器驗證了電磁波存在



# 接著《馬可尼》把成果商業化

- 用這種裝置來傳送摩斯電碼，然後開了馬可尼公司賺了大錢。
- ( 鐵達尼號沉沒時，上面就有馬可尼公司的設備和人員 )

# 問題是

- 《水波》是靠水傳遞的
- 《聲波》是靠空氣傳遞的
- 那麼《電磁波》到底是透過甚麼介質傳遞的呢？

# 關於這個問題

- 物理學家們認為，很久以前笛卡爾所提出的那種《充滿整個空間、無所不在的乙太介質》，可能真的存在！
- 這種乙太可以做為《絕對靜止座標系》的一種基質！

# 馬克士威本人

- 其實也不知道《乙太》到底存不存在！



# 但這位偉大的科學家

- 在 1879 年提出了一種探測方法

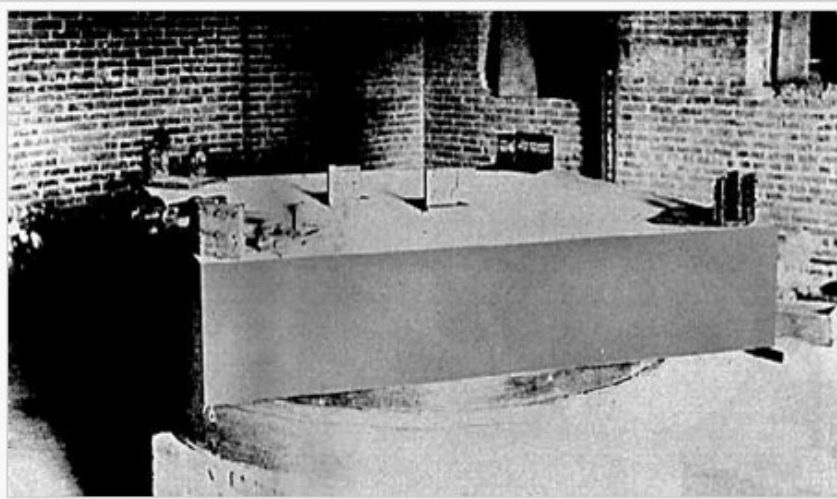
# 就是讓光線

- 分別在《平行》和《垂直》於地球的運動方向等距離的傳播
- 根據下列公式計算，《平行地球方向》的光波應該會比垂直方向還要慢一點點。

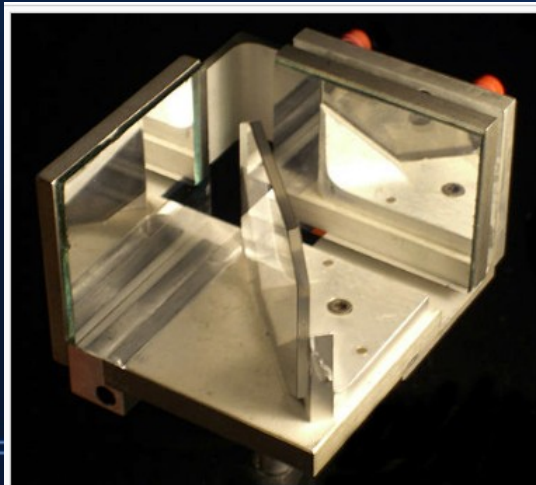
# 後來在 1881 年

- 美國的麥克生實踐的這個想法，動手去測量兩個方向是否有時間差。
- 如果有時間差的話，光波就會產生干涉條紋！

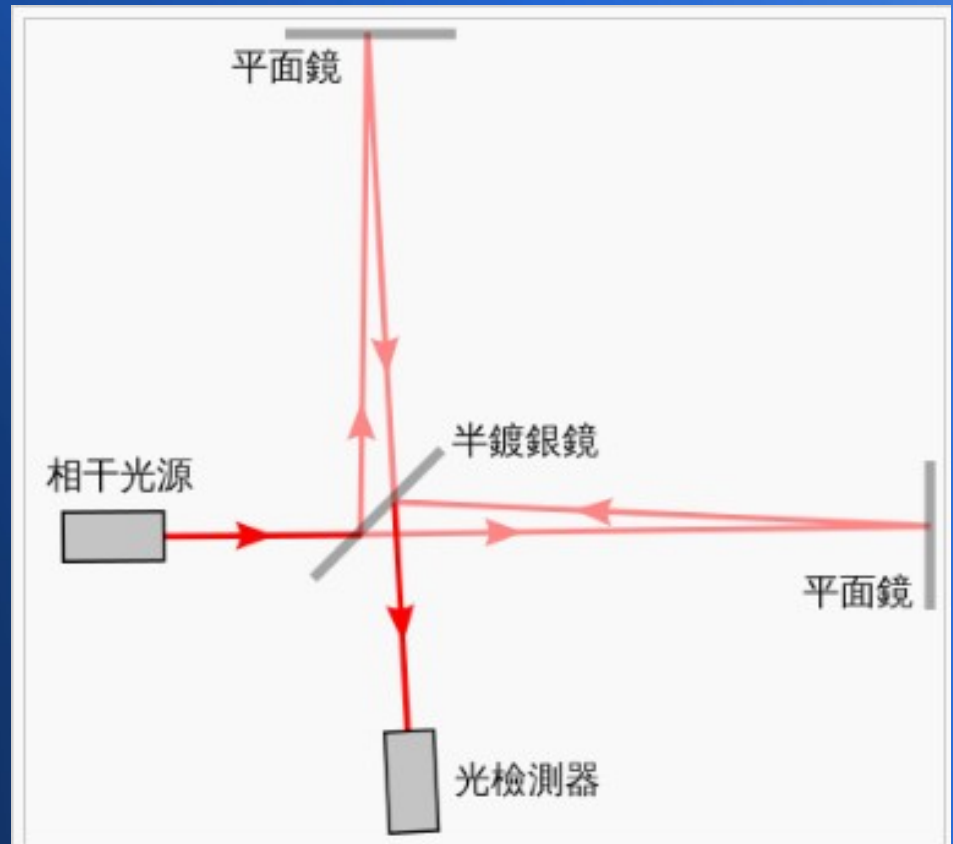
# 麥克生的實驗設備和方法如下



邁克生與莫雷的干涉儀設置，其安裝在一塊漂浮在圓形水銀槽上方。



邁克生干涉儀



邁克生干涉儀的光路圖（補償板未畫出）

# 結果

- 沒有發現任何干涉現象！

# 麥克生不死心

- 後來在 1887 年又和莫雷合作，做了一次更精密的實驗



# 結果仍然一樣

- 沒有任何干涉現象。

# 麥克生失望地認為

- 自己的實驗室失敗的！

## 但是、傳統的時空觀念

- 是非常頑固的
- 幾位物理學家開始試圖提出物體在以太風當中會收縮的理論，以便讓《麥克生的實驗》能《符合以太理論》。

# 其中一位

- 還精確推導出了這種收縮的數學公式，他就是《羅倫茲》。

# 羅倫茲的推導

- 其實已經很《離經叛道》了

# 因為他在 1892 年推導的結果認為

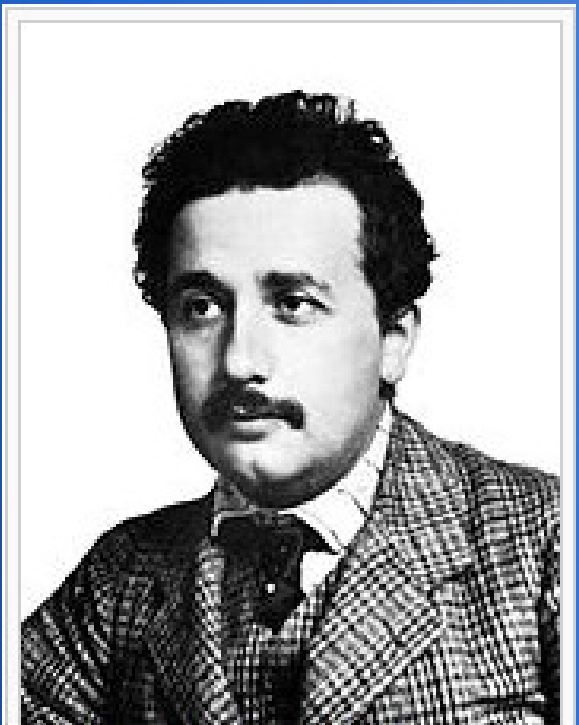
- 粒子的質量將隨著速度而增加
  - 牛頓的  $F=ma$  就必須有所修正
- 而且在羅倫茲轉換的體系下，任何物體的速度不得超過光速。（而且不管你用多大的力量推多久，都無法到達光速）。

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$



# 1905 年

- 那個好不容易才找到專利局工作的那位魯蛇《愛因斯坦》
- 終於穩定下來可以好好用腦袋思考一些問題了！



Albert Einstein in 1904  
(age 25)



# 結果那年

- 他連續發表了五篇論文  
其中三篇名留青史

# 第一篇是探討

- 液體懸浮粒子布朗運動的論文

# 第二篇是

- 延伸《普朗克方程式》的量子想法，  
提出光量子學說的光電效應論文。
- 後來愛因斯坦在 1921 年獲得諾貝爾  
獎，靠的主要就是這一篇！

# 第三篇就是

- 那驚天一擊的《狹義相對論》
- 論文的名稱是《論物體的電動力學》  
(英文譯名：On the Electrodynamics of Moving Bodies)

# 現在、就讓我們來看看

- 狹義相對論的前身，也就是《羅倫茲變換》，到底說些甚麼？

# 我們生活的世界

- 是一個三度空間，可以用三維的《笛卡兒》坐標  $(x, y, z)$  來定位每一個點
- 如果加上時間之後，就會變成四維的  $(x, y, z, t)$  座標系統。



# 根據牛頓定律 $F=ma$

- 我們知道如果沒有力  $F$  的作用
- 就沒有加速度  $a$

# 但是問題來了

- 假如有兩艘太空船，分別以無動力的方式在太空中等速移動
- 但是其中一艘《看來靜止》（因為我們和它的速度一樣）
- 另一艘則飛快向  $x$  軸方向前進！

