

國立成功大學
系統及船舶機電工程學系
碩士論文

H^∞ -濾波器在慣性導航系統誤差估測上
之應用研究

A Study on Estimation of the Error Equations of
Inertial Navigation System with H^∞ -filter

研 究 生：陳 柏 宏

指導教授：黃 正 能

中華民國九十四年六月

國立成功大學
碩士論文

H^∞ -濾波器在慣性導航系統誤差估測上
之應用研究

A Study on Estimation of the Error Equations of
Inertial Navigation System with H^∞ -filter

研究生：陳柏宏

本論文業經審查及口試合格特此證明

論文考試委員

黃正龍 劉思正 林鴻裕

指導教授：黃正龍

系(所)主管：趙儒民

中華民國 九十四 年 六 月 二十 日

摘 要

捷聯式慣性導航系統是一個具有自主包容性、不受天候的影響及地理環境限制的導航系統。慣性導航系統本身含有加速規和陀螺儀，可以提供載具所有導航資料：包括位置、速度和姿態（縱搖、橫搖和偏航角），其具有高度的穩定性和高精密度。

本文對慣性導航系統之誤差方程式的狀態分別以卡門濾波器及 H^∞ 濾波器進行誤差估測，並進行比較。藉由各種不同雜訊干擾的輸入，以驗證 H^∞ 濾波器對不同雜訊干擾比卡門濾波器具有較佳的強健性。

Abstract

Strapdown Inertial Navigation System is an automatically operating guidance system, which has characteristics of high precision and high reliability in offering a complete information required in vehicle's navigation regardless of weather conditions. It gives data showing vehicle's headings, velocities, and positions as well as the angles of vehicle's pitch, roll and azimuth.

In this research, the kalman filter and H_∞-filter are studied and used to simulate the error equations of the strapdown inertial navigation system respectively. A comparison between the above two filters is made for various noises and disturbances. The computer simulation results reveal that the H_∞-filter is more robust in handling the various exogenous inputs other than the Gaussian white noise.

誌 謝

本論文承蒙恩師 黃正能教授兩年來悉心的指導與教誨，對於論文細節及缺失的部份，更是不厭其煩地反覆討論及給予指導，才使得本論文得以順利完成，在此致上最誠摯的感謝與敬意。

感謝 劉思正教授及 林鴻裕教授，在口試過程中用心指導和糾正，對本拙作提出寶貴的意見，感謝兩位委員的用心。

同時，特別感謝張勝凱艦長，不斷地鼓勵及支持我，使我能在工作一段時間後，到研究所持續進修充實自己。

兩年在學期間，秉澂、景超學長、柏元學長在課業及論文上給我許多的幫助，乃榕、聯傑均是一起修課，共同研究的好友。還有正道、以及今偉，因為有你們加入，讓研究室更加多彩多姿。謝謝你們在生活和課業上的幫忙，讓我在研究所兩年留下美好的回憶。

最後，感謝我的父母和妹妹，一直在背後支持我，於求學過程中，不斷的給予鞭策及鼓勵，給予我最大的精神支持，僅以本文獻給我最親愛的家人。

目 錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	VII
表目錄.....	
符號說明.....	XI
第一章、緒論.....	1
1.1、前言.....	1
1.2、文獻回顧.....	3
1.3、本文架構.....	3
第二章、卡門濾波器的推導.....	4
2.1、前言.....	4
2.2、卡門濾波器的分類.....	5
2.3、卡門濾波器原理.....	7
第三章、 H^∞ 控制理論.....	15
3.1、前言.....	15

3.2、norm的定義.....	15
3.3、 H^∞ 控制理論.....	18
3.4、 H^∞ 濾波器問題的求解.....	26
第四章、慣性導航系統基本計算法和運動方程式之建立.....	28
4.1、各種座標系的定義.....	28
4.2、慣性導航系統運動方程式的推導.....	30
4.3、姿態方程式的推導.....	33
4.3.1、方向餘弦矩陣.....	33
4.3.2、尤拉角微分方程式.....	36
4.3.3、四元數法.....	39
4.4、位置方程式的推導.....	42
4.5、慣性導航系統方程式總結.....	43
第五章、慣性導航系統誤差方程式的推導.....	46
5.1、前言.....	46
5.2、導航誤差方程式的推導.....	46
5.3、姿態誤差方程式的推導.....	48
5.4、位置誤差方程式的推導.....	52
5.5、誤差方程式總結.....	52
第六章、電腦模擬.....	55

6.1、模擬.....	56
6.2、模擬結果分析.....	57
第七章、結論.....	69
參考文獻.....	70
自述.....	72

圖 目 錄

圖 1.1、捷聯式慣性導航系統原理示意圖.....	2
圖 2.1、直接濾波法方塊圖.....	5
圖 2.2、開迴路誤差補償濾波法方塊圖.....	6
圖 2.3、閉迴路誤差控制補償濾波法方塊圖.....	7
圖 2.4、卡門濾波器流程圖.....	12
圖 4.1、載具座標系各軸示意圖.....	30
圖 4.2、參考作標的位置向量圖.....	30
圖 4.3、i.e.n 座標系示意圖.....	31
圖 4.4、載具座標系和導航座標系關係圖.....	34
圖 4.5、載具座標系與地理座標系的關係.....	36
圖 4.6、測地(緯度、經度、高度)示意圖.....	43
圖 5.1、失準角示意圖.....	47
圖 6.1a、第一個情況經卡門濾波器估測後的位置誤差均方根圖 (取位置差為觀測).....	59
圖 6.1b、第一個情況經卡門濾波器估測後的位置誤差均方根圖 (取速度差為觀測).....	59
圖 6.2a、第一個情況經卡門濾波器估測後的速度誤差均方根圖	

(取位置差為觀測).....	60
圖 6. 2b、第一個情況經卡門濾波器估測後的速度誤差均方根圖	
(取速度差為觀測)	60
圖 6. 3a、第一個情況經卡門濾波器估測後的失準角誤差均方根	
圖(取位置差為觀).....	61
圖 6. 3b、第一個情況經卡門濾波器估測後的失準角誤差均方根	
圖(取速度差為觀).....	61
圖 6. 4a、第一個情況經卡門濾波器估測後的陀螺儀飄移率誤差	
均方根圖(取位置差為觀測).....	62
圖 6. 4b、第一個情況經卡門濾波器估測後的陀螺儀飄移率誤差	
均方根圖(取位置差為觀測).....	62
圖 6. 5a、第一個情況經卡門濾波器估測後的加速規偏差誤差均	
方根圖(取位置差為觀測).....	63
圖 6. 5b、第一個情況經卡門濾波器估測後的加速規偏差誤差均	
方根圖(取位置差為觀測).....	63
圖 6. 6a、第二個情況經卡門濾波器估測後的位置誤差均方根圖	
(取位置差為觀測).....	64
圖 6. 6b、第二個情況經卡門濾波器估測後的位置誤差均方根圖	
(取速度差為觀測).....	64

圖 6.7a、第二個情況經卡門濾波器估測後的速度誤差均方根圖 (取位置差為觀測).....	65
圖 6.7b、第二個情況經卡門濾波器估測後的速度誤差均方根圖 (取速度差為觀測).....	65
圖 6.8a、第二個情況經卡門濾波器估測後的失準角誤差均方根 圖(取位置差為觀).....	66
圖 6.8b、第二個情況經卡門濾波器估測後的失準角誤差均方根 圖(取速度差為觀).....	66
圖 6.9a、第二個情況經卡門濾波器估測後的陀螺儀飄移率誤差 均方根圖(取位置差為觀測).....	67
圖 6.9b、第二個情況經卡門濾波器估測後的陀螺儀飄移率誤差 均方根圖(取位置差為觀測).....	67
圖 6.10a、第二個情況經卡門濾波器估測後的加速規偏差誤差均 方根圖(取位置差為觀測).....	68
圖 6.10b、第二個情況經卡門濾波器估測後的加速規偏差誤差均 方根圖(取位置差為觀測).....	68

表目錄

表 2.1、離散卡門濾波器公式整理.....	14
------------------------	----



符號說明

ε (Epsilon)	陀螺儀的隨機漂移角速度
ΔA	加速規偏差
ω_{ie}	地球座標系 (e) 相對於地心慣性座標系 (i) 之角速度
ω_{ie}^n	地球座標系 (e) 相對於地心慣性座標系 (i) 之角速度， 表示在導航座標系 (n) 上的量
φ (Phi)	旋轉角或縱搖(Rolling angle)
Θ (Theta)	俯仰角或橫搖(Pitching angle)
ϕ (Psi)	偏航角(Yawing angle)
λ	經度(Longitude)
L	緯度(Latitude)
h	高度(Altitude)
R	地球半徑
v_e^n	在導航座標系 n 上的對地速度
C_b^n	載具座標系 b 到導航座標系 n 的轉換矩陣
f^b	加速規感測輸出
ω_{ie}^n	導航座標系 n 上的地球轉速
ω_{en}^n	地理座標角速度表示在導航座標系 n 上的量
g_l^n	本地重力場表示在導航座標系 n 上的量

q	轉動四元素
Ω_{ib}^b	陀螺儀輸出
Ω_{in}^b	導航座標旋轉角速度
V_N	北向速度分量
V_E	東向速度分量
V_D	垂直向速度分量
δf^b	加速規的感測誤差項
δg_l^n	重力場誤差項
$\delta \omega_{en}^n$	地理座標角速度誤差量
ε_E	東向陀螺儀誤差角
ε_N	北向陀螺儀誤差角
ε_D	垂直向陀螺儀誤差角
δV_E	東向速度誤差
δV_N	北向速度誤差
δV_D	垂直向速度誤差

第一章 緒論

1.1 前言

慣性導航是一門綜合性技術，用於對運動體的姿態和位置等參數的確定。是一個可不需依賴外界輸入，不受氣候和電子干擾影響的導航系統。因此，它廣泛的應用於航太、航空、航海、大地測量等領域。由於慣性導航的自主性，使得慣性導航技術在軍事上有著特殊的實用價值。從40年代第二次世界大戰中德國發射V2火箭，50年代發射人造衛星，60年代載人登月，到90年代的波斯灣戰爭中使用的多種尖端武器，都顯示慣性導航技術的發展和應用的足跡[10]。

但是慣性導航系統也有一些不足的缺點，一是定位精度隨時間的增加而降低，二是計算過程中需要起始位置和起始姿態角的初值。慣性導航系統的精度很大程度上取決於慣性感測元件的精度。因為系統是利用加速規與陀螺儀等慣性感測元件，獲得載具本身的運動參數。由加速規量測出載具的加速度，陀螺儀測出的載具的角速度，經過積分過程，估測出載具在空間中的位置變化與載具的運動姿態。但由於感測器本身具有感測誤差，加上積分運算過程所產生的誤差也會隨時間增加而累積，所以長時間的導航應用必須用外部定位參考資訊對它進行適當校正或修正。目前已有許多種量測方式與原理各不相同的感測器，例如電子羅盤，星光感測器，太陽感測器，全球定位系統等，都可以和慣性導航系統組合在一起，截長補短，用以提高導航系統的精度。[5]

慣性導航系統通常分為兩類，第一類稱為平台式慣性導航系統

(Gimballed systems)，穩定平台是平台式慣性導航系統的主要部分。在一個穩定平台上，通常裝有三個單自由度陀螺（或是兩個二自由度的陀螺）和三個加速規。陀螺的三個敏感軸與加速規的三個敏感軸應保持方向一致，並構成一個直角座標系，該座標系通稱為平台座標系。而第二類稱為捷聯式或又稱為固定式慣性導航系統(Strap-down systems)，捷聯式慣性導航系統的出現主要是由於計算機（硬體、軟體）迅速發展的結果。在捷聯式慣性導航系統中，加速規和陀螺儀直接安裝在載具上，而不在需要平台。因此，對加速度計算時必須考慮的參考座標系就不是以台體模擬的形式存在。是利用計算機將陀螺儀的輸出信訊息計算，求出載具座標系內的角度增量，以獲得有關載具座標系的訊息。通常人們將系統中完成平台功能的計算機部分稱為計算機平台或數學平台。目前捷聯式慣性導航系統在航空、航太、航海和陸地各領域中已有廣泛的應用，有逐步取代平台式慣性導航系統的趨勢。

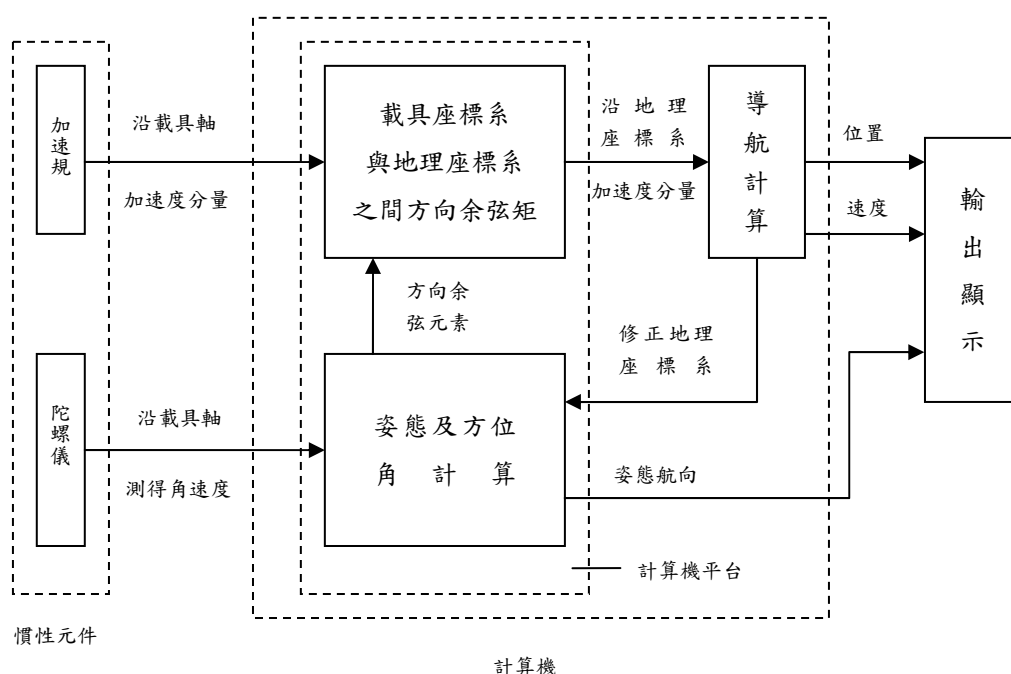


圖 1.1 捷聯式慣性導航系統原理示意圖

1.2 文獻回顧

對於捷聯式慣性導航系統的研究，有許多的文獻可以參考。如 YEON.FUH.JIANG[9]用四元素做誤差分析。HYUNG.KEUN.LEE[3]用四元素建立捷聯式慣性導航系統的誤差模型。Lovren,N.和 Pieper,J.K.[6]用方向餘弦和四元素做飛機的姿態誤差分析等許多使用四元素方法做誤差分析的文獻。本文利用四元素方法對捷聯式慣性導航系統的運動方程式和誤差方程式進行推導。並依據 Hwang Cheng-Neng.[2]對於 H^∞ 控制器及濾波器上的研究成果加以結合，並運用討論。

1.3 本文架構

本文第一章為緒論，簡單介紹慣性導航系統的發展歷史，並介紹捷聯式慣性導航的原理和應用以及文獻回顧。第二章介紹卡門濾波器分類及原理，並。第三章介紹 H^∞ 控制理論的標準架構，及說明如何應用黎卡提方程式求解 H^∞ 濾波器。第四章推導並建立慣性導航的運動方程式。第五章推導由運動所產生的系統誤差方程式。第六章為電腦模擬，藉由建立單軸的慣性導航誤差系統為例於白雜訊的情況下，使用卡門濾波器估測其狀態值的誤差。第六章是對本文提出結論及未來工作的展望。

第二章 卡門濾波器的推導

2.1 前言

由慣性導航的工作原理和誤差分析知道，慣性導航系統有很好的自主性，可以連續的提供包括姿態、速度、位置的全部導航參數。而且在短期內有很好的精度和穩定性。但是在長時間的連續工作中，純慣性導航的誤差將隨時間而累積。要解決這個問題，就需要很高精度的慣性元件，尤其是陀螺儀。但是要研制高精度的慣性元件，所需要的代價也相當大。所以目前已有許多種量測方式與原理各不相同的感測器，例如電子羅盤，星光感測器，太陽感測器，全球定位系統等，都可以和慣性導航系統組合在一起，截長補短，用以提高導航系統的精度。

其中因為現代控制理論的出現，人們開始研究一種新的組合式導航系統，它是由各類感測器、濾波器，控制器和導航計算機所組成。其中根據控制理論設計的濾波器是這一系統的關鍵。所謂濾波，最簡單的講法就是對訊息去偽存真的過程。通過濾波器將各種單獨的導航系統組合在一起，形成一種組合式導航系統。它是把各類感測器提供的各種導航訊息提供給濾波器，得出慣性導航系統的誤差最佳估計值。再由控制器對慣性導航系統進行校正，使得系統誤差最小。最常為人們使用的濾波器方法就是卡門濾波器。通常稱利用卡門濾波器的組合導航系統為最佳

組合導航系統。[10]、[15]

2.2 卡門濾波器的分類

根據卡門濾波器所估計的狀況不同，一般可將卡門濾波器在慣性導航中的應用分為直接法和間接法。[10]、[15]

1. 直接濾波法：

如圖(2.1)，直接法的卡門濾波器接收慣性導航系統的比力和其他輔助導航系統計算的某些導航參數，經過濾波，給予有關導航參數的最佳估測。因為是將卡門濾波器直接置於慣性導航系統迴路中，所以更能直接提供正確的導航資料。適合用在分析高頻的外部數據量測，如戰鬥機或戰艦於戰鬥時的狀況。缺點是當卡門濾波器失效時，整個慣性導航系統就不能運作。而且當計算取樣頻率太高時，計算機的負荷太重。此外導航方程式是非線性，也限制了直接濾波法的使用範圍。

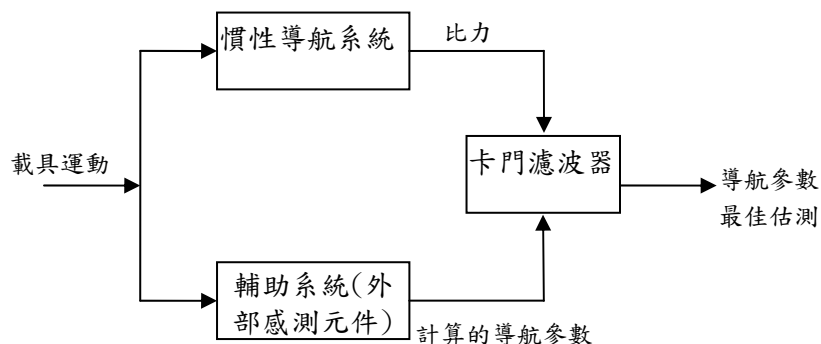


圖 2.1、直接濾波法方塊圖

2. 間接濾波法：

間接濾波法是慣性導航系統輸出的資料和輔助系統量測的資料之差做為估測系統的誤差，並回饋這些誤差量。而卡門濾波器的工能就是處理這數據，以便得出慣性導航系統誤差的最佳估測。因為此方法適用於低頻的外部量測數據，而且卡門濾波器又在系統迴路外，所以沒有直接濾波法的缺點。一般又以回饋方式分為二種：

