

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Mecánica



**CARACTERIZACIÓN DE MODELOS HIPERELÁSTICOS CON ALGORITMOS
METAHEURÍSTICOS**

CLAUDIO HÉCTOR CANALES DONOSO

Profesor guía:
Claudio Moisés García Herrera

Trabajo de Titulación presentado en conformidad a los requisitos para obtener el Título de Ingeniero Civil en Mecánica y Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención Ingeniería mecánica.

Santiago – Chile
2020

© Claudio Héctor Canales Donoso, 2020.

 Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-Compartir Igual 3.0. Sus condiciones de uso pueden ser revisadas en:
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/cl/>.

RESUMEN

En esta tesis se estudian y proponen formas de caracterizar materiales hiperelásticos de manera fidedigna y estable. Para ello, se utilizan algoritmos de optimización metaheurísticos, más específicamente algoritmos genéticos, estrategias evolutivas y optimización por enjambre de partículas. La ventaja de estos algoritmos, respecto a los métodos tradicionales como levenberg-marquardt [1], es que los algoritmos metaheurísticos están orientados a la optimización global de un problema, son independientes de los gradientes y permiten resolver problemas restringidos. Estas características son fundamentales al momento de caracterizar materiales hiperelásticos que presentan no linealidades y están condicionados a regiones de estabilidad.

Inicialmente se presentan los fundamentos de mecánica del medio continuo como las medidas de deformación, esfuerzo, ecuaciones de balance y entropía. Estas bases permiten formular y describir un comportamiento hiperelástico y posteriormente presentar modelos constitutivos isótropos y anisótropos, junto a algunos criterios de estabilidad. También se describe la dinámica de los algoritmos metaheurísticos implementados, su historia y conceptos fundamentales de optimización.

Los algoritmos metaheurísticos implementados son evaluados para determinar si son capaces de caracterizar materiales hiperelásticos isótropos y se compara su aptitud resolutiva. Una vez demostrada la aptitud de estos algoritmos, se proponen diferentes maneras de caracterizar un material hiperelástico isótropo y se analiza como los ensayos mecánicos aportan información relevante a la caracterización del material. Se analizan diferentes escenarios de ajuste de los parámetros constitutivos, considerando múltiples ensayos mecánicos, restricciones de estabilidad, datos experimentales, modelos constitutivos y número de parámetros.

La caracterización de material hiperelástico anisótropo se centra en el análisis de los modelos constitutivos de Holzapfel [2] y de Gasser [3], aplicados específicamente para modelar arterias. Un punto importante del análisis es que estos modelos presentan un comportamiento no físico, reportado por Helfenstein et al. [4], y este es regularizado con nuevos criterios de estabilización y los algoritmos metaheurísticos. Finalmente, se utilizan los elementos finitos en conjunto con las estrategias evolutivas para caracterizar datos experimentales de arterias, asegurando que los parámetros obtenidos sean estables y representativos.

Esta tesis se enmarca dentro del proyecto de investigación titulado “Biomechanical Behaviour of Arteries from Chronic Hypoxic Animals: Experiments, Modelling, Numerical Simulation and Validation” (Referencia: 1170608), financiado por FONDECYT y bajo la dirección del profesor Dr. Claudio García-Herrera.

Palabras claves: algoritmos evolutivos, hiperelásticidad, estabilidad anisótropa, caracterización inversa con elementos finitos.

ABSTRACT

This thesis studies and proposes some schemes to characterize hyperelastic materials in a reliable and stable way. For this purpose, metaheuristic optimization algorithms are used, more specifically genetic algorithms, evolutionary strategies and particle swarm optimization. The advantage of these algorithms, with respect to traditional methods such as Levenberg-Marquardt [1], is that metaheuristic algorithms are oriented to the global optimization of a problem, they are independent of gradients and they allow solving restricted problems. These characteristics are essential when characterizing hyperelastic materials that present nonlinearities and are conditioned to regions of stability.

Initially, the fundamentals of continuum mechanics are presented, such as deformation, stress, balance equations and entropy measurements. These bases make it possible to formulate and describe a hyperelastic behavior to subsequently present isotropic and anisotropic constitutive models, as well as stability criteria. Then the implementation of the metaheuristic algorithms is described together with their history and fundamental optimization concepts.

The implemented metaheuristic algorithms are evaluated to determine if they are capable of characterizing hyperelastic isotropic materials and their solving capability is compared. Once the aptitude of these algorithms is demonstrated, different ways to characterize a hyperelastic isotropic material are proposed and it is analyzed how the mechanical tests provide relevant information to the characterization process. Different adjustment scenarios of the constitutive parameters are analyzed considering multiple mechanical tests, stability restrictions, experimental data, constitutive models and number of parameters.

The characterization of hyperelastic anisotropic materials, focuses on the analysis of the constitutive models of Holzapfel [2] and Gasser [3], which are applied to model arteries. An important aspect of the analysis is that these models present a non-physical behavior, reported by Helfenstein et al. [4], and this is regularized with new stabilization criteria and metaheuristic algorithms. Finally, finite elements are used in conjunction with evolutionary strategies to characterize experimental data of arteries, ensuring that the parameters obtained are stable and representative.

This thesis is part of the research project entitled “Biomechanical Behaviour of Arteries from Chronic Hypoxic Animals: Experiments, Modelling, Numerical Simulation and Validation” (Reference: 1170608), funded by FONDECYT and under the direction of the professor Dr. Claudio García-Herrera.

Palabras claves: evolutionary algorithms, hyperelasticity characterization, anisotropic stability, inverse finite element fitting.

*Dedicado a mis padres,
Thusnelda Donoso y Héctor Canales,
y mi hermana, Evelyn.*

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Alcances y limitaciones	2
1.3. Objetivos	2
1.3.1. Objetivo general	2
1.3.2. Objetivos específicos	2
1.4. Contenido de la tesis	3
2. Mecánica del medio continuo y modelos constitutivos hiperelásticos	4
2.1. Introducción	4
2.2. Cinemática de Deformación Finita	5
2.3. Esfuerzo	7
2.4. Ecuaciones de Balance	8
2.5. Hiperelásticidad	10
2.6. Hiperelasticidad isótropa	12
2.6.1. Ecuaciones constitutivas en términos de los invariantes	12
2.6.2. Ecuaciones constitutivas en términos de los alargamientos principales	13
2.6.3. Modelos constitutivos isótropos	14
2.7. Hiperelasticidad anisótropa	16
2.7.1. Isotropía transversal	16
2.7.2. Ecuaciones constitutivas en términos de los invariantes	16
2.7.3. Anisotropía con dos familias de fibras	17
2.7.4. Modelo constitutivo anisótropo de Holzapfel-Gasser-Ogden	18
2.8. Tensor de elasticidad	19
2.9. Estabilidad	20
2.9.1. Estabilidad material y convexidad	20
2.9.2. Condición de elipticidad y policonvexidad para isotropía transversal	23
3. Algoritmos metaheurísticos	26
3.1. Introducción	26
3.2. Inicio de los algoritmos evolutivos	26
3.3. Definiciones y Conceptos básicos de Optimización	27
3.3.1. Función objetivo	27
3.3.2. Variables de decisión	28
3.3.3. Solución de un problema de optimización	28
3.3.4. Espacio Decisión	28
3.3.5. Restricciones	29
3.3.6. Óptimo Local y Global	30

3.4. Ventajas y desventajas de los algoritmos metaheurísticos implementados	32
3.5. Algoritmo genético (GA)	33
3.5.1. Creación de una población inicial	35
3.5.2. Selección de padres para una nueva generación	36
3.5.3. Reproducción	36
3.5.4. Mutación	38
3.6. Estrategias evolutivas (ES)	38
3.6.1. Estrategia evolutiva canónica	39
3.6.2. Recombinación Continua	41
3.6.3. Mutación adaptativa	41
3.7. Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)	42
3.7.1. Motivación	42
3.7.2. Proceso de optimización con enjambre de partículas	44
3.7.3. Ecuaciones de posición y velocidad	46
3.8. Comentarios finales	47
4. Caracterización de materiales hiperelásticos isótropos con algoritmos evolutivos 48	
4.1. Introducción	48
4.2. Modelo analítico isótropo para deformación homogénea incompresible	49
4.3. Evaluación de algoritmos metaheurísticos	50
4.3.1. Resultado y análisis de los algoritmos metaheurísticos	51
4.4. Sensibilidad de la función objetivo	55
4.4.1. Restricciones	56
4.4.2. Regiones valle en del espacio factible de solución	58
4.4.3. Multimodalidad	61
4.5. Caracterización simultánea de múltiples ensayos utilizando estrategias evolutivas	63
4.5.1. Caracterización de material de Demiray	65
4.5.1.1. Ensayos sin perturbaciones	65
4.5.1.2. Ensayos con perturbaciones	66
4.6. Estrategias para caracterizar materiales hiperelásticos isótropos incompresibles 68	
4.6.1. Ensayos mecánicos y configuraciones de deformación	69
4.6.2. Análisis de caracterización isótropa: ensayos mecánicos, número de parámetros y perturbaciones experimentales	78
4.7. Caracterización experimental de material usando estrategia evolutiva	82
5. Caracterización de material anisótropo con estrategias evolutivas 85	
5.1. Introducción	85
5.2. Modelo analítico anisótropo para deformación homogénea incompresible	85
5.3. Evaluación de estrategias evolutivas para caracterizar un material hiperelástico anisótropo	88
5.3.1. Sensibilidad de la función objetivo anisótropa	93
5.4. Alargamientos transversales del ensayo de tracción para cuantificar anisotropía 96	
5.5. Ajuste de datos experimentales y respuesta no física anisótropa	97
5.6. Consideraciones de estabilidad de isotropía transversal	101
5.6.1. Ecuaciones de estabilidad transversal para dos familias de fibras	101
5.6.2. Estabilidad transversal del modelo de Holzapfel	103
5.6.3. Estabilidad del modelo de Gasser	104

5.6.4. Función de penalización para estabilidad transversal	106
5.7. Ajuste de datos experimentales con criterio de estabilidad transversal	107
5.8. Caracterización inversa a través de elementos finitos y estrategias evolutivas . .	110
5.8.1. Diagramas de bloques	110
5.8.2. Ensayo de presurización y simulación numérica	112
5.8.3. Ajuste de datos experimentales	114
6. Conclusiones y perspectivas futuras	122
6.1. Conclusiones generales	122
6.2. Principales aportes	123
6.3. Lineas futuras de investigación	124

Índice de Tablas

3.1. Nomenclatura de GA	34
3.2. Algoritmo de Estrategia Evolutiva Auto Adaptativa	40
3.3. Algoritmo básico PSO	45
4.1. Generaciones y población para primera comparación de los algoritmos metaheurísticos	52
4.2. Evaluación de ES, PSO y GA, replicando las condiciones de la publicación de J.R. Fernández <i>et al.</i> [68]. MSE es el error cuadrático medio, TPR es el tiempo por realización, μ es el valor medio y IC 95 % es el intervalo de confianza.	53
4.3. Evaluación de ES y PSO para el ajuste del modelo de Mooney-Rivlin con una población de 114, 100 generaciones y 100 realizaciones.	55
4.4. Parámetros recuperados del modelo de Demiray con ruido	65
4.5. Parámetros recuperados del modelo de Demiray con ruido	67
4.6. NRMSD de ajuste de múltiples curvas sin dispersión.	80
4.7. Evaluación cualitativa y cuantitativa del ajuste de datos experimentales, sin dispersión.	80
4.8. NRMSD de ajuste de múltiples curvas con dispersión.	81
4.9. Evaluación cualitativa y cuantitativa del ajuste de datos experimentales, con dispersión.	81
4.10. Parámetros recuperados con el modelo de Yeoh para ensayo biaxial	84
5.1. Hiperparámetros de ES para encontrar una solución conocida	91
5.2. Resultados del ajuste de una solución conocida utilizando el modelo de Holzapfel-Gasser-Ogden	92
5.3. Parámetros de ES para caracterizar datos de García <i>et al.</i> con modelo de Holzapfel.	98
5.4. Parámetros de los ajustes obtenidos de los datos experimentales de García <i>et al.</i> [76] con estrategias evolutivas y modelo de Holzapfel	100
5.5. Parámetros de ES para caracterizar modelo de Gasser	107
5.6. Parámetros de los ajustes de los datos experimentales de García <i>et al.</i> [76] con estrategias evolutivas y modelo de Gasser	108
5.7. Parámetros de ES para caracterizar modelo de Gasser con elementos finitos	115
5.8. Parámetros del modelo de Gasser obtenidos para el grupo MN sin término estabilizador.	116
5.9. Errores cuadráticos estandarizados del grupo MN sin término estabilizador.	116
5.10. Parámetros del modelo de Gasser obtenidos para el grupo MN con término estabilizador.	117
5.11. Errores cuadráticos estandarizados del grupo CN sin término estabilizador.	117

5.12. Parámetros del modelo de Gasser obtenidos para el grupo CN con término estabilizador.	118
5.13. Errores cuadráticos estandarizados del grupo CN con término estabilizador.	118

Índice de Figuras

2.1. Cinemática medio continuo.	6
2.2. Tensiones.	8
3.1. Un ejemplo de espacio factible de decisión bi-dimensional.	30
3.2. Ejemplos de diferentes tipos de óptimos: (a) Problema de optimización no restringido sin óptimo global, (b) Problema de optimización restringido con óptimo global.	31
3.3. Diagrama de flujo GA.	35
3.4. Diferentes tips de recombinación: (a) recombinación de un punto, (b) recombinación de dos puntos y (c) recombinación uniforme.	37
3.5. Ejemplo de mutación en GA	38
3.6. Diagrama de flujo ES.	40
3.7. Representación 2D de algoritmo PSO.	46
4.1. Curva generada de ensayo uniaxial utilizando parámetros conocidos de modelo de Mooney-Rivlin $C_{10} = 10$ [MPa], $C_{01} = 20$ [MPa] y $C_{11} = 5$ [MPa].	51
4.2. Curva ajustada de ensayo uniaxial utilizando parámetros conocidos de modelo de Mooney-Rivlin	54
4.3. Función de densidad de energía $W(I_1, I_2)$, para los valores teóricos y los valores ajustados	55
4.4. Función objetivo Mooney-Rivlin 2 Parámetros con restricción.	57
4.5. Curva generada y ajustada para Mooney-Rivlin 2 Parámetros en espacio factible de solución.	58
4.6. Función de Rosenbrock.	59
4.7. Curvas generadas con modelo de Mooney-Rivlin y parámetros conocidos: a) caso ideal, b) caso dispersivo.	60
4.8. Función objetivo de las curvas generadas con el modelo de Mooney-Rivlin: a) caso ideal, b) caso dispersivo.	60
4.9. Curva generada con el modelo de Ogden.	61
4.10. Función objetivo con modelo de Ogden.	62
4.11. Ajuste de ensayo uniaxial con modelo de Demiray	66
4.12. Ajuste de ensayo de presurización con modelo de Demiray	66
4.13. Ajuste de ensayo uniaxial con modelo de Demiray con ruido	67
4.14. Ajuste de ensayo de presurización con modelo de Demiray con ruido	68
4.15. Dominio de ensayo de tracción y compresión para un material hiperelástico, isótropo e incompresible	70
4.16. Ensayo biaxial.	71
4.17. Ensayo biaxial en el espacio de los invariantes	72

