

投稿類別:工程技術類

篇名：

簡易多旋翼姿態量測系統設計

作者：

鄭聖文。弘文高中。三年七班

指導老師：

張世昌

壹●前言

筆者雖為高中生，但有幸於一百零二學年度下學期時旁聽成功大學資工系之嵌入式系統設計課程，於此認識了幾位工科系及航太系之研究生，並參與開發了 Ursus 多軸飛行器之專案。本論文期望驗證一年來之學習成果，實做出一個簡單並帶有學習性質的飛行器姿態量測系統，可應用於自走車、定翼機、多旋翼、火箭等載具之上。

自一次大戰左右以來，人類便試圖翱翔於空中，因而發展出了滑翔翼。二次世界大戰時，德軍為了應付不斷節節敗退的情勢，發展出了 V2 導彈。其中，為了精準打擊敵方，德軍工程師於 V2 導彈中內置了機械式陀螺儀，進行了慣性測量，並在慣性測量後，對航向做出修正，此乃為 AHRS 系統(Attitude and Heading Reference System，姿態及航向參考系統)之前身。

本論文將以實作出一個簡單的 AHRS 系統目標，並以設計的經驗，說明如何透過使用加速計、陀螺儀及磁力計獲取之物理數值推算出載具之姿態變化角度，並說明其中可能會遇到的各種困難之處，並將論文實作出的成果(程式碼)，遵循自由軟體授權 MIT LICENSE 在 Github 網站上釋出，還請各位先進多多指教。

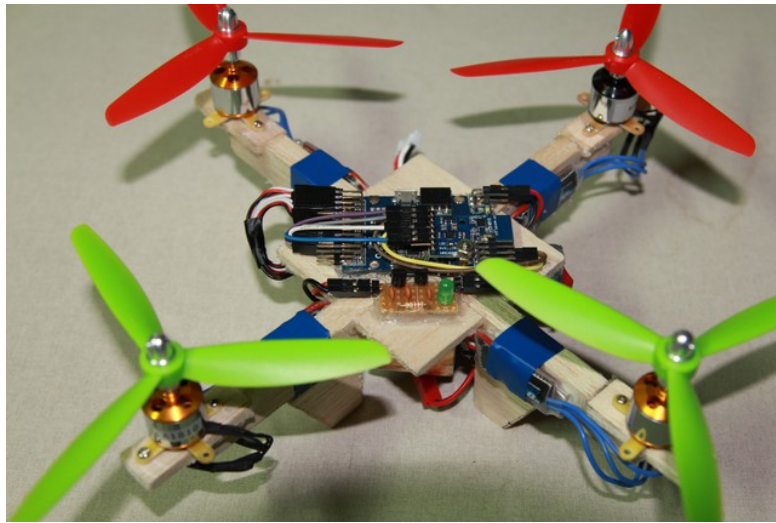


圖 1 四軸飛行器

貳●正文

一、姿態定義

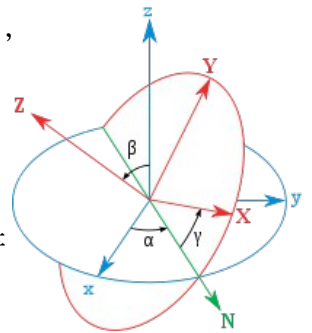
真實世界是由三維空間笛卡爾座標系(即直角座標系)所構成的,在這樣空間下我們可以對飛行器進行三個座標軸 (x, y, z) 的旋轉，而對三個軸旋轉的同時，即改變了飛行器的姿態，對於飛行器姿態，一般而言常用的慣例為：

姿態	座標軸
Roll (側翻)	對 x 軸旋轉
Pitch (俯仰)	對 y 軸旋轉
Yaw (偏航)	對 z 軸旋轉



接著，在描述姿態旋轉的時候，必須定義出兩個參考座標系來描述姿態旋轉的程度。我們首先定義出**慣性座標系**(Inertial Frame)- (x, y, z) ，使用重力作為參考定義出 z 軸指向、地磁作為參考定義出 x 、 y 軸指向。而起飛之後，飛行器姿態將會不斷改變，此時的座標系就稱為**載體座標系**(Body Frame)- (x', y', z') 。

