

对 Sage-Husa 算法的改进

魏 伟¹, 秦永元¹, 张晓冬², 张亚崇²

(1. 西北工业大学 自动化学院, 西安 710072; 2. 西安飞行自动控制研究所, 西安 710065)

摘要: 在衍生于卡尔曼滤波的 INS/GPS 组合导航自适应算法中, Sage-Husa 算法是针对不确定的系统噪声协方差阵 Q 阵和量测噪声协方差阵 R 阵的经典算法。文中推导了自适应 Q 阵和 R 阵, 在自适应 Q 阵中补充了 Sage-Husa 算法遗失的一些量。为了尽可能多保留信息, 构造新方法使得 Q 阵非负定和 R 阵正定, 取消了易导致估计偏差的均值估计, 修改了 Sage-Husa 算法中使初始噪声方差的作用很快趋于零的设计思想, 可控制固定噪声方差的比例。在 3 种数据扰动环境下, 利用动态仿真计算分析和比较了相关算法发现, 同时对 Q 阵和 R 阵做自适应估计的算法, 其抵抗数据扰动的效果要优于固定 Q 阵只对 R 阵做自适应估计、或固定 R 阵只对 Q 阵做自适应估计的算法, 这个结论不同于一些文献的观点。新改进的 Sage-Husa 算法对自适应 Q 阵和 R 阵可分别调节, 有较好的适应性和稳定性。

关键词: 卡尔曼滤波; Sage-Husa 算法; 自适应; 数据扰动环境

中图分类号: U666.1

文献标志码: A

Amelioration of the Sage-Husa algorithm

WEI Wei¹, QIN Yong-yuan¹, ZHANG Xiao-dong², ZHANG Ya-chong²

(1. Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Xi'an Flight Automatic Control Research Institute, Xi'an 710065, China)

Abstract: Among the INS/GPS integrated navigation adaptive algorithms derived from Kalman filter, the Sage-Husa algorithm is the classic method for the uncertain system noise covariance matrix Q and measurement noise covariance matrix R . In this paper, the adaptive matrix Q and matrix R were deduced, some values missed by the Sage-Husa algorithm were made up in the adaptive matrix Q . In order to save the information as much as possible, a new method was constructed to make matrix Q non-negative definite and matrix R positive definite. The mean estimations which could easily induce the estimation departure were cancelled. The design idea in the Sage-Husa algorithm, i.e. the effect of the initial noise variance is quickly approaching zero, was modified, so the proportion of the fixed noise variance could be controlled. Under the environments with 3 kinds of data disturbance, the dynamic simulation computation was used to compare and analyze related algorithms. It is found that, the effect of resisting data disturbances of the algorithm which simultaneously adaptively estimates matrix Q and matrix R is better than the algorithm adaptively estimating matrix R with the fixed matrix Q , or the algorithm adaptively estimating matrix Q with the fixed matrix R , and this conclusion is different from some papers' viewpoint. The modified Sage-Husa algorithm, which can respectively adjust the adaptive matrix Q and matrix R , has better flexibility and stability.

Key words: Kalman filter; Sage-Husa algorithm; adaptive; data disturbance environment

自卡尔曼滤波开始应用至今, 伴随着各种与卡尔曼滤波相关的自适应算法。文献[1]认为可分为 3 类:

收稿日期: 2012-07-30; **修回日期:** 2012-11-18

基金项目: 国家“973”计划项目(2010CB731806); 航空科学基金(20100818018)

作者简介: 魏伟(1964—), 男, 博士研究生, 从事惯性导航和组合导航研究。E-mail: wei630728@vip.sina.com

联系人: 秦永元(1946—), 男, 教授, 博士生导师。E-mail: qinyongyuan@nwpu.edu.cn

按比例缩放状态协方差阵 (P 阵) 多模型自适应估计以及自适应随机模型建模, 提出了自动按比例缩放系统噪声协方差阵 Q 的算法, 认为其调谐参数较少, 鲁棒性要优于按比例缩放状态协方差阵的算法, 但坦承不同于一般自适应随机模型建模的算法, 无法调整单种噪声的方差。

在针对不确定的系统噪声协方差阵 Q 阵和量测噪声协方差阵 R 阵的算法中, Sage-Husa 算法^[2,3]具有一定的代表性。

文献[4]针对 GPS 与低成本惯导系统的组合导航, 选用文献[1]归纳的 3 类自适应卡尔曼滤波方法做船载海上试验验证。与常规卡尔曼滤波方法相比, 前 2 类方法明显缩短了初始化和校准惯导的时间, 并使航向估计精度有所提高; 但第 3 类方法的姿态估计精度有所下降, 无法在 10 min 时间内完成初始化和校准惯导, 认为是这种自适应算法依赖所有的误差源要被正确建模, 减少系统噪声协方差阵 Q 中元素的数目可能会改善算法的性能。但本文认为其简化 Q 阵自适应估计公式会降低误差估计精度^[5]。

文献[6]提出改进的 Sage 自适应滤波, 为了在 GPS 失效后重新组合时能加快对惯导误差的修正, 设计了与一个与失效时间相关的因子作用于 R 阵, 失效时间越长, 则 \hat{R}_k 按其指数减小得越快。本文认为此法值得商榷, 因为较易引起估计量的振荡。

另外文献[6]为了保证 Q 阵的非负定而简化了 Sage-Husa 求 Q 阵的自适应公式, 本文认为也会降低误差估计精度^[5]。本文还对一些文献^[6-7]认为 Sage-Husa 算法只能在 Q 阵已知时估计出 R 阵或在 R 阵已知时估计出 Q 阵的观点有不同意见, 将说明在已知 Q 阵的情况下, 如果只对 R 阵做自适应估计, 在某些数据扰动情形下容易出现估计误差偏大的情况。

文献[8]将多个衰减因子放在对角线矩阵中, 在计算增益 K 阵的公式中与 R 阵相乘, 实际上是单独对 R 阵做自适应估计, 在动态环境中容易出现估计误差偏大的情况。

文献[9]对扩展卡尔曼滤波器 (EKF) 和不敏 (unscented) 卡尔曼滤波器 (AUKF) 采用的自适应方法都是与 Sage-Husa 算法相应部分类似的自适应估计 R 阵的方法, 同样这种只估计 R 阵的方法有其局限性。

