六加速儀機制結合GPS導航應用

彭國祐[1] 李守誠[2] 洪兆宇[3] 王振宇[4]
[1]龍華科技大學電子工程系
[2]龍華科技大學資訊網路工程系
[3]國防大學中正理工學院兵器工程系
[4]國防大學中正理工學院兵器工程系

摘要

本文旨在對一種固裝式(Strapdown)六加速儀機制之慣性導引系統，推導其姿態方程式，求出加速儀輸出，獲得實際加速儀輸出，據以反推載具航向、航速與位置，並推導運用卡爾漫濾波器估測狀態結合GPS之導航應用。

關鍵詞:固裝式、慣性導引系統、即時.

1. 前言

六加速儀機制首創於1994年由Chen, J. H.等三位學者共同發表，係將六顆加速儀設計一適當配置安置於航具上，六顆加速儀以其所在不同位置可感測航具運動之運動物理量，經數值運算可解析航具之位置、速度及姿態。全加速儀導航不同於傳統INS無需使用陀螺儀，其優點為具對稱性(Symmetry)，使計算導航角加速度非常容易，且體積小構型簡潔精緻，價格便宜；然缺點是角速度誤差較傳統INS對時間較敏感，影響導航精度，故使用時應注意誤差發散現象。

本實驗室近年來在全加速儀理論開發中，研究利用六加速儀機制，藉由重力指示，解決初始姿態角問題，並致力於全加速儀機制硬品實現及實際導航運用，本文推導運用卡爾漫濾波器(Kalman Filter)估測狀態結合與全球定位系統(GPS)整合，對於導航運用上均有參考運用價值。

2.理論基礎

2.1方向餘弦導數

慣性導航理論需要精準定義幾種座標系統，用以表示運動與慣性座標之關係，為描述載具運動狀態與慣性座標關係，本文將以體座標(Body-Frame)與慣性座標(Inertial-Frame)來表示各種幾何關係。慣性座標係定義一座標系相對於恆星沒有任何加速度之座標系統，另體座標係以載具滾轉(Roll)、俯仰(Pitch)及偏航(Yaw)方向定義座標系統；考量一與時間有關之方向餘弦矩陣 C_i^b ，表示體座標系(Body-Frame)與慣性座標系(Inertial-Frame)間轉換矩陣，則方向餘弦導數為：

$$\dot{C}_b^i = C_b^i\left[\vec{\omega}_{ib}^b \times\right] \tag{1}$$

2.2加速儀數學模式

加速儀為一精確之量測儀具，其所量得之量 f 為一向量，稱為比力(Specific Force)。可定義如下：

$$\vec{a} = \vec{f} + \vec{G} \tag{2}$$

(2)式中 $\vec{a}$ 為慣性加速度，$\vec{G}$ 為每單位質量之引力(Gravitation)它為一超距力。在導航計算中，$\vec{G}$ 無法由感測器量測，與位置及高度有關，必須由計算獲得。

為便於描述加速儀之運動，以 O_I 代表慣性座標系統(Inertial Frame)原點，以 o_b 代表體座標系統(Body Frame)原點，設質點 P 位於體座標上，為固裝量測元件之位置，其幾何關係如圖1表示，

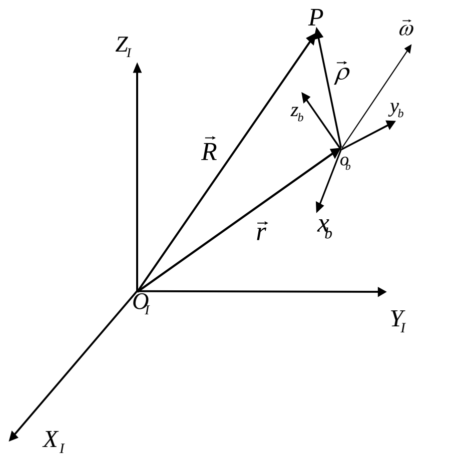

圖. 1. 固裝量測元件 P 與慣性座標 (O_I) 及體座標 (o_b) 關係圖

圖1中 $\vec{R}^i$ 及 $\vec{r}^{\,i}$ 表示慣性座標原點 O_I 至固裝量測元件 P 及 o_b 位置向量，並以慣性座標描述；另 $\vec\rho^{\,b}$ 係表體座標原點 o_b 至固裝量測元件 P 位置向量，並以體座標描述。則相對於慣性座標加速度可表為 [16, 17]：

$$p_i^2\left(\vec{R}^i\right)=p_i^2\left(\vec{r}^{\,i}+\vec\rho^{\,b}\right)$$

其中 $p_i^2(\bullet)\triangleq\dfrac{d^2}{dt^2}(\bullet)\Big|_i$ ；表示變數 $(\bullet)$ 相對於慣性座標對時間二次導數；則固裝量測元件 P 相對慣性座標加速度：

$$\vec a=\ddot{\vec R}=\ddot{\vec r}^{\,i}+\ddot{\vec\rho}^{\,b}+\dot{\vec\omega}_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b}+2\vec\omega_{ib}^b\times\dot{\vec\rho}^{\,b}+\vec\omega_{ib}^b\times\vec\omega_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b} \qquad (3)$$