4.18. Dominio de ensayo de presurización para diferentes λ_z	73
4.19. Ensayo de presurización	74
4.20. Ensayo de corte simple.	75
4.21. Ensayo de corte puro.	76
4.22. Caminos de deformación para los diferentes ensayos mecánicos	77
4.23. Probeta de látex montada en un equipo biaxial.	82
4.24. Ajuste de datos experimentales con modelo de Yeoh	83
 5.1. Representación gráfica de las probetas obtenidas en una arteria	89
5.2. Simetría longitudinal de la familia de fibras	90
5.3. Ajuste de una solución conocida de un material anisótropo con estrategias evolutivas	91
5.4. Solución exacta y la solución obtenida con ES elitista	93
5.5. Función objetivo anisótropa en términos de (κ, θ)	94
5.6. Función objetivo anisótropa en términos de (κ, θ) en región valle.	95
5.7. Representación de un material anisótropo siendo traccionado, ante un gradiente de deformación homogéneo.	97
5.8. Ajustes de los datos experimentales de tracción uniaxial publicados por García et al. [76] y los alargamientos transversales λ_3 correspondientes a cada uno de los grupos experimentales.	99
5.9. Ajustes de los datos experimentales de tracción uniaxial con el modelo de Gasser y los alargamientos transversales λ_3 correspondientes a cada uno de los ajustes.	109
5.10. Diagrama de bloque que describe de forma ilustrativa el problema de optimización.	111
5.11. Diagrama de bloque que describe de forma ilustrativa como se evalúa la función objetivo.	112
5.12. Ensamblaje experimental. (a) Aorta torácica sin estirar (b) Aorta torácica presurizada con un pre-estiramiento. Fuente: Rivera et al. [77].	113
5.13. (a) Representación 2D de las condiciones de contorno para la simulación del ensayo de presurización. (b) Malla estructurada de la simulación de elementos finitos con 2500 elementos cuadrilateros. Fuente: Propia	114
5.14. Ajustes del grupo MN sin término estabilizador. A la izquierda están los resultados del ajuste de solo presurización y a la derecha el ajuste considerando los ensayos de presurización y tracción uniaxiales	119
5.15. Ajustes del grupo CN sin término estabilizador. A la izquierda están los resultados del ajuste de solo presurización y a la derecha el ajuste considerando los ensayos de presurización y tracción uniaxiales	120
5.16. Ajustes del grupo CN con término estabilizador. A la izquierda están los resultados del ajuste de solo presurización y a la derecha el ajuste considerando los ensayos de presurización y tracción uniaxiales	121

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Para modelar numéricamente la respuesta mecánica de materiales hiperelásticos, diversos autores [5] han desarrollado, modelos constitutivos isótropos o anisótropos, con el fin de obtener la respuesta mecánica para diversas solicitudes. Dichos modelos constitutivos deben ser calibrados a través de ensayos como por ejemplo, tracción uniaxial, biaxial o presurización utilizando herramientas numéricas para el ajuste de los parámetros característicos del material. Cabe destacar que la respuesta numérica del material depende fuertemente de los parámetros ajustados. Por lo cual es necesario obtener parámetros que representen de manera fidedigna y estable el comportamiento del material. Por esto es necesario analizar detalladamente los alcances de los métodos de obtención de estos parámetros, que es la motivación principal de esta tesis. Este trabajo tiene como objetivo principal el uso de métodos de caracterización de materiales con base en métodos metaheurísticos de optimización, como los algoritmos genéticos o las estrategias evolutivas, para entender su funcionamiento, ventajas y limitaciones, con el fin de analizar de mejor manera estos métodos, usando datos experimentales recopilados de trabajos anteriores y realizados en esta tesis. Los métodos existentes de caracterización mecánica permiten encontrar un conjunto de parámetros que minimizan el error de un determinado ensayo. Estos corresponden a los métodos de mínimos cuadrados (lineales o no lineales). En este trabajo se propone desarrollar y implementar una técnica que corresponde a utilizar elementos finitos para determinar los parámetros característicos del material a través de métodos de optimización metaheurísticos. Para llevar a cabo el trabajo se implementan estrategias evolutivas y se proponen criterios de estabilización nuevos, que regularizan la respuesta física de un material anisótropo.

1.2. Alcances y limitaciones

Caracterizar materiales que presentan grandes deformaciones es un desafío, ya que su respuesta mecánica presenta una gran variedad de fenómenos (por ejemplo, hiperelásticidad, viscoelasticidad, daño, anisotropía, etc). Por lo tanto, es fundamental establecer limitaciones y alcances asociados al trabajo de investigación.

- Todo material caracterizado es idealizado como hiperelástico y está sujeto a un modelo constitutivo isótropo o anisótropo.
- Cualquier expresión analítica o numérica se realiza bajo el supuesto de hiperelasticidad, homogeneidad y continuidad del material.

Los algoritmos metaheurísticos implementados son tres: algoritmos genéticos, optimización por enjambre de partículas y las estrategias evolutivas.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Proponer y analizar diferentes algoritmos metaheurísticos para caracterizar materiales hiperelásticos, con el fin de evaluar los alcances y condiciones de estos.

1.3.2. Objetivos específicos

- Conocer algoritmos metaheurísticos para optimizar y ajustar parámetros de modelos constitutivos no lineales.
- Analizar modelos constitutivos adecuados a la respuesta mecánica de materiales hiperelásticos, aplicados a tejidos blandos (arterias) y elastómeros.
- Implementar y validar los distintos algoritmos metaheurísticos para resolver el problema de caracterización de los modelos.
- Analizar la unicidad y estabilidad de los parámetros ajustados.
- Caracterizar materiales usando datos experimentales de trabajos anteriores y realizados en esta tesis.
- Caracterizar tejido blando (arterias) a través optimización metaheurística y elementos finitos.

1.4. Contenido de la tesis

El contenido de esta tesis esta organizado en seis capítulos, donde se desarrollan los temas necesarios para cumplir con los objetivos propuestos. Los capítulos están estructurados para presentar inicialmente un marco teórico de mecánica del medio continuo y algoritmos de optimización metaheurísticos, seguido por la caracterización de material hiperelástico isótropo y posteriormente anisótropo. Por último, se presentan las conclusiones generales del trabajo.

En el **capítulo 2** se presentan conceptos fundamentales de la mecánica del medio continuo asociados a las medidas de deformación, esfuerzos y leyes de balance y entropía. Estas ecuaciones permiten formular un comportamiento hiperelástico y presentar modelos constitutivos isótropos y anisótropos. Finalmente, se presentan los criterios de estabilidad utilizados para formular los diferentes modelos constitutivos que, a su vez, establecen restricciones de los parámetros constitutivos del material.

En el **capítulo 3** se realiza una revisión general de conceptos fundamentales optimización para introducir los algoritmos de optimización metaheurísticos. Enseguida se relata la historia de los algoritmos evolutivos y como estos han cambiado en el tiempo. Se detalla particularmente el funcionamiento de los algoritmos genéticos, estrategias evolutivas y optimización por enjambre de partículas, explicando el paradigma de cada uno de los algoritmos.

En el **capítulo 4** se evalúan las ventajas y limitaciones, de diferentes algoritmos de optimización metaheurísticos aplicados a la caracterización de modelos hiperelásticos isótropos. La caracterización se realiza utilizando modelos analíticos de los ensayos mecánicos y como estos aportan información relevante del material. A su vez se estudia la complejidad de la función objetivo.

En el **capítulo 5** se plantea como es posible utilizar las estrategias evolutivas para caracterizar un material hiperelástico anisótropo, sus ventajas y limitaciones. Un punto importante de este capítulo es la estabilidad anisótropa del material y como cierto conjunto de parámetros puede provocar una respuesta no física del material. Por último, se propone una estrategia de estabilización y se caracterizan arterias utilizando elementos finitos y metaheurística, asegurando un conjunto de parámetros fidedignos y estables.

Por ultimo, en el **capítulo 6** se resumen las principales conclusiones y aportes realizados en este trabajo, como también las potenciales lineas futuras de investigación.

Capítulo 2

Mecánica del medio continuo y modelos constitutivos hiperelásticos

2.1. Introducción

Este capítulo resume conceptos de mecánica del medio continuo que son fundamentales para caracterizar materiales hiperelásticos. Con este fin, se detallan diferentes relaciones constitutivas, que son las que permiten relacionar el estado de tensiones en un material con sus deformaciones.

Inicialmente, se describe una base teórica para estudiar el comportamiento de materiales sólidos continuos y deformables. Para ello, se describen conceptos de cinemática, el concepto de esfuerzo y ecuaciones de balances en un marco no lineal para la mecánica de un medio continuo.

Posteriormente, se presentan algunos de los modelos más utilizados para caracterizar materiales isótropos y anisótropos. Estas relaciones constitutivas generalmente son utilizadas para caracterizar elastómeros, polímeros sintéticos o tejido blando como vasos sanguíneos, músculos, nervios u otros. En este trabajo se utilizan estos modelos para caracterizar materiales hiperelásticos.

Cada uno de los tópicos presentados en este capítulo, son utilizados de forma directa o indirecta en los capítulos 4 y 5, para caracterizar materiales hiperelásticos. Estos son la base para definir una métrica objetiva para minimizar la diferencia entre los datos experimentales y la respuesta del modelo matemático.

Finalmente, se recopila algunos de los criterios de estabilidad más relevantes. Actualmente, es un tema discutido activamente y no hay un consenso en la literatura. Además, estos criterios son utilizados en los capítulos posteriores para caracterizar y proponer un nuevo criterio de estabilidad anisótropo.

2.2. Cinemática de Deformación Finita

Un medio continuo \mathfrak{B} [6], situado en una región geométrica sin deformar en el tiempo $t = 0$, se encuentra en un sistema coordenado cartesiano rectangular con origen O y una base vectorial e_i ($i = 1, 2, 3$) (Ver figura 2.1). La configuración Ω_0 es el estado sin deformar o inicial, generalmente referida como configuración material. El vector de posición \mathbf{X} representa un punto P de una partícula del cuerpo en la configuración no deformada. Cuando la región Ω_0 se mueve a una nueva región Ω_t , ocupada por el cuerpo en un tiempo $t > 0$, entonces se le denomina configuración actual o deformada. El punto P' de la configuración deformada corresponde al mismo punto P de la configuración material y se define por el vector de posición \mathbf{x} . La cinemática del cuerpo puede ser descrita matemáticamente a través de una función de *mapping* entre la configuración de referencia y la configuración deformada. Esta función establece de manera biunívoca las relaciones cinemáticas entre ambas configuraciones. Matemáticamente, esta función se expresa como (véase Bonet et al. [6])

$$\varphi : \begin{cases} \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \\ \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \end{cases} . \quad (2.1)$$

A esta función de *mapping* se le exige que sea suave (con n derivadas continuas) y se debe asegurar la existencia de la función inversa $\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$. El vector de desplazamiento, que relaciona cuánto se desplaza un punto desde la configuración actual a la configuración inicial se define como

$$\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} . \quad (2.2)$$

Utilizando estas expresiones se define el tensor gradiente de deformación definido por

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{x} \varphi(\mathbf{X}, t) , \quad (2.3)$$

donde $\nabla \mathbf{x}$ representa el operador gradiente respecto a las coordenadas materiales. El determinante del gradiente de deformación establece una relación de volumen infinitesimal entre la configuración deformada e inicial, denotada por $J = \det \mathbf{F}$. Obsérvese que \mathbf{F} es siempre invertible, dada la existencia de la función inversa $\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$.

El teorema de descomposición polar (Véase Marsden et al. [7]) establece que para todo \mathbf{F} existen dos tensores, de forma única, \mathbf{R} y \mathbf{U} , tales que $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, siendo \mathbf{R} un tensor de rotación, esto quiere decir que, es ortogonal y se cumple que $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = 1$, mientras que el tensor \mathbf{U} se denota como el tensor de alargamiento derecho. De forma similar, se puede demostrar la existencia de la descomposición única $\mathbf{F} = \mathbf{v}\mathbf{R}$, siendo \mathbf{v} el tensor de alargamiento por la izquierda y \mathbf{R} el tensor de rotación correspondiente.

Para tener una medida de deformación del material independiente del sistema de referencia, es decir, medidas objetivas de la deformación, se definen los tensores de Cauchy-Green por la derecha y Cauchy-Green por la izquierda, definidos como $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$ y

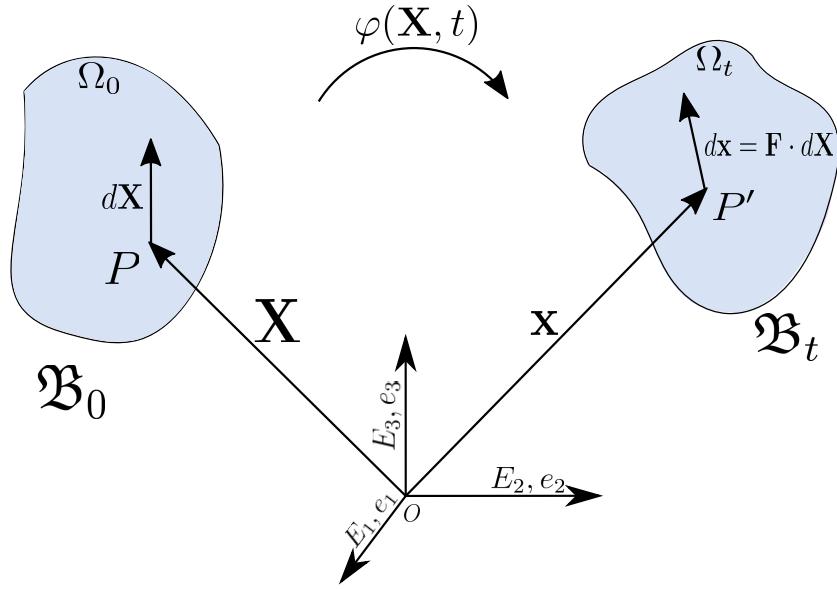


Figura 2.1. Cinemática medio continuo.