(a) 開迴路誤差補償濾波法

開迴路誤差補償濾波法又稱為間接前饋式濾波法，如圖(2.2)。估測的誤差狀態向前回饋，並修正慣性導航系統的輸出狀況。優點是當卡門濾波器失效時，系統依然可以正常操作。缺點為因為是開迴路，對濾波器模型誤差較敏感，所以要求使用較精確的模型，以使系統的誤差保持在一很小範圍。

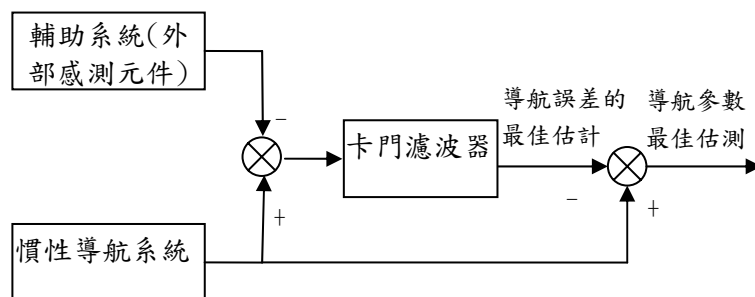


圖 2.2、開迴路誤差補償濾波法方塊圖

(b) 閉迴路誤差控制補償濾波法

閉迴路誤差控制補償濾波法又稱為間接回饋式濾波法。閉迴路結構依據卡門濾波估算的誤差，通過在慣性導航系統內給陀螺儀或加速規的補償，控制慣性導航系統的誤差，因此誤差將保持在模型線性假定的範圍內。但缺點是慣性元件工作狀況不斷改變，可能導致偏離最好的工作區域。

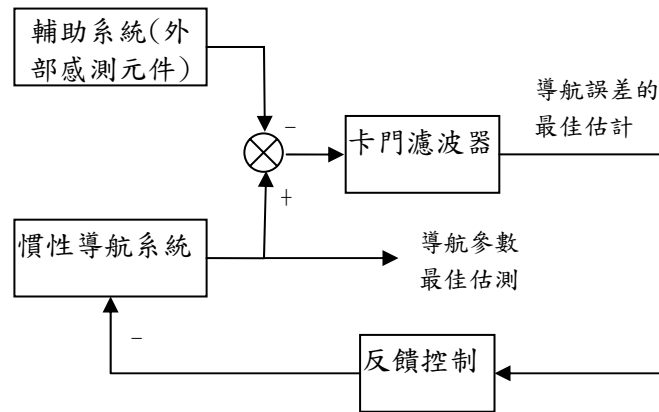


圖 2.3、閉迴路誤差控制補償濾波法方塊圖

本文利用開迴路誤差補(間接前饋式)卡門濾波器來估測回饋慣性導航系統的誤差值。

2.3 卡門濾波器原理

卡門濾波器利用遞迴式法則，由現代控制理論和統計數據處理為基礎，是從一個含有雜訊的量測中估測系統狀態向量最好的方法。原理是

採用動態數學方程式的推算值與量測值，只需利用已經算好之前一狀態之濾波值，和濾波誤差的協方差矩陣(Covariance matrix)，就可以算出新狀態的濾波值(或估測值)，以其準確程度(由協方差矩陣的逆矩陣表示)作加權平均，藉由這種濾波方式求出最佳的即時導航解。本節介紹一般連續系統之離散化、並介紹於此狀態空間之最佳估測。

大部分系統都是連續時間的 (Continuous-time)，使用卡門濾波器，首先就是建立將連續系統離散化的狀態空間模型，以此模型進行遞迴最佳估測。

對連續時間的線性時變系統和系統量測輸出的動態方程式如下：[7]

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (2.1)$$

$$Z(t) = H(t)x(t) + v(t) \quad (2.2)$$

其中 $w(t)$ 為系統雜訊或輸入雜訊； $v(t)$ 為量測雜訊或輸出雜訊； $x(t)$ 為系統狀態； $Z(t)$ 為系統輸出； $F(t)$ 、 $G(t)$ 、 $H(t)$ 、為已知的時變矩陣。

則對一階線性微分方程式的解如下：[7]

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[F(\tau)w(\tau)]d\tau \quad (2.3)$$

其中 $\Phi(t, t_0)$ 為系統的轉移矩陣，滿足：[7]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) &= F(t)\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t, t) &= I \end{aligned} \quad (2.4)$$

在系統中，系統雜訊假設是零平均的白雜訊列（Zero mean White Noise Sequence）。這表示任意前後時間之間的雜訊在統計特性上是無關的。考慮上述連續系統在一組離散時間 (t_0, t_1, t_2, \dots) 取樣，則（2.1）式可改寫成：[7]

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + G(k)w(k) \quad (2.5)$$

其中 $\Phi(k+1, k)$ 為系統轉換矩陣， $G(k)w(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)G(\tau)w(\tau)d\tau$ 。並將 t_{k+1} 以 $k+1$ 來代替。

$w(k)$ 是為零平均的高斯白雜訊(Zeromean Gaussian white noise)，其變異數矩陣 $Q(k)$ 定義為：[7]

$$Q(k) = E(w(k)w(k)^T) \quad (2.6)$$

對系統量測輸出矩陣離散化，可獲得離散時間量測模型（Discrete-time measurement model）如下：[7]

$$Z(k) = H(k)x(k) + v(k) \quad (2.7)$$

$v(k)$ 是為零平均的高斯白雜訊(Zeromean Gaussian white noise)，其變異數矩陣協方差矩陣 $R(k)$ 定義為：[7]

$$R(k) = E(v(k)v(k)^T) \quad (2.8)$$

$w(k)$ 和 $v(k)$ 彼此不相關(Uncorrelated)，也就是：[7]

$$E(w(k)v(i)^T) = 0 \quad \text{for all } k, i \quad (2.9)$$

對隨機系統而言，當時間為 k 時，利用狀態矩陣估測時間為 $k+1$ 時的最小變異無偏差之估測狀態為：[7]

$$\hat{x}(-)(k+1) = \Phi(k+1, k)x(-)(k) + G(k)E[w(k)] \quad (2.10)$$

其中 “ \wedge ” 符號表示 $k=k+1$ 時的預測， $(-)$ 符號表示未更新的狀態， $(+)$ 符號表示已更新的狀態。由於 $w(k)$ 是為零平均的高斯白雜訊，所以(2.10)式可以表示為：[7]

$$\hat{x}(-)(k+1) = \Phi(k+1, k)x(-)(k) \quad (2.11)$$

再定義估測誤差：[7]

$$\begin{aligned} \tilde{x}(-)(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(-)(k+1) \\ &= \Phi(k+1, k)x(k) + G(k)w(k) - \Phi(k+1, k)\hat{x}(-)(k) \\ &= \Phi(k+1, k)\tilde{x}(-)(k) + G(k)w(k) \end{aligned} \quad (2.12)$$

定義 P 為誤差協方差矩陣(Covariance Matrix)：[7]

$$\begin{aligned} P(+)(k+1) &\triangleq E[\tilde{x}(+)(k+1)\tilde{x}^T(+)(k+1)] \\ P(-)(k) &\triangleq E[\tilde{x}(-)(k)\tilde{x}^T(-)(k)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

將(2.12)式代入(2.13)式，並考慮 $w(k)$ 是為零平均的高斯白雜訊，和狀況無關，可得：[7]

$$\begin{aligned} P(-)(k+1) &\triangleq E[\tilde{x}(-)(k+1)\tilde{x}^T(-)(k+1)] \\ &= E[\{\Phi(k+1, k)\tilde{x}(-)(k) + G(k)w(k)\}\{\Phi(k+1, k)\tilde{x}(-)(k) + G(k)w(k)\}^T] \\ &= \Phi(k+1, k)P(-)(k)\Phi^T(k+1, k) + G(k)Q(k)G^T(k) \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中 $P(k)$ 為系統狀態誤差變異數集合矩陣，即 $v(k)$ 和 $w(k)$ 與之的異數集

合：[7]

$$P(k) = E[\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)] = E[(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T] \quad (2.15)$$

由卡門濾波器目標(最小均方誤差值)，定義一卡門增益 $K(k)$ ，使得

$P(k)$ 為：[7]

$$P(k) = E\{[(x(k) - \tilde{x}^T(-)(k)) - K(k)(H(k)x(k) + v(k) - H(k)\tilde{x}^T(-)(k))] \\ [(x(k) - \tilde{x}^T(-)(k)) - K(k)(H(k)x(k) + v(k) - H(k)\tilde{x}^T(-)(k))]^T\} \quad (2.16)$$

又 $R(k) = E(v(k)v(k)^T)$ ，將 $P(K)$ 化簡為：[7]

$$P(k) = (I - K(k)H(k))P(-)(k)(I - K(k)H(k))^T + K(k)R(k)K^T(k) \quad (2.17)$$

其中 I 為單位矩陣，由矩陣 $P(k)$ 之跡(trace)對 $K(k)$ 微分等於零可得：[7]

$$K(k) = P(-)(k)H^T(k)[H(k)P(-)(k)H^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (2.18)$$

(2.18)式為最佳 $K(k)$ 值，又稱為卡門濾波器的最佳增益。

由 $K(k)$ 定義 $\hat{x}(k)$ 和 $\hat{x}(-)(k)$ 的關係：[7]

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(-)(k) + K(k)[Z(k) - H(k)\hat{x}(-)(k)] \quad (2.19)$$

(2.19)式為卡門濾波器的狀態更新方程式。

而 $P(k)$ 和 $P(-)(k)$ 關係定義為：[7]

$$P(k) = [I - K(k)H(k)]P(-)(k) \quad (2.20)$$

(2.20)式為系統狀態誤差變異數矩陣更新方程式。

由上面各式定義可知，可以利用各項指標判斷卡爾曼濾波器是否收斂。隨著濾波次數增加，P 值會逐漸減小，即預測精度不斷提高；並且增益值 K 也隨之減小，也就是利用新量測資料改進預測估計值所佔的比重也隨時間減小。

卡門濾波器流程如圖(2.4)所示：[7]

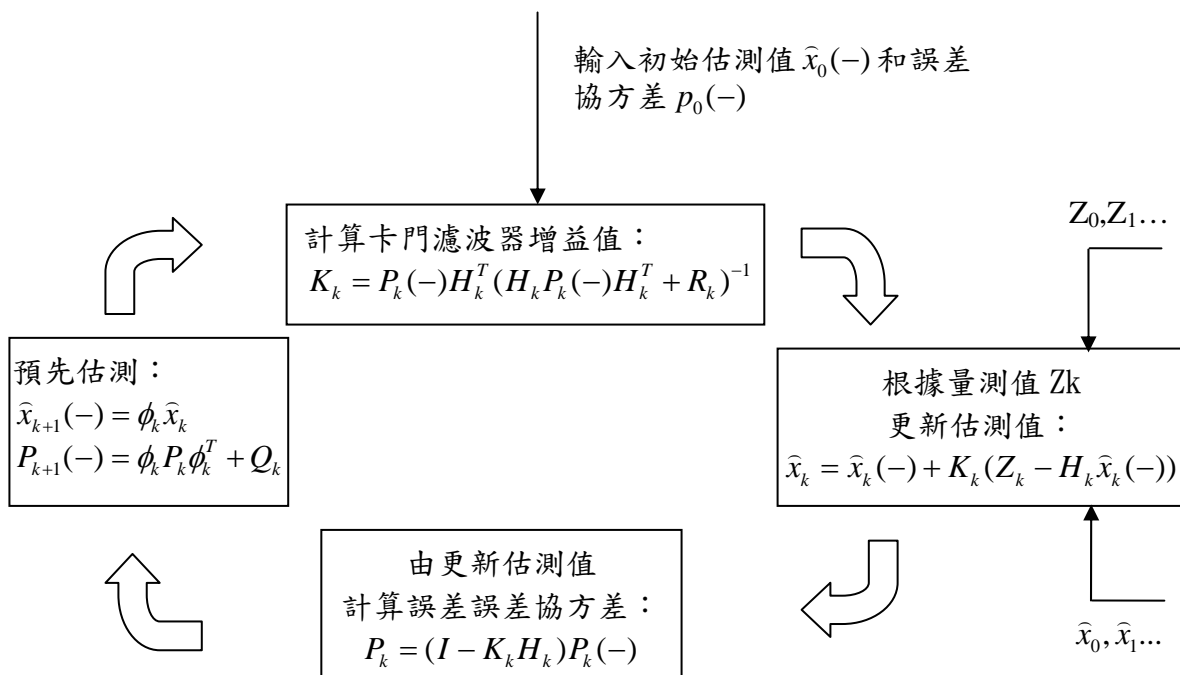


圖 2.4、卡門濾波器流程圖

由於模擬時會應用到前面所推導的結論，因此我們將離散卡門濾波器整理為表 2.1。

卡門濾波器要求系統狀態向量及量測值均為高斯白雜訊，此外需要掌握系統精確的數學模型以及系統量測雜訊之統計特性，才能獲得濾波效果，否則濾波效果將降低。而 H^∞ 濾波器對於未知外擾、非結構性不確定性的具有容忍能力。所以當外界的雜訊干擾只考慮為單純高斯白雜訊的情況時，濾波器使用卡門濾波器就足夠。但是如果考慮外擾為未知和具有非結構性不確定性的情況下，濾波器就必須要使用 H^∞ 濾波器。

因此，我們將於下一章介紹 H^∞ 控制理論，並進行 H^∞ 濾波器的推導。

表 2.1、離散卡門濾波器公式整理

系統方程	： $x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + G(k)w(k)$	(2.5)
	$Q(k) = E(w(k)w(k)^T)$	(2.6)
量測方程	： $Z(k) = H(k)x(k) + v(k)$	(2.7)
	$R(k) = E(v(k)v(k)^T)$	(2.8)
初始條件	： $\hat{x}(0) = E(X(0))$ $P(0) = E[(\hat{x}(0) - X(0))(\hat{x}(0) - X(0))^T]$	
假設	： $E(w(k)v(i)^T) = 0$ for all k, i	(2.9)
狀態估測 外插方程	： $\hat{x}(-)(k+1) = \Phi(k+1, k)\hat{x}(-)(k)$	(2.11)
誤差變異量 外插方程	： $P(-)(k+1) = \Phi(k+1, k)P(-)(k)\Phi^T(k+1, k) + G(k)Q(k)G^T(k)$	(2.14)
最佳增益矩陣	： $K(k) = P(-)(k)H^T(k)[H(k)P(-)(k)H^T(k) + R(k)]^{-1}$	(2.18)
狀態估測 修正方程	： $\hat{x}(k) = \hat{x}(-)(k) + K(k)[Z(k) - H(k)\hat{x}(-)(k)]$	(2.19)
誤差變異量 矩陣修正方程	： $P_k = (I - K_k H_k)P_k(-)$	(2.20)

第三章 H ∞ 控制理論

3.1 前言

所有的控制理論，最後的目的均為設計控制器。控制系統設計的目的，即在尋找一個控制器使得閉迴路系統的響應符合設計者的需求。H ∞ 控制問題的本身，就是決定一個在輸入與輸出之間轉移函數的 H_{∞} -範數為最小值，同時使得閉迴路系統為穩定。即是以此控制器來改善在閉迴路系統中的性能規格要求，而 H_{∞} 控制更能解決具有變動的外部輸入，即是解決外界干擾抑制控制或靈敏度最佳化，也可以使用小增益定理來處理穩定化問題。

要在系統輸入與輸出之間的轉移函數以 H_{∞} 來表示其大小，就必須要定義 H ∞ 範數 (H ∞ -norm)。所以接下來就來討論範數(norm)。

3.2 norm 的定義

norm，中文稱“範數”或“模”，是一種將函數轉換成非負實數的操作，此非負實數用來代表原函數大小。在本文中，我們用它來度量一個函數的大小，而度量的單位有 1-norm、2-norm、 ∞ -norm 三種。且必須滿足下列四項特性才可稱為 norm。下式中 u 是時間的函數， $\|u\|$ 表示

u 的 norm。

$$(1) \|u\| \geq 0$$

$$(2) \text{當 } u(t) = 0 \text{ 時, } \|u\| = 0, \forall t$$

$$(3) \|au\| = \|a\| \|u\|, \forall a \in \mathbf{R}$$

$$(4) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

(一) 用範數量度系統的大小

用 norm 來表示一個系統 G 的大小是藉由其輸出訊號 $y(t)$ 及輸入訊號 $u(t)$ 間的比值，稱為增益(gain)來計算。方法有三種，分述如下：

1. 輸入及輸出均用 2-norm

$$\text{變成系統}(G)\text{的 } \infty\text{-norm: } \|G\|_\infty = \sup_{u(t)} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$$

2. 輸入及輸出均用 ∞ -norm

$$\text{變成系統}(G)\text{的 } 1\text{-norm: } \|G\|_1 = \sup_{u(t)} \frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_\infty}$$

3. 輸入用 2-norm，輸出用 ∞ -norm

$$\text{變成系統}(G)\text{的 } 2\text{-norm: } \|G\|_2 = \sup_{u(t)} \frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_2}$$

以上三者中，1. 表示系統的 ∞ -範數，是 H^∞ 控制理論用以衡量系統性能相當重要的工具，系統的 ∞ -norm 代表系統最大增益，也就是輸入和輸

出間最大比值。

(二) 由轉移函數定義範數

我們前面用輸出和輸入訊號量度系統的範數，當系統為線性且非時變時，則可做系統的拉普拉斯轉移函數(Laplace transfer function)來定義系統轉移函數的範數。設系統的輸入是 $u(t)$ ，輸出是 $y(t)$ ，分別對 $u(t)$ 和對 $y(t)$ 取拉普拉斯(Laplace)轉換得 $y(s)$ 和 $u(s)$ ，再取其比值 $G(s)$ ，可依序定義轉移函數的 1-norm, 2-norm, ∞ -norm 如下：

$$(1) 1\text{-norm} : \|G(s)\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) d\omega$$

$$(2) 2\text{-norm} : \|G(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}$$

$$(3) \infty\text{-norm} : \|G(s)\|_{H^\infty} = \sup_{\omega} \sigma_{\max} |G(j\omega)|$$