對於三維空間來說，可以使用尤拉角來描述剛體(將物體假設為只有一質點，且忽略形變)旋轉的取向。所謂的尤拉角，即可描述兩座標系之旋轉角度，如圖中 (x, y, z) 旋轉至 (X, Y, Z) 的角度 (α, β, γ) 。



如此一來，我們便可以利用慣性座標系及載體座標系旋轉出的尤拉角，來描述飛行器的姿態了，同時對於 Roll、Pitch、Yaw 姿態而言，我們習慣以符號 (φ, θ, ψ) 來表示姿態的尤拉角角度。

二、二維平面旋轉矩陣推導

在進入第三章節之前，我們首先先對二維平面上座標之**旋轉矩陣**進行推導。

根據三角函數之**餘弦函數**與**正弦函數**之定義作移項後可以得到：

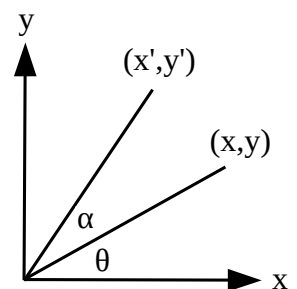
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

接著在藉著根據**和角公式**可以推導出

$$\begin{cases} x' = r \cos(\theta + \alpha) = r(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\ y' = r \sin(\theta + \alpha) = r(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

最後將方程式化作矩陣形式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



上述推導即為二維平面之旋轉矩陣，只要給出 α 角度便可將座標 (x, y) 旋轉至 (x', y') 座標上。同樣原理亦可推廣至三維空間之平面上，以下章節將直接給出結果而不再給予贅述。

三、座標轉換

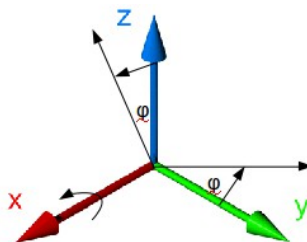
在定義姿態之後，事實上，我們可以把前文所述之座標系旋轉的概念表達為數學式

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 其中, C 為一座標轉換之矩陣，為了透過上式建立慣性座標系及載體座標系之關係，下文將推導此旋轉矩陣。

(1.) 旋轉 x 軸, Roll 姿態

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad C_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

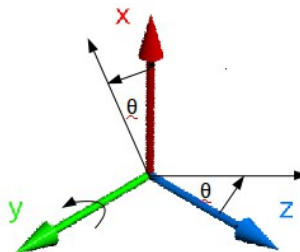
其中 C_φ 為 yz 平面的旋轉矩陣



(2.) 旋轉 y 軸, Pitch 姿態

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad C_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

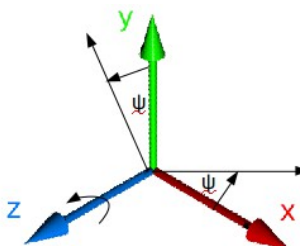
其中 C_θ 為 xz 平面的旋轉矩陣其中



(3.) 旋轉 z 軸, Yaw 姿態

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C_\psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad C_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C_ψ 為 xy 平面的旋轉矩陣



接著整合 $C_\varphi C_\theta C_\psi$ 使其矩陣相乘即為上文所述之矩陣 C ：

$$C = C_\varphi C_\theta C_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta + \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \varphi \sin \psi & -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

其中必須注意的是，後續章節之數學推導將會與旋轉矩陣順序有關，因此推導時必須要注意旋轉矩陣的旋轉順序，而本論文中採用的順序為 $x-y-z$ 即 Roll-Pitch-Yaw。

三.慣性測量單元

慣性測量單元(Inertial Measurement Unit),以下略稱 IMU,是一個可以用來測量慣性資料如加速度、角速度等物理資訊的裝置，一般而言會整合加速計、陀螺儀、磁力計或者是更多感測器。