$\mathbf{b} = \mathbf{FF}^T = \mathbf{v}^2$, respectivamente. Obsérvese que tanto \mathbf{C} como \mathbf{b} son independientes de las rotaciones.

Otra medida de deformación es la dada por el tensor de deformación de Green, el cual mide las deformaciones respecto a la configuración material.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.4)$$

Asimismo, se puede definir el tensor de Almansi, que es una métrica de deformación respecto a la configuración deformada [6].

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (2.5)$$

Valores propios y autovectores del tensor de deformación

Cuando un ensayo mecánico es realizado, como por ejemplo: ensayo de corte, uniaxial, biaxial u otros, generalmente están basados en las direcciones principales y tienen que considerarse los valores propios. El tensor \mathbf{C} se puede escribir en función de sus valores propios λ_a^2 y los autovectores $\mathbf{N}_a (a = 1, 2, 3)$. Por lo tanto, se puede definir \mathbf{C} como (véase, como ejemplo, [Basar et al. \[8\]](#))

$$\mathbf{C} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a . \quad (2.6)$$

Debido a la simetría de \mathbf{C} , los autovectores son vectores unitarios ortogonales. Con la

ecuación 2.6, el tensor material de alargamientos \mathbf{U} es obtenido como

$$\mathbf{U} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a . \quad (2.7)$$

Similarmente, las direcciones principales de \mathbf{b} son definidas por los vectores ortogonales espaciales \mathbf{n}_a con los mismos valores propios λ_a de \mathbf{C}

$$\mathbf{b} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a; \quad \mathbf{v} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a . \quad (2.8)$$

De las ecuaciones 2.7 y 2.8, se puede obtener una relación entre las direcciones principales en la configuración deformada y la configuración material

$$\mathbf{n}_a = \mathbf{R} \mathbf{N}_a . \quad (2.9)$$

Por lo tanto, para $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ el gradiente de deformación puede ser escrito como

$$\mathbf{F} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{N}_a . \quad (2.10)$$

2.3. Esfuerzo

El esfuerzo en un cuerpo sólido es el resultado de fuerzas externas y indican la fuerza por unidad de superficie (véase la figura 2.2), denotadas por $df = tds$ en la configuración deformada, donde f indica la fuerza aplicada sobre una superficie de tamaño s que tiene un vector de esfuerzo t (véase, por ejemplo, Basar et al. [8])

El teorema de Cauchy asegura la existencia de un tensor único, llamado tensor de esfuerzo de Cauchy σ . El vector de esfuerzo t se puede relacionar con el tensor de Cauchy como $t = \sigma \cdot \mathbf{n}$, siendo \mathbf{n} el vector normal a la superficie que tiene asociado el esfuerzo t . Si se realiza las ecuaciones de momento al tensor de Cauchy, se obtiene que este es simétrico.

El tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} , es aquel que cumple con

$$\sigma \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} ds . \quad (2.11)$$

\mathbf{N} y S son, respectivamente, el vector normal y la superficie en la configuración material. Se puede escribir el tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} en términos del gradiente de deformación y el tensor de esfuerzo de Cauchy como¹

$$\mathbf{P} = J \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} . \quad (2.12)$$

¹La nomenclatura \mathbf{F}^{-T} , corresponde a la transpuesta de la inversa del gradiente de deformación.

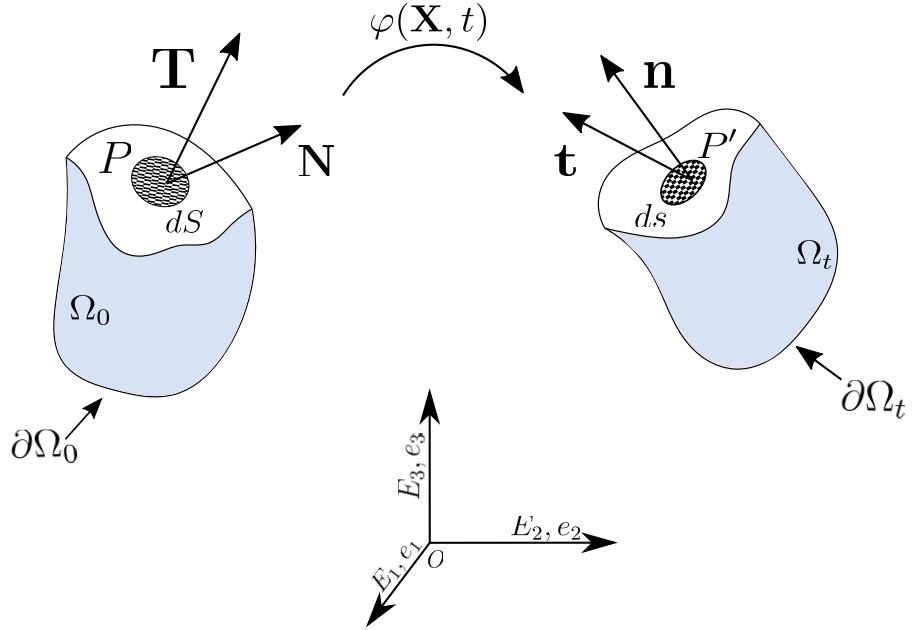


Figura 2.2. Tensiones.

También existe el tensor de Kirchhoff τ definido como $\tau = J\sigma$. Por último, el segundo tensor de Piola-Kirchhoff S , es una representación de los esfuerzos presentes en el material en la configuración material. Por lo tanto, se puede relacionar este tensor con el tensor de esfuerzo de Cauchy como

$$S = JF^{-1}\sigma F^{-T}. \quad (2.13)$$

2.4. Ecuaciones de Balance

En esta sección, se presentan brevemente las leyes de balance más relevantes que gobernan a un sistema cerrado. Las más importantes son la conservación de la masa, del momento lineal, del momento angular y las primeras dos leyes de la termodinámica. Para ver más detalle, revisar [Bonet et al. \[6\]](#).

Conservación de masa

En un sistema cerrado, es necesario que la cantidad de masa se mantenga inalterada durante la deformación de un cuerpo. Esto quiere decir que la masa m de un cuerpo en un sistema no cambia respecto al tiempo

$$dm = \rho_0(\mathbf{X})dV = dm(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)dv, \quad (2.14)$$

donde ρ y ρ_0 son las densidades del sólido en la configuración Ω_t y Ω_0 , respectivamente. Si se integra sobre el volumen del cuerpo, se obtiene la conocida ecuación de balance de

masa:

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) dV = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \text{const} > 0. \quad (2.15)$$

Conservación de momento lineal

La cantidad de momento lineal \mathbf{l} de un cuerpo es expresada en su forma espacial como

$$\mathbf{l} = \int_{\Omega_t} \rho \dot{\mathbf{x}} dv. \quad (2.16)$$

De acuerdo con las ecuaciones de momento, la tasa de cambio del momento total es igual a la fuerza resultante externa. Considerando la conservación de masa, en la configuración espacial, se obtiene que la variación del momento respecto al tiempo es igual a

$$D_t \left(\int_{\Omega_t} \rho \dot{\mathbf{x}} dv \right) = \int_{\Omega_t} \rho \ddot{\mathbf{x}} dv = \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{t} ds + \int_{\Omega_t} \mathbf{b}_f dv. \quad (2.17)$$

El término \mathbf{b}_f representa las fuerzas de cuerpo y \mathbf{t} es el vector esfuerzo en la superficie del material. Al aplicar el teorema de la divergencia a la expresión 2.17, se obtiene

$$\int_{\Omega_t} \rho (\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{b}_f - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dv = 0. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, al dejar la aceleración igual a cero se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}_f = 0. \quad (2.19)$$

Esta ecuación se puede escribir en la configuración material como

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \mathbf{S}) + \mathbf{b}_{f0} = 0. \quad (2.20)$$

Conservación de momento angular

El momento angular total \mathbf{l}_a , relativo a un punto fijo del sólido en la configuración deformada, se denota como

$$\mathbf{l}_a = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} dv. \quad (2.21)$$

Se denota a \mathbf{x}_0 como un punto fijo del sólido. El balance del momento angular es definido por la equidad de la derivada temporal material de \mathbf{l}_a , a el momento generador por el vector de esfuerzo y las fuerzas de cuerpo, denotado como

$$D_t(\mathbf{l}_a) = \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} ds + \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \mathbf{b}_f dv. \quad (2.22)$$

Se define $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ y se puede demostrar al desarrollar la expresión 2.22 (véase Belytschko et al. [9]) que

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (2.23)$$

Primera ley de la termodinámica

Considere Q como la potencia térmica o la tasa de transferencia de calor

$$Q = \int_{\Omega_0} R dV - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dS = \int_{\Omega_t} r dV - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.24)$$

donde R y r representan la fuente de calor por unidad de área en la configuración material o deformada, respectivamente. Las variables \mathbf{Q} y \mathbf{q} son los vectores de flujo de calor por unidad de área material y espacial, respectivamente. La primera ley de la termodinámica en la forma material es escrita como [6]

$$\int_{\Omega_0} (\rho_0 \mathbf{b}_{f0} \cdot \mathbf{V} + R) dV + \int_{\partial\Omega_0} (\mathbf{T} \mathbf{V} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}) dS = \int_{\Omega_0} \dot{e} dV + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{A}^2 dV \quad (2.25)$$

en donde $\mathbf{V} = D_t(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t))$ y $\mathbf{A} = D_t(\mathbf{V})$. La energía interna del sistema por unidad de volumen de referencia es $e(\mathbf{X}, t)$. El balance de energía local en la forma lagrangiana es

$$\dot{e} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \nabla \cdot \mathbf{Q} + R. \quad (2.26)$$

Segunda ley de la termodinámica

Sea v la entropía por unidad de volumen de referencia y \sum la producción total de entropía del cuerpo. La segunda ley de la termodinámica establece que la producción total de entropía nunca puede ser negativa, es decir

$$\sum \geq 0. \quad (2.27)$$

Cuando la ley es presentada en la descripción material, la inequidad de Clausius-Duhem establece que

$$\sum = \int_{\Omega_0} \dot{v} - \frac{R}{T} dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{Q}}{T} \cdot \mathbf{N} dS \geq 0. \quad (2.28)$$

Esta formulación incorpora el flujo de calor \mathbf{Q} y la fuente de calor R con la temperatura absoluta T . Por lo tanto, se define la densidad de energía libre de Helmholtz

$$W = e - vT. \quad (2.29)$$

Este término es utilizado en las siguientes secciones como la función de densidad de energía y permite relacionar las deformaciones con los esfuerzos.

2.5. Hiperelásticidad

Un material hiperelástico es aquel que es independiente del camino de deformación [6]. La hiperelasticidad postula la existencia de la energía libre de Helmholtz W definida por un

volumen en la configuración de referencia.

Si W depende del gradiente de deformación \mathbf{F} , entonces $W(\mathbf{F})$ es denominado como función de energía de deformación. Los materiales que no son homogéneos, son llamados heterogéneos y su función de densidad de energía depende del gradiente de deformación y la posición de un punto del medio $W(\mathbf{F}, \mathbf{X})$. El estado de tensiones de un material homogéneo hiperelástico puede ser derivado a partir de la función de densidad de energía

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (2.31)$$

El primer tensor de esfuerzo de Piola-Kirchoof \mathbf{P} y el tensor de esfuerzo de Cauchy, se pueden derivar de la función de densidad de energía acorde a las ecuaciones 2.30 y 2.31. Este tipo de ecuaciones son conocidas como modelos constitutivos. Por medio de métodos empíricos, un modelo aproxima el comportamiento real de un material a través de un modelo constitutivo. Un modelo constitutivo tiene que satisfacer diversas condiciones [10] :

1. Crecimiento: La función de densidad de energía tiene que crecer al infinito si es que J se aproxima a ∞ ó 0. La interpretación física es que el material requiere de una energía infinita para expandir el cuerpo a un tamaño infinito o comprimir el cuerpo hasta que desaparezca.
2. Normalización: La función de densidad de energía requiere que en una configuración libre de esfuerzo se cumpla que $W(\mathbf{I}) = 0$ y que para cualquier configuración espacial se cumpla que $W(\mathbf{F}) \geq 0$

Es de suma importancia que la función de densidad de energía también cumpla con continuidad, cuasi-convexidad y coercitividad [7].

Formas equivalentes de la función de densidad de energía

La función de densidad de energía tiene que ser independiente del observador o del marco referencial, es decir objetiva ([11] [12]). La objetividad plantea que tras una traslación o una rotación, la cantidad de energía almacenada tiene que mantenerse inalterada. Es decir,

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{F}), \quad (2.32)$$

donde \mathbf{Q} es un tensor ortogonal. Se puede utilizar la descomposición polar de \mathbf{F} y obtener

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{R}^T \mathbf{F}) = W(\mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{F}) = W(\mathbf{U}). \quad (2.33)$$

Por lo tanto, la función de densidad de energía se puede escribir de múltiples formas

equivalentes:

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{E}) . \quad (2.34)$$

Algunas transformaciones matemáticas importantes, que permiten expresar las tensiones en función de diferentes medidas de deformación, pueden obtenerse por medio de la regla de la cadena

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{F}} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T . \quad (2.35)$$

También pueden obtenerse expresiones similares para el segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} . \quad (2.36)$$

2.6. Hiperelasticidad isótropa

La isotropía de un material define que presenta el mismo comportamiento mecánico en todas las direcciones [8]. Si el material es isótropo, la función de densidad de energía tiene que cumplir que

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F} \mathbf{Q}^T) . \quad (2.37)$$

La isotropía también se puede escribir en términos de \mathbf{C} como

$$W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{Q}^T \mathbf{F} \mathbf{Q}^T) . \quad (2.38)$$

La ecuación 2.38 tiene que cumplirse para todo tensor \mathbf{C} y tensor de rotación \mathbf{Q} .