最近几年模糊控制已结合到自适应卡尔曼滤波算法中^[10-12], 以适应复杂动态条件下误差估计, 实际上是在最优和次优估计之外增加了更加灵活的误差估计控制方法。

文献[10]的核心内容是在求取强跟踪卡尔曼滤波

器 (STKF) 的 P 阵按比例缩放因子 $\lambda_{i,k}$ 时, 采用了模糊逻辑自适应系统 (FLAS) 来调节 R 阵的比例因子 β (文中名为软化因子), 这同样存在单独估计 R 阵的缺点, 另外 FLAS 的控制逻辑较为复杂, 文中采用了 4 种方法, 主要是以新息 v_k (见本文 2) 为基础计算。

文献[11]采用了以新息为基础判断 GPS 导航数据是否合理的方法, 其模糊逻辑自适应调节是根据动态程度 (分为正常、低、中、高 4 种状态) 分别采用以下 4 种方法: 1) 固定的 R 阵和 Q 阵; 2) 引用比例因子计算公式为固定的 R 阵确定比例因子 S ; 3) 引用与 Sage-Husa 类似的算法自适应估计 \hat{R} 阵和 \hat{Q} 阵; 4) 将 S 与 \hat{R} 阵和 \hat{Q} 阵相乘。其中为固定 R 阵确定比例因子 S 的方法同单独估计 R 阵的缺点类似, 另外将 S 与 \hat{R} 阵和 \hat{Q} 阵相乘的方法是将两种自适应算法人为结合起来, 最优估计的理论依据不足, 其核心内容是引用模糊控制器的去模糊 (defuzzification) 处理来获得确定的 R 阵和 Q 阵, 依赖于相应权值 μ_i 的处理方法。

文献[12]将模糊控制分为两部分: 第一部分以新息和与 Sage-Husa 算法类似的公式为基础, 构造名为“匹配程度 (Degree of Matching)”的新变量 DOM 并制定基本的自适应规则, 为模糊参考系统的输入 DOM 和输出 dR 设计成员函数 (member functions) 并分别提供 3 组模糊集合, 以此形成对 R 阵的自适应调节, 这种只调节 R 阵的方法有其局限性; 第二部分是模糊集合理论为基础, 计算单个传感器与多个传感器的测量值之间的相似性, 来估计反映每个传感器重要性的权值, 以实现多传感器数据的融合, 这对算法有较高的要求。

从上述文献[10-12]可看出, 自适应卡尔曼滤波算法与模糊控制结合的效果, 在很大程度上取决于如何将模糊控制与误差的最优估计结合得更好一些。自适应估计 Q 阵和 R 阵就属于最优估计范畴。本文要在 3 种数据扰动条件下探讨 Sage-Husa 算法和与自适应 Q 阵和 R 阵相关的问题。

1 Sage-Husa 算法

简要介绍带遗忘因子的 Sage-Husa 算法^[3]。设线性离散化系统方程和量测方程分别为:

$$X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + \xi_{k-1} \quad (1)$$

$$Z_k = H_k X_k + \eta_k \quad (2)$$

式中: X_k 是 t_k 时刻被估计状态 ($n \times 1$), $\Phi_{k,k-1}$ 是 t_{k-1} 至 t_k 时刻状态转移阵 ($n \times n$), ξ_{k-1} 为系统激励噪声序列 ($n \times 1$), η_k 为量测噪声序列 ($m \times 1$), 假设其为不相

关序列, 满足:

$$\begin{cases} E[\xi_{k-1}] = q_{k-1}, & E[\eta_k] = r_k \\ \text{cov}[\xi_k, \xi_j] = \delta_{kj} Q_k, & \text{cov}[\eta_k, \eta_j] = \delta_{kj} R_k \end{cases}$$

则 Sage-Husa 算法为:

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \hat{Q}_{k-1} \quad (3)$$

$$\hat{X}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} + \hat{q}_{k-1} \quad (4)$$

$$\hat{r}_k = (1-d_k) \hat{r}_{k-1} + d_k (Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1}) \quad (5)$$

$$v_k = Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1} - \hat{r}_k \quad (6)$$

$$\hat{R}_k = (1-d_k) \hat{R}_{k-1} + d_k (v_k v_k^T - H_k P_{k/k-1} H_k^T) \quad (7)$$

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T [H_k P_{k/k-1} H_k^T + \hat{R}_{k-1}]^{-1} \quad (8)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k \hat{R}_{k-1} K_k^T \quad (9)$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k v_k \quad (10)$$

$$\hat{q}_k = (1-d_k) \hat{q}_{k-1} + d_k (\hat{X}_k - \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1}) \quad (11)$$

$$\hat{Q}_k = (1-d_k) \hat{Q}_{k-1} + d_k (K_k v_k v_k^T K_k^T + P_k - \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T) \quad (12)$$

$$d_k = (1-b)/(1-b^{k+1}) \quad (13)$$

式中, $0 < b < 1$, 为遗忘因子, 初值 \hat{X}_0 、 P_0 、 \hat{q}_0 、 \hat{Q}_0 、 \hat{r}_0 和 \hat{R}_0 预先给定。

与离散型卡尔曼滤波基本方程的差异在于式(4)和(10)中分别多了 \hat{q}_{k-1} 和 $-K_k \hat{r}_k$, 并且式(7)和(12)实时更新 \hat{R}_k 和 \hat{Q}_k 。为了解遗忘因子 b , 由式(12)写出递推公式:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k &= \frac{b^k(1-b)}{1-b^{k+1}} \hat{Q}_0 + \frac{b^{k-1}(1-b)}{1-b^{k+1}} (K_1 v_1 v_1^T K_1^T + P_1 - \Phi_{1,0} P_0 \Phi_{1,0}^T) + \\ &\frac{b^{k-2}(1-b)}{1-b^{k+1}} (K_2 v_2 v_2^T K_2^T + P_2 - \Phi_{2,1} P_1 \Phi_{2,1}^T) + \dots + \\ &\frac{1-b}{1-b^{k+1}} (K_k v_k v_k^T K_k^T + P_k - \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T) \end{aligned} \quad (14)$$

用归纳法可证明: 如果 $1-b_1 < 1-b_2$, 则

$$\frac{1-b_1}{1-b_1^{k+1}} < \frac{1-b_2}{1-b_2^{k+1}}。$$

对(14)有如下认识:

1) 当前时刻对 \hat{Q}_k 的贡献比例 $\frac{1-b}{1-b^{k+1}}$ 最大, 且随

$1-b$ 的增加而增加;

2) 随着 k 不断增加, $\frac{1-b}{1-b^{k+1}}$ 逐步减小并逼近于

$1-b$ 。实际上这种比例关系并不确定 k 值越小, $\frac{1-b}{1-b^{k+1}}$

与 $1-b$ 相比就越大, 而且 $1-b$ 越小, 这种差别按比例看就越大;