其中 $\ddot{\vec r}^{\,i}$ 表示體座標系統原點 o_b 相對於慣性座標線性加速度，$\ddot{\vec\rho}^{\,b}$ 為加速儀相對於體座標線性加速度，$\dot{\vec\omega}_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b}$ 為加速儀相對於慣性座標切向速度，$2\vec\omega_{ib}^b\times\dot{\vec\rho}^{\,b}$ 為科氏加速度，$\vec\omega_{ib}^b\times\vec\omega_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b}$ 為向心加速度。因固裝量測元件相對於體座標位置向量 $\vec\rho^{\,b}$ 不隨時間改變，故 $\dot{\vec\rho}^{\,b}=\ddot{\vec\rho}^{\,b}=0$；則質點 P 相對於慣性座標加速度為

$$\vec a=\ddot{\vec r}^{\,i}+\dot{\vec\omega}_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b}+\vec\omega_{ib}^b\times\vec\omega_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b} \qquad (4)$$

將(2)式代入(4)式可得單位質量之引力 $\vec G$ 與固裝量測元件加速度關係為

$$\vec f+\vec G=\ddot{\vec r}^{\,i}+\vec\omega_{ib}^b\times\vec\omega_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b}+\dot{\vec\omega}_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b} \qquad (5)$$

(5)式中 $\vec f$ 為比力係量測元件之接觸力以體座標表示，另單位質量之引力 $\vec G$ 在地球局部地區可以切平面(Tangent plane)表示，透過座標轉換矩陣 C_t^i 可轉換為慣性座標表示；由於加速儀輸出須由體座標來計算，因此將(5)式透過座標轉換矩陣，將各項加速度改以體座標描述：

$$\vec f^{\,b}+C_i^b\vec G^i=C_i^b\ddot{\vec r}^{\,i}+\vec\omega_{ib}^b\times\vec\omega_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b}+\dot{\vec\omega}_{ib}^b\times\vec\rho^{\,b} \qquad (6)$$

(6)式中座標轉換矩陣 C_i^b 為時間函數，須由(1)式方向餘弦導數推導求得。

2.3六加速儀方程式

考慮一邊長為 2ρ 之正立方體，則六個加速儀配置如圖2所示，加速儀感測軸沿其所在立方體表面之對角線，連接這些對角線恰成一正四面體，四個頂點為A，B，C，D。加速儀之位置分置於四面體每一邊之中點，與六加速儀機制中心點距離 ρ。

由圖2知每一加速儀位置及感測方向如附表1，其中 $\vec\theta_j$ 表第 j 顆加速儀感測方向之單位向量，$\vec\rho_j$ 表六加速儀機制中心至第 j 顆加速儀位置單位向量。因加速儀輸出值 s_j 為加速儀比力在感測方向投影量

$$s_j=\vec f_j^{\,b}\cdot\vec\theta_j \qquad (7)$$

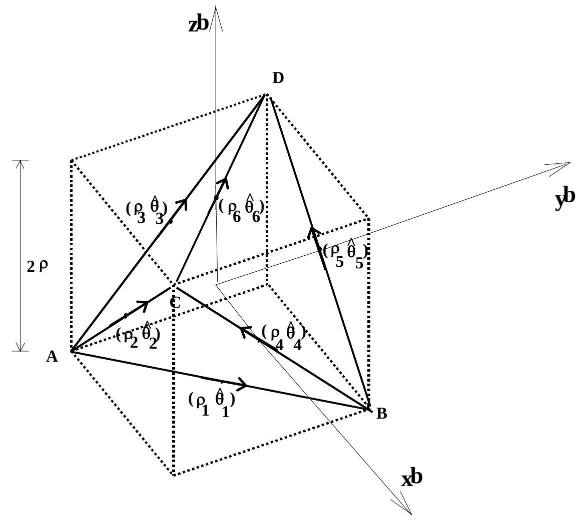

圖. 2. 六加速儀基本機制組合與感測方向示意圖

表1. 六加速儀機制編號、位置向量及感測軸單位向量

加速儀編號	加速儀位置向量	感測軸單位向量
1	$\vec{\rho}_1^b = [0 \;\; 0 \;\; -\rho]^T$	$\vec{\theta}_1^b = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \;\; 1 \;\; 0]^T$
2	$\vec{\rho}_2^b = [0 \;\; -\rho \;\; 0]^T$	$\vec{\theta}_2^b = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \;\; 0 \;\; 1]^T$
3	$\vec{\rho}_3^b = [-\rho \;\; 0 \;\; 0]^T$	$\vec{\theta}_3^b = \frac{1}{\sqrt{2}}[0 \;\; 1 \;\; 1]^T$
4	$\vec{\rho}_4^b = [\rho \;\; 0 \;\; 0]^T$	$\vec{\theta}_4^b = \frac{1}{\sqrt{2}}[0 \;\; -1 \;\; 1]^T$
5	$\vec{\rho}_5^b = [0 \;\; \rho \;\; 0]^T$	$\vec{\theta}_5^b = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1 \;\; 0 \;\; 1]^T$
6	$\vec{\rho}_6^b = [0 \;\; 0 \;\; \rho]^T$	$\vec{\theta}_6^b = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1 \;\; 1 \;\; 0]^T$

將(6) 式代入(7)式得每顆加速儀輸出值分別為：

$$s_j = \left(C_i^b \ddot{\vec{r}}^i + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^{\,b} + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^{\,b} - C_i^b \vec{G}^i\right) \cdot \vec{\theta}_j \quad (8)$$