2.6.1. Ecuaciones constitutivas en términos de los invariantes

La función de densidad de energía puede ser expresada en términos de los invariantes isótropos del tensor de Cauchy Green por la derecha \mathbf{C} [13], tales que

$$W(\mathbf{C}) = W(I_1, I_2, I_3) . \quad (2.39)$$

Los invariantes de \mathbf{C} se definen como:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}); \quad I_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)]; \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) = J^2 . \quad (2.40)$$

Si es que se utilizan los alargamientos principales del gradiente de deformación \mathbf{F} , los

invariantes quedan definidos por [14]

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2; \quad I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \quad (2.41)$$

El segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff, se obtiene mediante la derivada de la función de densidad de energía respecto al tensor de deformación de Cauchy-Green por la derecha

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.42)$$

Las derivadas de los invariantes respecto al tensor de Cauchy-Green por la derecha son

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}; \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}; \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}. \quad (2.43)$$

Al remplazar las ecuaciones 2.43 en 2.42 se obtiene el segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff en términos de los invariantes de deformación

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (2.44)$$

El segundo tensor de Piola-Kirchhoff permite obtener los esfuerzos en la configuración material. Sin embargo, es fundamental conocer los esfuerzos del material en la configuración deformada a través del tensor de Cauchy. El tensor \mathbf{S} se puede llevar a la configuración deformada aplicando la ecuación 2.35

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T = 2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{b} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{b}^2 + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{I} \right]. \quad (2.45)$$

2.6.2. Ecuaciones constitutivas en términos de los alargamientos principales

Existen algunos modelos constitutivos que están expresados en términos de los alargamientos principales, es decir

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (2.46)$$

El segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff se obtiene al derivar la función de densidad de energía

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i. \quad (2.47)$$

Se utiliza \mathbf{N}_i para indicar la dirección principal de los alargamientos en la configuración de referencia. Se obtiene el tensor de Cauchy al aplicar la ecuación 2.35 al segundo tensor de

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i , \quad (2.48)$$

donde \mathbf{n}_i son las direcciones principales en la configuración deformada.

2.6.3. Modelos constitutivos isótropos

Para describir de forma precisa el comportamiento mecánico de materiales, diversos grupos han desarrollado modelos materiales y han realizado múltiples pruebas experimentales desde 1950 [15]. Muchos de estos modelos han sido desarrollados para modelar el comportamiento de gomas, polímeros sintéticos o tejido blando [13]. En este segmento se presentan algunos modelos constitutivos isótropos que son utilizados en los capítulos posteriores.

Material incompresible de Ogden

El modelo de Ogden [16], es un modelo hiperelástico isótropo en término de los alargamientos principales λ_1, λ_2 y λ_3 . Este modelo ha sido utilizado ampliamente para caracterizar gomas o tejidos blandos y está definido por

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) , \quad (2.49)$$

donde N es un número entero positivo que determina el número de términos de la función de densidad de energía, μ_i es una constante material relacionada al módulo cortante y α_i es una constante adimensional (determinada experimentalmente), para todo $i = 1, \dots, N$. Este modelo es consistente con la teoría de la elasticidad para pequeñas deformaciones. El parámetro μ sería el módulo cortante clásico y las constates materiales μ_i y α_i están relacionadas por la siguiente condición

$$2\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i; \quad \forall \mu_i \alpha_i > 0 . \quad (2.50)$$

Ogden utilizó los datos experimentales de Treolar [17] y propuso un modelo de seis parámetros ($N = 3$) que tiene buena concordancia con tensión simple, corte puro y tensión equiaxial. Este modelo es uno de los más usados para grandes deformaciones, a pesar de la dificultad de obtener los parámetros materiales [13].

Modelo de Mooney-Rivlin

Mooney [18] estudió los elastómeros y observó que tienen un comportamiento lineal cuando se les aplica una carga cortante simple. Él consideró W de la siguiente forma

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) , \quad (2.51)$$

donde C_1 y C_2 son parámetros materiales. Este modelo es usado ampliamente para partes de gomas que tienen una deformación moderada (menor a 200 %). Rivlin [19] [20] extendió el modelo de Mooney (ecuación 2.51) a través de una serie polinomial en términos de $(I_1 - 3)$ y $(I_2 - 3)$

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j , \quad (2.52)$$

donde C_{ij} son parámetros materiales y $C_{00} = 0$. La serie es usualmente truncada al segundo o tercer orden [21] [22]. Por ejemplo, al truncar el modelo de Mooney-Rivlin al tercer orden, es necesario determinar 9 parámetros materiales. Este modelo puede ser utilizado para deformaciones muy grandes.

Modelo de Yeoh

El modelo de Yeoh (también llamado como forma polinomial reducida) es un modelo isótropo para elastómeros o polímeros sintéticos [22]. La función de densidad de energía está dada por

$$W(I_1) = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (I_1 - 3)^i . \quad (2.53)$$

Se puede observar que este modelo es similar a la expansión polinómica del modelo de Mooney-Rivlin y que solo considera el primer invariante. Este modelo ha demostrado ajustar varios modos de deformación, utilizando solo información obtenida de un ensayo uniaxial, esto conlleva a la reducción de pruebas experimentales [13].

Modelo de Demiray

El modelo de Demiray [23] es un modelo incompresible e isótropo que expresa la función de densidad de energía en términos del primer invariante de deformación. Este modelo está diseñado para modelar tejido blando y utiliza solo el primer invariante

$$W = \frac{k_1}{k_2} (e^{k_2(I_1-3)} - 1) , \quad (2.54)$$

donde k_1 y k_2 son parámetros positivos, k_1 representa el módulo cortante y k_2 representa el grado de no linealidad del material.

2.7. Hiperelasticidad anisótropa

Múltiples materiales industriales o biológicos están compuestos por fibras, que en la mayoría de los casos son clasificados como anisótropos. Tejidos blandos como arterias, intestinos, tendones y ligamentos han demostrado un comportamiento altamente anisótropo [24] y materiales comunes como los neumáticos o correas transportadoras son anisótropos e hiperelásticos.

ticos. Por lo tanto, el estudio de la anisotropía es importante en diferentes ámbitos. La forma más simple de anisotropía es cuando un material presenta una familia de fibras orientadas hacia una dirección preferencial. Un material con estas características es denominado como transversalmente isótropo, por que presenta un comportamiento mecánico simétrico respecto al plano normal del eje de las fibras.

2.7.1. Isotropía transversal

Debido a que un material transversalmente isótropo tiene una dirección principal, la rigidez de este tipo de material compuesto es mayor en la dirección de las fibras. En este tipo de material el estado de tensiones depende del gradiente de deformación \mathbf{F} y de la dirección principal de las fibras. La dirección de las fibras en un punto $P \in \Omega_0$ en la posición \mathbf{X} es definido por el campo vectorial unitario $\mathbf{a}_0(\mathbf{X})$. La dirección de la familia de las fibras en la configuración deformada se denota como $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{a}_0(\mathbf{X})$. El cambio de la longitud de las fibras es caracterizado a través de λ_f en la dirección $\mathbf{a}_0(\mathbf{X})$, esta es calculada como [10]

$$\lambda_f^2 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}\mathbf{F}^T \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}\mathbf{a}_0 . \quad (2.55)$$

Debido a que la función de densidad de deformación depende de la dirección de la familia de fibras, esta depende del tensor de deformación de Cauchy-Green por la derecha \mathbf{C} y la dirección de las fibras \mathbf{a}_0 . Se utiliza el tensor $\mathbf{A}_0 = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$, ya que es independiente de la rotación respecto al eje de las fibras. Finalmente, la función de densidad de energía se puede expresar como

$$W = W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) = W(\mathbf{C}, \mathbf{A}_0) . \quad (2.56)$$

2.7.2. Ecuaciones constitutivas en términos de los invariantes

Al añadir la dependencia de la dirección de la familia de fibras a la función de densidad de energía, es necesario considerar dos invariantes adicionales, I_4 y I_5 . Con estos invariantes se describe la función de densidad de energía, para un material transversalmente isótropo, como

$$W = W(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C}, \mathbf{A}_0), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{A}_0)) , \quad (2.57)$$

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}\mathbf{a}_0 = \lambda_f^2 \quad y \quad I_5 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{a}_0 , \quad (2.58)$$

donde son llamados pseudo-invariantes. El invariante I_4 representa el alargamiento cuadrático de las fibras y el invariante I_5 no tiene interpretación inmediata

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}\mathbf{a}_0 = \lambda_f^2; \quad I_5 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{a}_0 . \quad (2.59)$$

El segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff es derivado de la función de densidad de energía como

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{i=1}^5 \frac{\partial W}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.60)$$

Las derivadas de I_1, I_2 y I_3 respecto a \mathbf{C} son evaluadas en la ecuación 2.43. Las derivadas restantes de I_4 y I_5 son calculadas de la ecuación 2.59 y dan

$$\frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad ; \quad \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0, \quad (2.61)$$

respectivamente. La sustitución de 2.61 en 2.60 lleva al segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff expresado como

$$\mathbf{S} = 2[(\psi_1 + I_1 \psi_2) \mathbf{I} - \psi_2 \mathbf{C} + I_3 \psi_3 \mathbf{C}^{-1} + \psi_4 \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + \psi_5 (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0)]. \quad (2.62)$$

donde $\psi_i = \frac{\partial W}{\partial I_i}$ para $i = 1, \dots, 5$. Al aplicar la transformación del segundo tensor de Piola-Kirchhoff al tensor de Cauchy se obtiene [25]

$$\boldsymbol{\sigma} = 2[(\psi_1 + I_1 \psi_2) \mathbf{b} - \psi_2 \mathbf{b}^2 + I_3 \psi_3 \mathbf{I} + \psi_4 \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \psi_5 (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})]. \quad (2.63)$$

2.7.3. Anisotropía con dos familias de fibras

En esta sección se presentan las ecuaciones constitutivas para un material con dos familias de fibras. Un ejemplo de este tipo de material son las arterias que contienen una matriz de elastina, reforzada con dos familias fibras de colágeno orientadas a direcciones preferenciales. Las familias de fibras en la configuración referencial y la deformada son denotadas por el campo vectorial unitario $\mathbf{a}_0, \mathbf{g}_0$ y \mathbf{a}, \mathbf{g} , respectivamente [26]. Los tensores estructurales son definidos como

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0; \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{g}_0 \otimes \mathbf{g}_0. \quad (2.64)$$

Por lo tanto, la función de densidad de energía es expresada como

$$W = W(\mathbf{C}, \mathbf{A}_0, \mathbf{G}_0). \quad (2.65)$$

Como es presentado por Holzapfel [26], la función de densidad de energía puede ser expresada en término de los invariantes I_i para $i = 1, \dots, 9$. Los pseudo-invariantes I_4, \dots, I_8 están asociados a la anisotropía generada por las dos familias de fibras. Cada uno de los

invariantes anisótropos están definidos por

$$I_4(\mathbf{C}, \mathbf{A}_0) = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_0 = \lambda_{fa}^2; \quad I_6(\mathbf{C}, \mathbf{G}_0) = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{g}_0 = \lambda_{fg}^2, \quad (2.66)$$

$$I_5(\mathbf{C}, \mathbf{A}_0) = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{a}_0; \quad I_7(\mathbf{C}, \mathbf{G}_0) = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{g}_0 \quad y \quad (2.67)$$

$$I_8(\mathbf{C}, \mathbf{A}_0, \mathbf{G}) = (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{g}_0) \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{g}_0; \quad I_9(\mathbf{A}_0, \mathbf{G}) = (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{g}_0)^2. \quad (2.68)$$

El invariante I_4 es el alargamiento cuadrático de la primera familia de fibra y el invariante I_6 representa lo mismo que el invariante I_4 , pero para la segunda familia de fibras. De manera análoga, el invariante I_5 es equivalente al invariante I_7 , pero de familia de fibras distintas. El único invariante que relaciona las familias de fibras con la deformación, es el invariante I_8 que representa el ángulo entre las familias fibras en la configuración espacial. El invariante I_9 es independiente de la deformación y por tanto, no es considerado.

2.7.4. Modelo constitutivo anisótropo de Holzapfel-Gasser-Ogden

El modelo constitutivo de Holzapfel-Gasser-Ogden [3] está especialmente diseñado para modelar el comportamiento mecánico de las arterias. Estas están compuestas de material biológico y son gruesas respecto a su radio [2]. Cada una de estas capas es modelada como un material compuesto reforzado con dos familias de fibras de colágeno, que están dispuestas de forma simétrica y envuelven la arteria describiendo una espiral. Holzapfel supone que cada una de las capas de las arterias presenta un comportamiento similar, pero tienen un conjunto de parámetros constitutivos distintos. Un material anisótropo depende de múltiples invariantes (Véase sección 2.7.3), pero cada invariante establece una ecuación constitutiva independiente. Holzapfel [2] plantea que los invariantes I_1, I_4, I_6 , son suficientes para captar el comportamiento mecánico de las arterias. Se propone una descomposición aditiva de la función de densidad de energía con una parte isótropa y otra anisótropa

$$W = W_{iso}(\mathbf{C}) + W_{aniso}(\mathbf{C}, \mathbf{A}_0, \mathbf{G}_0). \quad (2.69)$$

Para modelar la matriz isótropa de elastina se utiliza el modelo Neo-Hookeano [6]

$$W_{iso}(I_1) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3). \quad (2.70)$$

En un trabajo realizado en el año 2000, Holzapfel et al. [2] modelan la función de densidad de energía anisótropa como

$$W_{aniso}(I_4, I_6) = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} (\exp(k_2(I_i - 1)^2) - 1], \quad (2.71)$$

donde k_1 es una constante que representa el modulo cortante y k_2 el grado de no linealidad del modelo. Finalmente, la función de densidad de energía del modelo de Holzapfel del 2000 [25] es la siguiente

$$W(I_1, I_4, I_6) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} (\exp(k_2(I_i - 1)^2) - 1]. \quad (2.72)$$

El año 2006 Gasser et al. [3] proponen un nuevo modelo constitutivo que considera la distribución espacial de las fibras de colágeno con el parámetro κ . En este modelo, la energía anisótropa depende de los tres invariantes de deformación ; es decir $W_{aniso}(I_1, I_4, I_6)$ y está definido por

$$W(I_1, I_4, I_6) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} (\exp(k_2(I_1\kappa + (1 - 3\kappa)I_i - 1)^2) - 1]. \quad (2.73)$$

La particularidad de este modelo es que el parámetro κ modula la isotropía de las fibras. Si $\kappa = 0$ las fibras se encuentran totalmente alineadas a una dirección y si $\kappa = 1/3$ no existe una dirección preferencial y presentan un comportamiento isótropo. Es posible observar que κ esta acotado por $0 \leq \kappa \leq 1/3$.