3) 预先确定的初值 \hat{Q}_0 是在对估计量 \hat{Q}_k 的贡献比例中随 k 的增加衰减最快的量。对于固定的 b , 在 $k=1$ 时, \hat{Q}_0 对估计量 \hat{Q}_k 的贡献比例最大, 但小于 0.5; $k=10$ 时, 不超过 10%; 随着 k 的增加, 其贡献比例很快就趋于 0。可见 Sage-Husa 算法基本忽略了初值 \hat{Q}_0 和 \hat{R}_k , 当性能比较稳定的惯导系统需要确定一定比例的固定噪声时, 就不太适用。

另外在最早的 Sage-Husa 算法^[2]中, 式(5)(7)(11)和(12)采用了平均分配信息的方法, 初值对估计的贡献比例只有 $1/k$ 。

2 重新推导系统和量测噪声

不失一般性, 设式(1)和(2)成立并满足相同的统计特性, 在式(4)(6)(10)成立的条件下, 式(1)和(2)转化为:

$$X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + \hat{q}_{k-1} + W_{k-1} \quad (15)$$

$$Z_k = H_k X_k + \hat{r}_k + V_k \quad (16)$$

其中, $E[\hat{q}_{k-1}] = q_{k-1}$, $E[\hat{r}_k] = r_k$, W_{k-1} 和 V_k 为白噪声序列, 且 \hat{q}_{k-1} 、 \hat{r}_k 、 W_{k-1} 、 V_k 相互之间、自身不同时刻不相关。则由式(15)(10) (6)和(4)得:

$$X_k - \hat{X}_k = \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) - K_k v_k + W_{k-1} \quad (17)$$

上式中 v_k 为新息:

$$v_k = Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1} - \hat{r}_k = H_k (X_k - \hat{X}_{k/k-1}) + V_k \quad (18)$$

式(17)可转化为:

$$(X_k - \hat{X}_k) + K_k v_k = \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) + W_{k-1} \quad (19)$$

两边乘以式(19)的转置, 再同取数学期望, 注意到 W_{k-1} 与 $(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})$ 不相关, 且 $E(W_{k-1}) = 0$, 则

$$E[(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) W_{k-1}^T] = 0, \text{ 有}$$

$$\begin{aligned} E[W_{k-1} W_{k-1}^T] + \Phi_{k,k-1} E[(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})^T] \Phi_{k,k-1}^T = \\ E[K_k v_k v_k^T K_k^T] + E[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_k)^T] + \\ E[(X_k - \hat{X}_k) v_k^T K_k^T] + E[K_k v_k (X_k - \hat{X}_k)^T] \end{aligned} \quad (20)$$

如果假定 v_k 与 $(X_k - \hat{X}_k)$ 不相关, 且 $E v_k = 0$, 则

可推出 Sage-Husa 算法的式(12)。但由式(16)(6)和(10)看出, v_k 和 V_k 分别与 $(X_k - \hat{X}_k)$ 相关, 则

$$\begin{aligned} E[(X_k - \hat{X}_k)v_k^T K_k^T] = \\ E[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_{k/k-1})^T H_k^T K_k^T + (X_k - \hat{X}_k)V_k^T K_k^T] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (X_k - \hat{X}_k)V_k^T K_k^T = \\ [(I - K_k H_k)(X_k - \hat{X}_{k/k-1}) - K_k V_k]V_k^T K_k^T \end{aligned} \quad (22)$$

因 V_k 与 $(X_k - \hat{X}_{k/k-1})$ 不相关, 且 $E[V_k] = 0$, $E[V_k V_k^T] = R_k$, 则

$$E[(X_k - \hat{X}_k)V_k^T K_k^T] = -K_k E[V_k V_k^T] K_k^T = -K_k R_k K_k^T \quad (23)$$

因 W_{k-1} 与 $(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})$ 不相关, V_k 与 $(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})$ 不相关, $E[W_{k-1}] = 0$, $E[V_k] = 0$, $E[W_{k-1} W_{k-1}^T] = Q_{k-1}$, 由式(4)(10)(15)和(18)得

$$\begin{aligned} E[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_{k/k-1})^T H_k^T K_k^T] = \\ (I - K_k H_k) \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T H_k^T K_k^T + \\ (I - K_k H_k) Q_{k-1} H_k^T K_k^T \end{aligned} \quad (24)$$

由式(23)和(24)可得式(21), 则式(20)为

$$\begin{aligned} Q_{k-1} + (K_k H_k - I) Q_{k-1} H_k^T K_k^T + K_k H_k Q_{k-1} (H_k^T K_k^T - I) = \\ E[K_k v_k v_k^T K_k^T] + P_k - \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T - 2K_k R_k K_k^T + \\ \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T H_k^T K_k^T - 2K_k H_k \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T H_k^T K_k^T + \\ K_k H_k \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T \end{aligned} \quad (25)$$

为了利用上式计算 Q_{k-1} , 利用卡尔曼滤波器的式(3)做近似处理, 置换式(25)等号左边后两项中的 Q_{k-1} , 再作近似处理, 把 Q_{k-1} 的序号加 1, 则式(25)变为:

$$\begin{aligned} Q_k = E[K_k v_k v_k^T K_k^T] + P_k - \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T - \\ 2K_k R_k K_k^T - 2K_k H_k P_{k/k-1} H_k^T K_k^T + \\ P_{k/k-1} H_k^T K_k^T + K_k H_k P_{k/k-1} \end{aligned} \quad (26)$$

可以看出与 Sage-Husa 算法的差异在于等式右边从第 4 项开始的全部 4 项, 是由于考虑了新息 v_k 和 $(X_k - \hat{X}_k)$ 相关。另外由式(18):

$$v_k = H_k (X_k - \hat{X}_{k/k-1}) + V_k。$$

当无故障发生时, V_k 是白噪声, 其方差为 R_k , 且与 $(X_k - \hat{X}_{k/k-1})$ 不相关, 则两边乘以自身的转置, 再取数学期望得:

$$R_k = E[v_k v_k^T] - H_k P_{k/k-1} H_k^T \quad (27)$$

由式(26)和(27)定义两种自适应计算方法。

改进 Sage-Husa 算法 1: 与所有信息相关, 分别设置遗忘因子 $0 < b_1 < 1$ 、 $0 < b_2 < 1$, 其余定义为:

$$d_{1k} = (1 - b_1) / (1 - b_1^{k+1}),$$

$$d_{2k} = (1 - b_2) / (1 - b_2^{k+1}),$$

$$\hat{R}_k = (1 - d_{1k}) \hat{R}_{k-1} + d_{1k} (v_k v_k^T - H_{k+1} P_{k/k-1} H_k^T),$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k = (1 - d_{2k}) \hat{Q}_{k-1} + d_{2k} [K_k v_k v_k^T K_k^T + \\ P_k - \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T - 2K_k \hat{R}_k K_k^T - \\ 2K_k H_k P_{k/k-1} H_k^T K_k^T + P_{k/k-1} H_k^T K_k^T + K_k H_k P_{k/k-1}] \end{aligned} \quad (28)$$