在此，系統 $G(s)$ 的 H^∞ -範數 ($\|G(s)\|_{H^\infty} = \sup_{\omega} \sigma_{\max} |G(j\omega)|$) 是指 $G(s)$ 的大小 ($|G(j\omega)|$) 的最小上限，在 SISO(Single Input Single Output) 系統中，指的是波德圖上的最高點。而在 MIMO(Multi Input Multi Output) 系統中，系統的大小無法以波德圖來表示，必需以奇異值圖來表示，所以系統 $G(s)$ 的 H^∞ -範數仍是指系統的最大奇異值 $\bar{\sigma}(G)$ ，詳細推導可由 Doyle[4] 的論文得知。系統奇異值 $\sigma(G)$ 的定義如下：

$$\sigma(G) = \sqrt{\lambda(G^T G)}$$

上式中， $\lambda(G^T G)$ 是指 $G^T G$ 的特徵值， $\sigma(G)$ 是 G 的奇異值。

則系統的 H ∞ -範數表示如下：

$$\|G\|_{\infty} = \sigma_{\max}(G) = \bar{\sigma}(G)$$

上式 $\bar{\sigma}(G)$ 稱為 $G(s)$ 的最大奇異值，此外 $\underline{\sigma}(G)$ 稱為 G 的最小奇異值。

因此，我們定義當系統 $G(s)$ 的 H ∞ -norm 是存在且有限時，也就是

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} |G(s)| = \sup_{\omega} |G(j\omega)| < \infty$$

我們稱系統 $G(s)$ 屬於實數的 H_{∞} 函數空間，它代表 $G(s)$ 為穩定系統，即 $G(s)$ 的所有極點均落在左半平面。

H ∞ 控制的目的，就在使系統自外部輸入(exogenous input)至控制輸出(controlled output)之間的轉移函數有最小的 H ∞ 範數，同時也使整個閉迴路系統穩定。也就是當外部輸入被界定在某一球內 Ω

$$\Omega = \{w(t) \mid w(t) \in L_2[0, \infty), \|w(t)\| \leq 1\}$$

控制器能保證控制輸出不會超過另一個球。在波德圖(Bode plot)上的解釋則為其強度圖(magnitude plot)恆不超過某一上限 γ 。而在奈奎斯特圖(Nyquist plot)上則表示此系統之閉迴路軌跡恆不超過一半徑為 γ 的圓。

3.3 H ∞ 控制理論

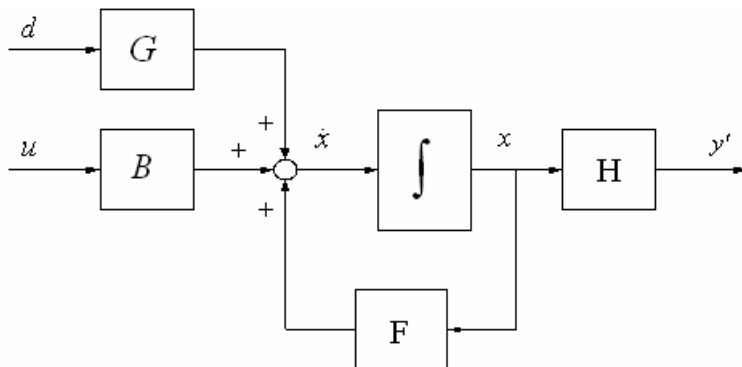
(一)、擴增系統矩陣

我們考慮一個線性非時變(linear time invariant, LTI) 的控制系統

$G(s)$ ，可表示成如下狀態方程式：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Bu(t) + Gw(t) \\ y'(t) &= Hx(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

$x(t)$ 為狀態變數(State Variable)、 $u(t)$ 為控制訊號(Control Signal)、 $w(t)$ 為干擾(Disturbance)、 $y'(t)$ 為系統輸出(Plant Output)， F 、 B 、 G 、 H 為常數矩陣。其系統方塊圖如圖 3.1 所示



圖(3.1)、原始系統 $G(s)$ 的狀態方塊圖

接下來，以 H_∞ 控制理論設計 H_∞ 控制器、使得系統閉迴路轉移函數為最小或滿足一個最小值 γ ，如下式所示，

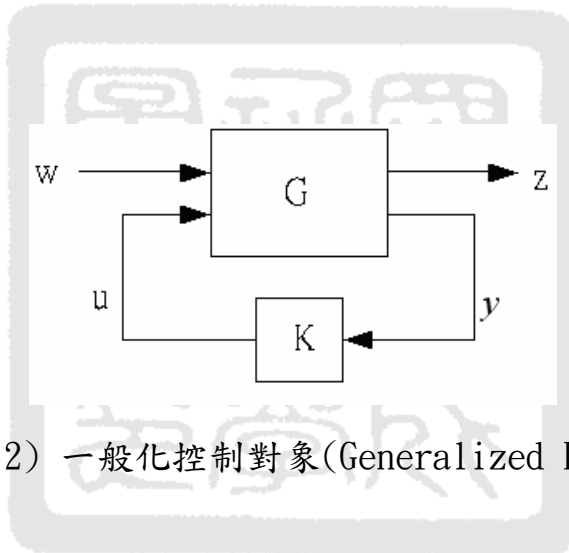
$$\begin{aligned}\|G_{zw}(s)\|_\infty &= \sup_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma \\ &:= \sup_{0 \leq \omega < \infty} \bar{\sigma}\{G_{zw}(j\omega)\}\end{aligned}\tag{3.2}$$

令追蹤誤差 $y(t) = r(t) - y'(t)$ ，而 $z(t)$ 為授控輸出。控制系統可化成 H_∞ 標準式如下：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Bu(t) + Gw(t) \\ y(t) &= H_2x(t) + D_{21}w(t) \\ z(t) &= H_1x(t) + D_{12}u(t)\end{aligned}\tag{3.3}$$

在這裡 $G(s)$ 被稱為一般化控制對象 (generalized plant)，可以用下式具有輸入輸出的轉移函數方塊來定義，其方塊如圖 3.1 所示。

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}\tag{3.4}$$



圖(3.2) 一般化控制對象 (Generalized Plant)

其中 w 稱為外部輸入 (exogenous input)，表示參考輸入信號、外界干擾等等由外部加入到受控體的輸入；而 z 稱為控制輸出 (controlled output)，具有控制輸出或控制誤差輸出。 $u(t)$ 為控制輸入， $y(t)$ 為觀測輸出。

一般化的控制對象中，狀態方程可用來直接求取我們所須要的控制器，但是在 H^∞ 控制理論中，控制對象必須除了狀態方程之外還包含了權重函數，所以 H^∞ 標準化問題就是考慮加入權重函數的系統狀態方程。

對於一般化控制對象如何成為 H^∞ 的標準化問題， H^∞ 控制器的設計比一般其他控制器更具有彈性。在一般化控制對象之外， H^∞ 控制理論提供三個權重函數給使用者來設計使系統滿足規格要求。加入的權重函數位置如圖 3.3 所示，使原系統擴增，分別在追蹤誤差 $y(t)$ 、控制訊號 $u(t)$ 和系統輸出 $y'(t)$ 之後分別加入三個權重函數 W_1, W_2, W_3 。如此我們就可以根據受控體的特性及性能的要求，調整追蹤誤差、控制訊號及系統輸出在不同頻率時的表現。

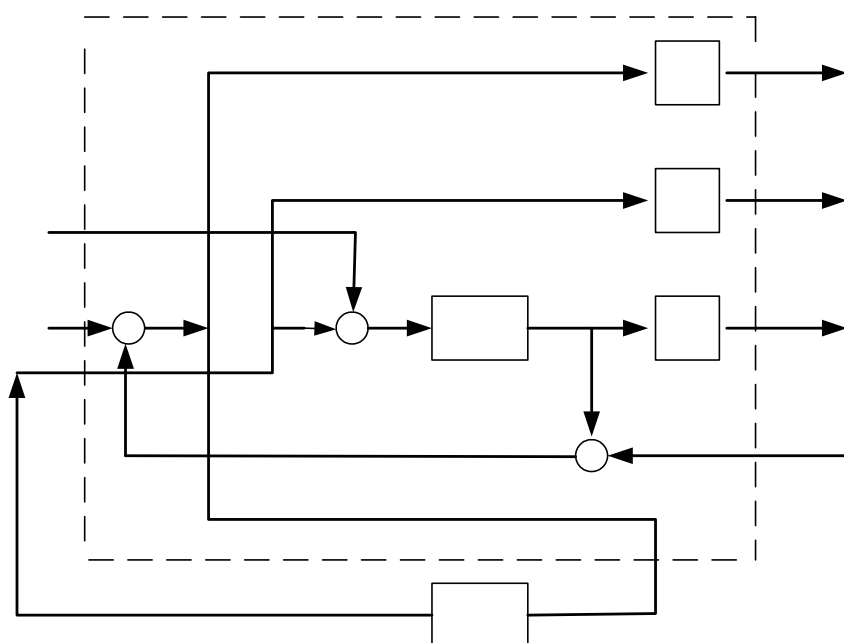


圖 3.3：廣義化標準 H^∞ 控制架構圖

經過權重後的訊號 $z(t)$ 稱為受控輸出可表示如下：

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 y(t) \\ W_2 u(t) \\ W_3 y'(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

而閉迴路系統的輸入 $w(t)$ 稱為外部輸入(exogenous input)，其中包含了參考訊號(reference input) $r(t)$ 、外擾(disturbance) $d(t)$ 、感測器雜訊(sensor noise) $n(t)$ ，並可表成下式：

$$w(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ d(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

透過加入三個權重函數，將原本受控體擴充為廣義化標準控制架構的過程，稱之為擴增(augmentation)。此外，我們也可將圖 3.3 進一步簡化為圖 3.4。

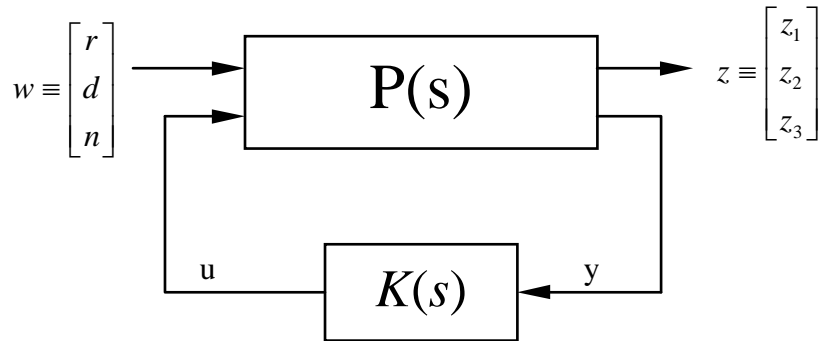


圖 3.4：廣義化標準 H ∞ 控制方塊圖

(二)、狀態回授控制器

對於一個控制問題，根據圖 3.3，我們可以將其化成以下的標準狀態空間動力方程式(state space dynamic equation)：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Bu(t) + Gw(t) \\ y(t) &= H_2x(t) + D_{21}w(t) \\ z(t) &= H_1x(t) + D_{12}u(t)\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中：

$x(t) \in R^n$ ：系統狀態(System States)

$y(t) \in R^p$ ：量測輸出(Measured Output)

$u(t) \in R^m$ ：控制訊號(Control Signal)

$w(t) \in R^r$ ：外部輸入(Exogenous Input)

$z(t) \in R^l$ ：受控輸出(Controlled Output)

外部輸入 $w(t)$ 通常已包含了參考訊號(Reference Input)、外界干擾

(Disturbance)及感測器雜訊(Sensor Noise)。而受控輸出 $z(t)$ 則包含了權重

(Weighting)過後的追蹤誤差(Tracking Error)及控制能量(Control Energy)

等。在(3.7)式中， F 、 B 、 G 、 H_1 、 H_2 、 D_{12} 、 D_{21} 等為常數矩陣。

其中 $P(s)$ 對照圖 3.3 中為虛線部分。一般化控制對象 $G(s)$ 已經被擴增成為 $P(s)$ 。其符號與流程如圖 3.3 所示，我們可以得到如下的受控輸出與系統輸入之間的轉移函數：

$$\begin{aligned}
 z_1 &= W_1 y & z_3 &= W_3 y' \\
 &= W_1 r - W_1 n - W_1 y' & z_2 &= W_2 u & &= W_3 G(d + u) \\
 &= W_1 r - W_1 n - W_1 Gd - W_1 Gu & & & &= W_3 Gd + W_3 Gu \\
 y &= r - (n + y') \\
 &= r - n - G(u + d) \\
 &= r - n - Gu - Gd
 \end{aligned}$$

總合上列輸入與輸出，我們以狀態矩陣表示如下。

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1 G & -W_1 & W_1 & -W_1 G \\ 0 & 0 & 0 & W_2 \\ W_3 G & 0 & 0 & W_3 G \\ -G & -I & I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ r \\ u \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

以擴增矩陣 $P(s)$ 表示：

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

由上式我們可以得到以轉移函數表示的輸出、輸入之間的關係：

$$\begin{cases} z = P_{11}w + P_{12}u \\ y = P_{21}w + P_{22}u \\ u = Ky \end{cases} \quad \text{將 } u \text{ 代回 } y \text{ 中}$$

$$y = P_{21}w + P_{22}Ky \Rightarrow (I - P_{22}K)y = P_{21}w \Rightarrow y = (I - P_{22}K)^{-1} P_{21}w$$

$$z = P_{11}w + P_{12}Ky = P_{11}w + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1} P_{21}w$$

$$\frac{z}{w} = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1} P_{21}$$

$$T_{z,w}(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1} P_{21}$$

而 H^∞ 的問題就是找出符合下式的控制器

$$\|P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1} P_{21}\|_\infty \leq 1$$

由上述的一般化控制對象轉換成 H_∞ 標準化控制對象過程中，權重函

數的加入使得工程師對受控體本身能夠做比一般化控制系統更多的調整，並使 H^∞ 控制器的設計更有彈性。然而，穩定性、強健性在 H^∞ 控制設計過程中更是必要的，從文獻當中可知， H^∞ 的強健性是無庸置疑的。

(三)、權重函數的選擇

對於每一個系統設計問題權重函數的選取常常是必須花長的時間去找出符合系統性能規格的函數。而且它也沒有公式化的數學式可以求解，我們整理以前文獻中對權重函數的敘述如下所式，但是我們要說明的是其選取方法並不是絕對如下列描述一樣，這必須視系統的靈敏度函數(S)、互補靈敏度函數(T)、控制能量函數(R)而定。

Let $W_t = W_1, W_a = W_2, W_m = W_3$

$$(a) \|SW_1\|_\infty < 1$$

$$(b) \|RW_2\|_\infty < 1$$

$$(c) \|TW_3\|_\infty < 1$$

W_1 和 W_3 的特性：

$$\begin{aligned} S(s) \text{ 在 } (0, w_1) \text{ 的頻率下保持高增益, } |S(jw)| < 1 \quad w \in (0, w_1) \\ \Rightarrow |W_1(jw)| \approx 1 \quad w \in (0, w_1) \quad (\text{High gain}) \\ T(s) \text{ 在 } (0, w_1) \text{ 的頻率下保持低增益, } |T(jw)| \approx 1 \quad w \in (0, w_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow |W_3(jw)| \ll 1 \quad w \in (0, w_1) \quad (\text{Low gain}) \quad (3.11)$$

$T(s)$ 在 (w_2, w_3) 的頻率下保持高增益, $|T(jw)| \ll 1 \quad w \in (w_2, w_3)$

$$\Rightarrow |W_3(jw)| \approx 1 \quad w \in (w_2, w_3) \quad (\text{High gain}) \quad (3.12)$$

3.4 H^∞ 濾波問題的求解

由(3.7)式，假設：[2]

(1). (F, B_1) 和 (F, B_2) 為穩定；

(2). (H_1, A) 和 (H_2, A) 為可觀測；

(3). $D_{12}^T D_{12} = I, D_{21} D_{21}^T = I$

則狀態估測與最佳觀測增益(Optimal Observer Gain) K 的關係可寫成下

式：[2]

$$\dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + Bu + K(Z(t) - H\hat{x}(t)) + Gw_{\text{worst}}(t) \quad (3.13)$$

其中[2]

$$w_{\text{worst}}(t) = G^T k_1 x(t) \quad (3.14)$$

$w_{\text{worst}}(t)$ 是 H^∞ 控制理論所考慮的最糟外擾。

則最佳觀測增益矩陣 K 可以表達成：[2]

$$K = -(I - h_\infty k_1)^{-1} (h_\infty H_2^T + G D_{21}^T) \quad (3.15)$$

其中共分散矩陣 H^∞ 為正定(Positive Definite)，可由以下的代數黎卡提方

程式 ARE(Algebraic Riccati Equation) 中求得：[2]

$$F_t h_\infty + h_\infty A_t^T + h_\infty (H_1^T H_1 - H_2^T H_2) h_\infty + B_{1t} B_{1t}^T = 0 \quad (3.16)$$

其中 $F_t = F - B D_{12}^T H_1$ ， $D_{12t} = G(I - D_{21}^T D_{21})$ ，同理 k_1 (Positive Definite) 可由下式的 ARE 中求得：[2]

$$F_t^T k_1 + k_1 F_t + k_1 (G G^T - B B^T) k_1 + H_{2t}^T H_{2t} = 0 \quad (3.17)$$

或者可寫為 $h_\infty = Ric(P P_\infty)$ ，

$$P P_\infty = \begin{bmatrix} F_t^T & H_1^T H_1 - H_2^T H_2 \\ -G_t G_t^T & -F_t \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

其中 $H_t = (I - D_{12} D_{12}^T) H_1$ ， $G_t = G(I - D_{21}^T D_{21})$ ，可以得到 H_∞ 最佳觀測器為：[2]

$$\dot{\hat{x}}(t) = (F + B K + K H_2 + G G^T k_1) \hat{x}(t) - K y(t) \quad (3.18)$$

到此 H_∞ 濾波器已經推導完畢。下一章將對慣性導航系統的基本計算法和運動方程式進行推導。

第四章 慣性導航系統基本計算法和運動方程式之建立

慣性導航是利用牛頓運動定律的三條力學方程式做為基本原理以推算出載具的位置與姿態。一般是利用加速規量測出載具的加速度，用積分器積分一次得到速度，再積分一次得到位移量。利用陀螺儀量測載具旋轉的角速度。可以求出載具的姿態和方位角。姿態矩陣的計算可以說是捷聯式慣性導航中最重要的一部分。在慣性導航中，不論是導航或是姿態控制都必須引入相應的座標系才可以進行。如慣性元件的輸出信號是相對慣性空間的量測訊號，依據導航任務的不同，就必須將其轉換為地理座標系或其他座標系。常見的座標轉換方式有尤拉角、方向餘弦矩陣、四元數。

4.1 各種座標系的定義

1. 地心慣性座標系 $i-OX_iY_iZ_i$: [11]

我們把在空間靜止或是等速直線運動的參考座標系稱為慣性座標系。地心慣性座標系是以地心 O 為原點，並不隨地球自轉。由 OX_i 、 OY_i 、 OZ_i 軸定義的。其中 OZ_i 軸沿地軸指向地球的北極。

2. 地球座標系 $e-OX_eY_eZ_e$:

地球座標系是以地心 O 為原點，與地球固聯， OZ_e 軸指向地球的北

極。 OX_e 軸指向格林威治子午線。它相對慣性座標系以地球自轉角速度 Ω 旋轉。

3. 導航座標系 n ：

導航座標系是原點位於運動載具所在的地球表面，其中一軸與地理垂線重合的直角座標系。以點 P 做為導航座標系的原點，則它的三個座標軸 X_n 指向東， Y_n 指向北， Z_n 沿垂線方向指向地心方向。通常稱為東北地座標系。對於導航座標系的座標軸還有不同的取法，如北西天，北東天等。但座標軸的指向不同只是影響某一向量在座標系中求取投影分量的正負號有所不同，而不影響研究載具導航參數計算結果的正確性。此外，導航座標系的原點 P ，通常是位於載具的重心。如對於艦艇的導航而言， P 點就是艦艇的重心處。