# 這樣的話

- 在這兩個太空船上， $F=ma$  之類的運動定律是否還都成立呢？
- 如果從其中一台太空船看另一台，那會看到甚麼樣的運動定律呢？

# 您可以參考下列影片

- 思考一下背後的想法！



# 根據這樣的想法

- 羅倫茲推導出來，當我們從其中一艘看另一艘時，座標如果經過羅倫茲變換，那麼兩者就可以使用相同的物理定律公式。
- 這個推導假設光速在兩個座標系中都是恆定的  $3 \times 10^8$

# 以下是羅倫茲變換的數學式

- $(x, y, z, t)$  是第一艘太空船  $\Sigma$  的時空座標  
 $(x', y', z', t')$  是第二艘  $\Sigma'$  的時空座標

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

# 羅倫茲變換預示了幾個驚人的結果

- 那就是《長度收縮和時間延長》，簡稱《尺縮鐘慢》效應

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

長度收縮  
(尺縮)

時間延長  
(鐘慢)



# 關於《尺縮鐘慢》的推導

- 可以參考《劉柏彥》的兩個影片

YouTube video player showing a derivation of time dilation. The video title is "國中生都能懂的狹義相對論之時間膨脹原理". The video content includes a diagram of a light clock and the following equations:

$$T = \frac{2L}{c} \quad L = \frac{cT}{2}$$
$$L^2 = D^2 + \frac{v^2 T^2}{4}$$
$$\frac{c^2 T^2}{4} = D^2 + \frac{v^2 T^2}{4}$$
$$\frac{T^2}{4} (c^2 - v^2) = D^2$$
$$T = \frac{2D}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

國中生都能懂的狹義相對論之時間膨脹原理

YouTube video player showing a derivation of length contraction. The video title is "國中生都能懂的狹義相對論之長度收縮原理". The video content includes a diagram of a moving object and the following equations:

由後到前花了  $t_A$   
由前到後花了  $t_B$

整個事件花了  $T$

$$T = t_A + t_B = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v}$$
$$= \frac{L(c+v) + L(c-v)}{c^2 - v^2} = \frac{2LC}{c^2 - v^2}$$
$$T' = \frac{2L'}{c}$$

國中生都能懂的狹義相對論之長度收縮原理

# 羅倫茲認為這個結果

- 只是以第一艘太空船觀察者  $\Sigma$  的角色，透過光線觀察第二艘太空船  $\Sigma'$  所需要的轉換。

# 在羅倫茲變換下

- 如果兩艘太空船的相對速度很小，也就是  $v$  遠小於  $c$ ，那麼《羅倫茲變換》就會退化成古典力學中的《笛卡兒變換》

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \xrightarrow{v \ll c} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

# 但愛因斯坦不同

- 他認為《羅倫茲變換》，不僅僅是一種觀察者角度不同的問題，而是《時空真的並非線性》所造成的《尺縮鐘慢》效果。
- 換言之、尺是真的縮了，鐘也是真的慢了，而且在這裡不需要甚麼乙太來中介