2.8. Tensor de elasticidad

El tratamiento numérico de las no-linealidades de los materiales hiperelásticos requiere la utilización de métodos de Newton para solucionar y linealizar un problema. Por lo tanto, las ecuaciones constitutivas tienen que ser linealizadas en las configuraciones materiales y espaciales, resultando en un tensor de elasticidad de cuarto orden. Al considerar el segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} en un instante t como dependiente del tensor de Cauchy-Green por la derecha \mathbf{C} , el diferencial total $d\mathbf{S}$ es

$$d\mathbf{S} = \mathbb{C} : \frac{1}{2} d\mathbf{C}, \quad (2.74)$$

donde \mathbb{C} es definido como

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.75)$$

El valor de \mathbb{C} puede ser expresado en función del tensor de deformación de Green-Lagrange \mathbf{E} como

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.76)$$

El tensor de cuarto orden \mathbb{C} es el tensor de elasticidad en la descripción material representando el gradiente del segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff. Este tensor de cuarto

orden relaciona el cambio de esfuerzo respecto al cambio de deformación y el trabajo conjugado del esfuerzo y deformación. Debido a la simetría de \mathbf{S} y \mathbf{C} , el tensor de elasticidad es simétrico respecto a sus primeros dos índices y también respecto al tercer y cuarto índice. Esta simetría es llamada "simetría menor", resultando en 36 componentes independientes en vez de 81 componentes. Otras formas de expresar el tensor de elasticidad es con la función de densidad de energía

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 W(\mathbf{C})}{\partial^2 \mathbf{C}} . \quad (2.77)$$

De la ecuación 2.77 es posible observar que existe una simetría mayor debido a la existencia de la función de densidad de energía. Esto conlleva a que el tensor de elasticidad tenga 21 componentes independientes y se cumpla que

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^T; \quad \mathbb{C}_{IJKL} = \mathbb{C}_{KLIJ} . \quad (2.78)$$

Se puede llevar el tensor de elasticidad a la descripción espacial al utilizar la siguiente operación [6]

$$c = J^{-1} \chi(\mathbb{C}); \quad c_{ijkl} = J^{-1} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} \mathbb{C}_{IJKL} . \quad (2.79)$$

Además la función de densidad de energía tiene que ser convexa para ser estable. La convexidad asegura que el tensor de cuarto orden será definido positivo.

2.9. Estabilidad

2.9.1. Estabilidad material y convexidad

Un material con estabilidad material es aquel que, ante cualquier variación pequeña del estado cinemático respecto de la posición de equilibrio, produce una modificación de la posición de equilibrio a su vez pequeña [27]. Cuando las fuerzas originadas en un material provienen de un potencial, la condición analítica de estabilidad está dada por el teorema de Lejeune-Dirichlet [28]. Este teorema plantea que si el potencial es mínimo en la posición de equilibrio, entonces el material es estable.

En este segmento se entenderá por estabilidad material aquella originada por cargas muertas y estacionarias. Además, por simplicidad se estudia la estabilidad en tensión plana.

La convexidad es una propiedad fundamental de los modelos hiperelásticos. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de n variables es convexa si se cumple

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2) \quad (2.80)$$

para toda pareja de vectores n-dimensionales $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ y para todo $\alpha \in [0, 1]$. Si la desigual-

dad es estricta, entonces se habla de convexidad estricta. Este concepto se puede extender a tensores.

Estabilidad sin cambio en los ejes principales de deformación

Se presenta el caso en el que las cargas muertas coinciden con las direcciones principales [29] de un material compresible. La energía potencial para este caso es

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - \sum_{i=1}^3 t_i \lambda_i . \quad (2.81)$$

Los alargamientos principales $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ y las tensiones muertas t_i definen la energía potencial. Al utilizar la ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene la condición de equilibrio

$$t_a = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}; \quad i = 1, 2, 3 . \quad (2.82)$$

El teorema de Lejeune-Dirichlet establece que la energía potencial E debe ser mínima y debe verificarse que la matriz hessiana $[E_{ab}] = [W_{ab}]$ sea definida positiva

$$E_{ab} = \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}; \quad W_{ab} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} . \quad (2.83)$$

Por lo tanto, para verificar que la función de densidad de energía tiene un mínimo, se tiene que cumplir que

$$\delta^2 W = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \delta \lambda_i \delta \lambda_j > 0 \quad (2.84)$$

para todo $\delta \lambda_i (i = 1, 2, 3)$.

Por ende, para tensión plana ($\sigma_3 = 0$) y expresando la función de densidad de energía como $W(\lambda_1, \lambda_2)$, entonces la estabilidad se cumple si el hessiano $[W_{ab}]$ es definido positivo.

Estabilidad bajo cargas muertas: caso general

Si se permite la variación de los ejes de las cargas muertas impuestas, entonces la energía potencial se puede definir en función del primer tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} , que tiene un valor constante. La energía potencial se define como

$$E(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}) - \mathbf{P} : \mathbf{F} . \quad (2.85)$$

La condición de estabilidad de mínima energía potencial se cumple si

$$\delta \mathbf{F} : (\mathbb{A} : \delta \mathbf{F}) > 0 . \quad (2.86)$$

para todo $\delta \mathbf{F} \neq 0$, donde el tensor de cuarto orden \mathbb{A} es el tensor de elasticidad definido

como

$$\mathbb{A} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F}^2} . \quad (2.87)$$

Conceptos relacionados con estabilidad y convexidad

En esta sección se presentan algunos conceptos utilizados en la estabilidad y convexidad de materiales. Se utiliza la notación utilizada por [7],[27] y [30].

Elípticidad. La estabilidad material tiene una relación estrecha con la elípticidad fuerte. Un tensor \mathbb{A} se dice que presenta elípticidad fuerte para una deformación \mathbf{F}_0 si se verifica

$$\mathbf{H} : (\mathbb{A} : \mathbf{H}) > 0 \quad (2.88)$$

para todo $\mathbf{H} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ siendo \mathbf{a} y \mathbf{b} vectores unitarios. La condición de elípticidad fuerte es necesaria para que un material elástico admita ondas planas en toda dirección (condición de Legendre-Haramard). No obstante, aquella condición no implica estabilidad material.

Cuasi-convexidad. La función de densidad de energía W es cuasi-convexa si para todo contorno Ω , toda matriz constante \mathbf{F} tal que $\det(\mathbf{F} > 0)$ y toda aplicación $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de C^∞ con $\psi(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$, se verifica que

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{F} + \bigtriangledown \psi(\mathbf{X})) dV \geq W(\mathbf{F}) \times \text{Volumen}(\Omega) . \quad (2.89)$$

Esto quiere decir que, para una deformación homogénea \mathbf{F} , la energía interna es mínima dentro de todas las deformaciones posibles con las mismas condiciones de contorno.

Estabilidad uniforme. Dado un espacio vectorial normado V , se llama norma de un tensor al determinado por la definición recurrente

$$|\alpha| = \sup |\alpha(\mathbf{x})|; \quad \mathbf{x} \in V; \quad |\mathbf{x}| = 1 , \quad (2.90)$$

donde α representa un tensor y \sup el valor supremo. Se dice que un tensor de elasticidad \mathbb{A} es uniformemente estable si existe un número real $\eta > 0$ de forma que

$$\mathbf{H} : (\mathbb{A} : \mathbf{H}) > \eta |\mathbf{H}|^2 \quad (2.91)$$

para todo tensor \mathbf{H} de segundo orden.

Policonvexidad. Se dice que W es estrictamente policonvexo si existe una función estrictamente convexa $g : M_+^{3 \times 3} \times M^{3 \times 3} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $W(\mathbf{F}) = g(\mathbf{F}, \text{adj}(\mathbf{F}), \det(\mathbf{F}))$,

para todo $\mathbf{F} \in M_+^{3 \times 3}$. Esto quiere decir

$$g(\alpha\mathbf{F}_1 + (1-\alpha)\mathbf{F}_2, \alpha adj(\mathbf{F}_1) + (1-\alpha)adj(\mathbf{F}_2), \alpha det\mathbf{F}_1 + (1-\alpha)det\mathbf{F}_2) \leq \alpha g(\mathbf{F}_1) + (1-\alpha)g(\mathbf{F}_2), \quad (2.92)$$

donde adj representa la adjunta de la matriz. Esta ecuación se tiene que cumplir para todo $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \in M_+^{3 \times 3}$ y todo $\alpha \in [0, 1]$. Si la desigualdad anterior es estricta, entonces la convexidad es estricta.

2.9.2. Condición de elipticidad y policonvexidad para isotropía transversal

La condición de elipticidad fuerte es una condición matemática que restringe las funciones constitutivas. Para problemas tridimensionales [31], la elipticidad fuerte fue caracterizada para materiales isótropos en [32] y para materiales incompresibles en [33]. En este contexto, la elipticidad fuerte ha sido estudiada para materiales transversalmente isótropos, para deformaciones en el plano en [29] [34]. Para verificar la elipticidad de la función de densidad de energía en ausencia de fuerzas de cuerpo [5] [35], es necesario cumplir la siguiente inecuación

$$\frac{1}{J} F_{pr} F_{qs} \frac{\partial W}{\partial F_{ir} F_{js}} n'_p n'_q l'_i l'_j > 0; \quad \mathbf{n}' \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{l}' \neq \mathbf{0}, \quad (2.93)$$

donde \mathbf{n}' y \mathbf{l}' son dos vectores distintos a cero. A simple vista se puede observar que es difícil verificar la inecuación. Por lo tanto, algunos autores han propuesto otra forma de abordar la condición de elipticidad fuerte. Una propiedad importante es que la policonvexidad implica elipticidad [36] [37]. Como consecuencia, la policonvexidad es utilizada para demostrar elipticidad, aunque sea más restrictiva que la elipticidad fuerte. Algunos modelos constitutivos son elípticos pero no policonvexos. Es importante hacer notar que la policonvexidad no entra en conflicto con la existencia de una única solución para el equilibrio, ya que garantiza por lo menos una deformación minimizadora. Por lo tanto, la policonvexidad es un excelente punto de partida para formular una función de densidad de energía que cumple con elipticidad y la existencia de un óptimo global.

La policonvexidad ha sido estudiada en el marco de la isotropía [38] y las condiciones que permiten verificarla son ampliamente conocidas para los distintos modelos isótropos disponibles en la literatura (Véase [13] [18] [39]). Múltiples autores han extendido el estudio de la policonvexidad a materiales anisótropos (véase [31] [40] [41]). Algunos han estudiado la policonvexidad de modelos constitutivos existentes ([26] [42] [43]), mientras que otros han intentado desarrollar modelos constitutivos policonvexos.

Restricciones existentes

Walton y Wilber [44] obtuvieron algunas condiciones que aseguran policonvexidad. Ellos desarrollaron un criterio que puede ser utilizado para cualquier función de densidad de energía

que dependa de I_1, I_2 y I_4 , es decir $W(I_1, I_2, I_4^{(i)})$. Las restricciones son las siguientes ²:

$$W_{,k} > 0; \quad k = 1, 2, 4 \quad (2.94)$$

$$[W_{,kl}] \quad \text{es definido positivo} \quad (2.95)$$

La inecuación 2.94 también es válida para más de una familia de fibras. Si es que la función de densidad de energía depende de $I_8^{(i,j)}$, la siguiente condición tiene que ser considerada

$$\frac{\partial W}{\partial I_8^{(i,j)}} \leq \frac{\partial W}{\partial I_1}. \quad (2.96)$$

Si es que se utiliza el invariante $I_5^{(i)}$ es necesario cambiar los otros invariantes, ya que I_5 no es una función policonvexa al ser utilizada sola. Walton y Wilber [44] utilizan I_k^* :

$$I_1^* = \frac{1}{2}I_1; \quad I_2^* = \frac{1}{2}I_1^2 - I_2 \quad I_4^{(i)*} = I_4^{(i)}; \quad I_5^{(i)*} = I_5^{(i)}. \quad (2.97)$$

Los invariantes I_k^* tienen que satisfacer que:

$$\begin{cases} W_{,k} > 0; \quad k = 1, 2, 4, 5 \\ W_{,1} + \kappa W_{,4} \geq 0; \quad \kappa > 4 \\ [W_{,kl}] \quad \text{es definido positivo} \end{cases} \quad (2.98)$$

Múltiples funciones de densidad de energía son expresadas como $W = W_{iso}(I_1) + W_{aniso}(I_4)$. Para este caso, existen algunas condiciones suficientes, pero no necesarias para asegurar policonvexidad [43]

$$\frac{\partial W_{aniso}}{\partial I_4} + 2I_4 \frac{\partial^2 W_{aniso}}{\partial I_4^2} \geq 0, \quad (2.99)$$

Estas dos condiciones significan que las direcciones principales de anisotropía no pueden generar esfuerzo de compresión.

Los criterios de estabilidad son fundamentales para determinar parámetros que sean estables o por lo menos se asegure la policonvexidad del modelo. Por ejemplo, los parámetros del modelo de Holzapfel [2] y del modelo de Gasser [3], tienen que cumplir con

$$\mu > 0; \quad k_1 \geq 0; \quad k_2 \geq 0; \quad 0 \leq \kappa \leq 1/3. \quad (2.100)$$

Las restricciones 2.100 son condiciones suficientes para que los modelos sean policonvexos, pero no son condiciones necesarias. **Estas inecuaciones aseguran elipticidad fuerte y la existencia de una deformación minimizadora.** Este punto es fundamental para determinar la estabilidad material de los modelos de Holzapfel y de Gasser, estableciendo un dominio

²Se utiliza una coma para denotar las derivadas parciales en función de los invariantes.

de estabilidad material.