4. 載具座標系 b ：

載具在運動時，會因為各種外在的影響，而產生偏航等現象。如艦船在航行中因為風浪的影響而產生偏航、縱搖、橫擺。為了確定載具相對導航座標系的角位置（通常稱為首向及水平姿勢），就需要與載具固連的座標系。載具座標系的原點是載具的重心。各軸定義如同（圖 4.1）所示。載具座標系相對導航座標系所確定的狀態可用姿態角表示。姿態角是偏航角、俯仰角、旋轉角的統稱。

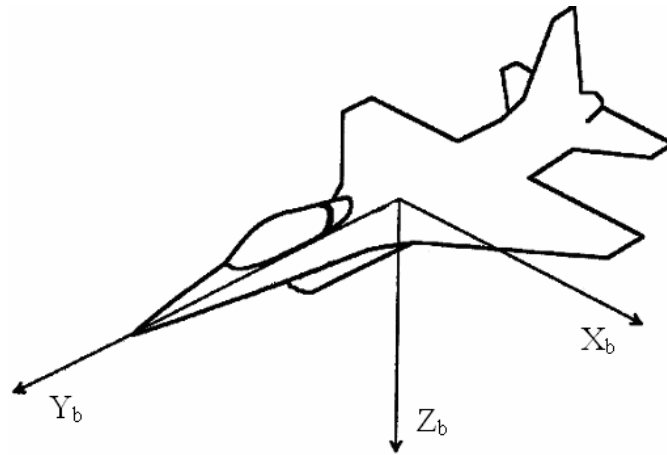


圖 4.1、載具座標系各軸示意圖

4.2 慣性導航系統運動方程式的推導

首先將載具縮小成粒子來觀察，如點 P。參考作標如（圖 4.2）。

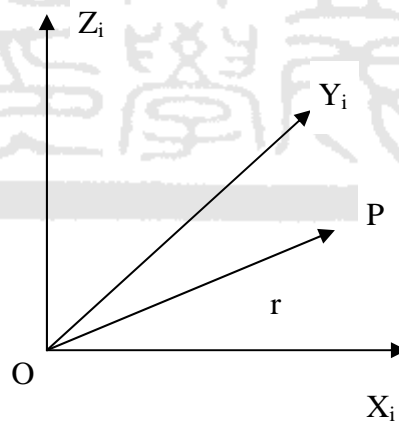


圖 4.2、參考作標的位置向量圖

r 表示點 P 對於 O 點的位置向量。則依據牛頓第二定律 (Newton's Second Law)，可知點 P 加速度定義為：[1]

$$a_i = \left. \frac{d^2}{dt^2} r \right|_i \quad (4.1)$$

由一個完美的三軸加速規，可以測得作用在點 P 上的比力(Specific Force)

如下：[1]

$$f = \left. \frac{d^2}{dt^2} r \right|_i - g \quad (4.2)$$

其中 g 為萬有引力之引力力場。重新整理 (4.2) 可得：[1]

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} r \right|_i = f + g \quad (4.3)$$

(4.1)式為初始加速度，如果對(4.1)式進行一次積分可以得到速度：[1]

$$v_i = \left. \frac{d}{dt} r \right|_i \quad (4.4)$$

現有一座標系如圖 (4.3) 表示—地心慣性座標系 i (Inertial coordinate)，

地球座標系 e(Earth fixed coordinate)，導航座標系 n(Navigation coordinate)。

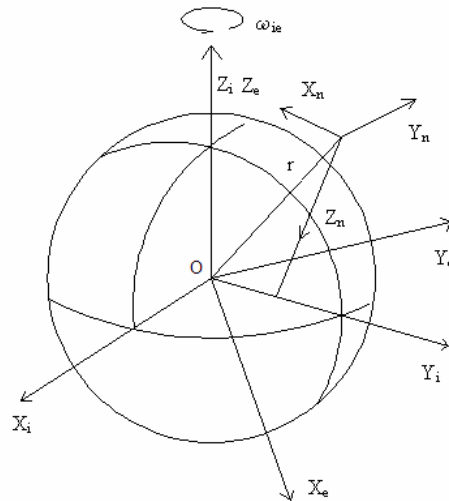


圖 4.3、i.e.n 座標系示意圖

考慮位置向量 r 在慣性座標系 i 和地球固定座標系 e 上的微分關係，由科氏定律（Coriolis Law）可得座標轉換關係式為：[1]

$$\left. \frac{d}{dt} r \right|_i = \left. \frac{d}{dt} r \right|_e + \omega_{ie} \times r \quad (4.5)$$

將(4.5)式取微分，並令 $\left. \frac{d}{dt} r \right|_e = v_e$ ，可得：[1]

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} r \right|_i = \left. \frac{d}{dt} v_e \right|_i + \left. \frac{d}{dt} [\omega_{ie} \times r] \right|_i = \left. \frac{d}{dt} v_e \right|_i + \omega_{ie} \times v_e + \omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r] \quad (4.6)$$

上式中，通常會假設地球的自轉率為常數，所以 $\frac{d}{dt}(\omega_{ie}) = 0$ ，將(4.3)式和(4.6)

式合併可得如下式：[1]

$$\left. \frac{d}{dt} v_e \right|_i = f - \omega_{ie} \times v_e - \omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r] + g \quad (4.7)$$

定義本地重力場 g_l (Gravity)為萬有引力作用下之引力場

g (Gravitational Field)與因地球旋轉而產生之向心加速度(Centripetal

Acceleration)兩者作用的結果，如下式： $g_l = g - \omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r]$

依此定義(4.7)式可表示為：[1]

$$\left. \frac{d}{dt} v_e \right|_i = f - \omega_{ie} \times v_e + g_l \quad (4.8)$$

考慮速度 v 在地球固定座標系 e 和導航座標系 n 上的轉換關係：[1]

$$\left. \frac{d}{dt} v_e \right|_n = \left. \frac{d}{dt} v_e \right|_i - (\omega_{ie} + \omega_{en}) \times v_e \quad (4.9)$$

將(4.8)式代入(4.9)式可得：[1]

$$\left. \frac{d}{dt} v_e \right|_n = f - [2\omega_{ie} + \omega_{en}] \times v_e + g_l \quad (4.10)$$

$$\text{將上式改寫成} \quad \dot{v}_e^n = f^n - [2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n] \times v_e^n + g_l^n \quad (4.11)$$

由加速規可以測得作用在載具上的比力，定義為 f^b 。為了導航，加速規的比力必須要轉換到適當的座標系。選擇導航座標系 n ，並使用方向餘弦矩陣 C_b^n 進行轉換，則有 $f^n = C_b^n f^b$ ，並將之代入 (4.11) 式，如下：[1]

$$\dot{v}_e^n = C_b^n f^b - [2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n] \times v_e^n + g_l^n \quad (4.12)$$

(4.12) 式就稱為慣性導航系統在地理座標系上的導航方程式，其中 C_b^n 又稱為姿態轉換矩陣，由下節推導得出。

4.3 姿態方程式的推導

4.3.1 方向餘弦矩陣

考慮兩直角座標系分別為 S_1 座標與 S_2 座標，其中 S_1 固定座標系，單位向量為 i, j, k ；運動座標系，單位向量為 i', j', k' 。C 為運動座標系轉換到固定座標系的方向餘弦矩陣，即[15]

$$V_{S1} = C V_{S2} \quad (4.13)$$

$$\text{其中} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \cdot i' & i \cdot j' & i \cdot k' \\ j \cdot i' & j \cdot j' & j \cdot k' \\ k \cdot i' & k \cdot j' & k \cdot k' \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

設 $\omega = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ 是沿著 S_2 軸表示的 S_2 相對 S_1 的角速度。則 C 的變化率為

$$\dot{C} = C\Omega \quad (4.15)$$

其中

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Ω 為角速度向量 ω 的斜對稱矩陣表示式。[1]、[15]

以上就是方向餘弦矩陣的定義推導，比對上節(4.12)式中的 C_b^n 則可得

$$C_b^n = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

考慮向量 P 固定在載具座標上如(圖 4.4)所示：

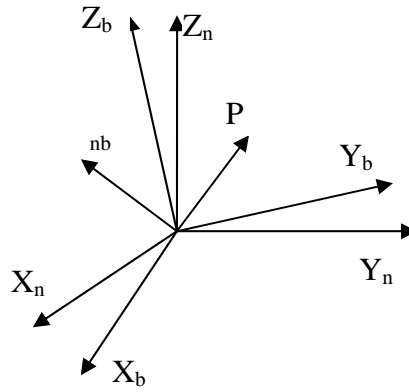


圖 4.4、載具座標系和導航座標系關係圖

現對 P 在載具座標 b 和導航座標 n 上取微分，由科氏定律 (Coriolis

Law) 可得：[1]

$$\left. \frac{d}{dt} P \right|_n = \left. \frac{d}{dt} P \right|_b + \omega_{nb} \times P = \omega_{nb} \times P$$

$$\text{即 } \dot{P} = (\omega_{nb} \times P)^n \quad (4.18)$$

由向量座標轉換關係知：[1]

$$\begin{aligned}
 C_b^n P^b &= P^n \\
 \dot{C}_b^n P^b + C_b^n \dot{P}^b &= \dot{P}^n \\
 \dot{C}_b^n P^b &= \dot{P}^n
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

由(4.18)和(4.19)比較可得：[1]

$$\begin{aligned}
 \dot{C}_b^n P^b &= C_b^n (\omega_{nb} \times P)^b = C_b^n \omega_{nb}^b \times P^b = C_b^n \Omega_{nb}^b \times P^b \\
 \dot{C}_b^n &= C_b^n \Omega_{nb}^b
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\text{其中 } \Omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

，為載具座標系對導航座標系旋轉角速度的斜對稱矩陣表示式。由於陀螺儀是固定在載具上，測得的是載具相對慣性空間的 Ω_{ib}^b ，所以還必須經過適當的轉換才能得到 Ω_{nb}^b 。 Ω_{nb}^b 可由導航座標旋轉角速度 Ω_{in}^b 及陀螺儀輸出 Ω_{ib}^b 求得： $\Omega_{nb}^b = \Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b$ ，所以(4.20)可以表示成：[1]

$$\dot{C}_b^n = C_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b) \tag{4.22}$$

再由矩陣的相似轉換定理： $\Omega_{in}^b = C_n^b \Omega_{in}^n C_b^n$ 代入(4.22)式，則慣性導航系統的姿態方程式可以表示為：[1]

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^n C_b^n \tag{4.23}$$

將(4.17)和(4.20)比較可以求得：[1]

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_{11} &= c_{12}\omega_z - c_{13}\omega_y & \dot{c}_{12} &= c_{13}\omega_x - c_{11}\omega_z & \dot{c}_{13} &= c_{11}\omega_y - c_{12}\omega_x \\
 \dot{c}_{21} &= c_{22}\omega_x - c_{23}\omega_y & \dot{c}_{22} &= c_{23}\omega_x - c_{21}\omega_z & \dot{c}_{23} &= c_{21}\omega_y - c_{22}\omega_x
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\dot{c}_{31} = c_{32}\omega_z - c_{33}\omega_y \quad \dot{c}_{32} = c_{33}\omega_x - c_{31}\omega_z \quad \dot{c}_{33} = c_{31}\omega_y - c_{32}\omega_x$$

方向餘弦矩陣 C 可以用來描述載具的姿態，但是其中之9個方向餘弦並非互相獨立，存在著6個拘束條件，所以並非良好的座標轉換表示法。

4.3.2 尤拉角微分方程式

圖4.5給予偏航角 ϕ 、俯仰角 θ 、旋轉角 γ 表示載具座標系與地理座標系之間的關係。由地理座標系 $EN\zeta$ 到載具座標系 XYZ 三次旋轉順序為

$\dot{\phi} \rightarrow \dot{\theta} \rightarrow \dot{\psi}$ 。首先，對 ζ 軸旋轉 ϕ 角，再對 Y 軸旋轉 θ 角，最後再對 X 軸旋轉 ϕ 角

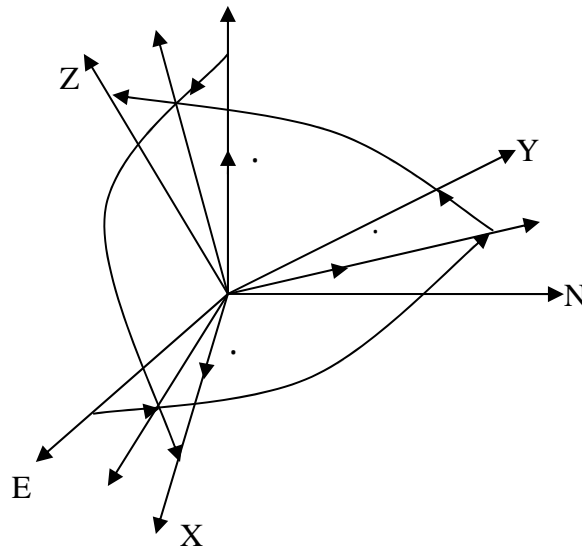


圖 4.5、載具座標系與地理座標系的關係

可以得到三次轉換矩陣：[15]

$$C_{\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$C_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$C_{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

，由地理座標系 EN ζ 到載具座標系 XYZ 方向餘弦矩陣表示為：[15]

$$C_n^b = C_{\psi} \cdot C_{\theta} \cdot C_{\varphi} \quad (4.28)$$

將式(4.25)到式 (4.27)代入(4.28)並展開，可以得到：[15]

$$C_n^b = \begin{bmatrix} c_{\varphi}c_{\theta} & s_{\varphi}c_{\theta} & -s_{\theta} \\ c_{\varphi}s_{\theta}s_{\psi} - s_{\varphi}c_{\psi} & s_{\varphi}s_{\theta}s_{\psi} + c_{\varphi}c_{\psi} & c_{\theta}s_{\psi} \\ c_{\varphi}s_{\theta}c_{\psi} + s_{\varphi}s_{\psi} & s_{\varphi}s_{\theta}c_{\psi} - c_{\varphi}s_{\psi} & c_{\theta}c_{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\text{且 } C_b^n = (C_n^b)^{-1} = \begin{bmatrix} c_{\varphi}c_{\theta} & c_{\varphi}s_{\theta}s_{\psi} - s_{\varphi}c_{\psi} & c_{\varphi}s_{\theta}c_{\psi} + s_{\varphi}s_{\psi} \\ s_{\varphi}c_{\theta} & s_{\varphi}s_{\theta}s_{\psi} + c_{\varphi}c_{\psi} & s_{\varphi}s_{\theta}c_{\psi} - c_{\varphi}s_{\psi} \\ -s_{\theta} & c_{\theta}s_{\psi} & c_{\theta}c_{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

其中 φ (Phi)：為旋轉角或縱搖(Rolling angle)

Θ (Theta)；為俯仰角或橫搖(Pitching angle)

ψ (Psi)：為偏航角(Yawing angle)

$s_{\phi} = \sin \phi$ ， $c_{\phi} = \cos \phi$ ，其餘的依此類推。

以上就稱為尤拉角表示法。為了讓尤拉角具唯一性，通常要求三個尤

拉角的範圍分別為 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, 要求出尤拉角可由式

(4.30)求得，公式如下：[15]

$$\begin{aligned}\theta &= -\sin^{-1}(C_b^n(3,1)) \\ \psi &= \tan^{-1}\left(\frac{C_b^n(3,2)}{C_b^n(3,3)}\right) \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{C_b^n(2,1)}{C_b^n(1,1)}\right)\end{aligned}\tag{4.31}$$

當 $\sin \Theta=0$ ($\theta=90^0$)存在時， C_b^n 變為： $C_b^n = \begin{bmatrix} \cos(\varphi \pm \psi) & \sin(\varphi \pm \psi) & 0 \\ \mp \sin(\varphi \pm \psi) & \pm \cos(\varphi \pm \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

在這情況下無法將 φ 與 ψ 各別分開，此狀況稱為奇異性。

在寫慣性導航方程式所採用餘弦矩陣時，經常採用以下的兩個假

設：[15]

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= 1 \\ \sin \alpha &\approx \alpha\end{aligned}\tag{4.32}$$

式中的 α 表示座標系間每次相對轉動角度，由於工程實務上可以使其值保持很小，所以，進一步可以忽略二階小量，使[15]

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \approx 0\tag{4.33}$$

成立。這種假設所帶來誤差很小，是可以忽略不計的。將(4.32)和(4.33)

式代入(4.29)式，可得[15]

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \theta & -\varphi \\ -\theta & 1 & \psi \\ \varphi & -\psi & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

以上常使用在小角度的近似問題。

用 ω_{eb}^b 表示相對地球座標系的角速度向量在載具座標系上的分量，若

$$\omega_{eb}^b = [\omega_{ebx}^b \quad \omega_{eby}^b \quad \omega_{ebz}^b]^T, \text{ 則 [1]}$$

$$\omega_{eb}^b = \begin{bmatrix} \omega_{ebx}^b \\ \omega_{eby}^b \\ \omega_{ebz}^b \end{bmatrix} = C_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + C_\psi \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\text{因此 } \begin{bmatrix} \omega_{ebx}^b \\ \omega_{eby}^b \\ \omega_{ebz}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

尤拉角方程式中會出現奇異點，這種現象等效於平台式的閉鎖現象。所

以用尤拉角微分方程來確定姿態角的方法不能使用在全姿態的載具上。

4.3.3 四元數法

四元數是由一個實數和三個虛數 i 、 j 、 k 所組成的數。定義如下：[1]

$$q = a + bi + cj + dk \quad (4.37)$$

$$\text{其中 } a = \cos \frac{\theta}{2} ; b = a \sin \frac{\theta}{2} ; c = a \sin \frac{\theta}{2} ; d = \sin \frac{\theta}{2}$$

a 表示座標系旋轉所對應的轉軸單位向量， θ 為對 a 旋轉的角度。所以一

個四元素既表示了轉軸的方向，又表示了轉角的大小，往往稱為轉動四

元素。這種轉動關係是通過旋轉運算來實現的，其基本形式是：[15]

$$R' = qRq^{-1} \quad (4.38)$$

式(4.38)表示向量 R 相對固定座標系被了 Θ 角，其瞬間轉軸由四元素 q 的瞬間轉軸所決定，被旋轉後的向量是 R' 。

i 、 j 、 k 服從如下的計算[1]、[15]

$$i.i=j.j=k.k=-1, i.j=-j.i=k, j.k=-k.j=i, k.i=-i.k=j \quad (4.39)$$

有兩四元素 $q = a + bi + cj + dk$ ， $p = e + fi + gj + hk$ ，則四元素 q 和 p 相乘

$$\begin{aligned} q \cdot p &= (a + bi + cj + dk) \cdot (e + fi + gj + hk) \\ &= ea - bf - cg - dh \\ &\quad + (af + be + ch - dg)i \\ &\quad + (ag + ce - bh + df)j \\ &\quad + (ah + de + bg - cf)k \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\text{以矩陣形式表示：} q \cdot p = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