本論文目標，以使用陀螺儀、加速計及磁力計分別獲取角速度、加速度及磁通量後，進行物理和數學上的運算，最終推導出一系列公式，可用於推算飛行器之飛行姿態。



圖 2 本論文所採用之飛行控制板(紅圈為慣性量測單元)

四、使用陀螺儀進行姿態解算

在使用陀螺儀資料進行運算前，需將資料由載體座標系轉回慣性座標系，若是直接使用，將會使角速度分量投影至不同軸上，進而影響運算結果。

首先推導陀螺儀座標轉換公式，根據先前所推導的順序以及尤拉角的定義，可以得出以下公式：

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = C_{\theta} C_{\psi} \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

整理之後便可得到下式：

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\cos \psi \sin \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

在進行了座標轉換後，便可從物理上的定義，了解到角速度為角度在一段時間內的變化量，可表達為： $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 。因此，自飛行開始對角速度以時間積分便可求得飛行器之姿態角度：

$$\theta = \int \omega dt \quad。$$

而為了使用微處理機進行上述的積分運算，可以使用尤拉法：

1. 首先令一微分方程為 $f(t, y(t)) = \frac{dy(t)}{dt}$ ，則可透過 f 函數求得 y 函數在 t 處之斜率。
2. 接著令 $y(i+1) = y(i) + f(t_i, y(t_i))h$ 便可以遞歸方式對該微分方程進行積分，其中 h 為 f 函數之步長，即使用尤拉法在函數曲線上以 h 步長大小作外插求得新值。

最後，使用上述方法可以以公式 $\begin{pmatrix} \theta' \\ \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} t$ 對陀螺儀在 (x, y, z) 三軸上所量測到之角速度進行積分，進而求得 Roll、Pitch、Yaw 之姿態，其中 t 之時間長度即為感測器更新週期(可利用示波器測量)。

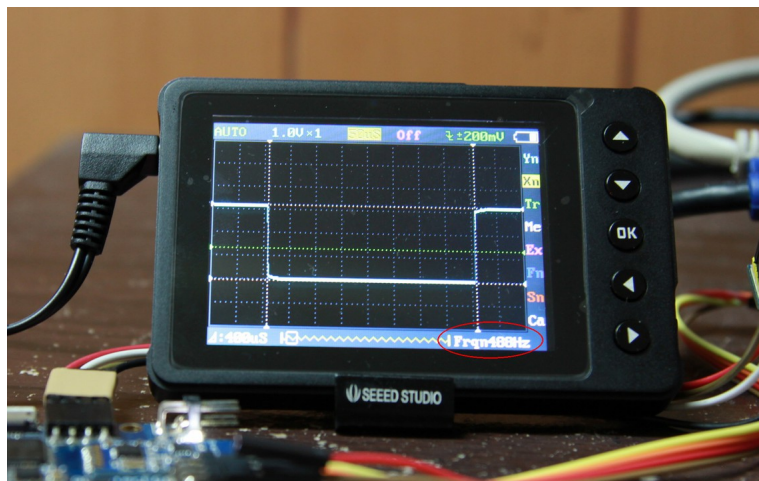


圖 3 透過示波器測量微處理機對感測器採樣頻率(紅圈處顯示約為 500Hz, 0.002 秒)

然而，這並不是完全沒有問題的方法，運算上可能遇見積分誤差或是感測器特性等因素影響，對於此一議題將於最後兩章進行描述。

五、使用加速計進行姿態解算

在靜止且 Roll、Pitch 角度為 0 的情況下，加速計受到了重力的影響，會 z 在軸測量到 1g 的重力加速度，在改變了 Roll、Pitch 之角度後，1g 之重力加速度將會分別投影到 x 軸或是 y 軸上。

根據先前所推導之座標轉換關係式，在忽略了旋轉 z 軸並不會導致重力加速度投影至 x 軸和 y 軸的情況後，可將關係式寫作：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C_\varphi C_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