改进 Sage-Husa 算法 2: 只与固定值和当前值相关, 按比例获取信息, 预先设置比例因子 $0 < a_1 < 1$ 、 $0 < a_2 < 1$ 和方差初值 \hat{R}_0 、 \hat{Q}_0 , 其余定义为:

$$\hat{R}_k = (1 - a_1) \hat{R}_0 + a_1 (v_k v_k^T - H_k P_{k/k-1} H_k^T) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k = (1 - a_2) \hat{Q}_0 + a_2 [K_k v_k v_k^T K_k^T + P_k - \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T - \\ 2K_k \hat{R}_k K_k^T - 2K_k H_k P_{k/k-1} H_k^T K_k^T + \\ P_{k/k-1} H_k^T K_k^T + K_k H_k P_{k/k-1}] \end{aligned} \quad (30)$$

3 算例的选取

比较分析 5 种算法: Sage-Husa 算法; 改进 Sage-Husa 算法 1; 改进 Sage-Husa 算法 2; 固定 Q 阵 (只对 R 阵做自适应估计) 的 Sage-Husa 算法; 常规卡尔曼滤波。专门设计仿真计算软件。惯导误差方程的变量选取 24 个, 都设置了初始误差, 如表 1 所示。在表 2 中列出了模拟飞行轨迹的一些参数。采用蒙特卡洛方法, 在模拟飞行动态的位置、速度、加速度和游移角激励下, 用包含表 1 的 24 个误差量的误差方程, 加入表 2 中的初始误差以及根据假设系统噪声强度生成的噪声伪随机数, 模拟惯导 24 个误差量的变化。

算法的误差状态变量选用表 1 中的前 11 个误差项。量测值采用惯导和 GPS 的经、纬度的差值。惯导采用游移方位系统, 初始游移角为 $\alpha_0 = 45^\circ$, GPS 的

经度和纬度都加入 0.3 的白噪声。略去惯导误差方程和系统噪声强度、各种初值的描述。1001 ~ 1003 s, 300 ; 台阶, 1501 ~ 1800 s, 60 ; 斜坡型慢变, 2001 ~ 2600 s, 斜率 0.067 ()/s。

表 1 惯导系统误差变量和初始值

Tab.1 INS error variables and their initial value

序号	误差变量含义	初始误差
1	X 轴速度误差	0.02 m/s
2	Y 轴速度误差	0.03 m/s
3	纬度误差	0.2
4	经度误差	0.3
5	绕 X 轴平台偏角	20
6	绕 Y 轴平台偏角	20
7	绕 Z 轴平台偏角	30
8	游移角误差	-600
9	X 轴陀螺漂移	-0.02 (°)/h
10	Y 轴陀螺漂移	0.02 (°)/h
11	Z 轴陀螺漂移	0.05 (°)/h
12	X 轴加速度计零偏	2×10^{-5} g
13	Y 轴加速度计零偏	1×10^{-5} g
14	X 轴加速度计绕 Z 轴不对准角	6
15	Y 轴加速度计绕 Z 轴不对准角	10
16	X 轴陀螺标度因数误差	0.0007
17	Y 轴陀螺标度因数误差	-0.0007
18	Z 轴陀螺标度因数误差	0.0007
19	X 轴加速度计标度因数误差	0.0007
20	Y 轴加速度计标度因数误差	-0.0006
21	XX 轴陀螺质量不平衡误差	1.5 (°)/(h · g)
22	ZX 轴陀螺正交误差	0.5 (°)/(h · g)
23	YY 轴陀螺质量不平衡误差	1.0 (°)/(h · g)
24	ZY 轴陀螺正交误差	0.5 (°)/(h · g)

表 2 模拟飞行轨迹

Tab.2 Simulated flight track

阶段序号	飞行动作	起始时刻/s	阶段序号	飞行动作	起始时刻/s
1	滑跑起飞	0	23	匀速平飞	2614
2	进入爬升	20	24	向右倾斜	3114
3	匀速爬升	23	25	右盘旋	3115
4	改平	183	26	退出盘旋	3415
5	匀速平飞	186	27	匀速平飞	3416
6	加速平飞	386	28	向左倾斜	3916
7	匀速平飞	426	29	左盘旋	3917
8	向左倾斜	466	30	退出盘旋	4417
9	左盘旋	467	31	匀速平飞	4418
10	退出盘旋	507	32	向右倾斜	5018
11	匀速平飞	508	33	右盘旋	5019
12	向左倾斜	808	34	退出盘旋	5219
13	左盘旋	809	35	匀速平飞	5220
14	退出盘旋	1009	36	向左倾斜	5920
15	匀速平飞	1010	37	左盘旋	5921
16	向右倾斜	1510	38	退出盘旋	6421
17	右盘旋	1511	39	匀速平飞	6422
18	退出盘旋	1811	40	向右倾斜	7222
19	匀速平飞	1812	41	右盘旋	7223
20	向左倾斜	2412	42	退出盘旋	7823
21	左盘旋	2413	43	匀速平飞	7824
22	退出盘旋	2613	44	模拟结束	8424

4 数据扰动情形的误差添加方式

数据扰动情形包含全部或部分下列三种误差添加方式：

- 1) 给表 1 的 24 个误差量加入表 1 中所示的初始误差。
- 2) 人为断开组合导航，在 301 ~ 899 s 和 5301 ~ 5899 s 断开组合 2 次，有意丢失两段时间内的量测值，在断开组合期间，状态转移矩阵 $\Phi_{k,k-1}$ 和一步预测估计均方误差阵 $P_{k/k-1}$ 照常计算，估计均方误差阵 P_k 用 $P_{k/k-1}$ 近似，不在速度误差上加伪随机噪声。
- 3) 给 GPS 的经度、纬度加入 3 种误差：跳点，