由式(4.38)可以算出採用四元數表示的轉換矩陣為[1]、[15]

$$C = \begin{bmatrix} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

若是在(4.42)式已知的情況下，可以求得四元數如下：[1]、[15]

$$a = \frac{1}{2}(1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}) \quad (4.43)$$

在 $a \neq 0$ 的情況下，可以求得 b 、 c 、 d 如下：[1]、[15]

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{1}{4a}(c_{32} - c_{23}) \\
 c &= \frac{1}{4a}(c_{13} - c_{31}) \\
 d &= \frac{1}{4a}(c_{21} - c_{12})
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

姿態變化時，四元數滿足下列微分方程：[15]

$$\dot{q} = \frac{1}{2}q\omega \tag{4.45}$$

式中 q 為運動座標系的轉動四元數， ω 是運動座標系相對固定座標系的旋轉角速度， $\omega = 0 + \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$ 是四元數，按四元素乘法展開可得：[5]

$$\begin{aligned}
 2\dot{a} &= -(b\omega_x + c\omega_y + d\omega_z) \\
 2\dot{b} &= (a\omega_x - d\omega_y + a\omega_z) \\
 2\dot{c} &= (d\omega_x + a\omega_y - b\omega_z) \\
 2\dot{d} &= (c\omega_x - b\omega_y - a\omega_z)
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

以矩陣形式可以寫成：[15]

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \\ \dot{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

或是寫成：[1]、[15]

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\omega_b q \tag{4.48}$$

由於姿態矩陣微分方程和姿態四元數微分方程都用到載具座標系對導航座標系旋轉角速度 ω_{eb}^b ，將(4.48)式和(4.23)式比較，類似的，可有：[15]

$$\dot{q} = \frac{1}{2}(\omega_{ib}^b - \omega_{im}^b)q \tag{4.49}$$

上式為慣性導航系統使用四元數表示的姿態方程式。

關於方向餘弦矩陣、尤拉角和四元數表達姿態的互換式如下：[1]

$$\begin{aligned}
 C_b^n &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ s_\phi c_\theta & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \end{bmatrix} \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

由於(4.45)是一線性方程式，因此使用四元數的連續變化比用方向餘弦矩陣、尤拉角更為容易。此外，四元數並沒有奇異性的問題。所以在本文中，主要以四元數法來表示載具的姿態，而以其他姿態表示法的使用作為輔助。

4.4 位置方程式的推導

位置向量定義為： $p = [L \quad \lambda \quad h]^T$ ；其中 L 為緯度(Latitude)， λ 為經度(Longitude)，h 為高度(Altitude)。由圖(4.6)可以定義出緯度、經度和高度。

並可定義出位置微分方程式如下：[1]

$$\dot{L} = -\frac{V_N}{R}, \quad \dot{\lambda} = \frac{V_E}{R \cos L}, \quad \dot{h} = V_D \quad (4.51)$$

所以位置方程式為：

$$p = \begin{bmatrix} L \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} = P(t_0) + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} \dot{L} = -\frac{V_N}{R} \\ \dot{\lambda} = \frac{V_E}{R \cos L} \\ \dot{h} = V_D \end{bmatrix} dt \quad (4.52)$$

其中 $P(t_0)$ 為初始位置。 V_N 為北向速度分量； V_E 為東向速度分量； R 為地球半徑； V_D 為垂直向速度分量。若載具為陸上的車或是海上的船艦，則 $\dot{h} = 0$ 。若載具為飛行器或飛彈，則可由 \dot{h} 求出高度。

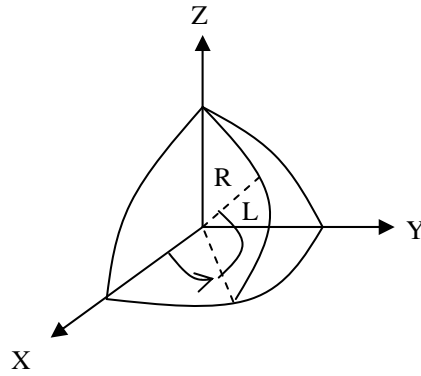


圖 4.6、測地(緯度、經度、高度)示意圖

4.5 慣性導航系統方程式總結

綜合(4.2)、(4.3)及(4.4)節推導的結果，可得慣性導航系統方程式如下：

$$\dot{v}_e^n = C_b^n f^b - [2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n] \times v_e^n + g_l^n \quad (4.12)$$

$$\dot{q} = (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b)q \quad (4.49)$$

$$\text{位置方程式：} \dot{L} = -\frac{V_N}{R}, \quad \dot{\lambda} = \frac{V_E}{R \cos L} \quad (4.52)$$

$$\text{載具高度方程式：}\dot{h}=V_D \quad (4.52)$$

其中：

v_e^n ：為在導航座標系 n 上的對地速度

C_b^n ：為載具座標系 b 到導航座標系 n 的轉換矩陣

f^b ：為加速規感測輸出

ω_{ie}^n ：為在導航座標系 n 上的地球轉速

ω_{en}^n ：為地理座標角速度表示在導航座標系 n 上的量

g_l^n ：為本地重力場表示在導航座標系 n 上的量

q ：為轉動四元素

Ω_{ib}^b ：為陀螺儀輸出

Ω_{in}^b ：為導航座標旋轉角速度

L ：緯度

λ ：經度

h ：載具高度

V_N ：北向速度分量

V_E ：東向速度分量

R ：地球半徑

V_D ：垂直向速度分量

由於本文是使用濾波器來改善慣性導航系統的狀態誤差的精度，所以下一章將進行慣性導航系統誤差方程式的推導。

第五章 慣性導航系統誤差方程式的推導

5.1 前言

本文採取間接卡門濾波器來對狀態誤差的精度進行改善，所以必先建立慣性導航系統的誤差傳播方程式，以做為濾波器的系統模式方程式。為了簡化誤差傳播方程式的推導過程，做了以下的假設，由這些假設所引起的誤差均不考慮。[11]、[15]

- (1) 不計地球轉速 ω_{ie}
- (2) 地球是圓球形，在此假設下，對於慣性導航系統的計算中，重力場模式變得非常簡單，而在誤差方程的推導過程也減化許多。
- (3) 轉換軸彼此間互相垂直。

有了上述假設，以下開始推導慣性導航系統的誤差傳播方程式。

5.2 導航誤差方程式的推導

由前章（4.12）式可知慣性導航系統導航方程式：[1]

$$\dot{v}_e^n = C_b^n f^b - [2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n] \times v_e^n + g_l^n$$

由於(4.1)節的假設，使上式變為：[1]

$$\dot{v}_e^n = C_b^n f^b - \omega_{en}^n \times v_e^n + g_l^n \quad (5.1)$$

取微擾(Perturbation)後可得：[1]

$$\delta \dot{v}_e^n = \delta C_b^n f^b + C_b^n \delta f^b + \delta g_l^n - \delta \omega_{en}^n \times v_e^n - \omega_{en}^n \times \delta v_e^n \quad (5.2)$$

又 $\delta\omega_{en}^n \times v_e^n = -v_e^n \times \delta\omega_{en}^n$ 代入上式可得：[1]

$$\delta\dot{v}_e^n = \delta C_b^n f^b + C_b^n \delta f^b + \delta g_l^n + v_e^n \times \delta\omega_{en}^n - \omega_{en}^n \times \delta v_e^n \quad (5.3)$$

其中，

$\delta C_b^N = -[\phi \times] C_b^{N_{nom}}$ (見下面推導)；

f^b ：為加速規感測輸出；

C_b^n ：為載具座標系 b 到導航座標系 n 的轉換矩陣；

δf^b 為加速規的感測誤差項

δg_l^n 為重力場誤差項，為微量故常不計此項

v_e^n ：為在導航座標系 n 上的對地速度；

ω_{en}^n ：地理座標角速度表示在導航座標系 n 上的量；

$\delta\omega_{en}^n$ ：地理座標角速度誤差量。

接著考慮 δC_b^n ，定義失準角(Missalignment angle)， $\phi^N \equiv [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ ，其中

ϕ_x 、 ϕ_y 、 ϕ_z 都是小角度； N_{nom} ：導航座標系 n 的真值； N_{ind} ：導航座標系 n

的電腦計算指示值。如圖(5.1)所示：

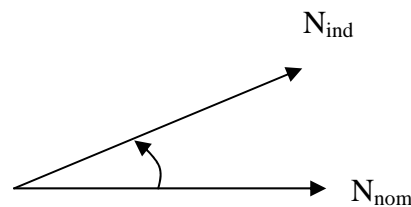


圖 5.1、失準角示意圖

由座標餘弦矩陣可以求得： [1]

$$C_{N_{nom}}^{N_{ind}} = \begin{bmatrix} c\phi_y c\phi_z & c\phi_y s\phi_z & -s\phi_y \\ s\phi_x s\phi_y c\phi_z - c\phi_x s\phi_z & s\phi_x s\phi_y s\phi_z + c\phi_x c\phi_z & s\phi_x c\phi_y \\ c\phi_x s\phi_y c\phi_z + s\phi_x s\phi_z & c\phi_x s\phi_y s\phi_z - s\phi_x c\phi_z & c\phi_x c\phi_y \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

而由第四章的(4.34)式知小角度的近似問題，可將上式化簡如下：[15]

$$C_{N_{nom}}^{N_{ind}} \cong \begin{bmatrix} 1 & \phi_z & -\phi_y \\ -\phi_z & 1 & \phi_x \\ \phi_y & -\phi_x & 1 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 & \phi_z & -\phi_y \\ -\phi_z & 0 & \phi_x \\ \phi_y & -\phi_x & 0 \end{bmatrix} = I - [\phi \times] \quad (5.5)$$

又因， $C_b^{N_{ind}} = C_{N_{nom}}^{N_{ind}} C_b^{N_{nom}} = [I - [\phi \times]] C_b^{N_{nom}} = C_b^{N_{nom}} - [\phi \times] C_b^{N_{nom}} \triangleq C_b^{N_{nom}} + \delta C_b^N$ ，所以

$$\delta C_b^N = -[\phi \times] C_b^{N_{nom}} \quad (5.6)$$

式(5.3)中， δf^b 為加速規的感測誤差項。 δg_l^n 為重力場誤差項，為微量故常不計此項。

5.3 姿態誤差方程式的推導

由第四章(4.49)式知使用四元數表示的姿態方程式為：[1]、[15]

$$\dot{q} = \frac{1}{2}(\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b)q \quad (5.7)$$

此姿態方程式是在理想情況下求解的四元數微分方程組。在實際系統

中， ω_{ib}^b 是由固定在載具上的陀螺儀輸出 ω_{ibm}^b 來實現的，而 ω_{in}^b 是在導航計

算中，由計算機計算的，用 ω_{inc}^b 來代替。所以可得系統實際計算的四元數

微分方程式：[15]

$$\dot{q}_c = \frac{1}{2}(\omega_{ibm}^b - \omega_{inc}^b)q_c \quad (5.8)$$

q_c 為計算用的四元數，以下考慮四元數計算誤差的表示式。

向量 R 相對地理座標系靜止，在地理座標系以 R_E 表示向量 R ，在載具座標系以 R_b 表示向量 R 。用 q 表示載具座標系相對地理座標系的轉動四元數，則有：[15]

$$R_E = q R_b q^{-1} \quad (5.9)$$

$$\text{或} \quad R_b = q^{-1} R_E q \quad (5.10)$$

考慮四元數有計算誤差，在 R_b 是對準的值時，則上兩式可寫成：[15]

$$R'_E = q_c R_b q_c^{-1} \quad (5.11)$$

$$R_b = q_c^{-1} R'_E q_c \quad (5.12)$$

上式說明由於轉動四元數存在誤差項，導致向量 R_E 變為 R'_E 。

將(5.12)式代入(5.9)式，有：[15]

$$R_E = q q_c^{-1} R'_E q_c q^{-1} \quad (5.13)$$

$$\text{定義 } \delta q \triangleq q q_c^{-1} \quad (5.14)$$

也就是 R_E 和 R'_E 之間的轉動四元數為 δq ，可以認為計算的地理座標系相對地理座標系有一個等效的轉動，用 Φ 表示其轉角，1 也就是兩座標系的誤差角，因值較小，有：[15]

$$\delta q = \cos \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Phi}{2} \frac{\Phi}{\Phi_0} = 1 + \frac{\Phi}{2} \quad (5.15)$$

$$\text{即} \quad \Phi = 2(q q_c^{-1} - 1) \quad (5.16)$$

對誤差四元數 δq 求導：[15]

$$\delta \dot{q} = \dot{q} q_c^{-1} + q \dot{q}_c^{-1} \quad (5.17)$$

以上各式都是四元數相乘。

將(5.7)式和(5.8)式代入(5.17)式，有[15]

$$\begin{aligned} \delta \dot{q} &= \frac{1}{2} q (\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b) q_c^{-1} + \frac{1}{2} q (\omega_{ibm}^b - \omega_{inc}^b) q_c^{-1} \\ &= \frac{1}{2} q (\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b) q_c^{-1} - \frac{1}{2} q \omega_{in}^b q_c^{-1} + \frac{1}{2} q \omega_{inc}^b q_c^{-1} \end{aligned} \quad (5.18)$$

考慮到 $\omega_{in}^b = q^{-1} \omega_{in}^n q$ ， $\omega_{inc}^b = q_c^{-1} \omega_{inc}^n q_c$ ， $\delta \omega_{ib}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{ibm}^b$ ，代入(4.18)式，則：[15]

$$\begin{aligned} \delta \dot{q} &= \frac{1}{2} q \delta \omega_{ib}^b q_c^{-1} - \frac{1}{2} q q^{-1} \omega_{in}^n q q_c^{-1} + \frac{1}{2} q q_c^{-1} \omega_{inc}^n q_c q_c^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \delta \omega_{ib}^n \delta q - \frac{1}{2} \omega_{in}^n + \frac{1}{2} \delta q \omega_{inc}^n \end{aligned} \quad (5.19)$$

將 $\delta q = 1 + \frac{\Phi}{2}$ 和 $\delta \dot{q} = \frac{\dot{\Phi}}{2}$ 代入(5.19)式，按四元數乘法公式運算和忽略二階小

量後，可得：[15]

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \delta \omega_{ib}^n \circ (1 + \frac{\Phi}{2}) - \omega_{in}^n \circ (1 + \frac{\Phi}{2}) + (1 + \frac{\Phi}{2}) \circ \omega_{inc}^n \\ &= \delta \omega_{ib}^n + (\omega_{inc}^n - \omega_{in}^n) - \omega_{in}^n \times \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi}{2} \times \omega_{inc}^n \\ &= \delta \omega_{ib}^n + \delta \omega_{in}^n - \omega_{in}^n \times \Phi \end{aligned} \quad (5.20)$$

(4.20)式就是姿態誤差角的向量表示式。

其中 ω_{ib}^n 為陀螺儀漂移所產生的誤差角，定義為：[15]

$$\omega_{ib}^n = [\varepsilon_E \quad \varepsilon_N \quad \varepsilon_D] \quad (5.21)$$

ω_{in}^n 為地理座標系相對慣性空間運動的角速度，定義為：[15]

$$\omega_{in}^n = \begin{bmatrix} -\frac{V_N}{R} \\ \frac{V_E}{R} + \omega_e \cos L \\ \frac{V_E}{R} \tan L + \omega_e \sin L \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$\delta\omega_{in}^n$ 是由計算機計算的地理座標系相對慣性空間運動的角速度的誤差

項。相當於對(5.22)式微分：[15]

$$\delta\omega_{in}^n = \begin{bmatrix} -\frac{\delta V_N}{R} \\ \frac{\delta V_E}{R} - \omega_e \sin L \delta L \\ \frac{\delta V_E}{R} \tan L + \frac{V_E}{R \cos^2 L} \delta L + \omega_e \cos L \delta L \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

姿態誤差角可如下式表示：[15]

$$\Phi = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T \quad (5.24)$$

將(5.21)到(5.24)式代入(5.20)式，可得姿態誤差角的分量表達式：[15]

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -\frac{\delta V_N}{R} + \left(\frac{V_E}{R} \tan L + \omega_e \sin L\right)\theta - \left(\frac{V_E}{R} + \omega_e \cos L\right)\psi + \varepsilon_E \\ \dot{\theta} &= \frac{\delta V_E}{R} - \omega_e \sin L \delta L - \left(\frac{V_E}{R} \tan L + \omega_e \sin L\right)\phi - \frac{V_N}{R}\psi + \varepsilon_N \\ \dot{\psi} &= \frac{\delta V_E}{R} \tan L + \left(\frac{V_E}{R \cos^2 L} + \omega_e \cos L\right)\delta L + \left(\frac{V_E}{R} + \omega_e \cos L\right)\phi + \frac{V_N}{R}\theta + \varepsilon_D \end{aligned} \quad (5.25)$$

其中：

V_E 為東向速度分量； V_N ：北向速度分量

δV_E 為東向速度誤差； δV_N 為北向速度誤差；

R 為地球半徑； L 為緯度； δL 為緯度誤差； ω_e ：地球旋轉角速度

φ (Phi)：為旋轉角或縱搖(Rolling angle)

Θ (Theta)俯仰角或橫搖(Pitching angle)

ϕ (Psi)：為偏航角(Yawing angle)

ε_E 為東向陀螺儀誤差角； ε_N 為北向陀螺儀誤差角； ε_D 為垂直向陀螺儀誤差角

5.4 位置誤差方程式的推導

根據第四章(4.51)式知道緯度、經度和高度的定義：[15]

$$\dot{L} = -\frac{V_N}{R}, \quad \dot{\lambda} = \frac{V_E}{R \cos L}, \quad \dot{h} = V_D \quad (5.26)$$

對上式取微分，得到位置誤差方程式如下：[15]

$$\begin{aligned} \delta \dot{L} &= -\frac{\delta V_N}{R} \\ \delta \dot{\lambda} &= \frac{\delta V_E}{R \cos L} + \frac{V_E}{R \cos L} \tan L \delta L \\ \delta \dot{h} &= \delta V_D \end{aligned} \quad (5.27)$$

至此已將捷聯式慣性導航系統的誤差方程式推導完成，接下來同樣將此章所推導的誤差方程式加以整理及總結。

5.5 誤差方程式總結

為了方便後面的計算，先做一些假設。假設未知的陀螺儀漂移和加速規偏差為隨機常數。即 $\Delta \dot{A} = 0$ 、 $\dot{\varepsilon} = 0$ 。

綜合以上各節，將誤差方程式整理如下：

$$\text{速度誤差方程式: } \delta \dot{v}_e^n = \delta C_b^n f^b + C_b^n \delta f^b + \delta g_l^n + v_e^n \times \delta \omega_{en}^n - \omega_{en}^n \times \delta v_e^n \quad (5.3)$$

