

# 作业一: 给出黎曼可积和勒贝格可积的定义, 并分析二者的区别

陈一如

信息与计算科学 3200104404

2022 年 6 月 27 日

这是一个来自分析学领域的关于积分的问题, 黎曼积分是我们最常见的积分形式, 而勒贝格积分是黎曼积分的一种拓展, 他将积分运算拓展到任何测度空间之中, 一下给出这两种积分的定义和区别.

## 1 定义

### 1.1 黎曼可积定义

#### 1.1.1 定义 1

设闭区间  $[a, b]$  上有  $n - 1$  个点, 依次为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

他们把区间  $[a, b]$  分成  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n$ . 这些分点或者这些闭子区间构成对  $[a, b]$  的一个分割, 记为

$$T = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \text{ 或 } \{\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_n\}$$

小区间的长度为  $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ , 并记

$$\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\},$$

称为分割  $T$  的模。

### 1.1.2 定义 2

设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的一个函数. 对于  $[a, b]$  上的一个分割  $T = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ , 任取点  $\xi_i \in \Delta_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 并作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

称此和式为函数  $f$  在  $[a, b]$  上的一个**积分和**, 也称作**黎曼和**.

### 1.1.3 定义 3

设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的一个函数,  $J$  是一个确定的实数. 若对任给的正数  $\varepsilon$ , 总存在着某一个正数  $\delta$  使得对任何分割  $T$ , 以及在其上任意选取的点集  $\{\xi_i\}$ , 只要  $\|T\| < \delta$ , 就有

$$|\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - J| < \varepsilon$$

则称函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上**可积**或者**黎曼可积**; 数  $J$  称为  $f$  在  $[a, b]$  上的**定积分**或者**黎曼积分**, 记作

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

其中,  $f$  称为被积函数,  $x$  称为积分变量,  $[a, b]$  称为积分区间,  $a, b$  分别称为这个定积分的上限和下限.

## 1.2 勒贝格可积定义

### 1.2.1 非负简单函数的勒贝格积分

设  $D$  是可测集,  $\{E_k\}$  是  $D$  的有限个或可数个两两不相交的可测子集, 使得  $\bigcup E_k = D$  则称  $\{E_k\}$  为  $D$  的一个**分划**.

设  $f$  是可测集  $D$  上的非负简单函数. 于是有  $D$  的分划  $\{E_i\}_{1 \leq i \leq S}$  以及非负实数组  $\{a_i\}_{1 \leq i \leq S}$  使

$$f(x) = \sum_{i=1}^S a_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in D.$$

此时我们定义  $f$  在  $D$  上的勒贝格积分为

$$\int_D f(x) dx = \sum_{i=1}^S a_i m(E_i),$$

并且当  $\int_D f(x) dx < \infty$  时, 称  $f$  在  $D$  上  $L$  可积.

### 1.2.2 非负可测函数的勒贝格积分

设  $f$  是可测集  $D$  上的非负可测函数. 可以证明, 取  $D$  上的非负简单函数列  $\{f_n\}$ , 使得对每一  $x \in D$ ,  $\{f_n\}$  单增收敛于  $f(x)$ . 此时  $f$  在  $D$  上的勒贝格积分定义为

$$\int_D f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n dx.$$

并称  $f$  的积分由  $\{f_n(x)\}$  来定义. 此外当  $\int_D f dx < \infty$ , 称  $f$  在  $D$  上  $L$  可积.

### 1.2.3 一般可测函数的勒贝格积分

设  $f$  是可测集  $D$  上的可测函数. 对每一  $x \in D$ , 令

$$f_+ = \max\{0, f(x)\}, f_- = \max\{0, -f(x)\},$$

则  $f_+$  和  $f_-$  分别称为  $f$  的正部和负部, 他们都是非负可测函数, 并且

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x),$$

今若  $\int_D f_+ dx$  和  $\int_D f_- dx$  不同时为  $\infty$  则  $f$  在  $D$  上的勒贝格积分定义为

$$\int_D f = \int_D f_+ + \int_D f_-,$$

此外当  $\int_D f dx$  有限时, 称  $f$  在  $D$  上  $L$  可积, 并记为  $f \in L(D)$ .

## 2 区别

### 2.1 定理

#### 2.1.1 定理 1

为了使  $[a, b]$  上的有界函数  $f$  是  $R$  可积, 充分必要条件是  $f$  在  $[a, b]$  上几乎处处连续. 此外, 当  $f$  为  $R$  可积时,  $f$  一定  $L$  可积, 并且两个积分值相等.

### 2.1.2 定理 2

若定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  在任何有限区间上有界, 且它在  $(-\infty, +\infty)$  上的广义  $R$  积分绝对收敛, 则  $f(x) \in L(-\infty, +\infty)$ , 且

$$(L) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = (R) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

## 2.2 命题

### 2.2.1 命题 1

勒贝格积分是绝对收敛的, 而黎曼积分不是.

### 2.2.2 命题 2

勒贝格可积函数列构成的线性空间是封闭的, 而黎曼可积函数列构成的线性空间对极限的运算不是封闭的.