5 使用 Sage-Husa 算法所出现的问题及改进

设置惯导内部的干扰因素：按照表 1 加入惯导 11 个误差量的初值，0 ~ 8424 s 连续组合没有断开。

首先应用 Sage-Husa 算法，在更新 \hat{R}_k 和 \hat{Q}_k 时，容易出现 \hat{R}_k 失去正定性或 \hat{Q}_k 失去非负定性的问题。分析原因：式(7)和(12)的等式右边的互协方差（非对角线）的非零元素的绝对值大到一定程度，或者自协方差（对角线）元素出现负值时，都会使 \hat{R}_k 失去正定性或 \hat{Q}_k 失去非负定性。处理措施：对于式(7)和(12)增加卡尔曼滤波的约束条件，假设噪声互不相关，则把式(7)和(12)的等式右边的第 2 项（注意不是等式右

边的全部,否则偏差较大)处理结果的对角线元素取绝对值,非对角线元素取零。这样可避免式(7)中的 $-H_{k+1}P_{k/k-1}H_k^T$ 项影响 \hat{R}_k 的正定性或删去式(12)中的 $P_k - \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^T$ 项^[4,6]的自协方差信息。将此方法全部推广至算法 ~。

另外还发现量测噪声有时出现较大变化,引起较大的估计偏差。经对比发现由式(4)中的 \hat{q}_{k-1} 或式(10)中的 \hat{r}_k 出现较大偏差引起,而且 \hat{q}_{k-1} 单独造成的偏差要明显大于 \hat{r}_k 单独造成的偏差。简要分析:求均值 \hat{r}_k 的式(5)是对式(2)的近似,由 $\hat{X}_{k/k-1}$ 近似 X_k 、由递推累加近似数学期望引起的偏差有时可能较大;求均值 \hat{q}_k 的式(11)是对式(1)的近似,由 \hat{X}_{k-1} 近似 X_k 、由 \hat{X}_k 近似 X_{k+1} 、由递推累加近似数学期望引起的偏差有时可能更大。从计算中发现的更严重问题是, \hat{r}_k 或 \hat{q}_k 的偏差会干扰 \hat{R}_k 和 \hat{Q}_k 建立在最优估计基础上的协调关系,导致误差估计偏差的增大,并进一步导致 \hat{r}_k 或 \hat{q}_k 偏差的增大。因篇幅限制略去详细讨论。后面算法 ~ 的都取消了 \hat{r}_k 和 \hat{q}_k 的计算。

6 仿真比较

6.1 数据扰动情形 1 下的比较

数据扰动情形 1:按照 4 中的第 1) 和第 2) 两种误差添加方式。在选用经、纬度做量测的前提下,两段时间丢失量测值和较多误差源的加入都给速度误差的估计造成了较大干扰,因此通过对比速度估计误差的振幅和持续时间来比较 5 种算法的准确性和快速性。

先看算法 和 ,使遗忘因子 b 、 b_1 和 b_2 以 0.1 的步长遍历 0.0~1.0,可看出:1) b 、 b_1 和 b_2 都相等时两种算法结果较接近,在此情形下 v_k 和 $(X_k - \hat{X}_k)$ 的相关性影响不大;2) 使 b_1 和 b_2 不相等, b 和 b_1 、 b_2 其中一个相等,一般情况下,结果相差不大,在 b_1 和 b_2 相差较大或其中有一个值接近 0 或 1 时结果可能较差。

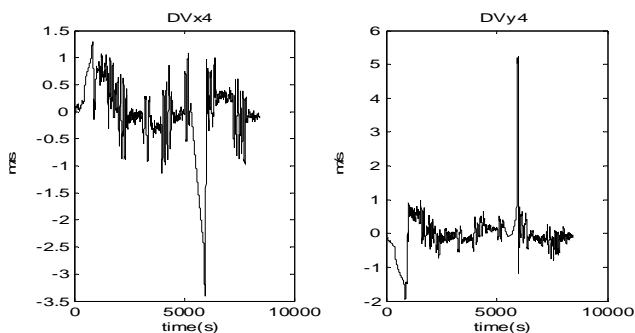
图 1(a)是算法 ($b=0.2$) 中 V_x 和 V_y 的速度估计误差,最大单次振荡幅值分别约为 4.5 m/s 和 6.2 m/s,持续时间分别为 124 s 和 56 s。

图 1(b)是算法 ($b_1=0.3, b_2=0.2$) 中 V_x 和 V_y 的速度估计误差,最大单次振荡幅值分别约为 4.2 m/s 和 5.3 m/s,持续时间分别为 117 s 和 48 s,略优于算法的结果。

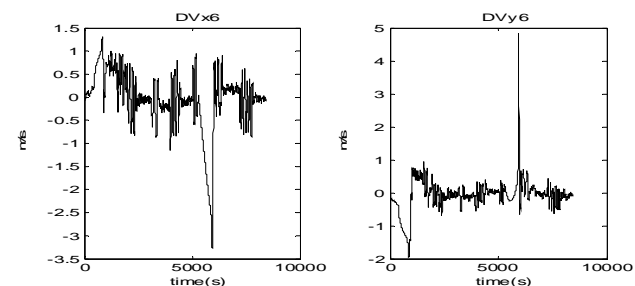
算法 与算法 和 的主要差异在于,用 a_1 和 a_2 的调整可较方便地控制 R 阵和 Q 阵的取值范围。有可能减小振荡幅度,获得更好的结果。图 1(c)是算法 ($a_1=0.1, a_2=0.4$) 中 V_x 和 V_y 的速度估计误差,最大单次

振荡幅值分别约为 4.2 m/s 和 3.2 m/s,持续时间分别 124 s 和 26 s,基本优于算法 和 的结果。

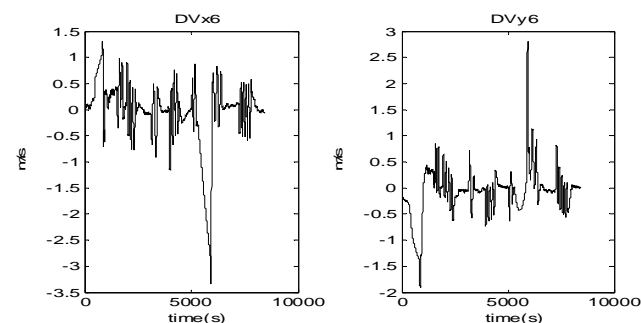
算法 由于固定 Q 阵的限制,类似于缺少反馈的控制过程,容易导致 R 阵的估计出现较大的波动,影响了速度等误差的估计精度;图 1(d) 是算法 ($b=0.2$) 中 V_x 和 V_y 的速度估计误差,最大单次振荡幅值分别约为 18 m/s 和 27 m/s,且持续时间都超过了 2000 s,偏差较大。