姿態誤差方程式：

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -\frac{\delta V_N}{R} + \left(\frac{V_E}{R} \tan L + \omega_e \sin L\right) \theta - \left(\frac{V_E}{R} + \omega_e \cos L\right) \psi + \varepsilon_E \\ \dot{\theta} &= \frac{\delta V_E}{R} - \omega_e \sin L \delta L - \left(\frac{V_E}{R} \tan L + \omega_e \sin L\right) \phi - \frac{V_N}{R} \psi + \varepsilon_N \\ \dot{\psi} &= \frac{\delta V_E}{R} \tan L + \left(\frac{V_E}{R \cos^2 L} + \omega_e \cos L\right) \delta L + \left(\frac{V_E}{R} + \omega_e \cos L\right) \phi + \frac{V_N}{R} \theta + \varepsilon_D \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{L} &= -\frac{\delta V_N}{R} \\ \text{位置誤差方程式: } \delta \dot{\lambda} &= \frac{\delta V_E}{R \cos L} + \frac{V_E}{R \cos L} \tan L \delta L \\ \delta \dot{h} &= \delta V_D \end{aligned} \quad (5.27)$$

其中：

$$\delta C_b^N = -[\phi \times] C_b^{N_{\text{nom}}} ;$$

f^b ：為加速規感測輸出；

C_b^n ：為載具座標系 b 到導航座標系 n 的轉換矩陣；

δf^b ：為加速規的感測誤差項；

δg_l^n ：為重力場誤差項；

v_e^n ：為在導航座標系 n 上的對地速度；

ω_{en}^n ：地理座標角速度表示在導航座標系 n 上的量；

$\delta\omega_{en}^n$ ：地理座標角速度誤差量；

V_E 為東向速度分量； V_N 為北向速度分量；

δV_E 為東向速度誤差； δV_N 為北向速度誤差； δV_D 為垂直向速度誤差；

R 為地球半徑； L 為緯度； δL 為緯度誤差； ω_e ：地球旋轉角速度；

φ (Phi)：為旋轉角或縱搖(Rolling angle)；

θ (Theta)俯仰角或橫搖(Pitching angle)；

ψ (Psi)：為偏航角(Yawing angle)；

ε_E 為東向陀螺儀誤差角； ε_N 為北向陀螺儀誤差角； ε_D 為垂直向陀螺儀誤差角。

接著下一章我們要以單軸捷聯式慣性導航系統為例，並輔以 H^∞ 濾波器，在雜訊為高斯白雜訊時，比較不同的可觀察度下，誤差的收斂情形。

第六章 電腦模擬

本章以單軸慣性導航系統為例[8]，分別選擇速度差及位置差做為量測值來討論可觀察度對誤差狀態的影響。

首先，假設：

δP : 為位置誤差

δV : 為速度誤差

ϕ : 為載具的偏航角(Yawing angle)

ε : 為陀螺儀飄移率

α : 為加速規偏差

這 5 個變數間，存在以下的關係式：

$$\begin{aligned}\delta \dot{P} &= \delta V \\ \delta \dot{V} &= g\phi + \alpha \\ \dot{\phi} &= -K\delta V + \varepsilon\end{aligned}\tag{6.1}$$

此系統的誤差方程式可以寫成如下的狀態空間方程：

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{P} \\ \delta \dot{V} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 1 \\ 0 & -K & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta P \\ \delta V \\ \phi \\ \varepsilon \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_g \\ u_a \end{bmatrix}\tag{6.2}$$

其中，

$$K = \frac{1}{R_e}, \quad R_e \text{ 為地球半徑}$$

g : 為重力加速度

u_g : 陀螺儀飄移率產生的高斯白雜訊

u_a : 加速規偏差產生的高斯白雜訊

假設初始條件的協方差矩陣值如下：

$$P_{11}(0) = 20 \text{ (cm)}^2$$

$$P_{22}(0) = 0 \text{ (cm/sec)}^2$$

$$P_{33}(0) = 1.5 \times 10^{-4} \text{ (rad)}^2$$

$$P_{44}(0) = 2.05 \times 10^{-2} \text{ (rad/sec)}^2$$

$$P_{55}(0) = 0.9843 \text{ (cm/sec)}^2$$

6.1 模擬

1.(甲) 取位置差為量測量值，則有：

$$Z = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \delta P \\ \delta V \\ \phi \\ \varepsilon \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

使用誤差分析來檢查系統的觀察度：

$$Z = HX = \delta P$$

$$Z' = HX' = \delta \dot{P} = \delta V$$

$$Z'' = HX'' = \delta \dot{V} = L\phi$$

$$Z''' = HX''' = L\delta \dot{\phi} = L(-K\delta V - \varepsilon)$$

$$= -LK\delta V - L\varepsilon$$

$$Z^{(4)} = HX^{(4)} = -LK\delta\dot{V} = -L^2K\phi$$

由上可知 δP 、 δV 、 ϕ 、 ε 和 α 是可以觀察的

2.(乙)取速度差為量測量值，則有：

$$Z = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \delta P \\ \delta V \\ \phi \\ \varepsilon \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

使用誤差分析來檢查系統的觀察度：

$$Z = HX = \delta V$$

$$Z' = HX' = \delta\dot{V} = L\phi$$

$$Z'' = HX'' = L\dot{\phi} = L(-K\delta V - \varepsilon)$$

$$Z''' = HX''' = L(-K\delta\dot{V} - \dot{\varepsilon})$$

$$= -LK\delta\dot{V} = -LK(L\phi) = -L^2K\phi$$

$$Z^{(4)} = HX^{(4)} = -L^2K\dot{\phi} = -L^2K(-K\delta V - \varepsilon)$$

由上分析可知 δV 、 ϕ 、 ε 和 α 是可以觀察的；而 δP 為不可觀察。

3.對於(甲)和(乙)的情況於模擬時分別取 2 種情況分述如下：

(1) 取 $w(t)$ 系統雜訊為高斯白雜訊， $v(t)$ 量測雜訊為常數(一個持續性的干擾)；

(2) 取 $w(t)$ 系統雜訊為高斯白雜訊， $v(t)$ 量測雜訊為高斯白雜訊；

6.2 模擬結果分析

分別對取位置差為量測值(甲)法和取速度差為量測值(乙)法做卡門濾波器估測後的方均根圖。其中使用甲法於第一情況下的誤差方均根圖為圖(6.1a)到圖(6.5a)；使用乙法於第一情況下的誤差方均根圖為圖(6.1b)到圖(6.5b)。

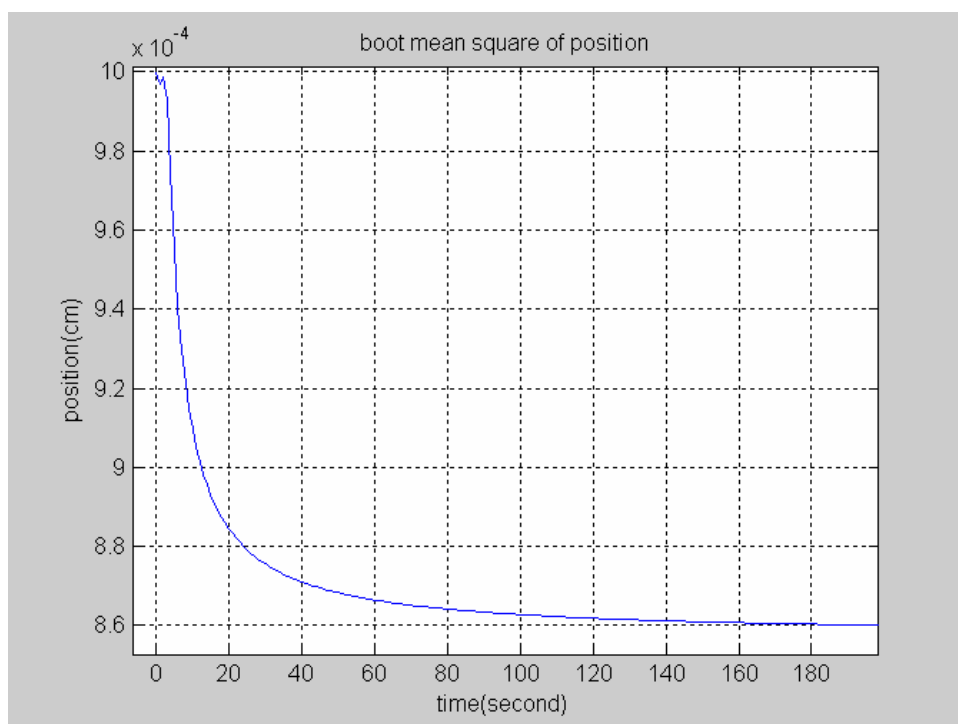
使用甲法於第二情況下的誤差方均根圖為圖(6.6a)到圖(6.10a)；使用乙法於第二情況下的誤差方均根圖為圖(6.6b)到圖(6.10b)。

在(乙)法於第一情況中，位置狀態誤差 δP 不可觀察，可由圖(6.1b)得証。所以誤差方均根值的趨勢是發散的。但因為有卡門濾波器的估測，使得發散被限制在 20cm 左右。所以卡門濾波器對於 δP 還是有改善的。在(甲)法中，位置狀態誤差 δP 為可觀察，由圖(5.1a)得証。

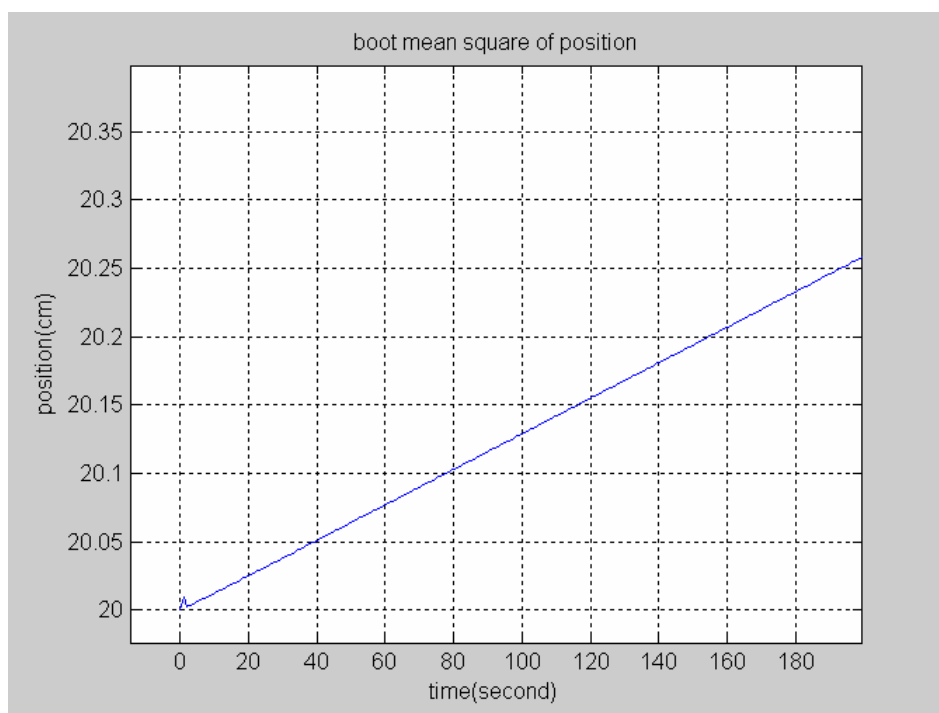
在第二個情況下，由於量測雜訊為高斯白雜訊，可以很明顯的看出經過濾波器濾波後，可以讓誤差接近歸零，但是時間上比較久。

對(甲)法和(乙)法而言， δV 、 ϕ 、 ε 和 α 都是可以觀察的。但(甲)法開始時受雜訊的影響較大，圖(6.2a)到(6.4a)。所以開始時的方均根值較(乙)法大，圖(6.2b)到(6.4b)。但之後在同時間觀察下，當方均根值穩定後，具有較小的方均根值，也就是具有較佳的狀態估測值。圖(6.4a)、(6.5a)和(6.4b)到(6.5b)，陀螺儀飄移率 ε 和加速規偏差 α 為隨機常數，雖不知值，但每次狀態更新後，方均根會減少。但經回饋扣除之後， ε 和 α 依然保持為零。

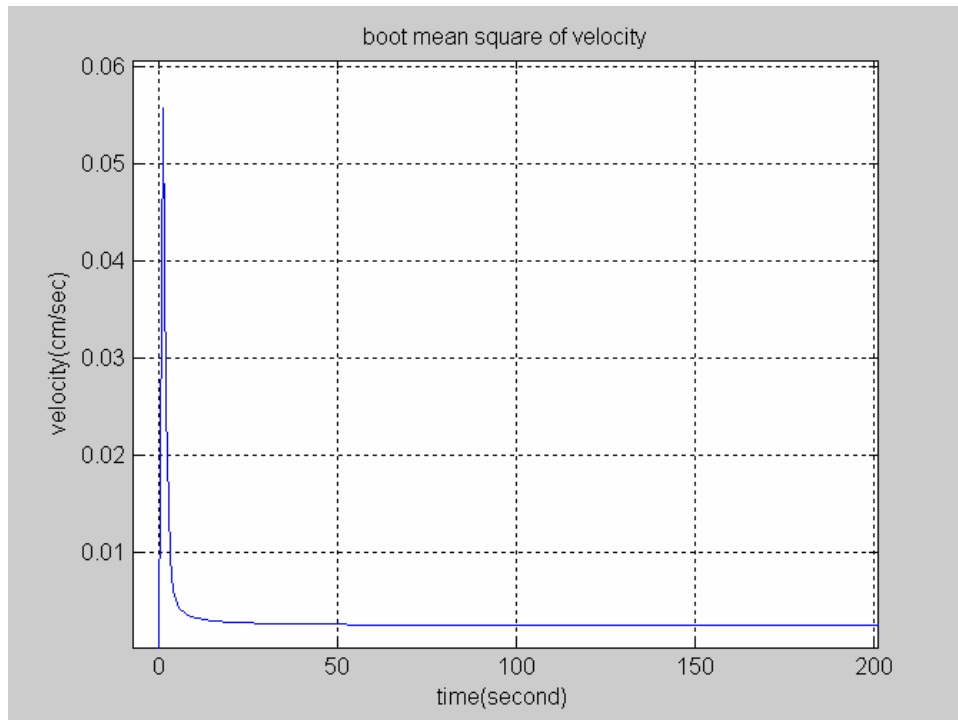
- (1) 取 $w(t)$ 系統雜訊為高斯白雜訊， $v(t)$ 量測雜訊為常數(一個持續性的干擾)：



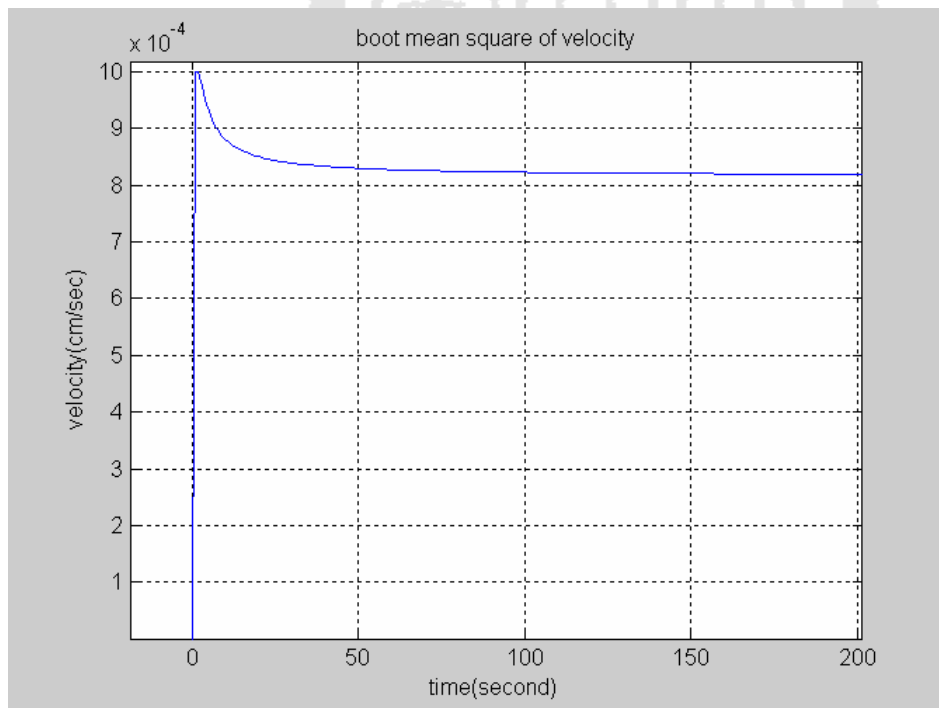
圖、6.1a 經卡門濾波器估測後的位置誤差均方根圖(取位置差為觀測)



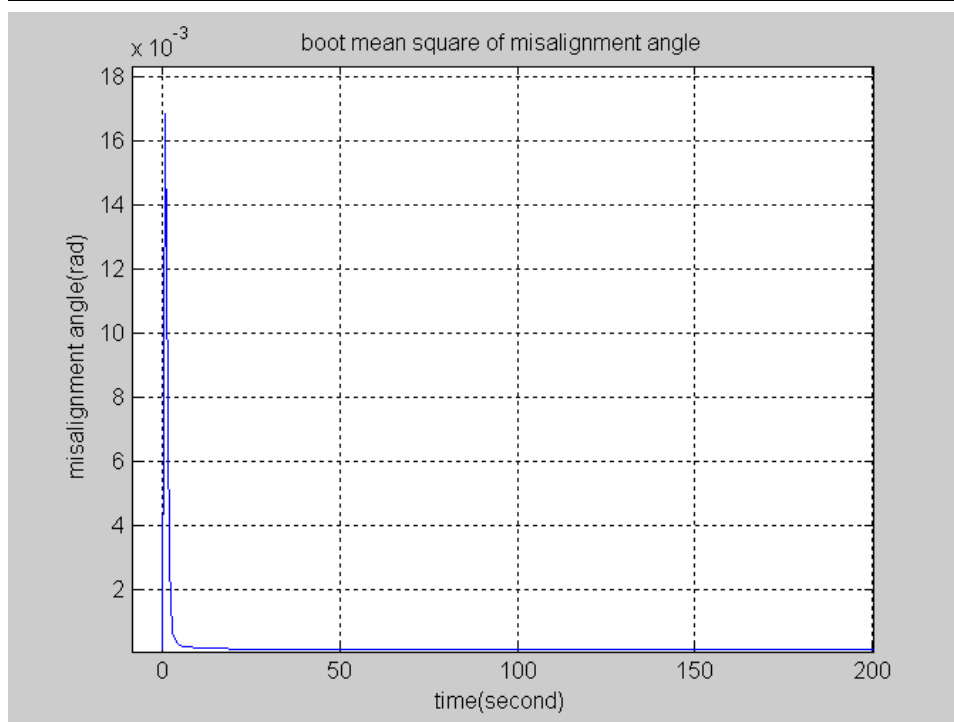
圖、6.1b 經卡門濾波器估測後的位置誤差均方根圖(取速度差為觀測)



圖、6.2a 經卡門濾波器估測後的速度誤差均方根圖(取位置差為觀測)



圖、6.2b 經卡門濾波器估測後的速度誤差均方根圖(取速度差為觀測)