其中 $j = 1, \cdots, 6$ 為加速儀編號 s_j 為加速儀輸出值；$\vec{G}$ 為單位質量之引力；令

$$s_j + C_i^b \vec{G}^i \cdot \vec{\theta}_j = A_j$$

由(7)、(8)式整理得

$$A_j = \left(C_i^b \ddot{\vec{r}}^i + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^{\,b} + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^{\,b}\right) \cdot \vec{\theta}_j \quad (9)$$

(9)式中 A_j 表示各加速儀相對慣性座標加速度於感測方向投影量；依表一所示各加速儀位置、方向，分別代入(9)式整理，並表成矩陣形式：

$$A = \left[\rho S^T \quad T^T\right] \begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \\ C_i^b \ddot{\vec{r}}^i \end{bmatrix} - \rho T^T \vec{\omega}^2 \quad (10)$$

其中

$A = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad A_6]^T$；為加速度矩陣

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$；為位置矩陣

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$；為方向矩陣

$$\vec{\omega}^2 \triangleq \begin{bmatrix} \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix}$$；為向心加速度矩陣

(9)式移項整理後可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \\ C_i^b \ddot{\vec{r}}^i \end{bmatrix} = \left[\rho S^T \quad T^T\right]^{-1} (A + \rho T^T \vec{\omega}^2) \quad (11)$$

其中 $\left[\rho S^T \quad T^T\right]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S/\rho \\ T \end{bmatrix}$ 代入(11)式展開獲得六加速儀機制方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \\ C_i^b \ddot{\vec{r}}^i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S/\rho \\ T \end{bmatrix} A + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \quad (12)$$

比較前述Chen.等之研究，(12)式增加考量航具應用所需重力場之效應，結合導航誤差模式，可提供未來六加速儀之導航應用。

2.4六加速儀機制計算流程

依據(12)式求出角加速度 $\dot{\vec{\omega}}_{ib}^b$，經積分後求得角速度 $\vec{\omega}_{ib}^b$，分別代入(1)及(12)式，求得不同時間之方向餘弦轉換矩陣 C_b^i 及六加速儀機制相對慣性座標加速度 $C_i^b \ddot{\vec{r}}^i$，將所求得加速度經座標轉換後，求得相對慣性座標加速度 $\ddot{\vec{r}}^i$。其作業流程如附圖3所示。

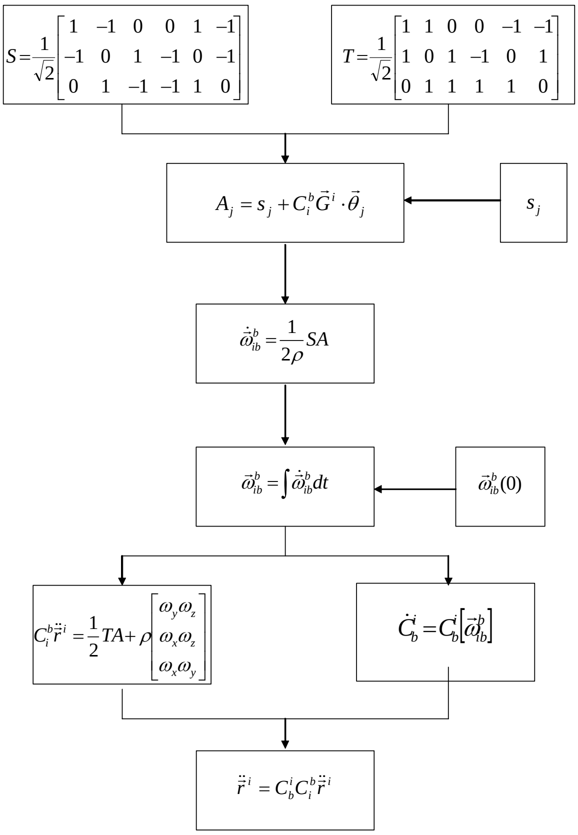

圖. 3. 六加速儀機制流程圖

3. 六加速儀機制實現

實用慣性系統是一種複合的機電裝置，六加速儀機制為一全新構型固裝式(Strapdown Type)慣性導航系統，其加速儀配置於正六面體每面之對角線正中央，其導航系統全系統區分慣性量測單元(Inertial Measurement Unit IMU)及計算單元(Computing Unit CU)，等兩個系統，主要功能分述如下：

1. 慣性量測單元：係由六顆伺服式加速儀所組成，用以感測其再體座標(Body Coordinate)上接觸力(Contact Force)之變化。慣性量測單元設計力求構型對稱及加工簡易，期能提高量測精度。

2. 計算單元：由於導航中載具姿態需由計算機運算獲得，因此整體電腦效能須匹配擷取卡運作效能。以期達到即時(Real Time)效果。方塊圖如圖4所示。

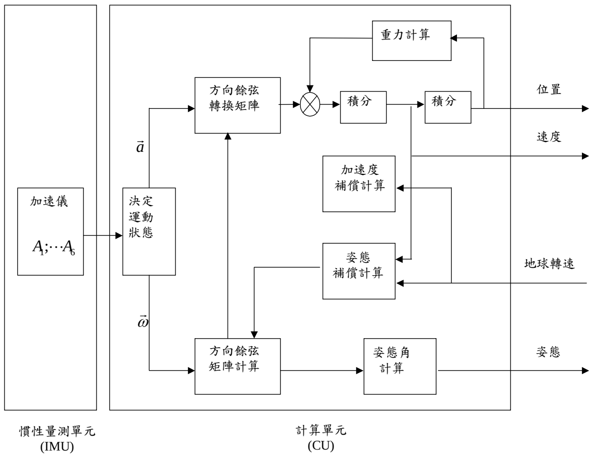

圖. 4.導航系統方塊圖

4. 六加速儀機制結合GPS導航運用

全球衛星定位系統GPS(Global Positioning System)是利用觀測GPS衛星廣播訊號來計算接收者的位置，具有誤差變異量不隨時間而變的特性優點，但GPS不適宜高動態、易造成脫鎖且會受到外在環境及電磁干擾，故不宜直接導航使用；另INS則可量測高動態目標的位置、速度、加速度及姿態且不受到外界干擾，在短時間INS的相對誤差量亦遠小於GPS的誤差量。因此與INS整合，它可獲取高精度與高可靠的導航訊息。