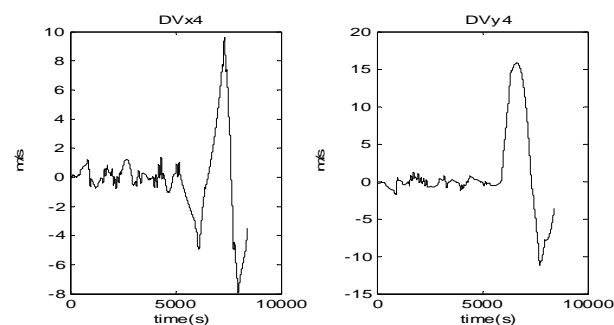
(a) 算法 algorithm ($b=0.2$)



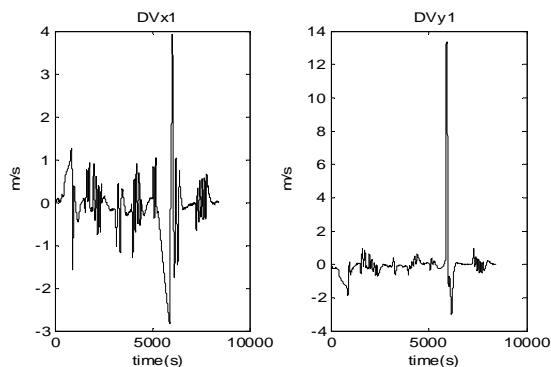
(b) 算法 algorithm ($b_1=0.3, b_2=0.2$)



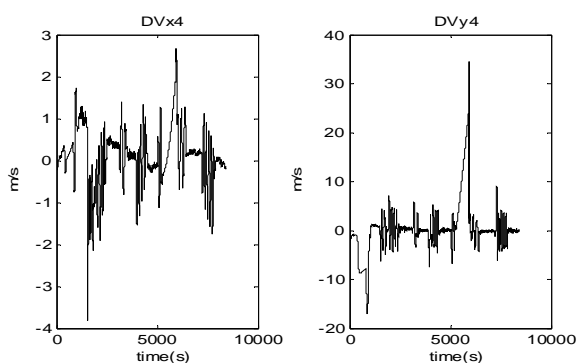
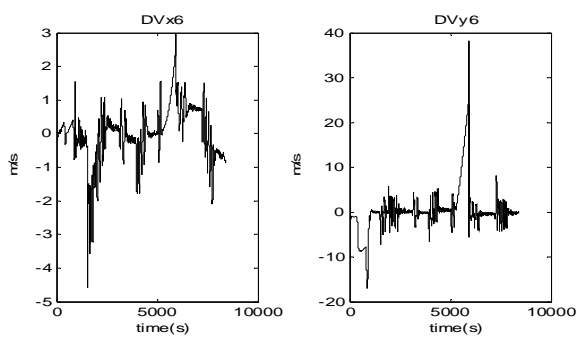
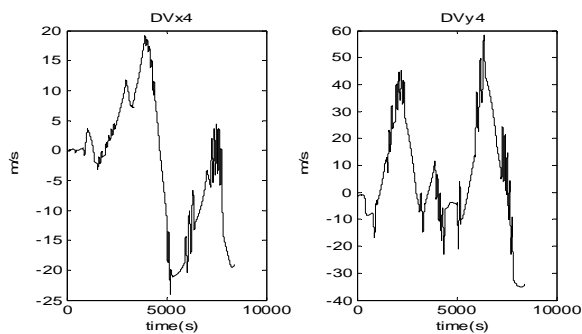
(c) 算法 algorithm ($a_1=0.1, a_2=0.4$)



(d) 算法 algorithm ($b=0.2$)



(e) 算法 algorithm

图 1 不同算法的速度 V_x 和 V_y 的估计误差Fig.1 The estimation error of velocity V_x and V_y of different algorithms(a) 算法 algorithm ($b=0.5$)(b) 算法 algorithm ($a_1=0.5, a_2=1$)(c) 算法 algorithm ($b=0.5$)图 2 不同算法的速度 V_x 和 V_y 的估计误差Fig.2 The estimation error of velocity V_x and V_y of the different algorithms

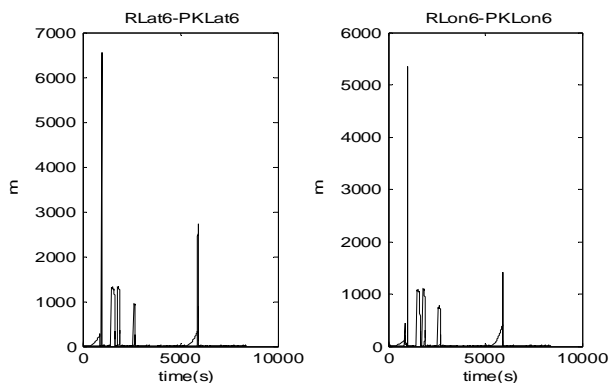
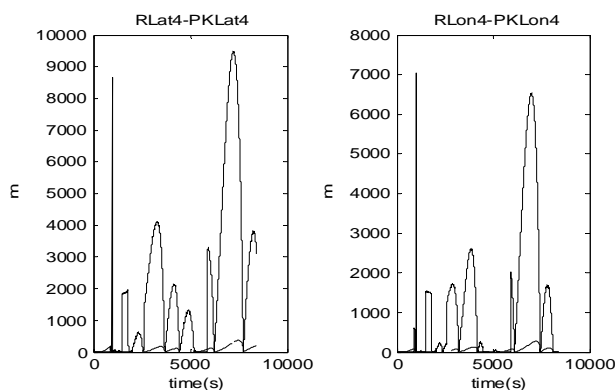
算法 虽然振幅较大,但趋稳较快。图 1(e)是算法 中 V_x 和 V_y 的速度估计误差,最大单次振荡幅值分别约为 6.8 m/s 和 16.4 m/s,持续时间分别为 231 s 和 271 s,振幅较大但趋稳较快。

6.2 数据扰动情形 2 下的比较

数据扰动情形 2: 依然采用 4 中的第 1) 和第 2) 种误差添加方式,所不同的是表 1 中的卡尔曼滤波误差方程以外的误差量出现了某种影响较大的误差,第 14 项“X 轴加速度计绕 Z 轴不对准角”加入 120°,第 19 项“X 轴加速度计标度因数误差”加入 0.0037。对于算法 和 ,除量测值经度和纬度之外的误差估计都造成了较大的干扰,而且参数的调整作用较小。对于算法 和 ,选择 $b=b_1=b_2=0.5$,对于算法 ,选择 $a_1=0.5$ 和 $a_2=1$,都有较好的抗干扰效果。在图 2 中列出了算法 和 的部分结果。