Cabe mencionar que los criterios de estabilidad aun están en discusión y se resumen los principales trabajos. También, se utilizan algunas de estas expresiones para definir un nuevo criterio de estabilidad anisótropo en el capítulo 5.

Para caracterizar un material, es necesario resolver un problema de optimización en el que se maximice la coincidencia experimental, con el modelo matemático de este. Como se ha descrito en esta sección, los parámetros de los modelos constitutivos están restringidos a un dominio de estabilidad. En el capítulo 3, se introducen los algoritmos metaheurísticos que son la herramienta que permiten resolver este problema de optimización, considerando las múltiples restricciones de estabilidad.

Capítulo 3

Algoritmos metaheurísticos

3.1. Introducción

Para caracterizar un material es necesario resolver un problema de optimización, en el que se minimice la diferencia entre la respuesta del modelo matemático y los datos experimentales del material. Como se ha visto en el capítulo 2, los modelos constitutivos de los materiales isótropos y anisótropos presentan múltiples parámetros, restricciones activas de estabilidad y una respuesta no lineal. Por lo tanto, es necesario buscar una forma adecuada para lidar con la complejidad del problema de optimización.

Los algoritmos metaheurísticos han demostrado ser capaces de resolver problemas de optimización complejos en diferentes ámbitos de la ciencia e ingeniería [45] [46] y son las herramientas que se utilizan en los capítulos 4 y 5, para caracterizar materiales isótropos y anisótropos, respectivamente.

Con el fin de contextualizar la nomenclatura utilizada e introducir a los algoritmos metaheurísticos, en este capítulo se realiza una revisión general acerca de conceptos fundamentales de optimización. Se presenta como es que los algoritmos evolutivos fueron creados y como han cambiado con el paso del tiempo. Se detalla particularmente el funcionamiento de los algoritmos genéticos, las estrategias evolutivas y la optimización por enjambre de partículas. Cada uno de estos métodos es explicado en detalle y se presenta el paradigma que motiva a cada uno de ellos.

3.2. Inicio de los algoritmos evolutivos

De acuerdo con Charles Darwin [47], la evolución de los seres vivientes depende de:

- La variación de características individuales entre padres e hijos.
- La heredabilidad de esas características.

- La competencia, que selecciona a los individuos más aptos de una población en relación a su ambiente, para así poder sobrevivir y reproducirse.

De estos puntos, Darwin dedujo que la competencia permite la transmisión de las características beneficiosas entre los individuos de una población, generación tras generación.

En la década de 1950, el desarrollo incipiente de la computación facilitó la simulación de esta teoría. Algunos investigadores querían probarla para resolver problemas de ingeniería. Pero estos trabajos no eran convincentes debido a la poca capacidad de cálculo disponible.

Durante 1960 y 1970, la capacidad de cómputo se incrementó de forma importante. Múltiples intentos de modelar el proceso evolutivo fueron realizados. Entre estos, cuatro paradigmas emergieron y progresaron independientemente hasta el principio de 1990:

- Las estrategias evolutivas (ES) de H. P. Schwefel y Rechenberg [48], que son derivadas de un procedimiento experimental para resolver problemas de mecánica de fluidos.
- La programación evolutiva (EP) de L. J. Fogel *et al.* [49]. En el año 1960 en Estados Unidos, se utilizó EP para simular la evolución como un proceso de aprendizaje para generar inteligencia artificial. Este método utiliza una estructura de programa fija, que es optimizada.
- Los Algoritmos Genéticos (GA) fueron presentados en 1975 por J.H. Holland [50]. El objetivo era entender los mecanismos de sistemas capaces de autoadaptarse a su entorno.
- Programación Genética (GP) fue introducida por Koza en 1990 [51]. En este tipo de algoritmo evolutivo, lo que se optimiza es la estructura de un programa y no sus componentes.

Estos métodos presentaron múltiples cambios, basados en las necesidades de sus fundadores o de investigadores en diferentes disciplinas científicas. Estos métodos se divulgaron en 1993 con la creación de una revista científica (Evolutionary Computation) publicada por el MIT. En esta se publicaron diversos métodos inspirados en el proceso de evolución biológica y también otros tipos de analogías, como es el caso del método de optimización por enjambre de partículas.

3.3. Definiciones y Conceptos básicos de Optimización

3.3.1. Función objetivo

La función objetivo es el nexo entre el problema físico y el método de optimización y representa lo que se quiere optimizar. El objetivo puede ser maximizado o minimizado al escoger variables que cumplan con todas las restricciones del problema. La calidad de un set de variables como posibles soluciones de un problema de optimización, es medido con el valor de la función objetivo para ese set de parámetros.

3.3.2. Variables de decisión

Las variables de decisión determinan el valor de la función objetivo. En cada problema de optimización se buscan las mejores variables de decisión que maximicen/minimicen el valor de la función objetivo. En algunos problemas de optimización las variables de decisión se encuentran restringidas por un límite superior y un límite inferior. Este tipo de variables de decisión forman un espacio continuo de decisión. Por ejemplo, escoger una proporción adecuada de químicos para fabricar un medicamento involucra variables de decisión en un espacio continuo, en el cual las proporciones pueden tomar cualquier valor entre $[0,1]$. Por otro lado, hay problemas de optimización en los que las variables de decisión son discretas. Las variables de decisión discretas son las que tienen valores específicos entre un límite superior y un límite inferior. Los números enteros son un ejemplo de variables discretas. Por ejemplo, la cantidad de vacunas que se pueden producir en un intervalo de tiempo está determinado por un valor entero. Los números binarios también son de tipo de variable de decisión discreta. El caso típico es cuando se selecciona 1 para realizar una acción y 0 para no realizarla. Los problemas de optimización con variables de decisión continuas son llamados problemas continuos y aquellos definidos por variables de decisión discretas son llamados problemas discretos. También existen problemas de optimización que involucran variables de decisión discretas y continuas, estos se llaman problemas mixtos. Esta tesis se centra en problemas de optimización continuos.

3.3.3. Solución de un problema de optimización

Cada función objetivo está expresada en términos de las variables de decisión. Cuando solo hay una variable de decisión, el problema de optimización es denominado como unidimensional, mientras que los problemas de optimización que tienen dos o más variables de decisión, son denominados como N -dimensionales. Un problema de optimización N -dimensional tiene soluciones expresadas en términos de uno o más de un set de soluciones, en los que la solución tiene N variables de decisión.

3.3.4. Espacio Decisión

El set de variables de decisión que satisfacen las restricciones del problema de optimización es denominado como espacio factible de decisión. En un problema N -dimensional cada posible solución es un vector de N variables. Cada elemento de este es una variable de decisión. Los algoritmos de optimización buscan, uno o varios puntos en el espacio de decisión, que optimizan la función objetivo. Por ejemplo, se puede definir un conjunto A que contiene los elementos pertenecientes al espacio de decisión de un problema no restringido, definido por las variables de decisión N -dimensional x

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n\} . \quad (3.1)$$

3.3.5. Restricciones

Un problema de optimización puede tener dos tipos de restricciones. Aquellas que limitan de forma directa el posible valor de la variable de decisión como, por ejemplo, que una variable de decisión sea de valor real y positiva, es decir $x > 0$, y aquellas que restringen el problema de optimización de manera implícita como $x_1 + x_2 < c$. La finalidad del problema de optimización es encontrar una solución óptima en el espacio factible. En la figura 3.1, se puede observar un problema restringido en un espacio de decisión bi-dimensional. El espacio de todas las soluciones factibles constituyen el espacio factible de decisión. Evidentemente, la solución óptima tiene que estar en el espacio factible. Otra forma de clasificar los tipos de restricciones es considerando restricciones de igualdad o restricciones de inequidad. Se puede definir un vector \mathbf{h} que representa p restricciones de igualdad

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1..p . \quad (3.2)$$

De forma similar, se define un vector \mathbf{g} de restricción de inequidad

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1..m . \quad (3.3)$$

La caracterización de un material no-lineal, podría estar sujeto a un espacio de decisión complejo y sujeto a múltiples restricciones. Generalmente, las constantes de un material hiperelástico presentan múltiples restricciones de estabilidad, ya sea, para asegurar convexidad, coherencia mecánica o termodinámica o unicidad del conjunto de parámetros obtenidos.

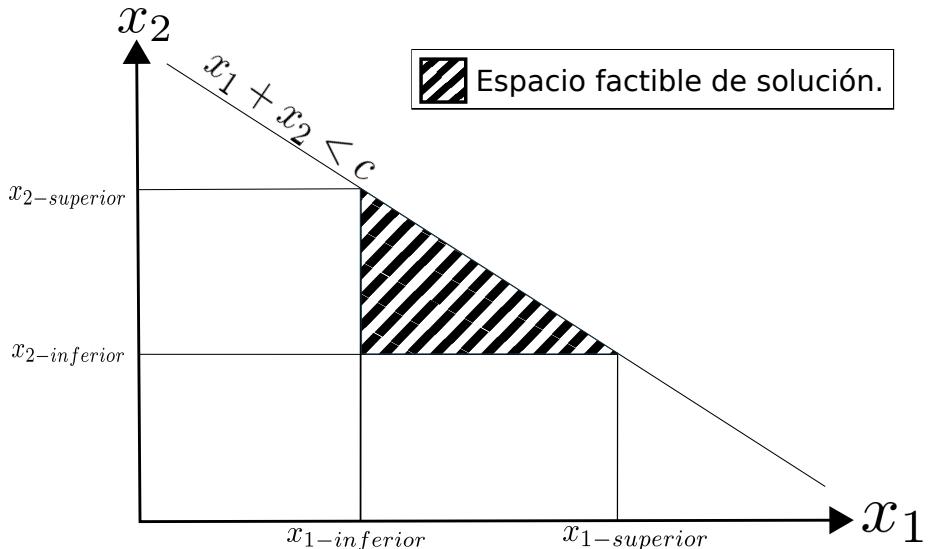


Figura 3.1. Un ejemplo de espacio factible de decisión bi-dimensional.

3.3.6. Óptimo Local y Global

Se ha establecido que un problema de optimización bien definido tiene un espacio de decisión bien definido. Cada punto del espacio de decisión define un valor de la función objetivo. La región de soluciones factibles constituye el conjunto \mathbf{A} y se escribe en términos de las restricciones [3.2](#), [3.3](#) y el vector de las variables decisión \mathbf{x}

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{x} | h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1..p; g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1..m\} . \quad (3.4)$$

En una función pueden existir dos tipos de óptimos: óptimos locales y óptimos globales. Para entender la diferencia entre estos se puede considerar una función $f(x)$ de una variable, mostrada en la figura [3.2a](#). En esta figura, donde x está sin restringir ($-\infty \leq x \leq \infty$), los puntos x_B y x_D son mínimos locales, ya que son los valores más pequeños en sus cercanías. Al desplazarse a la izquierda o derecha de esos puntos, la función crece. Por lo tanto, estos puntos son llamados mínimos locales, por que son los mejores valores en sus cercanías.

Similarmente, x_A y x_C son máximos locales para $f(x)$. Para determinar si un óptimo es global, se necesita examinar todo el dominio de la función y determinar su posición. De acuerdo a estas definiciones, no existe un óptimo global para la función [3.2a](#), ya que el dominio de la función $f(x)$ no tiene un límite superior o inferior. En cambio, si es que la función objetivo se restringe entre $-a$ y b , como en la figura [3.2b](#), entonces el punto x_E sería el mínimo global y x_F el máximo global. Estos dos puntos tienen restricciones activas, mientras que los puntos x_A, x_B, x_C , y x_D son no restringidos.

- Un óptimo global, es aquel punto perteneciente al espacio factible con el mejor valor de la función objetivo en todo el espacio de soluciones factibles.
- Un óptimo local es aquel punto perteneciente al espacio factible que presenta el mejor valor de la función objetivo en su vecindad.

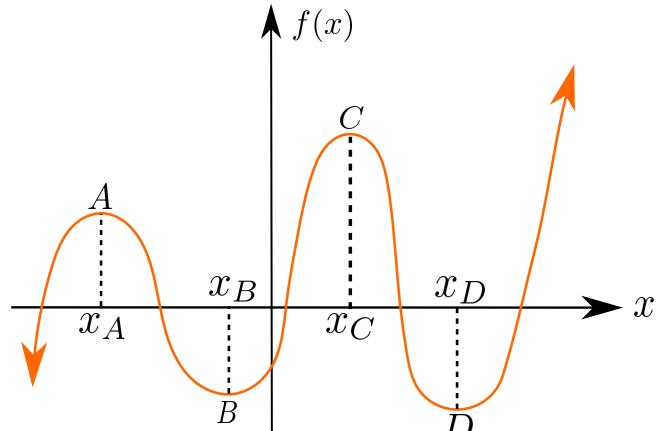
Con estos conceptos descritos, se puede dar una definición más precisa de lo que es un óptimo local y un óptimo global. Estos definen con base en la minimización, ya que un problema de maximización puede convertirse en uno de minimización multiplicando la función objetivo por -1 .

Mínimo Global

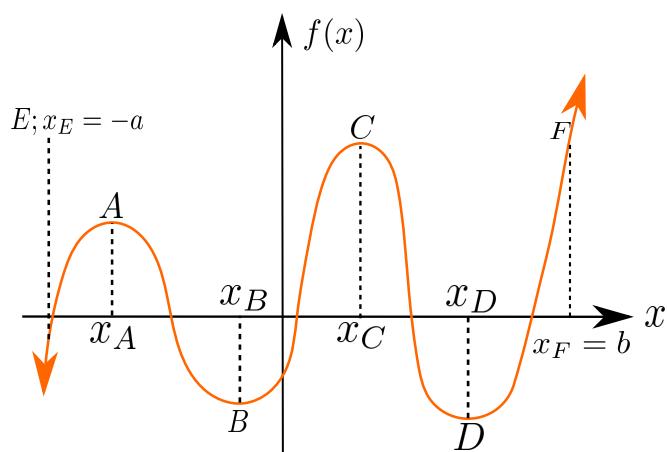
Una función $f(\mathbf{x})$ de n variables tiene un mínimo global en \mathbf{x}^* si al ser evaluada en \mathbf{x}^* es menor o igual que cualquier otro punto de la función evaluada en \mathbf{x} , perteneciente al conjunto del espacio factible \mathbf{A} . Es decir

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) . \quad (3.5)$$

Si se que cumple la inequidad de forma estricta para todo \mathbf{x} perteneciente al conjunto



(a)



(b)

Figura 3.2. Ejemplos de diferentes tipos de óptimos: (a) Problema de optimización no restringido sin óptimo global, (b) Problema de optimización restringido con óptimo global.

factible soluciones \mathbf{A} , entonces \mathbf{x}^* es un mínimo global fuerte y si no fuese así, se llamaría un mínimo global débil.