圖、6.3a 經卡門濾波器估測後的失準角誤差均方根圖(取位置差為觀測)

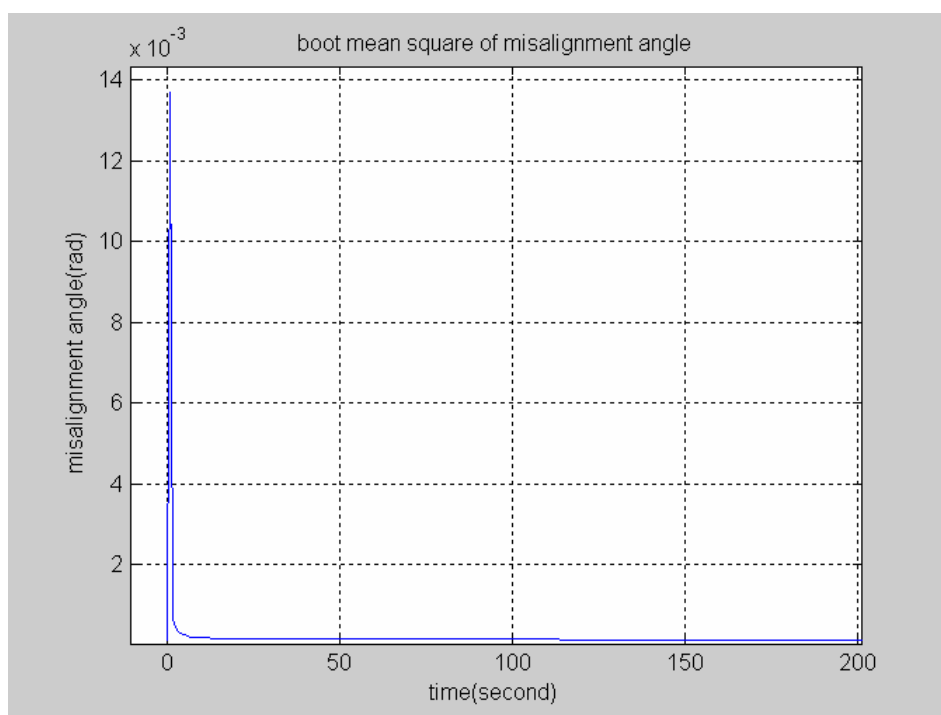


圖 6.3b、經卡門濾波器估測後的失準角誤差均方根圖(取速度差為觀測)

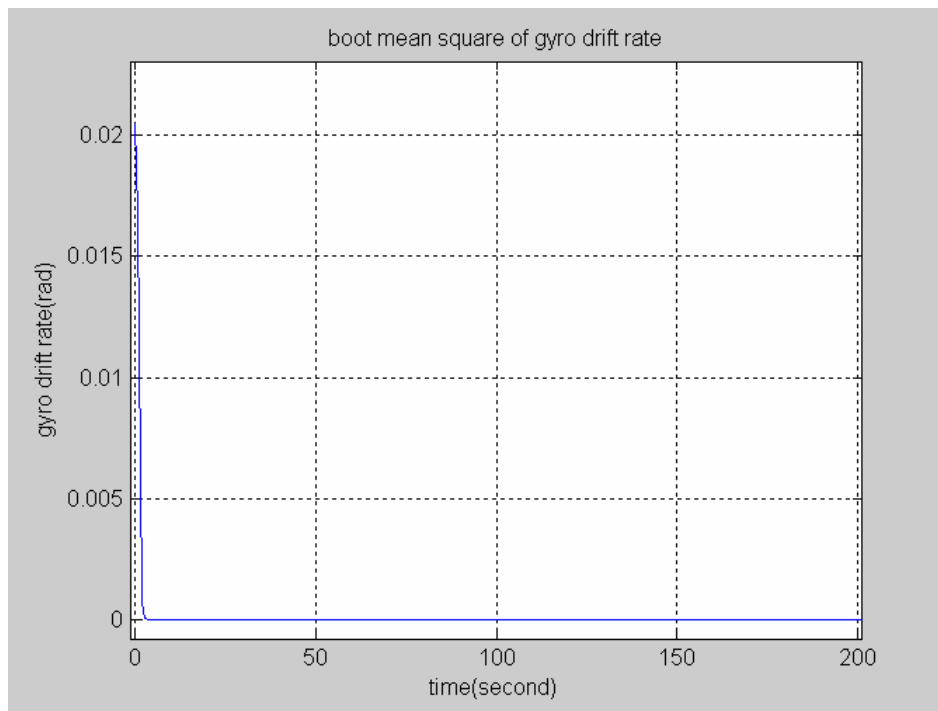


圖 6. 4a、經卡門濾波器估測後的陀螺儀飄移率誤差均方根圖(取位置差為觀測)

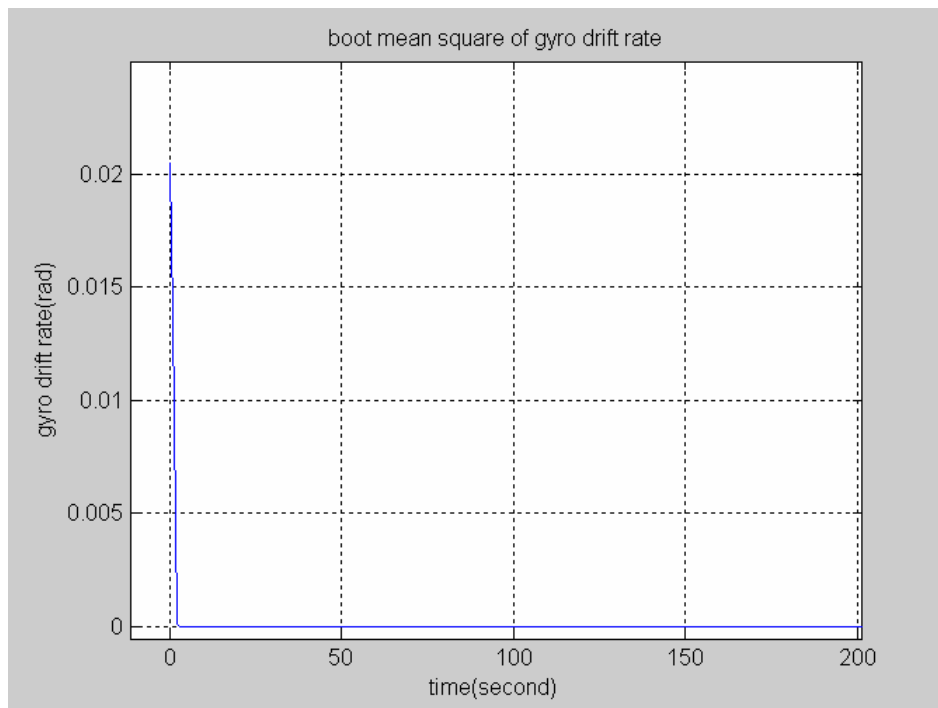


圖 6. 4b、經卡門濾波器估測後的陀螺儀飄移率誤差均方根圖(取速度差為觀測)

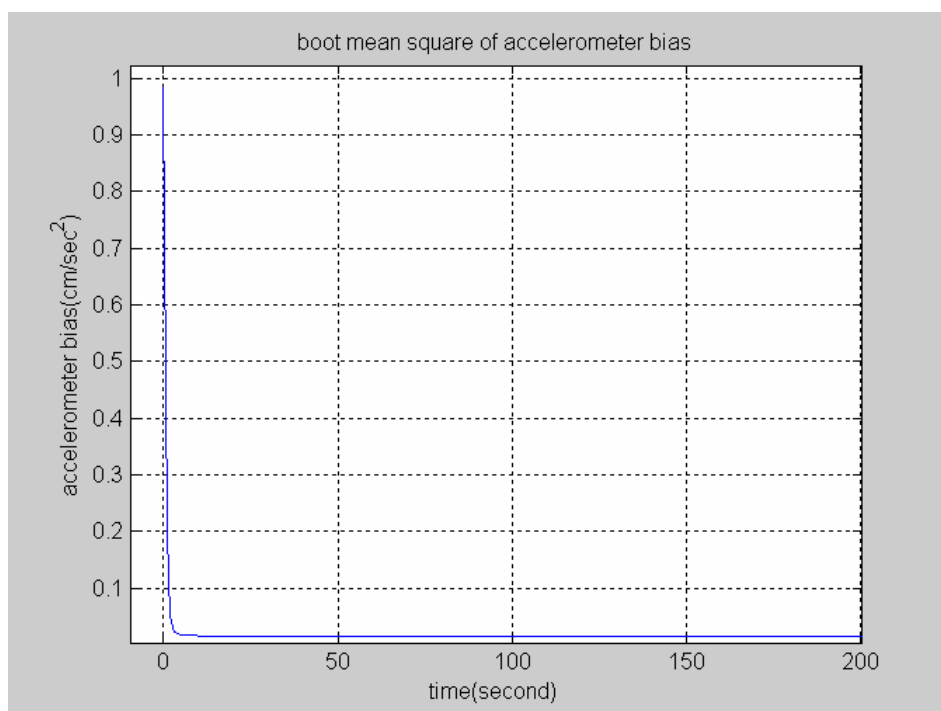


圖 6.5a 經卡門濾波器估測後的加速規偏差誤差均方根圖(取位置差為觀測)

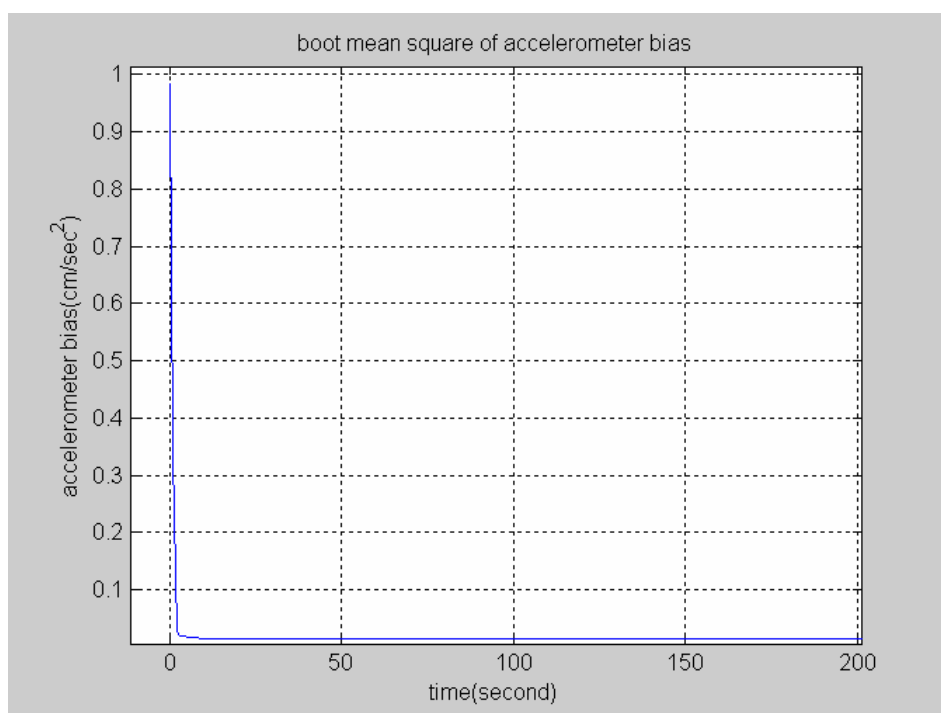
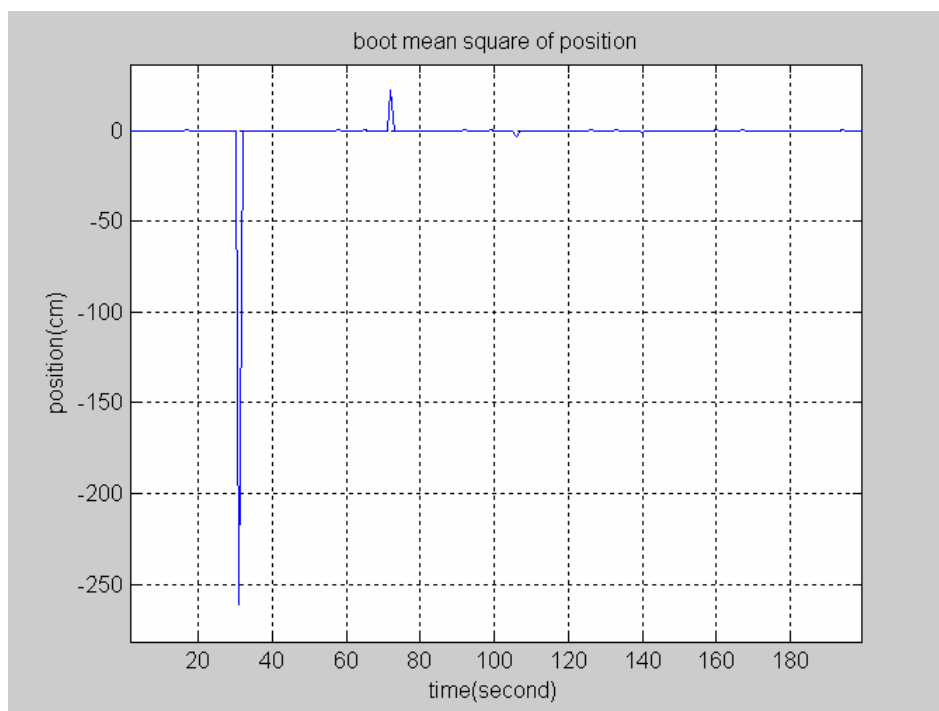
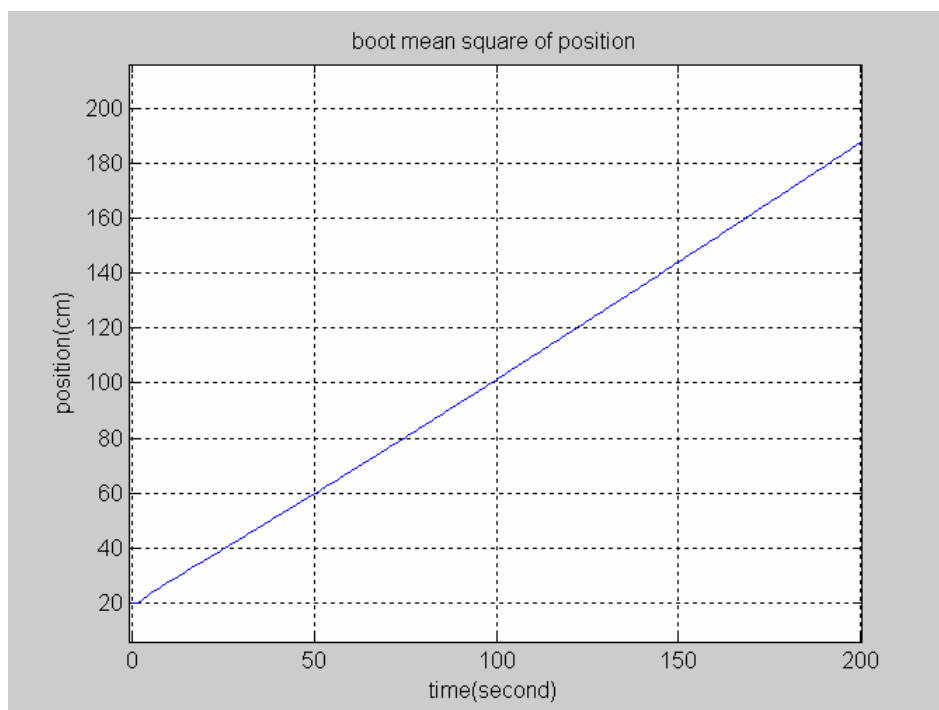


圖 6.5b 經卡門濾波器估測後的加速規偏差誤差均方根圖(取速度差為觀測)

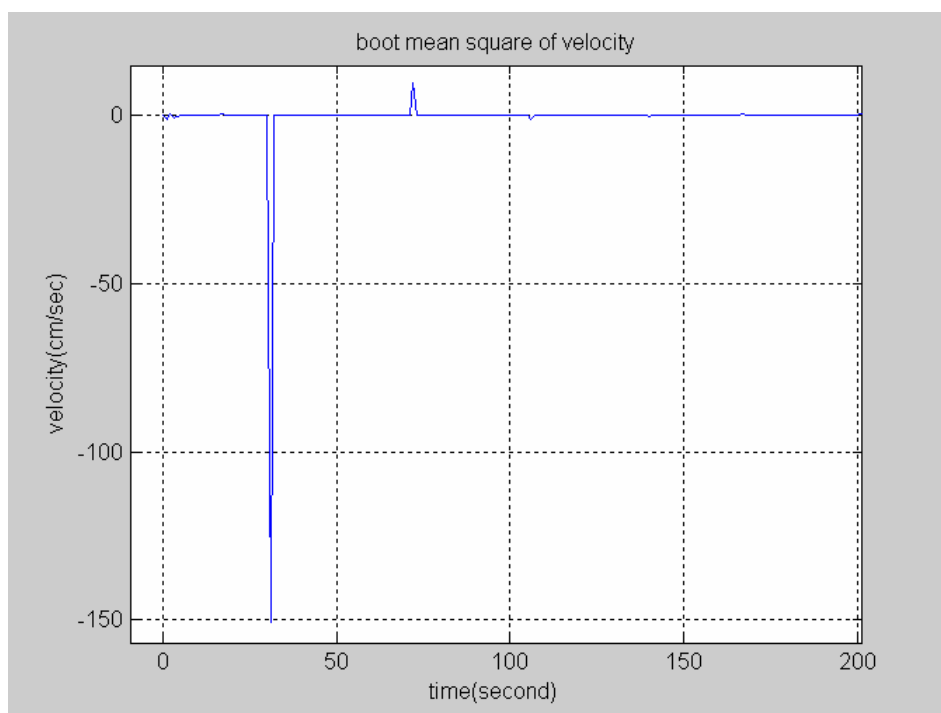
情況(2) 取 $w(t)$ 系統雜訊為高斯白雜訊， $v(t)$ 量測雜訊為高斯白雜訊：