4. 1運用卡爾漫濾波器整合GPS/INS導航系統

由於六加速儀慣性元件加速儀感測器本身可能存在原差Bias，此誤差將隨時間之增加而影響導航精度，故須要新的資訊透過濾波器來修正其誤差。整合式GPS/INS導航系統在濾波器選用方面，基本是採用卡爾曼濾波器法則，主要運用六加速儀機制導航狀態方程式

$$\dot{x} = Fx + Gu + Lw(k) \tag{13}$$

透過離散程序可將(13)改寫為

$$x(k+1) = \Phi(k+1)x(k) + \Gamma(k+1)u(k) + \Lambda(k+1)w(k) \tag{14}$$

其中

$$\Phi(k+1) \cong I + F\Delta t$$

$$\Gamma(k+1)u(k) \cong \int_{t_k}^{t_{k+1}} (I + F\Delta t)Gu(t)dt$$

$$\Lambda(k+1)w(k) \cong \int_{t_k}^{t_{k+1}} (I + F\Delta t)Lw(t)dt$$

由(14)求得變異量矩陣為

$$X(k+1) = \Phi X(k)\Phi^T + \Lambda Q(k)\Lambda^T \tag{15}$$

其中

$$E\left[w(k)w^T(k)\right] = Q(k)$$

$$E\left\{[x(k) - \bar{x}(k)][x(k) - \bar{x}(k)]^T\right\} = X(k)$$

另透過量測方程式

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k) \tag{16}$$

其中

$$E\left[v(k)v^T(k)\right] = R_v(k)$$

運用卡爾漫估測流程

已知 $P_e\langle k|k\rangle$ 、 $\hat{x}\langle k|k\rangle$(註：起始條件 $P_e\langle 0|0\rangle = \infty$ 、 $\hat{x}\langle 0|0\rangle = x(0)$)

求 $P_e\langle k+1|k+1\rangle$ 、 $\hat{x}\langle k+1|k+1\rangle$

1.

$$\hat{x}\langle k+1|k\rangle = \Phi(k+1)\hat{x}\langle k|k\rangle$$

2.

$$P_e\langle k+1|k\rangle = \Phi(k+1)P_e\langle k|k\rangle\Phi^T(k+1) + \Gamma(k+1)Q(k)\Gamma^T(k+1)$$

3.

$$K(k+1) = P_e\langle k+1|k\rangle H^T(k+1)\left[H(k+1)P_e\langle k+1|k\rangle H^T(k+1) + R_v\right]^{-1}$$

4.輸入 $z(k+1)$

5.

$$\hat{x}\langle k+1|k+1\rangle = \hat{x}\langle k+1|k\rangle + K(k+1)\left[z(k+1) - H(k+1)\hat{x}\langle k+1|k\rangle\right]$$

6.

$$P_e\langle k+1|k+1\rangle = \left[I - K(k+1)H(k+1)\right]P_e\langle k+1|k\rangle$$

可求得最佳估測值 $\hat{x}$

4.2六加速儀導航狀態方程式

由(9)中令轉換矩陣

$$C_b^i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \tag{17}$$

則每顆加速儀相對於慣性座標加速度在加速儀方向投影量可求得

$$A_j = s_j + C_i^b \vec{G}^i \cdot \vec{\theta}_j \tag{18}$$

(18)展開並以矩陣方式表示為

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} G_x & G_y & G_z & G_x & G_y & G_z & 0 & 0 & 0 \\ G_x & G_y & G_z & 0 & 0 & 0 & G_x & G_y & G_z \\ 0 & 0 & 0 & G_x & G_y & G_z & G_x & G_y & G_z \\ 0 & 0 & 0 & -G_x & -G_y & -G_z & G_x & G_y & G_z \\ -G_x & -G_y & -G_z & 0 & 0 & 0 & G_x & G_y & G_z \\ -G_x & -G_y & -G_z & G_x & G_y & G_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \end{bmatrix} \tag{19}$$

另由(12)六加速儀理論以矩陣方式表示為

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \ddot{R}_x \\ \ddot{R}_y \\ \ddot{R}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y \end{bmatrix} \tag{20}$$

將(19)代入(20)整理得

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \ddot{R}_x \\ \ddot{R}_y \\ \ddot{R}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_x & G_y & G_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_x & G_y & G_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_x & G_y & G_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y \end{bmatrix} \tag{21}$$