6.3 在数据扰动情形 3 下的比较

数据扰动情形 3: 采用 4 中的第 1) 第 2) 和第 3)

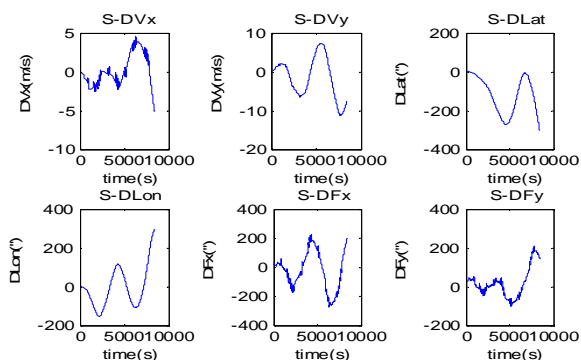
(a) 算法 algorithm ($a_1=0.5, a_2=1$)(b) 算法 algorithm ($b=0.5$)图 3 纬、经度量测噪声(实线-)和 P 阵反映的估计误差(虚线--)Fig.3 Latitude and longitude measurement noise (solid-), estimation error (dashed--) indicated by P .

种误差添加方式。5 种算法都存在不同程度的偏差。

图 3 的(a)和(b)表示的是导航过程中算法 和 的量测噪声的变化,纵坐标方向的纬、经度量测噪声用实线(—)表示, P 阵反映的估计误差用虚线(--)表示,单位均为 m,而横坐标方向导航时间,单位为 s。算法 ($b=0.5$) 量测噪声的振荡幅值较大,持续时间较长,带来了较大的估计误差(在图 5 的(e)和(f)中可看出)。

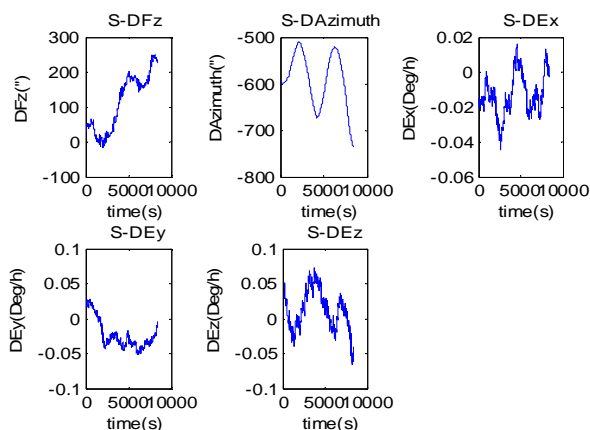
图 4 的(a)和(b)表示了导航过程中表 1 的前 11 种误差量的变化过程,图 4 的(c)至(f) 表示了导航过程中算法 和 对表 1 的前 11 种误差量的估计误差的变化过程,11 种误差按从右向左、从上到下的顺序与表 1 的顺序一致,且纵坐标方向表示的估计误差的单位与表 1 中对应误差量的单位一致,横坐标方向为导航时间,单位为 s。

综合评定:算法 、 和 表现出了相对较好的抗干扰特性,而算法 和 都给除经度和纬度(与量测值直接相关)之外的误差估计造成了较大的干扰,估计误差的振幅较大且持续时间较长。



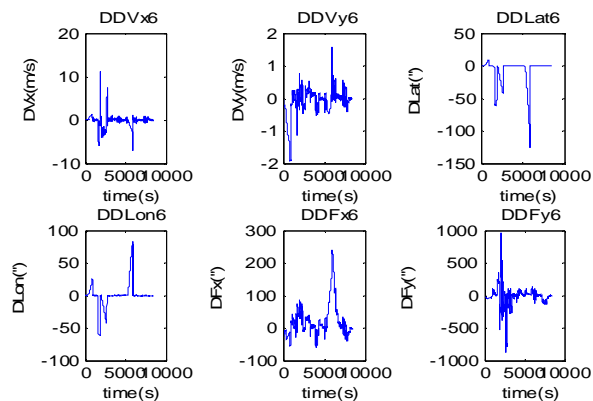
(a) 第 1 至第 6 误差量的变化过程

(a) The changing process of No.1 to No.6 errors



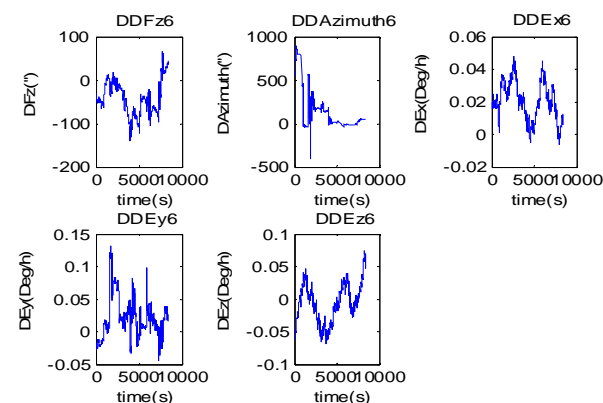
(b) 第 7 至第 11 误差量的变化过程

(b) The changing process of the No.7 to No.11 errors



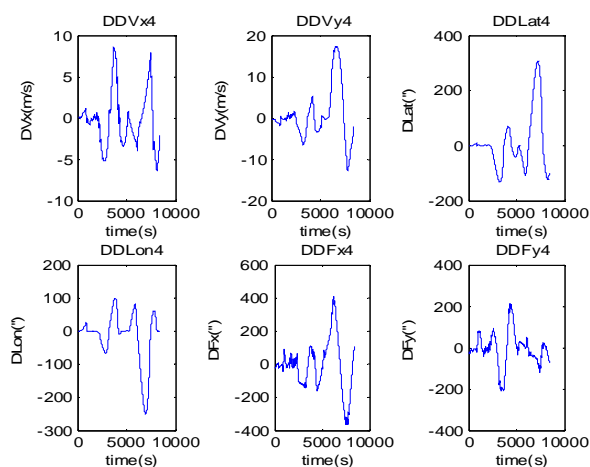
(c) 算法 ($a_1=0.5, a_2=1$) 对第 1~6 误差量的估计误差

(c) The estimation errors of the No.1 to No.6 errors of algorithm ($a_1=0.5, a_2=1$)