# 因為愛因斯坦認為

- 《在所有慣性坐標系裏  
物理定律維持不變》

這就是所謂的《相對性原理》，  
由這原理發展出來的理論稱為  
《狹義相對論》！

## 狹義相對論的基本原理

[編輯]

- 光速不變原理。

在所有慣性系中，真空中的光速都

$$\text{等於 } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299\,792\,458$$

m/s ( $\mu_0$ ：真空磁導率， $\epsilon_0$ ：真空介電常數)，與光源運動無關。

- 狹義相對性原理。

在所有慣性系中，物理定律有相同的表達形式。這是力學相對性原理的推廣，它適用於一切物理定律，其本質是所有慣性系平權。



# 而且愛因斯坦還導出了 《相對論質量》

相對論質量 [編輯]

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$m_0$ 指絕對質量（及牛頓力學中的質量）， $m$ 為相對論質量。

由公式可以看出：

- 1.對於一個有質量的物體，其速度 $v$ 不可能等於或者超過光速，否則分母將會無意義或為一個虛數（註：光子沒有靜止質量，因此其速度可以達到光速；但是在其運動時，會有動量或者說能量，不屬於質量範疇）。
- 2.當某有質量之物體移動速率越接近光速，相對論質量會變重。
- 3.當 $v$ 遠小於 $c$ 時， $m$ 近似於 $m_0$ ，符合牛頓力學定律。

# 相對論力學

## 相對論力學 [編輯]

在狹義相對論中牛頓第二定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 應改寫成下式（ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 可解釋為下式的特例）

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

而動量 $\mathbf{P} = M\mathbf{v}$ ，其中 $M$ 非定值，所以根據微分計算式 $d(uv) = u dv + v du$ ，得

$$\mathbf{F} = \frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \frac{dM}{dt}\mathbf{v} + M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_0 \frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} + \gamma m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

得

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma^3 m_0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}{c^2} \mathbf{v} + \gamma m_0 \mathbf{a}.$$

由上式可見，加速度並不和力的方向一致，且隨著速度逐漸趨向於光速，物體的質量趨向於無窮大，加速度趨向於零。



# 相對論能量

相對論能量 [編輯]

根據 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 公式，運動時物體質量增大，同時運動時將會有動能，質量與動能均隨速度增大而增大。

根據 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$

得 $dE_k = \mathbf{F}dx = \frac{d\mathbf{p}}{dt}dx$

因為 $\frac{dx}{dt} = v$ ，所以 $dE_k = vd(mv) = v^2 dm + mv dv$

由 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 公式改寫而得 $m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$

因為 $m, v$ 都是 $t$ 的函數，將該式兩邊對 $t$ 微分，得 $mv dv = c^2 dm - v^2 dm$ ，

將結果帶入上式 $dE_k$ ，得

$$dE_k = c^2 dm$$

對其積分， $E_k = \int_{m_0}^m c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2$

這就是相對論下的動能公式。當速度為0時， $m = m_0$ ，所以動能為0。 $m_0 c^2$ 為物體靜止時的能量。而總能量=靜止能量+動能，因此總能量 $E = mc^2$ 。

# 相對論動量

相對論動量與能量 [編輯]

根據式  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  ,

等式左右兩邊平方，再同乘以光速的四次方

得:  $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

此外，不難證明:  $pc^2 = E\mathbf{v}$  .

上兩式說明動量與能量是密切相關的

當速度接近光速時， $v$ 約等於 $c$ ，因此最後一式可改寫為  $\mathbf{E} = pc$  .

# 還有最著名的 $E=mc^2$ 質能轉換式

zh.wikipedia.org/wiki/質能等價

因此， $\gamma m \mathbf{u}$  也就是運動質量的表達式，其中  $\gamma$  為洛倫茲因子。

## 方程的證明 [編輯]

以一外力  $\mathbf{F}$  對物體作功，根據功-動能定理，物體的微小動能變化為

$$dK = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot d\mathbf{p}$$

式中， $\mathbf{p}$  為物體的動量  $\gamma m \mathbf{u}$  (此處的  $m$  為靜止質量)，而  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  為物體的速度  $\mathbf{u}$ 。因此此式可改寫為

$$dK = \mathbf{u} \cdot d(\gamma m \mathbf{u}) = m \mathbf{u} \cdot d(\gamma \mathbf{u})。$$

根據以下等式(詳見四維速度)，

$$U_\mu U^\mu = -\gamma^2 c^2 + \gamma \mathbf{u} \cdot \gamma \mathbf{u} = -c^2 = \text{constant}$$

將等式的兩側取微分量並重新整理，

$$-2c^2 \gamma d\gamma + 2\gamma \mathbf{u} \cdot d(\gamma \mathbf{u}) = 0$$
$$\mathbf{u} \cdot d(\gamma \mathbf{u}) = c^2 d\gamma。$$

以此等式代入上方的  $dK$  關係式得

$$dK = mc^2 d\gamma$$
$$K = \int_{\mathbf{u}=0}^{\mathbf{u}=\mathbf{u}} mc^2 d\gamma(\mathbf{u}) = \gamma mc^2 - mc^2$$

此即為相對論下的動能表達式，注意式中  $\gamma mc^2$  僅與四維動量的時間分量相差一比例常數  $c$ 。若以此定義物體的總能量，

$$E \equiv P^0 c = \gamma mc^2$$

則  $E = K + mc^2$ 。其中  $mc^2$  為物體因具有質量而具有的能量，即

$$E_0 = mc^2。$$

註：若改以  $m_0$  表示內秉質量， $m = \gamma m_0$  表示相對論質量，則亦有  $E = mc^2$  之關係。

# 但是、我們能說

- 羅倫茲太過頑固，所以喪失了發現相對論的契機嗎？

# 其實《時空非線性》這個觀念

- 真的很難接受
- 不只是羅倫茲，幾乎所有當時的物理學家都無法接受。

為甚麼呢？

# 請仔細想想看

- 假如兩艘太空船以 0.999 倍光速互相遠離
- 第一艘太空船  $\Sigma$  和第二艘太空船  $\Sigma'$  兩者其實是對稱的
- 我看你的樣子，和你看我的樣子，只有左右不同而已，並沒有其他分別。



# 這樣的話

- 如果有一對雙胞胎 AB
  - A 在第一艘太空船  $\Sigma$  上
  - B 在第二艘太空船  $\Sigma'$  上
- 兩者 50 年後再度返航碰面！

# 那麼當 AB 完成宇宙航行

- 再度碰頭的時候，你會發現一個現象。
  - A 應該已經很老了，但會發現 B 青春永駐（因為鐘慢效應）
  - B 也應該已經很老了，但會發現 A 青春永駐（因為鐘慢效應）
- 那麼、到底是誰會比較老呢？（A 比 B 老，B 又比 A 老）