另由(1)姿態方程式改以陣列形式得

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} \\ \dot{C}_{12} \\ \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} \\ \dot{C}_{22} \\ \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} \\ \dot{C}_{32} \\ \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{12}\omega_z - C_{13}\omega_y \\ -C_{11}\omega_z + C_{13}\omega_x \\ C_{11}\omega_y - C_{12}\omega_x \\ C_{22}\omega_z - C_{23}\omega_y \\ -C_{21}\omega_z + C_{23}\omega_x \\ C_{21}\omega_y - C_{22}\omega_x \\ C_{32}\omega_z - C_{33}\omega_y \\ -C_{31}\omega_z + C_{33}\omega_x \\ C_{31}\omega_y - C_{32}\omega_x \end{bmatrix} \tag{22}$$

由(21)、(22)令狀態變數

$x_1 = \theta_x$	$x_2 = \theta_y$	$x_3 = \theta_z$
$x_4 = R_x$	$x_5 = R_y$	$x_6 = R_z$
$x_7 = C_{11}$	$x_8 = C_{12}$	$x_9 = C_{13}$
$x_{10} = C_{21}$	$x_{11} = C_{22}$	$x_{12} = C_{23}$
$x_{13} = C_{31}$	$x_{14} = C_{32}$	$x_{15} = C_{33}$
$x_{16} = \dot{x}_1$	$x_{17} = \dot{x}_2$	$x_{18} = \dot{x}_3$
$x_{19} = \dot{x}_4$	$x_{20} = \dot{x}_5$	$x_{21} = \dot{x}_6$

故狀態方程式為

$\dot{x}_1 = x_{16}$；$\dot{x}_2 = x_{17}$；$\dot{x}_3 = x_{18}$

$\dot{x}_4 = x_{19}$；$\dot{x}_5 = x_{20}$；$\dot{x}_6 = x_{21}$

$\dot{x}_7 = x_8 x_{18} - x_9 x_{17}$；$\dot{x}_8 = -x_7 x_{18} + x_9 x_{16}$

$\dot{x}_9 = x_7 x_{17} - x_8 x_{16}$；$\dot{x}_{10} = x_{11} x_{18} - x_{12} x_{17}$

$\dot{x}_{11} = -x_{10} x_{18} + x_{12} x_{16}$；$\dot{x}_{12} = x_{10} x_{17} - x_{11} x_{16}$

$\dot{x}_{13} = x_{14} x_{18} - x_{15} x_{17}$；$\dot{x}_{14} = -x_{13} x_{18} + x_{15} x_{16}$

$\dot{x}_{15} = x_{13} x_{17} - x_{14} x_{16}$

$$\dot{x}_{16} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho}\left(f_1 - f_2 + f_5 - f_6\right)$$

$$\dot{x}_{17} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho}\left(-f_1 + f_3 - f_4 - f_6\right)$$

$$\dot{x}_{18} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho}\left(f_2 - f_3 - f_4 + f_5\right)$$

$$\dot{x}_{19} = G_x x_7 + G_y x_8 + G_z x_9 + \rho x_{17} x_{18} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(f_1 + f_2 - f_5 - f_6\right)$$

$$\dot{x}_{20} = G_x x_{10} + G_y x_{11} + G_z x_{12} + \rho x_{16} x_{18} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(f_1 + f_3 - f_4 + f_6\right)$$

$$\dot{x}_{21} = G_x x_{13} + G_y x_{14} + G_z x_{15} + \rho x_{16} x_{17} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(f_2 + f_3 + f_4 + f_5\right)$$

上式非線性狀態方程式簡化表示

$$\dot{\vec{X}} = g\left(\vec{X}, \vec{f}\right) \tag{23}$$

4.3六加速儀導航狀態方程式線性化

由於(23)中 $g\left(\vec{X}, \vec{f}\right)$ 為非線性，無法運用卡爾漫濾波器估測狀態，故以泰勒級數對 $\left(\vec{X}_0, \vec{f}_0\right)$ 點作線性展開可得

$$g\left(\vec{X}, \vec{f}\right) = g\left(\vec{X}_0, \vec{f}_0\right) + \left.\frac{\partial g\left(\vec{X}, \vec{f}\right)}{\partial \vec{X}}\right|_{\left(\vec{X}_0, \vec{f}_0\right)} \cdot \left(\vec{X} - \vec{X}_0\right) + \left.\frac{\partial g\left(\vec{X}, \vec{f}\right)}{\partial \vec{f}}\right|_{\left(\vec{X}_0, \vec{f}_0\right)} \cdot \left(\vec{f} - \vec{f}_0\right)$$

其中上式中 $g\left(\vec{X}_0, \vec{f}_0\right) = \dot{\vec{X}}_0$ 則(50)改寫為

$$\delta\dot{\vec{X}} = \left.\frac{\partial g\left(\vec{X}, \vec{f}\right)}{\partial \vec{X}}\right|_{\left(\vec{X}_0, \vec{f}_0\right)} \cdot \delta\vec{X} + \left.\frac{\partial g\left(\vec{X}, \vec{f}\right)}{\partial \vec{f}}\right|_{\left(\vec{X}_0, \vec{f}_0\right)} \cdot \delta\vec{f} \tag{24}$$

其中 $\delta\vec{X} = \left(\vec{X} - \vec{X}_0\right), \delta\vec{f} = \left(\vec{f} - \vec{f}_0\right)$

由(24)求得

$$\left.\frac{\partial g\left(\vec{X}, \vec{f}\right)}{\partial \vec{X}}\right|_{\left(\vec{X}_0, \vec{f}_0\right)} = \left.\begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \alpha_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \beta_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \alpha_{3\times3} & 0_{3\times3} & \delta_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \alpha_{3\times3} & \gamma_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & G1_{3\times3} & G2_{3\times3} & G3_{3\times3} & \Psi_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}\right|_{\left(\vec{X}_0, \vec{f}_0\right)} \tag{25}$$