推導後可發現，透過對得到之三軸 (x, y, z) 加速度值進行兩次反三角函數運算，便可逆求 Roll、Pitch 之姿態角：

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-y'}{z'} \right)$$

$$\varphi = \sin^{-1} x'$$

六、使用磁力計進行姿態解算

使用磁力計進行姿態解算的基本想法與加速計解算基本雷同。磁力計在與地表水平的情況下會將磁場投影至 x 、 y 軸上，但由於磁力計之結果會受到 Roll、Pitch 姿態影響進而投影至 z 軸上，因此在解算之前亦需要進行座標轉換。

根據先前所推導旋轉矩陣公式，我們可以逆推由載體座標系旋轉回慣性座標系可對旋轉矩陣進行逆運算：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C_\varphi C_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (C_\varphi C_\theta)^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

根據運算之後，便可得到以下公式：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \theta & -\cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

最後，與加速計解算方法相同，根據定義，便可將公式寫作：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C_\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

與加速計相同，透過正切反三角函數後便可得到 Yaw 姿態：

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{y'}{x'}\right)$$

如此一來，便可將加速計解算結果(Roll、Pitch)及磁力計解算結果(Yaw)得到載具於三維空間相對於慣性座標系之傾角，此為**六自由度姿態感測方法**，其缺點亦將於最後兩章進行描述。

七、感測器數值濾波

受到感測器精度、雜訊、微機電製程技術等影響，一般而言由感測器所讀取的原始資料是不可直接使用的，資料誤差的影響將可導致姿態的推算出現嚴重錯誤。因此，在使用感測器資料進行運算之前，必須使用濾波器來消除誤差，本論文選擇使用**平均移動演算法**，以下將針對幾種移動平均演算法進行說明。

(一)簡單移動平均(Simple Moving Average)

簡單移動平均是移動平均演算法中最容易實作的一種,其數學公式可表達為:

$$SMA = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}$$

其中 p 為採樣資料之數列, n 為採樣數,當新的採樣資料擺入數列之後,數列全體將向後移位一項,並捨棄最舊一筆資料,為一先進先出資料結構(FIFO, First In First Out)。

(二)加權移動平均(Weight Moving Average)

SMA 雖有著容易理解的優點,但 SMA 容易因過去的資料影響而無法反映出資料的快速變化,為了改善這點,可以使用加權移動平均:

$$WMA = \frac{np_1 + (n-1)p_2 + \dots + 2p_{n-1} + p_n}{n + (n-1) + \dots + 2 + 1}$$

WMA 演算法將最近期的資料乘上數值 n,並依次遞減,最後除以加權量即可使較近一筆的資料獲得更高的權重,反映出數值變化的趨勢。

(三)指數移動平均(Exponential Moving Average)

指數移動平均是一種指數型的加權移動平均演算法,其數學公式可表達為:

$$EMA_{new} = \alpha p + (1 - \alpha) EMA_{last}$$

EMA 演算法使用數值 α 對新數值及上一筆 EMA 結果進行比例分配,其中 α 的值域為 $0 < \alpha < 1$,透過調整 α 的值便可以改變對於過去資料的信任程度。

同時,EMA 演算法相對於 SMA 及 WMA 具有不需建立 FIFO 的優點,故可以節省記憶體開銷。

(四)實驗結果

實驗對象: MPU6050(6 軸加速計及陀螺儀感測器)