Mínimo Local

Una función $f(\mathbf{x})$ de n variables tiene un mínimo local en \mathbf{x}^* , si la inequidad 3.5 se cumple para todo \mathbf{x} en una pequeña vecindad N del punto \mathbf{x}^* perteneciente al conjunto del espacio factible \mathbf{A} . Si la inequidad es estricta, entonces el óptimo local se llama óptimo local fuerte, en caso contrario, se denomina óptimo local débil.

La vecindad N del punto \mathbf{x}^* es definida como un conjunto de puntos tales que

$$N = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbf{A}; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta\} . \quad (3.6)$$

Este conjunto está definido por un pequeño $\delta > 0$. Geométricamente, consiste en una pequeña región del espacio factible.

3.4. Ventajas y desventajas de los algoritmos metaheurísticos implementados

En esta tesis, los algoritmos metaheurísticos implementados son tres: algoritmos genéticos, estrategias evolutivas y optimización por enjambre de partículas. A pesar de que la optimización por enjambre de partículas pertenece a un conjunto de algoritmos denominados como inteligencia de enjambres, generalmente se le tiende a relacionar a los algoritmos evolutivos, debido a sus similitudes [52].

La motivación biológica-social de estos algoritmos los ha hecho bastante populares. Después de décadas de investigación, una larga lista de aplicaciones teóricas han demostrado el éxito de los algoritmos de optimización metaheurísticos. Algunos ejemplos se pueden encontrar en el diseño de alas de aviones [45], sistemas fotovoltaicos [53] o su aplicación en plasmónica [46]. Algunas ventajas de los algoritmos metaheurísticos sobre los algoritmos de optimización clásicos como Levenberg-maquardt [1] o Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [54] son:

- Son algoritmos de implementación simple y flexibles.
- Estos algoritmos son paralelizables.
- Pueden optimizar problemas de n variables.
- Los algoritmos permiten encontrar el óptimo global del problema. Generalmente, se asegura una buena solución pero no necesariamente la mejor.
- Se puede realizar la búsqueda de los óptimos en un espacio de decisión restringido.
- No hay necesidad de evaluar los gradientes de la función objetivo, ni es necesario que esta sea continua.

A pesar de las múltiples ventajas de estos algoritmos, algunas desventajas son que no aseguran una solución óptima a un problema específico dentro de un tiempo predecible, pueden necesitar ajustes de parámetros por prueba y error. Además, necesitan muchos recursos computacionales [55].

3.5. Algoritmo genético (GA)

La idea básica detrás de GA es el principio Darwiniano de la supervivencia del organismo más apto, capaz de superar los peligros de los depredadores y de su entorno. Los individuos

más aptos tienen una mayor probabilidad de sobrevivir que el resto de la población. Estos son más hábiles para adaptarse a condiciones variables. Los descendientes de los individuos más aptos heredan el genotipo de sus progenitores y es posible que aprendan las habilidades de estos, lo que conlleva a generaciones más aptas. Además, las mutaciones de los genes ocurren aleatoriamente en los miembros de una especie y algunas de esas mutaciones pueden mejorar las probabilidades de supervivencia de un individuo y sus potenciales descendientes. Cada individuo generado por GA (denominado como cromosoma) puede interpretarse como una posible solución de un problema de optimización. Cada cromosoma está compuesto por genes que representan variables de decisión. El valor *fitness* o aptitud de los individuos, determina la habilidad de supervivencia de estos.

Cada generación posee una mezcla de la población progenitora, la cual contiene individuos (cromosomas) que han sobrevivido a las generaciones anteriores. Los descendientes, que representan una potencial solución, son generados a través de operadores genéticos. Los padres son escogidos para producir una nueva generación y son seleccionados en función del valor de *fitness*. Mientras mayor sea el valor de *fitness*, hay mayor probabilidad de supervivencia y reproducción. En la tabla 3.1 se enumera la nomenclatura utilizada en GA.

En la versión estándar de GA se genera aleatoriamente un conjunto de posibles soluciones, denominado como población inicial. Se calcula el valor de *fitness* de los individuos de la población aleatoria y se seleccionan los individuos con mayor *fitness*. Una nueva población de potenciales soluciones es generada a través del operador genético de recombinación sobre la población progenitora. Una vez generada la nueva población, se aplica el operador genético de mutación al producto de la recombinación. El algoritmo repite estos pasos, iterando múltiples generaciones, hasta que algún criterio de término se haya cumplido. La figura 3.3 representa el diagrama de flujo de GA.

Nomenclatura de optimización estándar	Nomenclatura de algoritmo genético
Variable de decisión	Gen de cromosoma
Solución	Cromosoma o individuo
Solución antigua	Padres
Solución nueva	Descendientes o hijos
Mejor solución	Elite
Función objetivo	Función de fitness
Solución inicial	Cromosoma aleatorio
Selección	Padres sobrevivientes
Proceso de generación de una nueva solución	Operadores genéticos

Tabla 3.1. Nomenclatura de GA

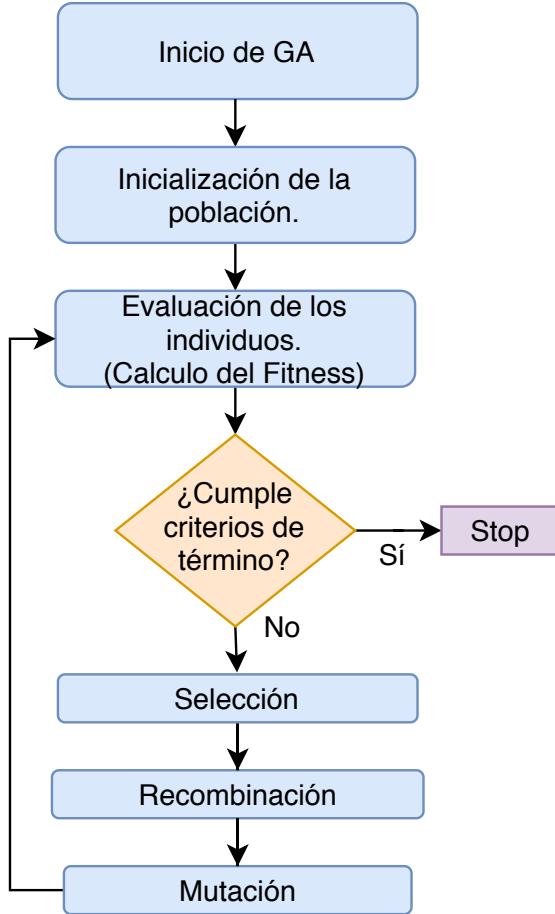


Figura 3.3. Diagrama de flujo GA.

3.5.1. Creación de una población inicial

Cada posible solución del problema de optimización generada por GA es denominada como cromosoma. Por lo tanto, en la formulación matemática de un problema de optimización, cada cromosoma está compuesto por una serie de genes (variables de decisión) que representan una potencial solución. En un problema de optimización N -dimensional, un cromosoma representa una matriz de $1 \times N$, definida como

$$\text{Cromosoma} = X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N), \quad (3.7)$$

donde la variable X representa una posible solución del problema, N es el número de variables de decisión y x_i es la componente i de X . En GA, se genera una población de cromosomas aleatorios o potenciales soluciones. El tamaño de la población, o el número de posibles soluciones, es denotado como M . La población generada de posibles soluciones es

representada a través de una matriz de cromosomas de tamaño $M \times N$:

$$P = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,i} & \cdots & x_{1,N} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,i} & \cdots & x_{2,N} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_{j,1} & x_{j,2} & \cdots & x_{j,i} & \cdots & x_{j,N} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_{M,1} & x_{M,2} & \cdots & x_{M,i} & \cdots & x_{M,N} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

En este caso P representa la población generada. Cada variable $x_{j,i}$ puede ser representada con un número real o como un set predefinido de valores discretos. De esta población aleatoriamente generada, algunas soluciones son seleccionadas como padres para generar nuevas generaciones.

3.5.2. Selección de padres para una nueva generación

La selección en GA es un procedimiento en el cual μ ($\mu < M$) los individuos son escogidos de la población para generar una nueva generación. Estos individuos serán los padres de las siguientes generaciones. Existen diferentes métodos de selección, los más famosos son la selección por *ranking*, torneo o selección proporcional [52] [56].

3.5.3. Reproducción

El algoritmo GA tiene que generar nuevas soluciones en su proceso de búsqueda de una solución óptima. Por lo tanto, generar nuevas soluciones es la tarea de los individuos más aptos.

Los individuos de la población progenitora son seleccionados aleatoriamente con una probabilidad de recombinación P_C que es definida por el usuario. Un número aleatorio R entre $[0, 1]$ es generado por cada cromosoma de la población progenitora. Si para un cromosoma $R < P_C$, entonces esta solución es seleccionada para recombinarse. No todos los padres generan hijos. Entre los padres seleccionados, algunos son escogidos en pares con una distribución uniforme. En GA, una vez generada la población descendiente se aplica el operador genético de mutación.

Recombinación o crossover

La recombinación de la información genética ocurre entre dos soluciones padres. El operador de recombinación genera soluciones hijas al intercambiar genes entre los padres. De acuerdo a la operación de recombinación, algunas variables de decisión son intercambiadas

entre la población progenitora. En otras palabras, una nueva solución recibe aleatoriamente variables de decisión de 2 progenitores.

Goldberg [57] y Michalewics [58] han descrito distintos métodos de recombinación. Estos son:

1. **Recombinación de un punto.**
2. **Recombinación de dos puntos.**
3. **Recombinación uniforme.**

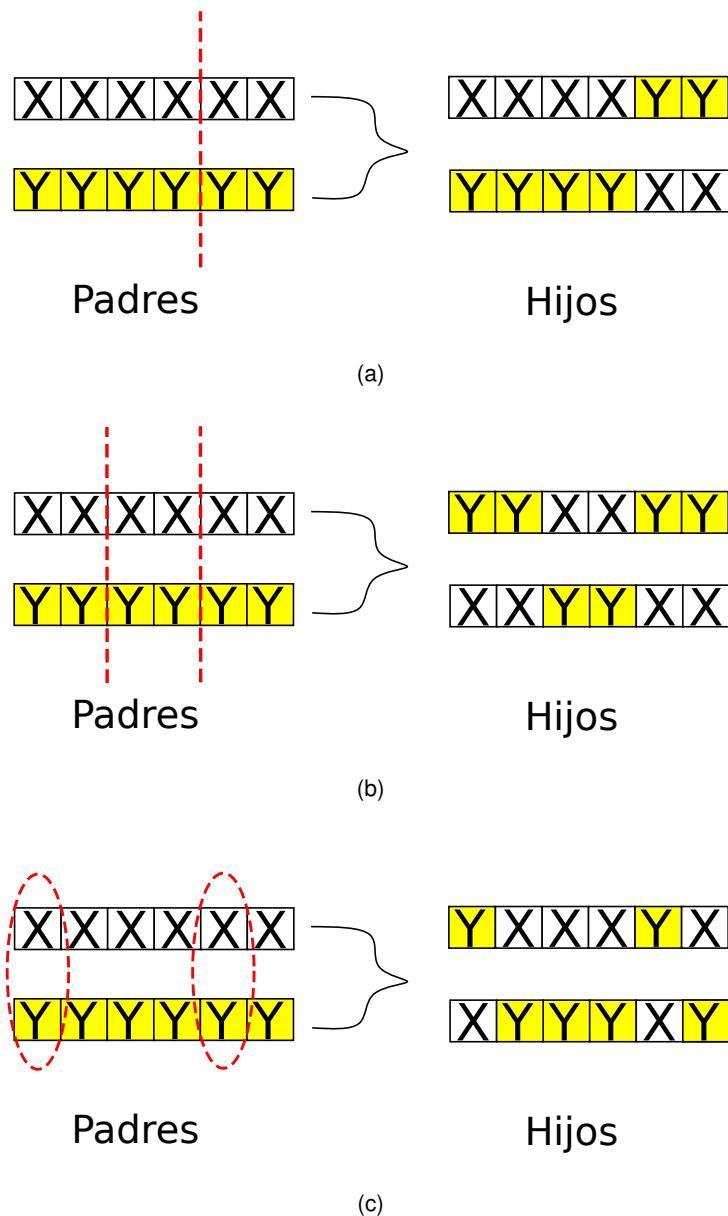


Figura 3.4. Diferentes tipos de recombinación: (a) recombinación de un punto, (b) recombinación de dos puntos y (c) recombinación uniforme.

La figura 3.4 ilustra los 3 tipos de recombinación. La recombinación de un punto (Véase figura 3.4a), combina un segmento de los cromosomas de los padres, en los cromosomas de los hijos. Este proceso es aleatorio y podría ocurrir en cualquier intervalo de las variables de decisión, determinado por un punto aleatorio con distribución uniforme. La recombinación de dos puntos es similar a la de un punto, solo que se utilizan dos puntos para segmentar las variables de decisión de los cromosomas. La figura 3.4b permite visualizar las diferencia con la recombinación de un punto. La recombinación uniforme selecciona genes del cromosoma de forma aleatoria. Existen dos posibilidades, que el gen i del hijo provenga del gen i padre 1 o del padre 2. En este caso, la probabilidad de escoger un gen de un padre es del 50 %. La figura 3.4c ilustra como funciona este tipo de recombinación.

3.5.4. Mutación

La mutación es importante porque introduce material genético a la población. El operador de mutación remplaza aleatoriamente algunos genes de los descendientes. En otras palabras, una o más variables de decisión de una potencial solución es remplazada con un valor aleatorio, manteniendo las otras variables de decisión inalteradas. La figura 3.5 ilustra la operación de mutación. En la sección 3.6.3 se detalla algunos tipos de mutación adaptativa, aplicados a las estrategias evolutivas.