其中

$$\alpha_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & x_{18} & -x_{17} \\ -x_{18} & 0 & x_{16} \\ x_{17} & -x_{16} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\beta_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & -x_9 & x_8 \\ x_9 & 0 & -x_7 \\ -x_8 & x_7 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\delta_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & -x_{12} & x_{11} \\ x_{12} & 0 & -x_{10} \\ -x_{11} & x_{10} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\gamma_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & -x_{15} & x_{14} \\ x_{15} & 0 & -x_{13} \\ -x_{14} & x_{13} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Psi_{3\times3} = \rho\begin{bmatrix} 0 & x_{18} & x_{17} \\ x_{18} & 0 & x_{16} \\ x_{17} & x_{16} & 0 \end{bmatrix};$$

$$G1_{3\times3} = \begin{bmatrix} G_x & G_y & G_z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$G2_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ G_x & G_y & G_z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$G2_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}$$

另

$$\frac{\partial g\left(\vec{X}, \vec{f}\right)}{\partial \vec{f}}\bigg|_{\left(\vec{x}_0, \vec{f}_0\right)} = \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ A_{3\times 3} & B_{3\times 3} \\ C_{3\times 3} & D_{3\times 3} \end{bmatrix} \tag{26}$$

其中

$$A_{3\times 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$B_{3\times 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_{3\times 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$D_{3\times 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 GPS量測方程式

由於GPS可對載具位置及速度進行量測，因此量測方程式

$$z = Hx + v \tag{27}$$

其中 $z = \left[R_x \quad R_y \quad R_z \quad \dot{R}_x \quad \dot{R}_y \quad \dot{R}_z\right]$

$$H = \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} \end{bmatrix}$$

將固裝式六加速儀導航系統結合GPS可對載具飛行狀態進行估測，可應用於UAV及MAV導航使用。

5、六加速儀INS/GPS模擬驗證

由於受慣性組件本身誤差影響，使得六加速儀慣性導航系統所計算載具運動狀態誤差，隨時間增加而增加；本文提出導航系統誤差方程式，整合六加速儀慣性及GPS，以卡爾漫濾波器估測載具運動狀態，可提高導航精度。為模擬六加速儀機制，假設載具相對於切平面座標運動加速度為 $\vec{a}^t = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ m/sec^2，另角加速度為 $\dot{\vec{\omega}}_{bt}^t = \begin{bmatrix}0 & \pi & 0\end{bmatrix}^T$ rad/sec^2；則加速儀量測輸出值 s_j 獲得為：

$$s_j = \begin{bmatrix} C_n^b\left(\vec{a}^n + 2\vec{\omega}_{in}^n \times \vec{v}^n + \vec{\omega}_{in}^n \times \vec{\omega}_{in}^n \times \vec{r}^n\right) + \\ \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^b + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^b - C_t^b \vec{G}^t \end{bmatrix} \cdot \vec{\theta}_j \tag{28}$$

其中 $\vec{\rho}_j$ 為各加速儀位置向量，今設每一加速儀距體座標中心點距離 ρ 為 $10cm$；$\vec{\theta}_j$ 為各加速儀感測方向之單位向量。

今假設 s_j 為隨機常態分佈，其誤差範圍約 $0.1mg$；(35)式中系統程序誤差 $w \to N(0,1)$；(36)式量測誤差 $v \to N(0,01)$；六加速儀慣性導航系統比較六加速儀慣性系統計算頻率為20HZ，GPS取樣周期為每秒一次。則經由電腦模擬六加速儀慣性導航系統與INS/GPS所計算載具相對於切平面座標系位置誤差比較圖分別如圖4~圖6，