取樣數(SMA,WMA 濾波器之 n 值): 200

EMA 濾波器 α 數值: 0.01725

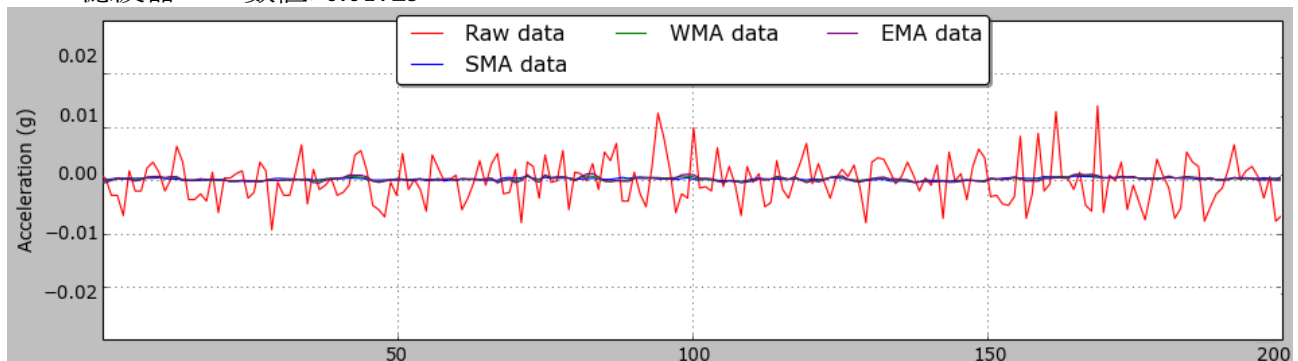


圖 4 靜態時感測器雜訊及濾波後效果

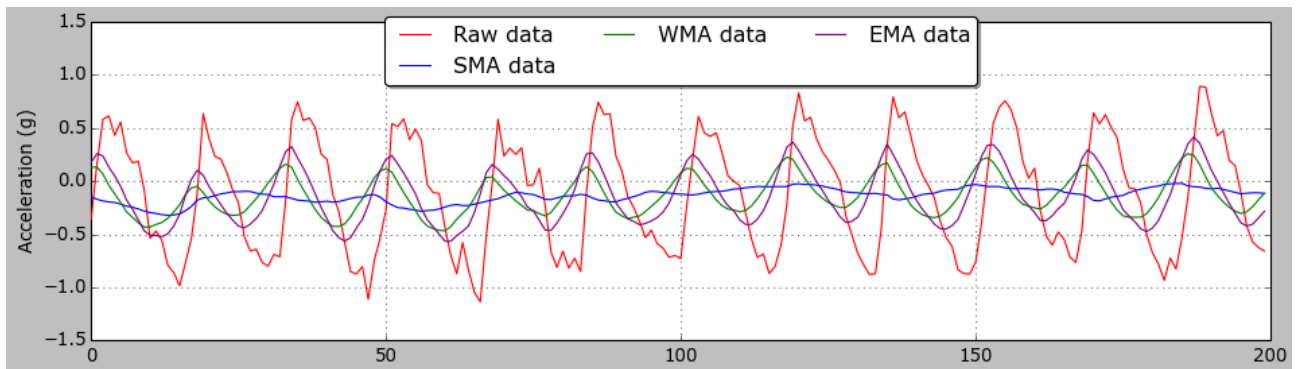


圖 5 動態時感測器雜訊及濾波後效果

在分析濾波效果時，假設雜訊不會隨著訊號大小而改變，因而可以得知在 Figure 1 的情況下三種移動平均濾波器對於雜訊的消除是有效果的。接著對慣性測量單元進行移動可發現，EMA 濾波器之波形將會領先於 WMA 及 SMA，同時形狀也較相似於原始波形，因而可以得知 EMA 可以反映出較即時並且貼近實際的數值。