# 這就是著名的《孿生子悖論》

←

→

↺

https://zh.wikipedia.org/wiki/双生子佯谬

首頁

英雄聯盟基地

金城國民中學

老沈一說 (完整版) - Y

可疑的保姆(超完美)

Facebook

殺手之王 - 第二百四十

其他書

方針與指引

互助客棧

知識問答

字詞轉換

IRC即時聊天

聯絡我們

關於維基百科

資助維基百科

其他專案

維基共享資源

工具

連結至此的頁面

相關變更

上傳檔案

特殊頁面

可列印版

靜態連結

頁面資訊

維基數據 項目

引用此頁面

左側跳頂連結

其他語言

**孿生子悖論**是一個有關**狹義相對論**的**思想實驗**。有一對孿生兄弟，一個登上一宇宙飛船作長程太空旅行，而另一個則留在地球。結果當旅行者回到地球後，他發現自己比留在地球的兄弟更年輕。

這個結果似乎與狹義相對論矛盾：孿生兄弟中的每一個人都認為對方相對於自己運動，因此由於**時間膨脹**的作用，每一個人都認為對方應該比自己年輕。狹義相對論指出所有觀測者都有同等意義，沒有任何一個**參考系**（frame of reference）是會獲得優待的。因此旅行者會預期回到地球後會看見比他更年輕的孿生兄弟，但這就與他兄弟的想法恰好相反。

但實際上旅行者的期望是錯誤的：狹義相對論並沒有說所有觀測者都有同等意義，而是只有在**慣性系**中的觀測者（即沒有進行**加速運動**的觀測者）才有同等的意義。但宇宙飛船在旅途中毫無疑問是至少加速過一次的，所以旅行者並不是慣性系。反之，留在地球上的兄弟在整個航程中都是在慣性系之中（如果忽略源自地球質量及移動所帶來的相對較小的加速度），所以他能夠把他跟他兄弟分辨開來。

有些人在解決這弔詭時會認為狹義相對論並不能夠用於加速中的物體，而只可使用**廣義相對論**，這是不正確的。舉個例說，該對孿生兄弟的年齡是可以借著求**時空間隔**（spacetime interval）在他們任何一個慣性系中所行走的**時空路徑**（這些路徑被稱為**世界線**）上的**積分**來準確地計算出來的。近似的方法可以用來計算一加速中的宇宙飛船的相對性行為（參看**相對性火箭**）。狹義相對論唯一不適用的情況是當**重力**的影響是不能被忽略的時候，這時就真的需要用到廣義相對論。

這個結果是由狹義相對論所推測出的（移動時鐘的**時間膨脹**現象），而且能夠透過實驗來驗證。



時空圖

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%8C%E7%94%9F%E5%AD%90%E4%BD%AF%E8%B0%AC>

# 這種矛盾萬分的結果

- 應該是任何科學家都無法接受的！

# 愛因斯坦自己

- 也知道這是個嚴重的大問題

所以、他在發表狹義相對論之後

- 就不斷地進行思考，到底該如何化解《狹義相對論》的這種矛盾性！

# 愛因斯坦應該早已想到

- 問題的關鍵在於，兩個雙胞胎要能碰頭，勢必得經過一些《力量與加速度》的作用！

# 在加速度過程當中

- 時間又會慢下來！



# 因此、假如那對雙胞胎

- A 沒有加速度，B 則經過《減速後加速》的《返航》後回來找他！
- 那麼 A 將會驚奇的發現，自己已應老得不像話了，但是兄弟 B 竟然青春永駐，還是當年分開時的樣子。

# 但是如果他們兩人

- 都同樣經過對稱的減速後加速，然後返航到原先分開的地點碰頭的話
- 那麼兩人將會是相同的年紀，不會有很大的驚奇！

# 經由這樣的思考

- 《愛因斯坦》開始建構他的  
廣義相對論！

# 在建構廣義相對論的過程中

- 必須考慮加速度所造成的問題

# 但是愛因斯坦厲害的地方是

- 他不只考慮《加速度》的問題，還把《重力》所造成的效果一併考慮進來！

# 他把《重力》與《加速度》

- 合併在一個稱為《等效原理》的前提下！

zh.wikipedia.org/wiki/等效原理



## 弱等效原理 [編輯]

弱等效原理原是指觀測者不能在局部的區域內分辨出由**加速度**所產生的**慣性力**或由物體所產生的**引力**，而它是由**引力質量**與**慣性質量**成正比例這一事實推演出來，這個關係首先是由**伽利略**及**牛頓**用一系列的實驗斷定出來。

## 強等效原理 [編輯]

強等效原理是指在時空區域的一點內的引力場可用相應的局域慣性參考系去描述，而**狹義相對論**在其局域慣性參考系中完全成立。

# 所謂的《等效原理》

- 就是對於身在其中的人而言  
《加速度》和《重力》  
是無法區分的。

# 舉例而言

- 如果你在一個超長電梯裡，以  $a$  的加速度上升。
- 和你在一個  $F=ma$  的引力場裡，所觀察到的世界，將會擁有一模一樣的物理法則
- 兩者完全無法區分！
- 這就是所謂的《等效原理》。



