

作业一：给出黎曼可积和勒贝格可积的定义， 并分析二者的区别

陈一如
信息与计算科学 3200104404

2022 年 6 月 27 日

这是一个来自分析学领域的关于积分的问题，黎曼积分是我们最常见的积分形式，而勒贝格积分是黎曼积分的一种拓展，他将积分运算拓展到任何测度空间之中，一下给出这两种积分的定义和区别。

1 定义

1.1 黎曼可积定义

1.1.1 定义 1

设闭区间 $[a, b]$ 上有 $n - 1$ 个点，依次为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

他们把区间 $[a, b]$ 分成 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$. 这些分点或者这些闭子区间构成对 $[a, b]$ 的一个分割，记为

$$T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ 或 } \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n\}$$

小区间的长度为 $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, 并记

$$\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\},$$

称为分割 T 的模。

1.1.2 定义 2

设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的一个函数. 对于 $[a, b]$ 上的一个分割 $T = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n\}$, 任取点 $\xi_i \in \Delta_i, i = 1, 2, \dots, n$, 并作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

称此和式为函数 f 在 $[a, b]$ 上的一个积分和, 也称作黎曼和.

1.1.3 定义 3

设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的一个函数, J 是一个确定的实数. 若对任给的正数 ε , 总存在着某一个正数 δ 使得对任何分割 T , 以及在其上任意选取的点集 $\{\xi_i\}$, 只要 $\|T\| < \delta$, 就有

$$|\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - J| < \varepsilon$$

则称函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积或者黎曼可积; 数 J 称为 f 在 $[a, b]$ 上的定积分或者黎曼积分, 记作

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

其中, f 称为被积函数, x 称为积分变量, $[a, b]$ 称为积分区间, a, b 分别称为这个定积分的上限和下限.

1.2 勒贝格可积定义

1.2.1 非负简单函数的勒贝格积分

设 D 是可测集, $\{E_k\}$ 是 D 的有限个或可数个两两不相交的可测子集, 使得 $\bigcup E_k = D$ 则称 $\{E_k\}$ 为 D 的一个分划.

设 f 是可测集 D 上的非负简单函数. 于是有 D 的分划 $\{E_i\}_{1 \leq i \leq S}$ 以及非负实数组 $\{a_i\}_{1 \leq i \leq S}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=1}^S a_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in D.$$

此时我们定义 f 在 D 上的勒贝格积分为

$$\int_D f(x) dx = \sum_{i=1}^S a_i m(E_i),$$

并且当 $\int_D f(x) dx < \infty$ 时, 称 f 在 D 上 L 可积.

1.2.2 非负可测函数的勒贝格积分

设 f 是可测集 D 上的非负可测函数. 可以证明, 取 D 上的非负简单函数列 $\{f_n\}$, 使得对每一 $x \in D$, $\{f_n\}$ 单增收敛于 $f(x)$. 此时 f 在 D 上的勒贝格积分定义为

$$\int_D f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n dx.$$

并称 f 的积分由 $\{f_n(x)\}$ 来定义. 此外当 $\int_D f dx < \infty$, 称 f 在 D 上 L 可积.

1.2.3 一般可测函数的勒贝格积分

设 f 是可测集 D 上的可测函数. 对每一 $x \in D$, 令

$$f_+ = \max \{0, f(x)\}, f_- = \max \{0, -f(x)\},$$

则 f_+ 和 f_- 分别称为 f 的正部和负部, 他们都是非负可测函数, 并且

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x),$$

今若 $\int_D f_+ dx$ 和 $\int_D f_- dx$ 不同时为 ∞ 则 f 在 D 上的勒贝格积分定义为

$$\int_D f = \int_D f_+ + \int_D f_-,$$

此外当 $\int_D f dx$ 有限时, 称 f 在 D 上 L 可积, 并记为 $f \in L(D)$.

2 区别

2.1 定理

2.1.1 定理 1

为了使 $[a, b]$ 上的有界函数 f 是 R 可积, 充分必要条件是 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续. 此外, 当 f 为 R 可积时, f 一定 L 可积, 并且两个积分值相等.

2.1.2 定理 2

若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 在任何有限区间上有界, 且它在 $(-\infty, +\infty)$ 上的广义 R 积分绝对收敛, 则 $f(x) \in L(-\infty, +\infty)$, 且

$$(L) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = (R) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

2.2 命题**2.2.1 命题 1**

勒贝格积分是绝对收敛的, 而黎曼积分不是.

2.2.2 命题 2

勒贝格可积函数列构成的线性空间是封闭的, 而黎曼可积函数列构成的线性空间对极限的运算不是封闭的.