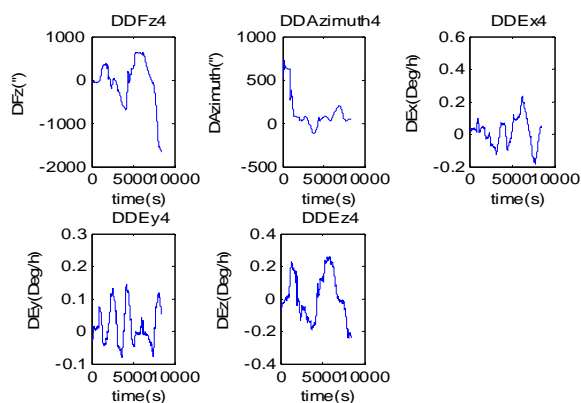
(d) 算法 ($a_1=0.5, a_2=1$) 对第 7 至第 11 误差量的估计误差

(d) The estimation errors of the No.7 to No.11 errors of algorithm ($a_1=0.5, a_2=1$)



(e) 算法 ($b=0.5$) 对第 1 至第 6 误差量的估计误差

(e) The estimation errors of the No.1 to No.6 errors of algorithm ($b=0.5$)



(f) 算法 (b=0.5) 对第 7 至第 11 误差量的估计误差

(f) Estimation errors of No.7~11 errors of algorithm

(b=0.5)

图 4 表 1 中的前 11 个误差量的变化过程和两种算法的估计误差

Fig.4 The changing process of first 11 errors in Table 1 and the estimation errors of two algorithms

7 结论

从推导、计算获得下述结论：

1) 虽然暂未发现“改进 Sage-Husa 算法”(算法) 和 Sage-Husa 算法(算法) 差异较大的情况, 但 Sage-Husa 算法是隐含了新息 v_k 与 $(X_k - \hat{X}_k)$ 不相关且 $E v_k = 0$ 或 $E(X_k - \hat{X}_k) = 0$ 这些假设的次优估计, 而“改进 Sage-Husa 算法”的推导过程虽然利用卡尔曼滤波器的式(3)对 Q_{k-1} 的近似, 以及 $K_k E[V_k V_k^T] K_k^T = K_k R K_k^T$ 的相关性置换, 但信息舍弃较少, 较为合理。另外两个比例系数的调整也更加灵活。

2) “改进 Sage-Husa 算法”(算法) 明确地设置了当前值和初值的比例, 更适合于性能相对稳定的惯导系统, 两个比例系数的调整也更加灵活, 其稳定性不亚于 Sage-Husa 算法。

3) 固定 Q 阵的 Sage-Husa 算法(算法) 仅对 R 阵做自适应估计, 在干扰条件下容易引起量测噪声持续时间较长、振幅较大的振荡, 导致较大的误差估计偏差, 类似缺少反馈的控制过程。另外固定 R 阵的 Sage-Husa 算法仅对 Q 阵做自适应估计, 也出现了类似的问题^[5]。而算法 至 使自适应 R 阵和 Q 阵相关联, 同时做 R 阵和 Q 阵的自适应估计, 明显减少了量测噪声的振荡, 在抵抗数据扰动的同时还保持了较好的误差估计准确性和快速性, 这是基于卡尔曼滤波的较为特殊的一种现象, 这一结论不同于一些文献^[6-7]的观点。

4) 尽管在数据扰动特别是 GPS 导航数据扰动时, 固定 Q 阵和 R 阵的常规卡尔曼滤波算法(算法) 最易受到干扰, 但实施较简便, 在一般条件下容易获得较

满意的误差估计, 仍不失为最易运用的误差估计方法。

5) 是否在不同动态环境和数据扰动条件下选择 Q 阵和 R 阵自适应估计算法并不简单, 要考虑惯导系统和 GPS 卫星导航系统(含接收机)的误差特性和算法的复杂度, 另外无论是否采用自适应算法, 需考虑对误差修正的适当控制以减少其可能的副作用。

参考文献(Reference)

- [1] Ding Weidong, Wang Jinling, Rizos C. Improving Adaptive Kalman Estimation in GPS/INS Integration[J]. The Journal of Navigation, 2007, 60: 517-529.
- [2] Sage A P, Husa G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics[C]//Proceedings of Joint Automatic Control Conference. 1969: 760-769.
- [3] Lichtfuse E. Non-GPS navigation using vision-aiding and active radio range measurements[D]. Department of the Air Force Air University, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, USA, 2011.
- [4] Hide C, Moore T, Smith M. Adaptive Kalman filtering algorithms for integrating GPS and low cost INS[C]// IEEE. 2004: 227-233.
- [5] 魏伟, 秦永元, 张晓冬, 等. 卡尔曼滤波系统和量测噪声自适应估计的关联性[J]. 测控技术, 2012, 30(12): 98-103.
WEI Wei, QIN Yong-yuan, ZHANG Xiao-dong, et al. Measurement & Control Technology. 2012, 31(12): 98-103.
- [6] 范科, 赵伟, 刘建业. 自适应滤波算法在 SINS/GPS 组合导航系统中的应用研究[J]. 航空电子技术, 2008, 39(3): 11-15.
FAN Ke, ZHAO Wei, LIU Jian-ye. Adaptive Filtering Algorithm for SINS/GPS Integrated Navigation System [J]. Journal of Avionics Technology, 2008, 39(3): 11-15.
- [7] 鲁平, 赵龙, 陈哲. 改进的 Sage-Husa 自适应滤波及其应用[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(15): 3503-3505.
LU Ping, ZHAO Long, CHEN Zhe. Improved Sage-Husa adaptive filtering and its application[J]. Journal of System Simulation, 2007, 19(15): 3503-3505.
- [8] Söken H E, Hajiye C. Adaptive unscented Kalman filter with multiple fading factors for pico satellite estimation [C]//Proceedings of 4th International Conference on Recent Advances Space Technologies. Istanbul, Turkey 2009: 541-546.
- [9] LUO Yan-fen. Research on adaptive information fusion Kalman filter algorithm[C]// 2012 International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology. Shenzhen, China, 2012: 1946-1949.
- [10] Jwo Dah-Jing, Wang Sheng-Hung. Adaptive Fuzzy Strong Tracking Extended Kalman Filtering for GPS Navigation [J]. IEEE Sensors Journal, 2007, 7(5): 778-789.
- [11] Shi Enbo. An improved real-time adaptive Kalman filter for low-cost integrated GPS/INS navigation[C]// Proceedings of 2012 International Conference on Measurement, Information and Control, Harbin, China, 2012: 1093-1098.
- [12] El Madbouly E E, Abdalia A E, El Banby Gh M. Fuzzy adaptive kalman filter for multi-sensor system[C]// 2009 International Conference on Networking and Media Convergence, ICNM 2009, Cairo, Egypt, 2009: 141-145.