# 於是

- 愛因斯坦開始去建構出，能夠支持  
《等效原理》和《相對性原理》的  
《時空幾何學》！

但是他對這種非歐幾何學

- 完全是個外行！

# 所以他向好朋友

- 數學家《格羅斯曼》求助！

# 最後、透過非歐幾何學中的 《黎曼幾何》

- 還有描述《幾何變換》的《張量》  
數學理論
- 建構出了《廣義相對論》的數學體系！

# 在廣義相對論裡面

- 重力和加速度一樣，具有《讓鐘慢下來》的效果。

所以在一個強大的引力場中

- 時間是過得比較慢的！

因此假如你活在一個

- 超強的重力場裡面！

那麼對遠離該引力場的觀察者而言

- 你基本上是《青春永駐》的



# 還記得前幾年有部電影

## ● 叫做《星際效應》



馬修·麥康納（左）與安·海瑟薇（右）在電影中分別飾演庫珀和艾米莉亞·布蘭德博士。

### 星際效應 *Interstellar*



電影海報

### 基本資料

導演	克里斯多福·諾蘭
監製	蓮達·奧比斯特 愛瑪·湯瑪斯 克里斯多福·諾蘭
編劇	克里斯多福·諾蘭 強納森·諾蘭
主演	馬修·麥康納

# 當太空船上的人

- 下去那個重力場強大的星球，經過十幾個小時後返為太空船

# 卻發現了船上的夥伴

- 已經老到快要死了！

# 星際效應裡的這個橋段

- 背後的科學基礎就是  
《廣義相對論》中引力場會  
讓《鐘慢下來》的理論！

# 現在

- 我們應該解釋完《狹義與廣義相對論》了！

但是慢著

# 到底愛因斯坦

- 從《非歐幾何》和《張量》當中得到了甚麼東西，才能夠讓他得以建構出《廣義相對論》呢？

# 愛因斯坦的相對論

- 除了《麥克生》的以太偵測實驗之外，究竟有甚麼實證基礎嗎？



# 還有愛因斯坦

- 到底是如何推導出《廣義相對論》方程式的？

# 關於這點

- 我還沒有能力詳細描述！

# 但是我感覺到

- 這和《幾何變換》有關！
- 也和《張量》這門數學有密切關係

# 以下是維基百科的張量描述

- 您可以看到愛因斯坦與張量數學發展的關係

## 背景知識 [編輯]

「張量」一詞最初由威廉·羅恩·哈密頓在1846年引入，但他把這個詞用於指代現在稱為模的對象。該詞的現代意義是沃爾德馬爾·福格特在1899年開始使用的。

這個概念由格雷戈里奧·里奇-庫爾巴斯托羅在1890年在《絕對微分幾何》的標題下發展出來，隨著1900年列維-奇維塔的經典文章《絕對微分》（義大利文，隨後出版了其他譯本）的出版而為許多數學家所知。隨著1915年左右愛因斯坦的廣義相對論的引入，張量微積分獲得了更廣泛的承認。廣義相對論完全由張量語言表述，愛因斯坦從列維-奇維塔本人那裡學了很多張量語言（其實是Marcel Grossman，他是愛因斯坦在蘇黎世聯邦理工學院的同學，一個幾何學家，也是愛因斯坦在張量語言方面的良師益友 - 參看Abraham Pais所著《上帝是微妙的（Subtle is the Lord）》），並學得很艱苦。但張量也用於其它領域，例如連續力學，譬如應變張量（參看線性彈性）。

注意「張量」一詞經常用作張量場的簡寫，而張量場是對流形的每一點給定一個張量值。要更好的理解張量場，必須首先理解張量的基本思想。

## 定義 [編輯]

一個 $(m, n)$ 型的張量被定義為一個多重線性映射(multilinear map)<sup>[1]</sup>

$$T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{m \text{ copies}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ copies}} \rightarrow \mathbb{R},$$

其中 $V$ 是向量空間， $V^*$ 是對應的對偶空間。

# 在傳統的歐氏幾何中

- 如果你進行《平移、旋轉、鏡像》等動作，那麼並不會改變歐氏幾何命題的成立與否。
- 因此《平移、旋轉、鏡像》被稱為《歐幾里得運動群》。

# 這些幾何操作

- 通常可以用矩陣進行表達

- 繞  $x$ -軸的主動旋轉定義為：

$$\mathcal{R}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix}$$

# 假如我們加上《縮放》操作

- 那麼得到的幾何學稱為《相似幾何學》
- 這在《電腦繪圖》的領域很有用！

縮放可以表示為縮放矩陣。要用一個向量  $v = (v_x, v_y, v_z)$  縮放一個物體，每個點  $p = (p_x, p_y, p_z)$  都需要乘以縮放矩陣：

$$S_v = \begin{bmatrix} v_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{bmatrix}$$

# 愛因斯坦的數學老師《閔可夫斯基》

- 在閱讀了《狹義相對論》之後，發展出了  
《閔可夫斯基幾何學》
- 這個幾何學保住了《愛因斯坦的相對性原理》！
- 而羅倫茲變換就是《閔可夫斯基幾何學》的一個  
模型（或說轉換張量）！



# 以下是維基百科的閔可夫斯基時空描述

zh.wikipedia.org/wiki/閔可夫斯基時空



阿爾伯特·愛因斯坦在瑞士蘇黎世聯邦科技大學時期的數學老師赫爾曼·閔可夫斯基在愛因斯坦提出狹義相對論之後，於1907年將愛因斯坦與亨德里克·勞侖茲的理論結果重新表述成(3+1)維的時空，其中光速在各個慣性參考系皆為定值，這樣的時空即以其為名，稱為閔可夫斯基時空，或稱閔可夫斯基空間。

愛因斯坦一開始不認為這樣的表述有何重要性，但當他1907年開始轉往廣義相對論發展時，發現閔可夫斯基時空可說是其所要發展的理論架構的基礎，轉而對這樣的表述採取高的評價。

## 目錄 [隱藏]

- 1 標準基底
- 2 因果結構
- 3 相關條目
- 4 參考文獻
- 5 外部連結

## 標準基底 [編輯]

閔可夫斯基時空的一組常用標準基底是四個互相正交的向量的集合( $e_0, e_1, e_2, e_3$ )使得

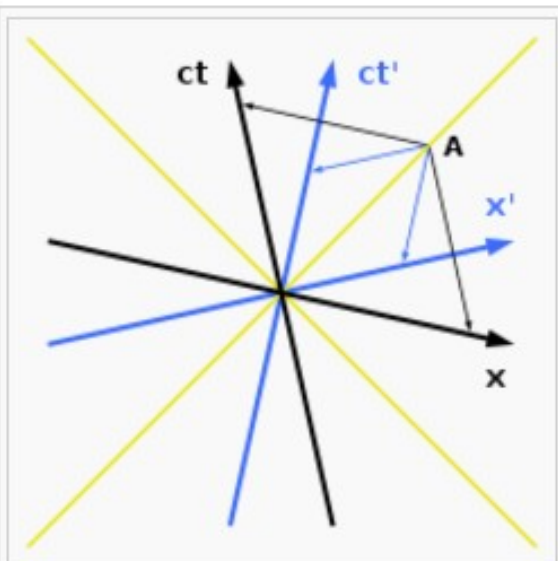
$$-(e_0)^2 = (e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = 1$$