八、多感測器姿態融合

先前章節曾推導了一系列之數學方法透夠陀螺儀、加速計及磁力計來獲得姿態，陀螺儀及加速計而言，受到感測器設計原理影響，分別會遭遇以下兩個問題：

(一)陀螺儀積分誤差累積：受到感測器誤差、積分演算法等影響導致，其誤差呈現一次曲線

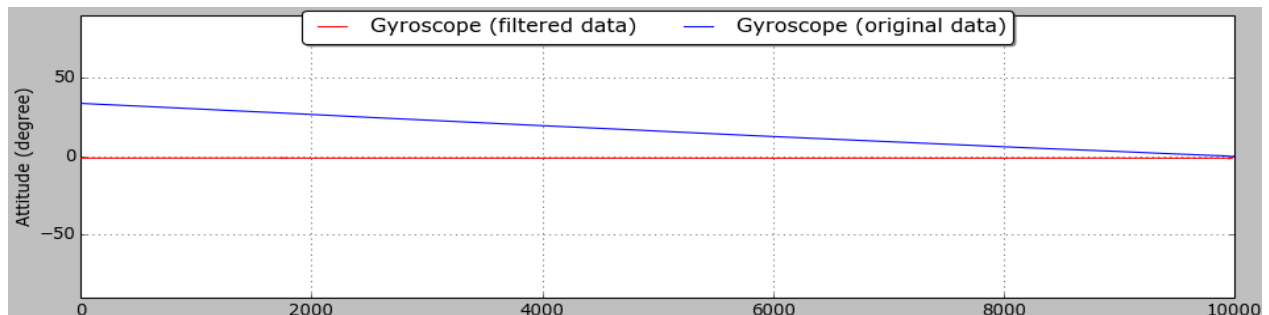


圖 6 飛控板開機五分鐘誤差成長

(二)加速計解算姿態無法只取出重力加速度：水平移動時產生的加速度會影響加速計的輸出結果，而上文推導之方法乃假設加速計只受到重力加速度影響

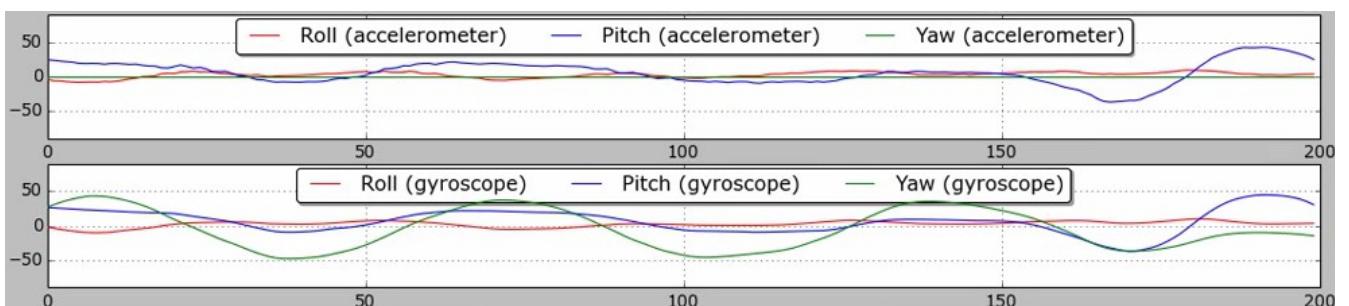


圖 7 動態時比較加速計及陀螺儀之解算結果可發現加速計解算之結果有抖盪情形發生

由於現今仍沒有完全理想之姿態解算方法，透過任何方式解算姿態時難免會遇到一些缺陷，爲了克服該一問題，我們可以融合不同感測器之特性，設計出一種使結果較爲理想的演算法，此演算法稱之爲 - 互補式濾波器。

多感測器資料融合一直以來都是慣性導航學術研究之重點，本論文亦於此提出一種自行開發之互補式濾波器演算法，其效果雖不如一些知名演算法如：卡爾曼濾波器(Kalman Filter)有效，但具有容易實作特性及富有學習實驗之價值，其數學公式可寫作如下：

$$Angle_{fusion} = \alpha Angle_{gyroscope} + (1 - \alpha) Angle_{accelerometer}$$

$$\alpha = \frac{e}{e + |Angle_{accelerometer} - Angle_{gyroscope}|} \beta \quad e = \text{誤差常數，視系統情況調整}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}}$$