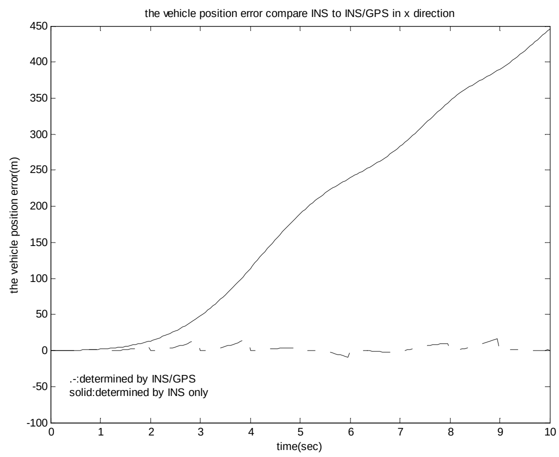

圖. 4. 六加速儀慣性導航系統及INS/GPS於 x 軸向位置誤差比較圖

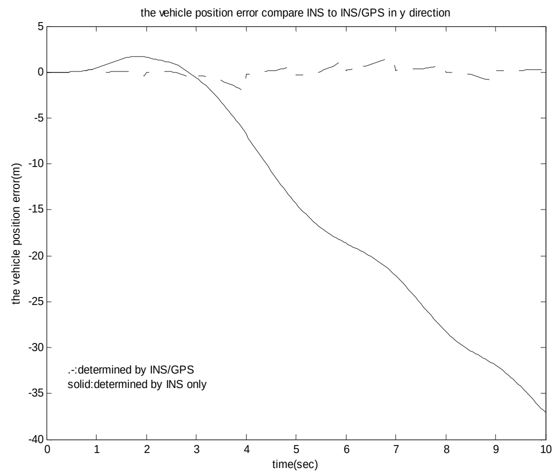

圖. 5. 六加速儀慣性導航系統及INS/GPS於 y 軸向位置誤差比較圖

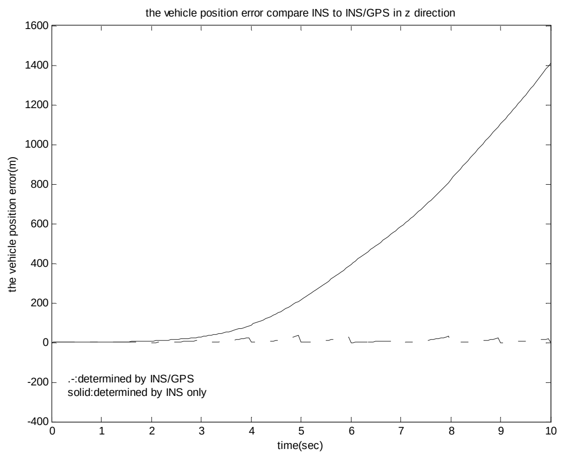

圖. 6. 六加速儀慣性導航系統及INS/GPS於 z 軸向位置誤差比較圖

由圖4~圖6觀察，以六加速儀慣性導航系統所計算載具位置誤差對於時間非常敏感，依據Chen's誤差分析[2]，當載具靜止或等速運動時，六加速儀機制所計算線性加速度誤差為 $g\phi$ ，其位置誤差 δr^t 隨時間 t^4 成長。由本文中所假設加速儀原差(Bias)，與六加速儀機制邊長($2\rho = 20cm$)，時間10秒時所計算 y 軸概約為 $40m$ 誤差，與模擬結果大致相符；而 x 軸與 z 軸因受外力影響誤差較大，其中 x 軸概約為 $450m$ 誤差，而 z 軸受重力之影響，其誤差對於時間最敏感，概約為 $1400m$ 誤差。而運用卡爾漫濾波器整合六加速儀慣性系統與GPS，所獲得位置狀態估測誤差，明顯較六加速儀慣性系統計算位置誤差低，在時間五秒時， x 誤差相差二階(Two Orders)、 y 誤差相差一階(One Order)、 z 誤差相差一階；然當時間十秒時， x 誤差相差二階(Two Orders)、 y 誤差相差一階(One Order)、 z 誤差相差三階，顯示六加速儀慣性系統在 z 軸誤差發散速度最快。另由於GPS每秒鐘取樣一次，當取樣後經由卡爾漫濾波器估測位置狀態，誤差明顯降低，但隨時間增加至下次取樣時，其誤差呈拋物線成長，其中 x 及 z 軸約增加至 $20m$ 以內， y 軸約增加至 $5m$ 以內，故六加速儀慣性系統對受加速度軸向位置計算，誤差成長較快。