這些條件可以更簡要地寫成如下形式：

$$\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu}$$

# 這種時空對應到的是一種 錐狀的曲面幾何學

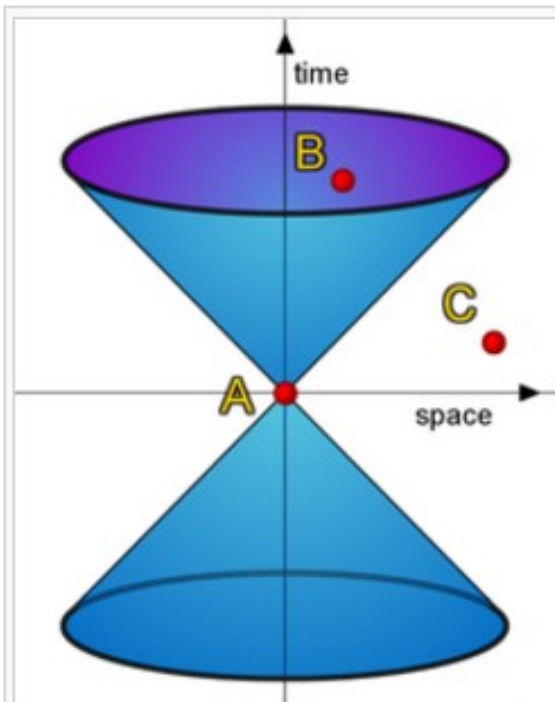
## 光錐 [編輯]



即使如何轉換慣性參考系，光錐依然不變

若有一道光經過 $(0,0,0,0)$ ，它所有可能的世界線是兩個圓錐面，圓錐的頂角是 $90^\circ$ ，一個在 $ct \leq 0$ （未來），另一個在 $ct \geq 0$ （過去），稱為光錐。圓錐面將平面分成五部分

- 未來光錐內的點（表示的事件），與原點是類空的；
- 過去光錐內的點，與原點是類空的；
- 光錐外的點（有 $x \leq 0, x \geq 0$ 兩邊），與原點是類時的；
- 在光錐上的點，是類光的。



光錐：在圖中， $C$ 與 $A$ 是類時的， $B$ 與 $A$ 是類空的

## 空間收縮 [編輯]

# 其圖形稱為閔可夫斯基圖

## 閔考斯基圖 [編輯]

維基百科，自由的百科全書

**時空圖**，又稱**閔可夫斯基圖**，用以表示**閔可夫斯基時空**的事件的坐標。它是一種理解**狹義相對論**現象的工具。

在四維的坐標系，以時間乘以**光速**（ $ct$ ）為其中一軸，稱之為時間軸；其他的**x**軸、**y**軸、**z**軸，稱之為空間軸。在這四維時空上的每一點，都代表一個事件**E**。對應特定的**慣性參考系**，**E**發生的時間和地點( $ct, x, y, z$ )。

每個質點在時空的活動都可以在時空圖上以連續的曲線表示，稱為**世界線**。

例如，在直角坐標繫上，若質點均速運動， $x(t) = vt$ ，它的世界線便是一條穿過原點、斜率為 $v/c$ 的直線(斜率是關於時間軸**ct**軸的，而非**x**軸)。若質點是**簡諧運動**， $x(t) = \sin \omega t$ ，它的世界線便會一條沿時間軸變化的**正弦**曲線。

（為了方便在平面上表示，下面的閔可夫斯基圖多數只有時間軸和一條空間軸**x**軸。）

# 而愛因斯坦的任務

- 則是將《閔可夫斯基幾何》延伸，  
以便找到一個模型，可以容納  
《加速度與引力場》所造成的效果

# 於是以下狹義相對論的模型

在狹義相對論中，微積分、矩陣為其所用到的主要數學工具，配合閔可夫斯基時空的轉換以及勞倫茲不變量的使用，粗略地描述了時、空的性質。當s'座標系在s座標系沿x軸作等速v運動時，其轉換以以下方程式表示：

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

其具有以下不變形式：

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

或者寫成微分形式

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

在適當地選取座標系可使 $c = 1$

對於牛頓力學中的動量、能量作了以下的修正：

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$E = mc^2$$

其中

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ } m_0 \text{ 為物質在靜止下的質量}$$

能量和動量有以下關係：

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

# 進一步擴充為廣義相對論

//zh.wikipedia.org/wiki/廣義相對論中的數學 ☆



## 廣義相對論 [編輯]

狹義相對論僅限於等速、時空可近似平坦地情況下，然而在討論大尺度且有重力場的情況下，就必須使用廣義相對論。

愛因斯坦認為，慣性坐標系並沒有優於其他坐標系，一切的物理定律應在任何參考座標系下皆成立，所有的變換應都是協變的。因此，在其論文中，大量地使用稱之為張量 (Tensor) 的數學工具，其方程式往往是非線性的，因此很難求解。

## 數學形式 [編輯]

一小段弧長 $ds$ 平方的不變式

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$g_{\mu\nu}$  為度規張量

$dx^\mu$  和  $dx^\nu$  為逆變張量

質點沿測地線運動，測地線方程式可以用哈密頓原理或是平行位移(parallel transportation)等方式推導，以下為測地線方程式：

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0$$

$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$  為克里斯多福符號

在非歐式空間中，描述空間曲率的張量為黎曼－克里斯多福張量

$$R_{\nu\rho\sigma}^\beta = \frac{\partial \Gamma_{\nu\sigma}^\beta}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\rho}^\beta}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta$$



# 並且發展出重力場方程式

//zh.wikipedia.org/wiki/爱因斯坦场方程



愛因斯坦重力場方程式 [編輯]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

其中

- $G_{\mu\nu}$  稱為愛因斯坦張量，
- $R_{\mu\nu}$  是從黎曼張量縮併而成的里奇張量，代表曲率項；
- $R$  是從里奇張量縮併而成的純量曲率(或里奇數量)；
- $g_{\mu\nu}$  是從(3+1)維時空的度量張量；
- $T_{\mu\nu}$  是能量-動量-應力張量，
- $G$  是重力常數，
- $c$  是真空中光速。

愛因斯坦場方程式是一組含有若干4階對稱張量的張量方程式。每一個張量都有10個獨立的分量。由於4個比安基恆等式，我們可以將10個愛因斯坦場方程式減少至6個獨立的方程組。這導致了度規張量 $g_{\mu\nu}$ 有4個自由度，與座標選取的4個自由度是對應的。