此一互補式濾波器假設加速計解算之姿態和陀螺儀解算之姿態差爲系統誤差，並在誤差逐漸放大時調整 α 值之比例使濾波器偏向信任加速計之結果。但又因上述提到加速計無法單單只取出重力分力之問題，導入了 β 值進行評估。 β 使用了加速計 (x, y, z) 之向量長度(Magnitude)進行評估，理想加速計只會重力影響而使向量長度爲 1，但在受到移動之加速度後，此向量長度將恆大於 1，因此便可透過 β 給出之公式，調整對加速計之信任程度。透過了 α 與 β ，此一演算法便可動態調整融合比例以求得理想結果。

因此，只要在每次陀螺儀積分之後使用上述演算法對積分結果進行修正，便可長期抑制陀螺儀積分之誤差，使得系統可以信賴，此一流程亦爲一負迴授系統。

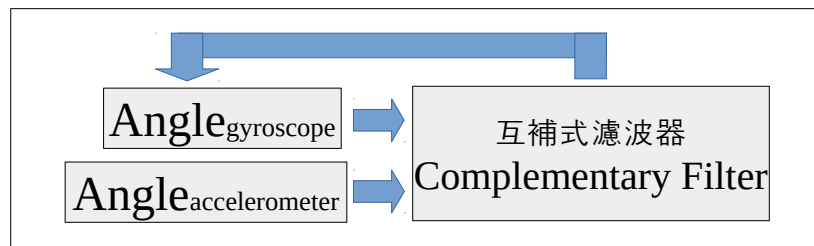


圖 8 演算法執行流程

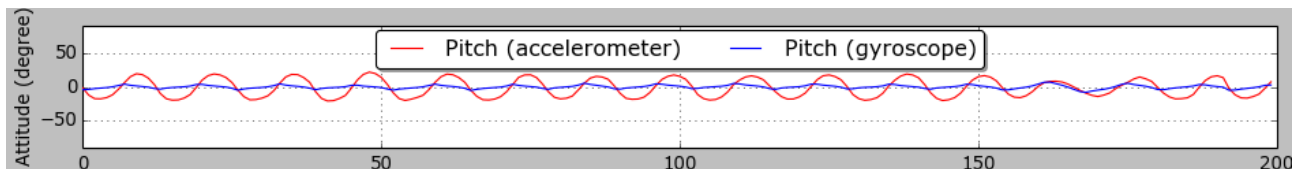


圖 9 陀螺儀解算姿態(套用論文提出之互補式濾波器)，加速計及陀螺儀之誤差均被消除

參●結論

關於載具姿態的計算在早期多半已由機械系先進研究為慣性導航系統，受到近年來計算器技術快速發展下得以實現。實際推導及實作後對成果感到欣喜，此一技術不但能用於飛行載具之上，亦可應用於近年來相當熱門的互聯網及穿戴式裝置上。因此，筆者今天立足於完成系統的實作，並學習多位先進之研究成果後，日後將持續對各種艱澀卻有效的演算法、數學及物理原理進行研究，以提昇系統表現為目標。

並且，除了提昇原有成果之外，筆者目前亦建立於成果基礎上，發展自製四軸飛行器。雖說，四軸飛行器的技術早已相當成熟且僅為飛行器領域中十分基礎的一步，但為了印證自己的學習，並且在學習後更進一步改進系統，筆者將以完成飛行器開發作為後續主要研究方向。

[註]本篇論文實作之成果可於：<https://github.com/Khan-drone/ahrs-core> 下載得到

肆●引註資料

[1]彭俊霖。無人運動載具 精密六軸慣性姿態感測系統的設計與實作

[2]黃大峯。打造四軸飛行器

[3]William Premerlani and Paul Bizard
Direction Cosine Matrix IMU: Theory

[4]Shane Colton
The Balance Filter (A Simple Solution for Integrating Accelerometer and Gyroscope Measurements for a Balancing Platform)

[5]Sam Naghshineh, Golafsoun Ameri, Mazdak Zerehschi & Dr. S. Krishnan, Dr. M. Abdoli-Eramaki
Human Motion capture using Tri-Axial accelerometers

[6]David H. Titterton and John L. Weston
Strapdown Inertial Navigation Technology - 2nd Edition