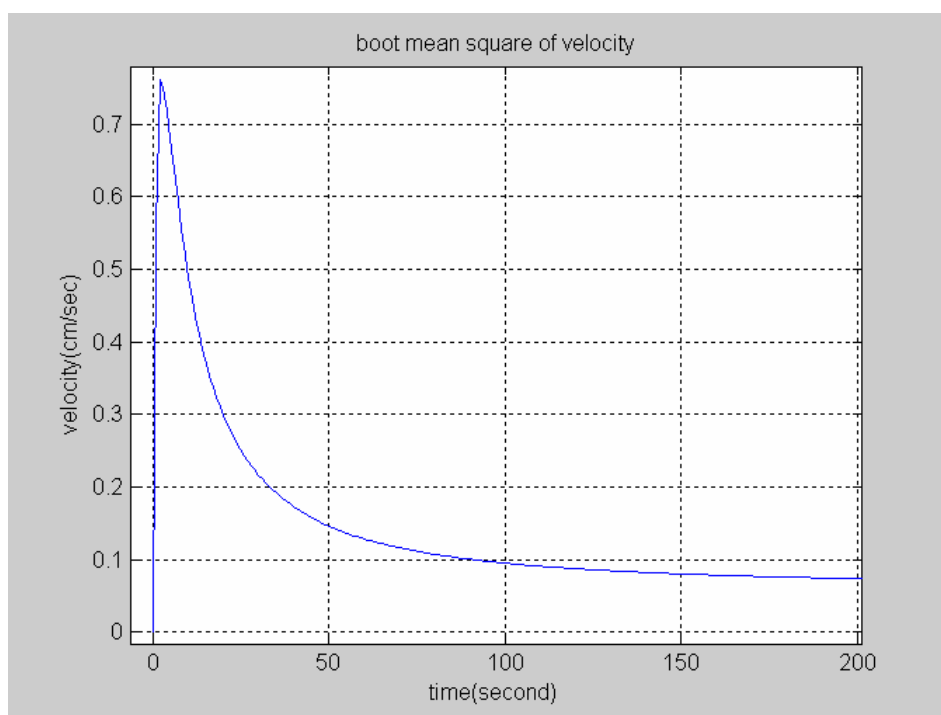
圖、6. 6a 經卡門濾波器估測後的位置誤差均方根圖(取位置差為觀測)



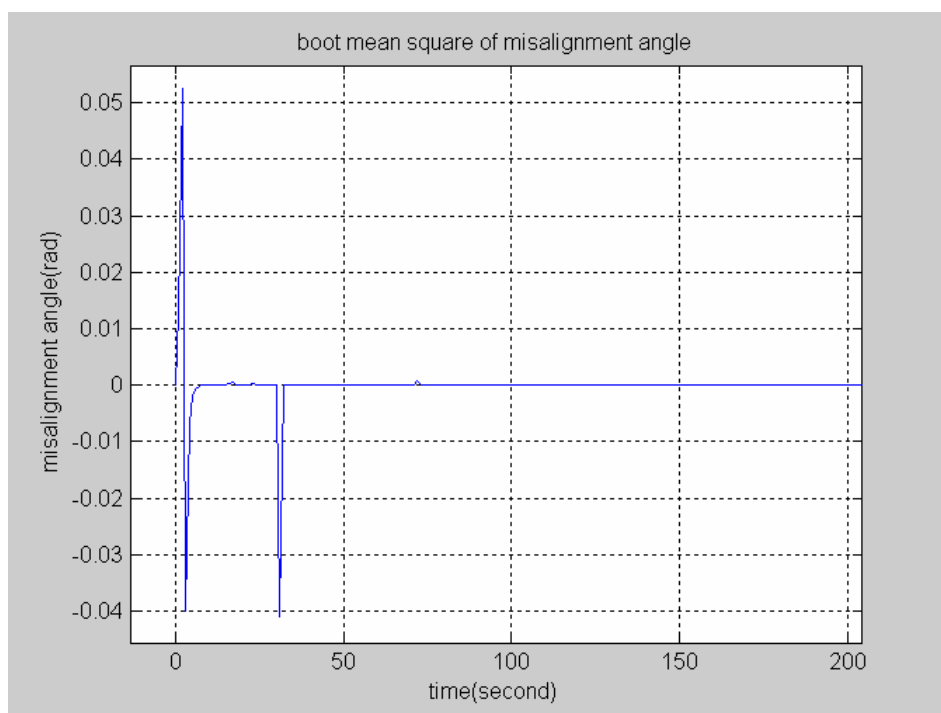
圖、6. 6b 經卡門濾波器估測後的位置誤差均方根圖(取速度差為觀測)



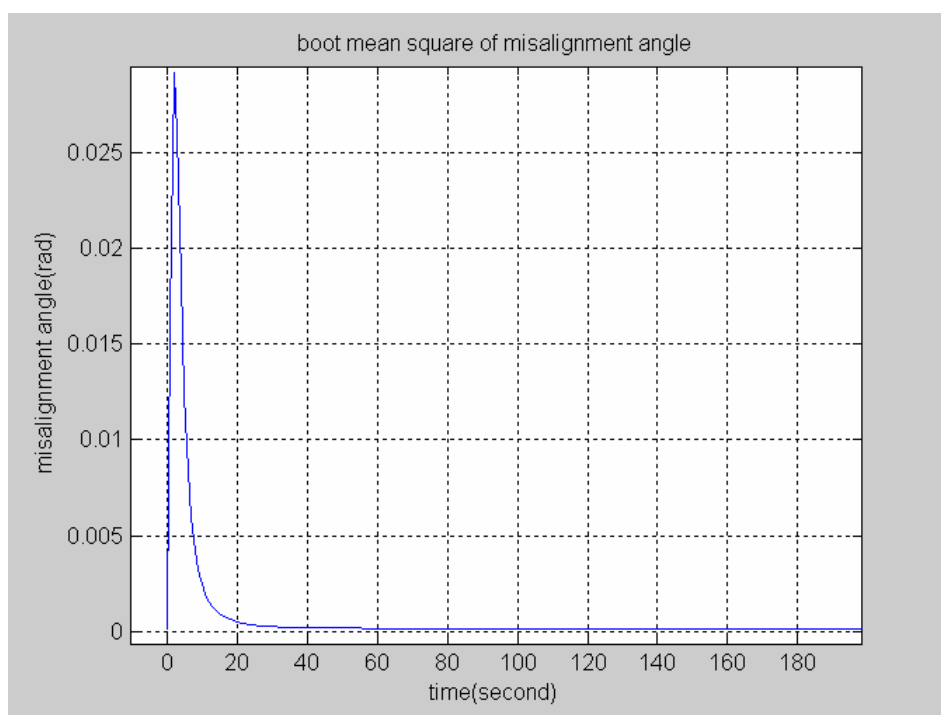
圖、6.7a 經卡門濾波器估測後的速度誤差均方根圖(取位置差為觀測)



圖、6.7b 經卡門濾波器估測後的速度誤差均方根圖(取速度差為觀測)



圖、6.8a 經卡門濾波器估測後的失準角誤差均方根圖(取位置差為觀測)



圖、6.8b 經卡門濾波器估測後的失準角誤差均方根圖(取速度差為觀測)

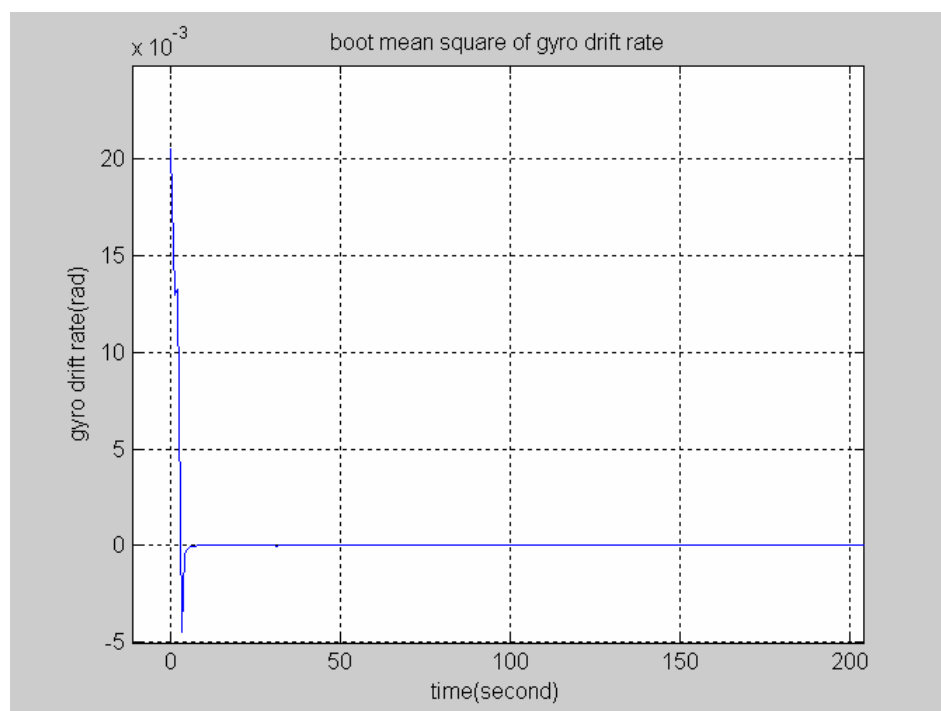


圖 6. 9a、經卡門濾波器估測後的陀螺儀飄移率誤差均方根圖(取位置差為觀測)

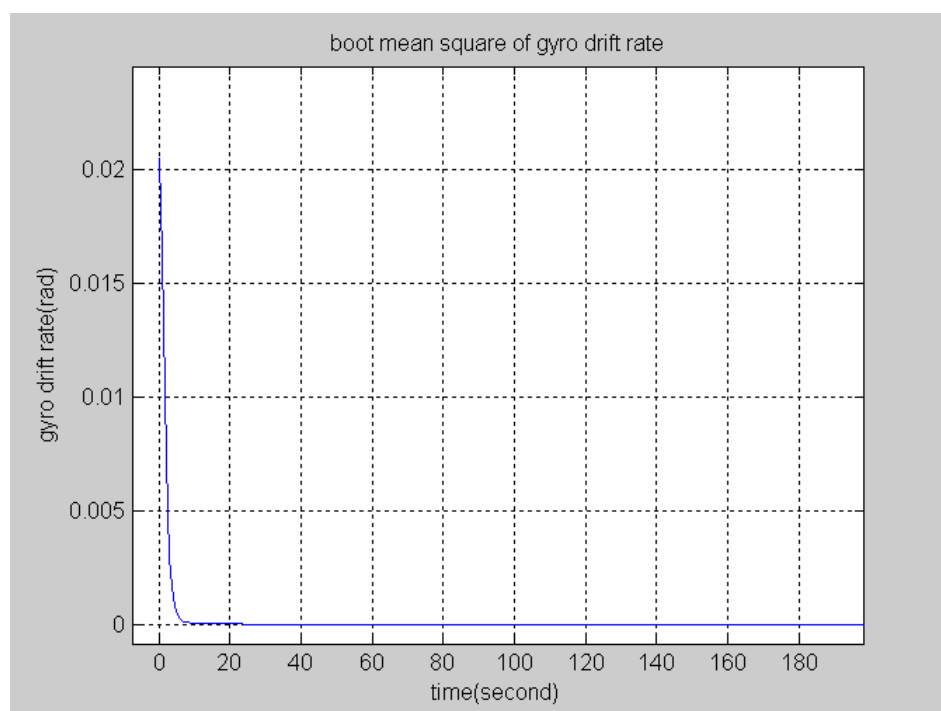


圖 6. 9b、經卡門濾波器估測後的陀螺儀飄移率誤差均方根圖(取速度差為觀測)

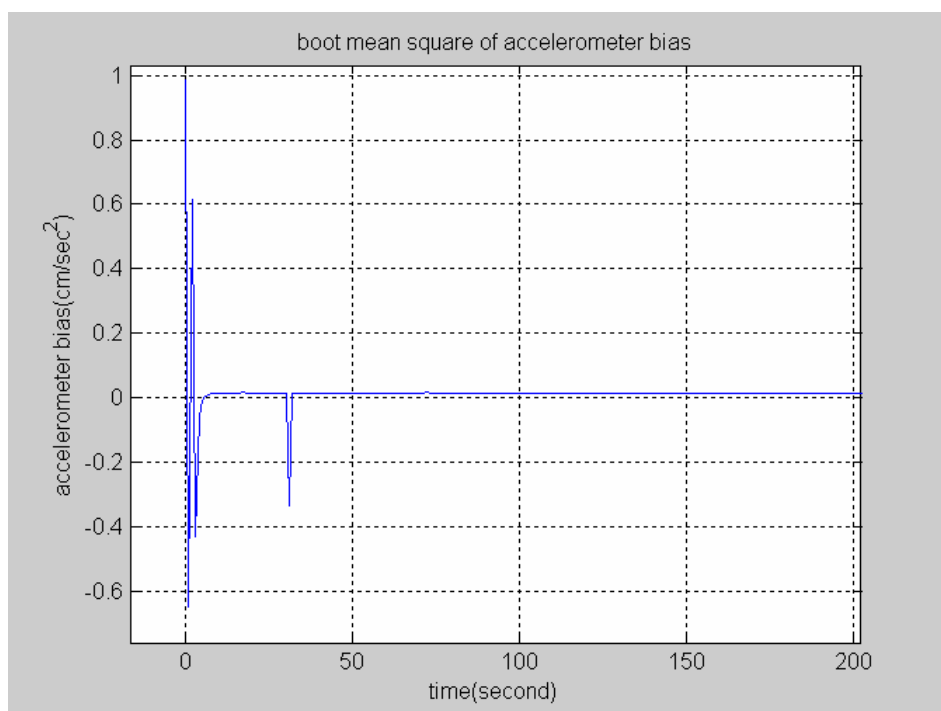


圖 6.10a 經卡門濾波器估測後的加速規偏差誤差均方根圖(取位置差為觀測)

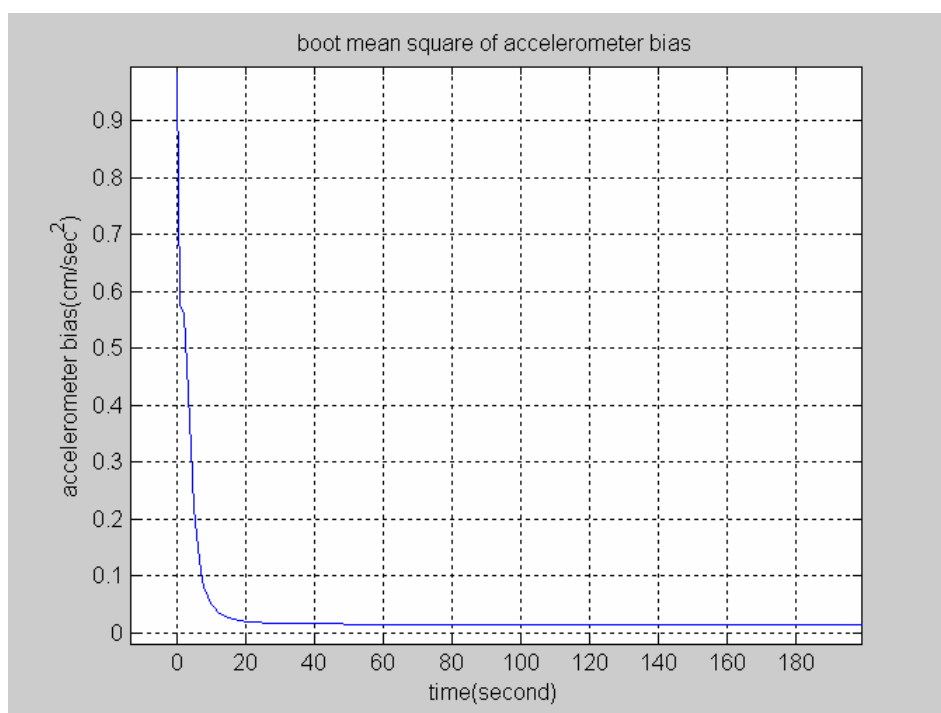


圖 6.10b 經卡門濾波器估測後的加速規偏差誤差均方根圖(取速度差為觀測)

第七章 結論

本文利用 $H-\infty$ 濾波器和卡門濾波器分別針對具有持續與白雜訊的情況下，估測其狀態值的誤差，並藉由較佳的狀態誤差的估測來回饋修正捷聯式慣性導航系統的運作狀態，以達到減少累積誤差的目的。慣性導航系統可不需依賴外界輸入，不受氣候和電子干擾影響，提供載具位置、速度、姿態角各方面系統的資訊。但由於慣性導航系統的精度很大程度上取決於慣性感測元件的精度。加速規、陀螺儀等各種不精確和外干擾的影響，使得導航系統的定位精度隨時間的增加而降低，而產生偏航現象。為了減少上述的現象，本文使用卡門濾波器和 $H-\infty$ 濾波器，將載具的狀態誤差做最佳化的估測，以有效回饋修正載具的偏航現象。

參考文獻

- [1]D.H. Titterton ,J.L. Weston “Strapdown inertial navigation technology”, Peter Peregrinis Ltd. on behalf of the Institution of Electrical Engineers (1997) .
- [2]Hwang, C.N., “Formulation of H_2 and H_∞ Optimal Control Problems-A Variational Approach”, journal of the Chinese institute of engineerings, vol. 16,no. 6,pp.853-866,1993.
- [3] HYUNG.KEUN.LEE,JANG GYU LEE,YONG KYU ROH & CHAN GOOK PARK “Modeling Quaternion Errors in SDINS:Computer Frame Approach”, IEEE Trans.On Aerospace And Electronic Systems, Vol.34, No.1, pp.289-299, 1998.
- [4]John C.Doyle, Keith Glover, Pramod P.Khargoner and Bruce A.Francis, “State-Space Solution to Standard H_2 and H_∞ Control Problems”, IEEE Trans.Automatic Control, Vol.34, No.8, pp.831-847, 1989.
- [5]J.L Weston,D.H Titterton “Modern inertial navigation technology and its application”,Electronics & Communication Engineering Journal, April , 2000.
- [6] Lovren, N.; Pieper, J.K. “Error analysis of direction cosines and quaternion parameters techniques for aircraft attitude determination”, IEEE Trans.On Aerospace And Electronic Systems, Vol.34, No.3, pp. 983 - 989 , 1998.
- [7] Robert Grover Brown,Patrick Y.C Hwang “Introduction to random signals and applied kalman filtering with matlab exercises and solutions”, New York, 3rd edition ,1997.
- [8] Maybeck, Peter S. “Stochastic models, estimation and control”, Vol. 1 , Academic Press, New York (1979).
- [9]YEON FUH JIANG,YU PING LIN “Error Analysis of Quaternion Transformations”, IEEE Trans.On Aerospace And Electronic Systems, Vol.27, No.4, pp.634-639, (1991) .
- [10]丁衡高, “海陸空天顯神威-慣性技術縱橫談”, 牛頓出版公司, (2001) .
- [11]張樹俠, 孫靜, “捷聯式慣性導航系統”, 國防工業出版, (1992).

- [12]陳世民，“船艦用固定式慣性導航系統之誤差方程式的狀態值之估測”，國立成功大學造船及船舶機械工程研究所，(1993).
- [13]黃國興，“慣性導航系統原理與應用”，全華科技，(1996).
- [14]楊憲東，葉芳柏，“線性與非線性 H_{∞} 控制理論”，全華科技圖書股份公司，(1997) .
- [15]鄧正隆，“慣性導航原理”，哈爾濱工業大學出版社，(1994) .
- [16]韓曾晉，“適應控制系統”，科技圖書股份公司，(2002) .

自 述

作 者： 陳柏宏

生 日： 民國六十九年二月二十二日

籍 貫： 台北市

學 歷： 民國 91 年 海軍官校正期九十一年班畢業

民國 94 年 國立成功大學系統及船舶機電工程研究所碩士畢業

通訊處： 高雄市鼓山區中華一路 29 巷 3 號

電 話： (07)552-5998