# 透過這個張量方程式

- 可以進行很多物理預測！

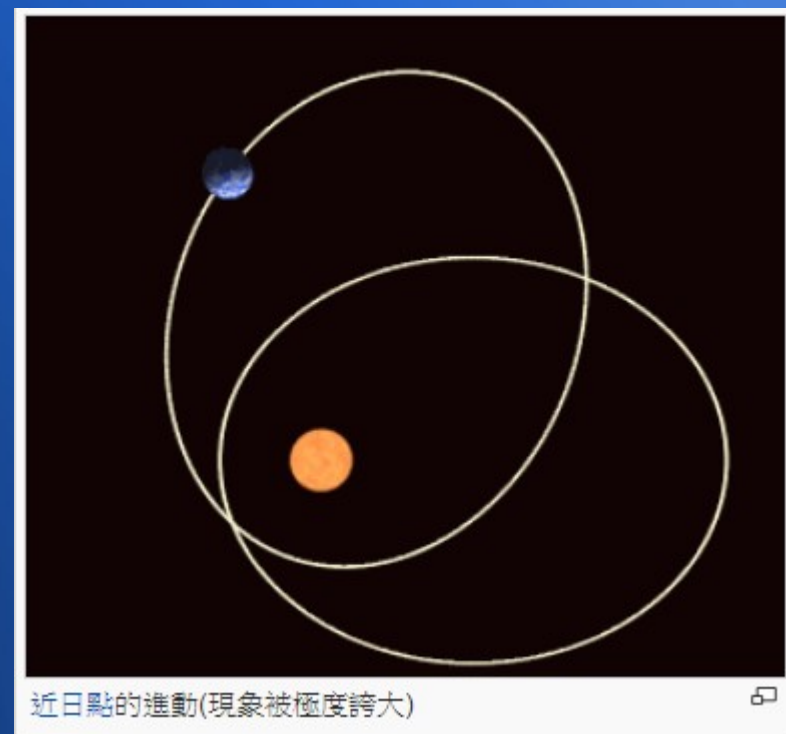


# 這些預測

- 主要是在超大尺度的天文學領域！

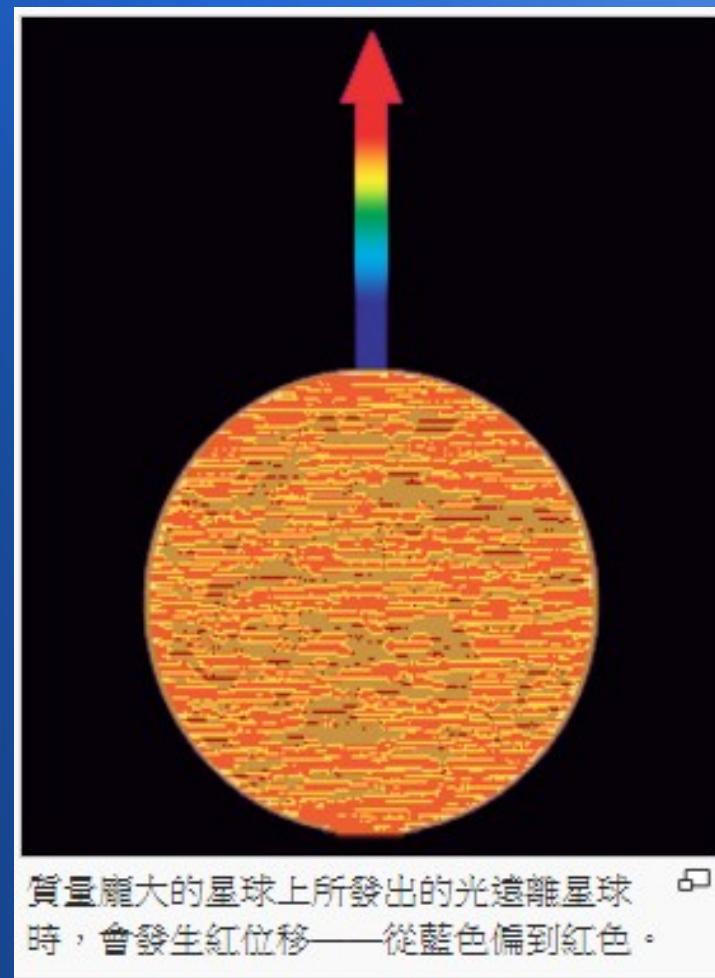
# 第一個實證案例

- 是《廣義相對論》很好的解釋了《水星》這顆特別靠近太陽的星球，會產生《進動》(precession)的現象。
- 傳統牛頓力學以為水星附近還有顆《火神星》但是卻一直找不到！
- 但是根據廣義相對論，很好的解釋了原本無法解釋的那個 43 秒角度的誤差！



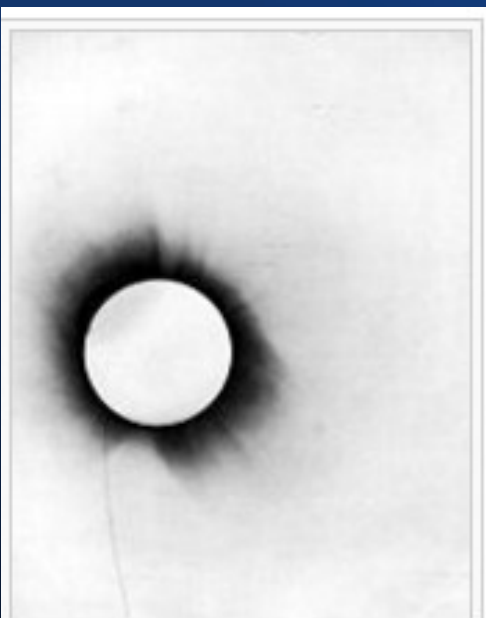
# 第二個實證案例

- 是引力的紅移現象！
- 也就是在強引力場中光譜會波長會變長（紅移）！
- 天文學家的觀測證實了這一點！

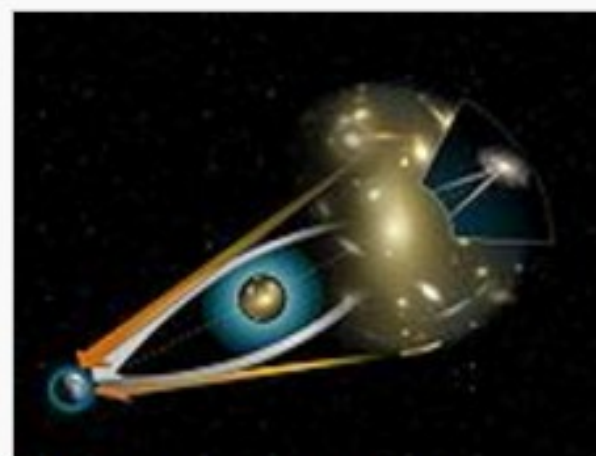


# 第三個實證案例

- 是引力場使光線偏轉的預測



亞瑟·愛丁頓爵士拍攝  
的1919年日食照片，  
1920年刊登於他的論文當  
中，並且宣布日食實驗成  
功



從遙遠光源發射出的光  
波，經過大質量天體附近  
時，會被其重力場偏折。  
橘色箭透露出光源的表觀  
位置；白色箭透露出光源  
的真實位置。

# 1919 年日全蝕的時候

- 英國愛丁頓和克勞姆林分別於非洲的《普林西比島》和南美的《索布拉爾島》拍攝
- 帶回的照片經過比對，發現經過太陽的星光，確實發生了《廣義相對論中預測的 1.7 秒（角度）的偏差》！