另比較六加速儀慣性系統與六加速儀INS/GPS所計算載具相對於切平面座標系速度誤差圖分別如圖7~圖9，

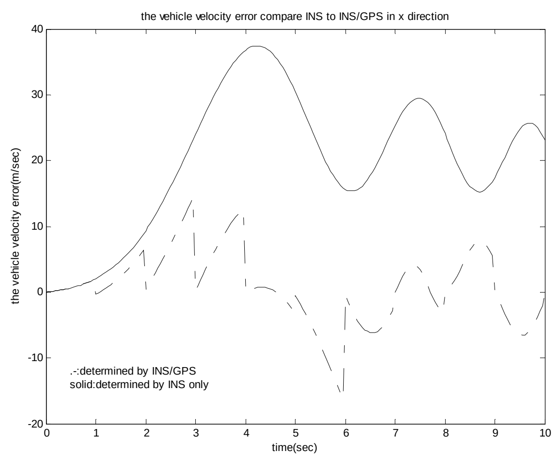

圖. 7. 六加速儀慣性導航系統及INS/GPS於 x 軸向速度誤差比較圖

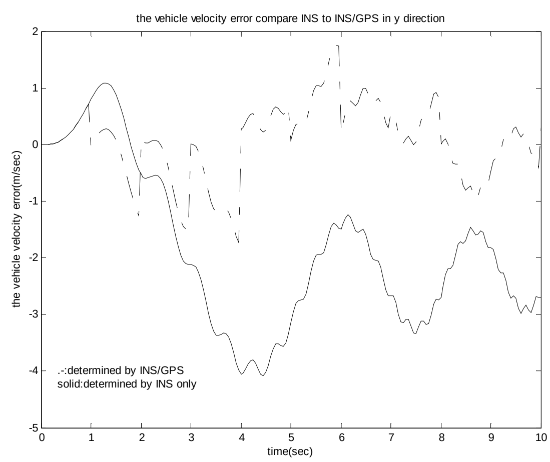

圖. 8. 六加速儀慣性導航系統及INS/GPS於 y 軸向速度誤差比較圖

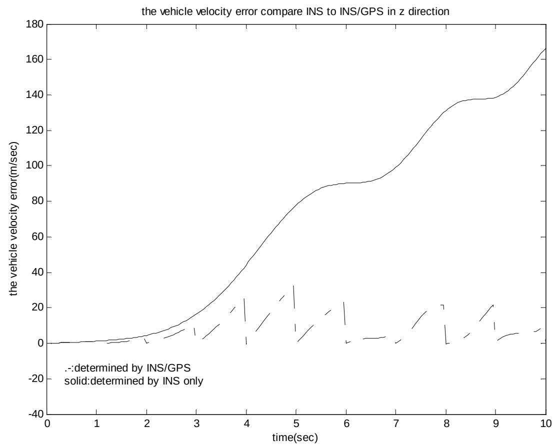

圖. 9. 六加速儀慣性導航系統及INS/GPS於 z 軸向速度誤差比較圖

由Chen’s誤差分析指出，六加速儀慣性導航系統所計算載具速度誤差 δv^t 隨時間 t^3 成長。因此時間10秒時，速度誤差概約較位置誤差減少一階，由圖7~圖9觀察，與模擬結果相符；其中 x 軸概約在40 m/sec誤差範圍，在 y 軸概約在5 m/sec誤差範圍，而 z 軸受重力之影響誤差較大，概約在180 m/sec誤差範圍。而運用卡爾漫濾波器整合六加速儀慣性系統與GPS，所獲得速度狀態估測誤差，仍較六加速儀慣性系統計算速度誤差低，但其誤差差距較位置誤差小，其中 x 與 y 軸最大誤差相差約二倍，而 z 軸運用卡爾漫濾波器所獲得速度誤差亦限制在一定範圍內，在時間五秒時，與六加速儀慣性系統計算速度誤差相差約二倍，在時間十秒時，誤差相差約十六倍。另由於GPS每秒鐘取樣一次，當取樣後經由卡爾漫濾波器估測速度狀態，誤差明顯降低，但隨時間增加至下次取樣時，其誤差約呈線性成長，其中 x 及 z 軸約增加至 20 m/sec速度範圍以內， y 軸約增加至 2 m/sec速度範圍以內，故六加速儀慣性系統對受加速度軸向速度計算，誤差成長較快。

6. 結論

本文研究一種固裝式六加速儀機制之慣性導航系統，修正基本理論，考量重力場效應影響，探討載具在不同姿態下運動時加速儀輸出，運用座標轉換與六加速儀機制理論，求得載具相對於慣性座標之線性加速度及角加速度，以符合實際導航需求；更進一步運用卡爾漫濾波器結合GPS理論來證實全加速儀在導航上的可行性，經由電腦模擬驗證結果了解，六加速儀慣性導航系統誤差受重力及載具運動方向之影響較大，其中位置誤差在 x 、y 、z 軸隨時間增加發散，另速度誤差在 x 、y 軸限制在一定範圍內，其中 x 軸限制在40 m/sec速度範圍以內，y 軸限制在5 m/sec速度範圍以內，但 z 軸隨時間增加發散；而整合INS/GPS可有效改善各種誤差狀況，將誤差限制在一定範圍內，其中位置誤差在 x 及 z 軸限制 $20m$ 以內，y 軸限制在 $5m$ 以內，另速度誤差在 x 及 z 軸限制在20 m/sec速度範圍以內，在 y 軸限制在2 m/sec速度範圍以內。未來可結合硬品實作，整合六加速儀慣性導航系統及GPS，將可應用於無人飛行載具(UAV)、機器人(Robot)及開發自動駕駛控制系統，以達實用價值，並為下階段實驗之重點。而在提高導航精度上後續可由實驗室校準(Calibration)後獲得慣性導航系統之精度與感測元件之原始偏差(Bias)、比例因子(Scale Factor)、初始校準(Alignment)、安裝誤差等因素，經適當之誤差補償(Compensation) 改善後亦更提高導航精度。

7. 參考文獻

[1]Britting, K. R. Sc. D., "*Inertial Navigation System Analysis,*" Willy-Interscience, ch . 9, pp.210-211(1971).

[2]Chen, J. H., Lee, S. C., and DeBra, D. B., "Gyroscope Free Strapdown Inertial Measurement Unit by Six Liner Accelerometers," Journal of Guidance, Control, and Dynamics *AIAA* Vol. 17, No.2, pp.286-290, March-April(1994).

[3]李守誠、劉正瑜、王亞民，無陀螺儀固裝式慣性導航系統對初值問題之研究，中正嶺學報第二十六卷第一期，頁11-24頁(1997)。

[4]黃復聰，加速規與全球定位系統整合方位估測法，碩士論文，台灣大學應用力學研究所，台北(2001)。

[5]李守誠、洪兆宇、方淳民、王振宇，六加速儀機制導航應用與方向誤差校準方法之研究，陸軍官校基礎學術研討會暨國防科技航空技術學門研究成果發展會論文集，中華民國93年5月28日。

Six Accelerometer Schemes combine GPS of Applications for Navigation

Kuo-Yu Peng [1]
Electronic engineering Lunghwa University of Science and Technology

Sou-Chen Lee [2]
Department of Computer Information and Network Engineering Lunghwa University of Science and Technology

Chao-Yu Hung [3]
Department of Weapon System Engineering, Chung Cheng Institute of Technology National Defense University

Chen-Yu Wang [4]
Department of Weapon System Engineering, Chung Cheng Institute of Technology National Defense University

ABSTRACT

The import issue of this paper is proposes one direction calibration method for strap-down six-accelerometers schemes module. A novel method for the integration of the six-accelerometer INS and the GPS. A superior result of simulation is found that the integrated INS/GPS can possess a more accurate navigation error, it almost have two orders less than conventional INS. The novel method of integrating six-accelerometer INS and GPS would be considered in auto-pilot and UAV design for the future application.

Keywords：INS, Real-time, Strap-down