# 另外還有《重力時間延遲》

## 重力時間延遲 [編輯]

1963年，**歐文·夏皮羅**（Irwin Shapiro）提出另一種可以在太陽系內進行的實驗，稱為**夏皮羅實驗**。這實驗不同於前述三種古典實驗，因此又稱為第四種檢驗廣義相對論的「古典實驗」。夏皮羅表明，被其它行星反射的雷達信號，其來回時間會出現相對論性時間延遲，這效應稱為**重力時間延遲效應**。<sup>[29]</sup>與直線路徑相比較，光子在掠過太陽時彎曲路徑所產生的時間延遲微不足道，但是廣義相對論預測，在光子靠近太陽的**重力場**時，時間延遲效應會因**時間膨脹**而逐漸增加。對水星和金星被太陽掩食前後的觀測符合廣義相對論的預測，誤差為5%。<sup>[30]</sup>更近期的**卡西尼-惠更斯號**進行類似實驗，結果與廣義相對論相符，誤差只有0.002%。<sup>[31]</sup>甚長基線干涉測量也測量了木星<sup>[32][33]</sup>和土星<sup>[34]</sup>經重力磁性修正後的重力時間延遲效應。



位於土星的**卡西尼號**向地球發送的信號在太陽的重力場中延遲

# 以及偵測到《重力波》的證據等等

## ● 都符合廣義相對論的描述！

### 對重力波的直接探測 [編輯]

如前段所述，對脈沖雙星系統的觀測已經間接證實了重力波的存在。近期建成的幾座重力波探測器試圖直接探測因天文事件而產生的重力波，例如，兩顆中子星碰撞在一起。目前靈敏度最高的探測器是從2002年運作至今的雷射干涉重力波天文台（LIGO）。一些正在研發或計劃中的實驗具有更高的探測靈敏度，這包括正在興建的進階LIGO探測器，以及籌劃中的雷射干涉空間天線（LISA）。科學家預期進階LIGO探測器將會每天探測到重力波事件。

2016年2月11日，雷射干涉重力波天文台（LIGO）團隊於華盛頓舉行的一場記者會上宣布人類對於重力波的首個直接探測結果。所探測到的重力波來源於雙黑洞融合。兩個黑洞分別估計為29及36倍太陽質量，這次探測為物理學家史上首次由地面直接成功探測重力波。<sup>[67]</sup>

# 因此

- 科學界現在已經認可，相對論是個優秀的科學理論！



但是、相對論還是有弱點的

# 像是為了使宇宙能呈現為靜態

- 也就是《既不膨脹也不收縮》
- 於是愛因斯坦加入了一個《宇宙常數》

## 添加宇宙常數項 [編輯]

愛因斯坦為了使宇宙能呈現為靜態宇宙（不動態變化的宇宙，既不膨脹也不收縮），後來又嘗試加入了一個常數 $\Lambda$ 相關的項 $\Lambda g_{\mu\nu}$ 於場方程式中，使得場方程式形式變為

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

可以注意到 $\Lambda g_{\mu\nu}$ 這一項正比於度規張量，而維持住守恆律：

$$\nabla_\nu(\Lambda g_{\mu\nu}) = \Lambda \nabla_\nu(g_{\mu\nu}) = 0$$

此一常數 $\Lambda$ 被稱為宇宙常數。

這個嘗試後來因為兩個原因而顯得不正確且多此一舉：

1. 此一理論所描述的靜態宇宙是不穩定的。
2. 十年後，由愛德溫·哈伯對於遠處星系所作觀測的結果證實我們的宇宙正在膨脹，而非靜態。

因此， $\Lambda$ 項在之後被捨棄掉，且愛因斯坦稱之為「一生中最大的錯誤」("biggest blunder [he] ever made")<sup>[4]</sup>。之後許多年，學界普遍設宇宙常數為0。

# 但是十年後

- 由《愛德溫·哈伯》對於遠處星系所作觀測的結果證實我們的宇宙正在膨脹，而非靜態。
- 這種膨脹就像《氣球膨脹時表面所產生的效果》。

# 另外、由於愛因斯坦認為

- 量子力學的機率模型與測不準原理違反他的物理想法
- 因為他認為《上帝不會創要一個需要擲骰子才能解決的宇宙》

# 於是沒有進入量子力學領域

- 並且常常在《索維爾會議》上和《波爾》辯論，提出很多想要駁倒量子力學的論點。
- 但是《量子力學》終究成為了繼《相對論》後最重要的物理革命。

# 不過愛因斯坦的相對論

- 預示了  $E=mc^2$  這樣的質能轉換法則
- 由於光速  $c=3*10^8$  非常的大
- 所以少許的質量就能釋放出非常龐大的能量。

# 後來在 1932 年

- 英國科學家詹姆斯·查德威克發現了中子
- 由於中子不帶電，所以可以長驅直入原子核，將原子核轟到分裂。

# 當原子核分裂成兩個粒子的時候

- 會釋放出 2 到 3 個中子，引起連鎖反應
- 而且分裂時喪失一些質量，這些質量會轉為強大的能量
- 這就是原子彈的原理！



# 1934 年

- 義大利物理學家費米（Fermi）以中子撞擊鈾元素，首次發現核分裂反應
- 幾經研究，科學家最初發現天然鈾含有鈾 238 及鈾 235 兩種同位素，只有後者受中子撞擊後，會發生分裂反應。

# 1933 年、愛因斯坦得知希特勒上台

- 於是決定不回德國
- 但是二次大戰開始後，很多科學家擔心德國納粹會先製造出原子彈，於是  
由愛因斯坦寫信給羅斯福總統，建議  
研製原子彈。

# 後來、美國的曼哈頓計畫

- 果真研製出了原子彈
- 那時德國已經投降，但原子彈還是被投到了日本。

# 原本就是和平主義者的愛因斯坦

- 很擔心核武器會造成更大的毀滅，於是發表了很多宣言，致力於反核武活動。

# 二次大戰後

- 愛因斯坦仍繼續研究擴充《廣義相對論》，希望能發展出《統一場論》
- 但是統一場論並沒有得到好的成果，愛因斯坦就於 1955 年去世！

# 現在

- 我們已經講解完關於相對論的那些事情了！

或許還沒辦法很詳細

但是



請恕筆者能力有限！

這已經是

我盡力理解的結果了！

希望您會喜歡

# 今天的十分鐘系列

我們下回見！

Bye Bye!