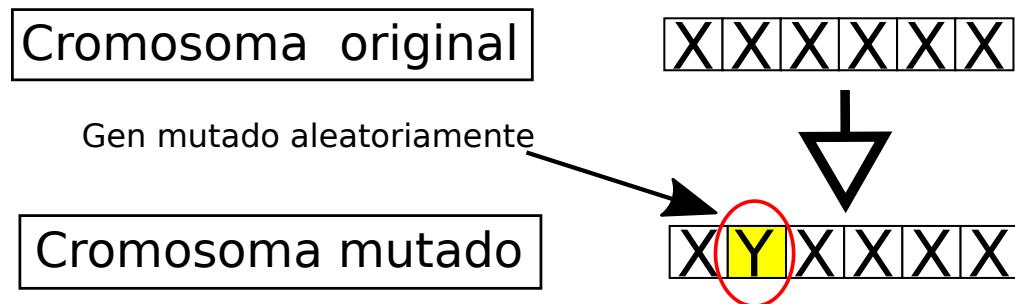


Figura 3.5. Ejemplo de mutación en GA

3.6. Estrategias evolutivas (ES)

Los métodos más exitosos para encontrar un óptimo global están basados en componentes aleatorias, las cuales permiten escapar de óptimo locales y evitar un punto de estancamiento. Una clase de métodos orientados a la optimización global son las estrategias evolutivas, denominadas por sus siglas en inglés como ES (*Evolutionary Strategies*). Estas estrategias son excepcionalmente exitosas para resolver problemas de optimización en espacios continuos. Las ES son unos de los algoritmos evolutivos más populares. Este método

permite resolver problemas en los que por ejemplo , no hay una expresión funcional explícita o derivadas que puedan ser calculadas, al igual que GA y PSO.

Las ES imitan el principio biológico de la evolución [59] y sirven como una introducción al aprendizaje de máquinas y métodos de optimización global. Estas estrategias están basadas en tres mecanismos del proceso de evolución Darwiniana. Al igual que el algoritmo genético , los conceptos evolutivos son convertidos en operadores algorítmicos (Mutación, Recombinación y Selección).

3.6.1. Estrategia evolutiva canónica

La versión estándar de ES presenta dos variantes $(\mu/\rho + \lambda)$ -ES (Elitista) y $(\mu/\rho, \lambda)$ -ES (No-elitista). En ES, μ representa el número de padres (o tamaño de la población inicial), ρ el número de padres involucrados en la procreación de un descendiente y λ el número de descendientes (o tamaño de la población secundaria). La población inicial puede ser representada por la ecuación 3.9.

$$P_\mu^{(g)} = \left\{ e_1^{(g)}, e_2^{(g)}, \dots, e_\mu^{(g)} \right\} \quad (3.9)$$

El índice g indica la iteración del algoritmo y $e_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ corresponde a un elemento de la población inicial. Las componentes $(x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ corresponden a las variables objeto a optimizar del vector N-dimensional \mathbf{x} . El vector N-dimensional \mathbf{s} esta conformado por los elementos $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)^T$ y éstos son denominados como parámetros estratégicos. Éstos parámetros controlan propiedades estadísticas de la mutación.

Una población secundaria $\tilde{P}_\lambda^{(g)}$ de λ elementos es generada a través del uso de operadores genéticos sobre la población principal. La nueva población generada puede ser representada por la ecuación 3.10.

$$\tilde{P}_\lambda^{(g)} = \left\{ \tilde{e}_1^{(g)}, \tilde{e}_2^{(g)}, \dots, \tilde{e}_\lambda^{(g)} \right\} \quad (3.10)$$

Se utiliza una tilde para indicar que cada uno de los elementos de la población secundaria fueron generados a través de operadores genéticos aplicados a los elementos de $P_\mu^{(g)}$.

El signo más de $(\mu/\rho + \lambda)$ -ES simboliza una selección elitista, esto quiere decir que se seleccionan los mejores elementos de $\tilde{P}_\lambda^{(g)} \cup P_\mu^{(g)}$. En cambio, la coma de $(\mu/\rho, \lambda)$ -ES significa que la selección sera no elitista, por lo tanto, se seleccionan los mejores candidatos de la población secundaria \tilde{P}_λ .

Esta versión canónica es denominada como Estrategia Evolutiva Auto Adaptativa. Los pasos de este algoritmo se presentan en la tabla 3.2 y este procedimiento es ilustrado en la figura 3.6.

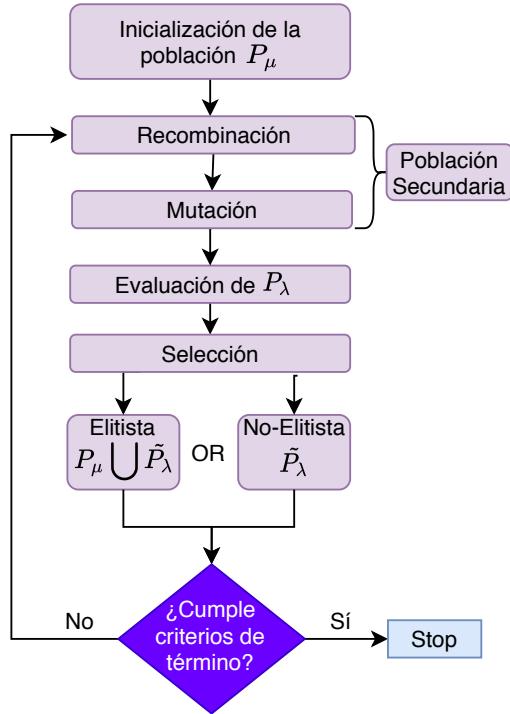


Figura 3.6. Diagrama de flujo ES.

1. Inicializar padres de la población $P_\mu = \{e_1, e_2, \dots, e_\mu\}$
2. Generar λ descendientes \tilde{e}_i formando $\tilde{P}_\lambda = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_\lambda\}$ donde cada descendiente \tilde{e}_i es generado por :
 - a) Seleccionar aleatoriamente ρ padres de P_μ
 - b) Recombinar los ρ padres seleccionados e (Vector con los padres seleccionados) , para formar un nuevo individuo r_i (Véase sección 3.6.2 para más detalles).
 - c) Mutar el set de parámetros estratégicos s del descendiente r_i .
 - d) Mutar el set de variables de decisión x del descendiente r_i usando el set de parámetros estratégicos s para controlar las propiedades estadísticas de la mutación.(Véase sección 3.6.3 para más detalles)
 - e) $r_i \rightarrow \tilde{e}_i$
3. Seleccionar nuevos padres de la población, utilizando estrategia elitista o no elitista. (Se seleccionan los mejores candidatos determinados por el valor de la función objetivo)
 - a) Si es estrategia elitista, se realiza la selección con $\tilde{P}_\lambda \cup P_\mu$
 - b) Si es estrategia no elitista, se realiza la selección con \tilde{P}_λ .
4. Volver a 2, hasta que se que un criterio de término se haya cumplido.

Tabla 3.2. Algoritmo de Estrategia Evolutiva Auto Adaptativa

3.6.2. Recombinación Continua

La recombinación, también conocido como *crossover*, mezcla el material genético de los padres. La mayoría de los algoritmos evolutivos utilizan el operador de recombinación para combinar la información de dos o más potenciales soluciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\rho$ a un nuevo descendiente. Por lo tanto, los descendientes portan material genético de sus padres. Múltiples operadores de recombinación están restringidos a dos padres, pero también existe combinación de ρ padres.

Uno de los típicos operadores de recombinación para variables de decisión continuas son **recombinación dominante** o **recombinación intermedia**. La recombinación dominante combina de forma aleatoria los genes de los padres. Con ρ padres $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\rho \in \mathbb{R}$, se crea el descendiente $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_N)^T$, para un vector de decisión N-dimensional escogiendo aleatoriamente la componente x'_i

$$x'_i = (x_i)_j, \quad j \in \text{aleatorio}\{1, \dots, \rho\}, \quad (3.11)$$

donde $i = 1 \dots N$. La recombinación intermedia es adecuada para espacios continuos de solución. Si hay ρ padres definidos por $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\rho$ cada componente del descendiente, es la media aritmética de los ρ padres

$$x'_i = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} (x_i)_j. \quad (3.12)$$

La solución de la ecuación 3.12 se encontrará espacialmente ubicada entre sus padres.

3.6.3. Mutación adaptativa

Usualmente, los parámetros estratégicos son usados por el operador de mutación. Este operador esta basado en la distribución Gaussiana y depende de dos parámetros, la media ξ y la desviación estándar $\sigma^{(g)}$. La mutación añade a cada variable de decisión $x_i^{(g)}$ un desplazamiento Δx_i que toma un valor aleatorio según la distribución normal $N(\xi, \sigma)$. En la ecuación 3.13 se puede ver la función de densidad de probabilidad [60].

$$p(\Delta x_i^{(g)}) = \frac{1}{\sigma^{(g)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\Delta x_i^{(g)} - \xi)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.13)$$

En la práctica, el valor de la media es nulo ($\xi = 0$). El candidato a solución $(x_1^{(g)}, \dots, x_N^{(g)}, \sigma^{(t)})$ es mutado, de forma tal que, el valor original de $x^{(g)}$ es modificado al valor de la ecuación 3.14.

$$x_i^{(g+1)} = x_i^{(g)} + N(0, \sigma^{(g+1)}) \quad (3.14)$$

Donde $\sigma^{(g+1)}$ es el parámetro actualizado de la fuerza de mutación y $N(0, \sigma^{(g+1)})$ es el número aleatorio obtenido de la distribución normal. Existe una gran diversidad de operado-

res de mutación [61]. En este trabajo de tesis se utiliza la *mutación no correlacionada de n tamaños de pasos*

Mutación no correlacionada con n tamaños de pasos

Este tipo de mutación con n ¹ tamaños de pasos, modifica cada dimensión de la variable de decisión $\mathbf{x}^{(g)}$ de forma diferente. Por lo tanto, diferentes fuerzas de mutación son aplicadas a cada una de las dimensiones de la solución candidata. La principal razón de implementar este tipo de mutación, es debido a que la función objetivo no es plana. Por ejemplo, en un espacio de búsqueda 3D el gradiente en la dirección de las abscisas no es el mismo que en eje de las ordenadas. En este caso, n fuerzas de mutación son añadidas a los individuos de la población, a cada fuerza de mutación se le denomina como parámetro estratégico. La operación de mutación es definida en las ecuaciones 3.15 y 3.16.

$$\sigma_i^{(g+1)} = \sigma_i^{(g)} \exp(\tau' N(0, 1) + \tau N_i(0, 1)), \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.15)$$

$$x_i^{(g+1)} = x_i^{(g)} + \sigma^{(g+1)} N_i(0, 1). \quad (3.16)$$

Los parámetros τ' y τ denotan la velocidad de aprendizaje. Con estos parámetros se controla la velocidad de la mutación. Es recomendable usar tasas de aprendizaje que cumplan con $\tau' \propto 1/\sqrt{2n}$ y $\tau \propto 1/\sqrt{2\sqrt{n}}$.

3.7. Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)

La optimización por Enjambre de Partículas, *Particle Swarm Optimization (PSO)*, es un algoritmo de optimización que está inspirado en el comportamiento de bandadas y enjambres, para solucionar problemas no lineales, no convexos o problemas de combinatoria. Este método fue introducido el año 1995 por James Kennedy y Russel Ebehart [62].

3.7.1. Motivación

Muchas especies de aves son sociales y forman bandadas por diversos motivos. Las bandadas pueden ser de diferente tamaño, ocurren en diferentes estaciones y pueden estar compuestas de diferentes especies que pueden trabajar bien en equipo. Más ojos y oídos significa más oportunidades de encontrar comida y a su vez se mejora la posibilidad de detectar a un depredador. Las bandadas son beneficiosas para la supervivencia de sus miembros, a través de diferentes maneras.

¹En este caso n corresponde a la dimensión del vector solución. Anteriormente, la dimensión del vector solución correspondía a N , pero en este apartado se cambia, para que no exista confusión con la distribución normal.

Alimentación : El biólogo-social E. O. Wilson dijo que “En teoría, por lo menos, miembros individuales de los enjambres pueden beneficiarse de los descubrimientos y las experiencias previas de todos los miembros del enjambre durante la búsqueda de comida”[63] . Si para un grupo de aves, la fuente de comida es la misma entonces algunas especies de aves forman bandadas de una forma no competitiva. De esta manera, más aves toman ventaja de los descubrimientos de las otras aves sobre la fuente de comida.

Protección contra depredadores: una bandada de aves tiene diversas ventajas al protegerse entre ellas del predador.

- Más ojos y oídos significa más oportunidades para detectar al depredador o cualquier otro tipo de amenaza.
- Un grupo de aves puede confundir o asustar a su depredador a través del movimiento o vuelos ágiles.
- Una gran cantidad de aves reduce la posibilidad que una de estas aves sea seleccionada como presas, debido a la gran cantidad de ellas.

Aerodinámica: Cuando las aves vuelan en bandadas, usualmente se disponen especialmente realizando formaciones. Estas formaciones toman ventaja de los patrones cambiantes del viento basado en el número de aves en la bandada y como las alas de las aves crean diferentes corrientes. Esto permite a las aves usar su entorno de la forma más eficiente.

El desarrollo de PSO requiere la simulación de alguna de las ventajas de las bandadas, pero para entender las propiedades de la inteligencia de enjambres es necesario mencionar algunas desventajas de las bandadas de aves. Cuando las aves forman bandadas también existe un riesgo asociado a ellas. Más oídos y más ojos significan más alas y bocas, que resultan en más ruido y movimiento. En esta situación, más depredadores pueden localizar la bandada causando una constante amenaza para las aves. Una bandada grande también requiere un gran cantidad de alimento, lo cual genera una mayor competencia. Esto puede conllevar a la muerte de algunas aves débiles del grupo. Es importante mencionar que PSO (clásico) no simula las desventajas de las bandadas o enjambres, por lo tanto, durante el proceso de búsqueda, no está permitida la muerte de los individuos, como sí sería posible en el Algoritmo Genético, donde los individuos más débiles son eliminados. En PSO, todos los individuos permanecen vivos y tratan de hacerse más fuertes durante el proceso de búsqueda. La mejora de las posibles soluciones en PSO está dado por la cooperación, mientras que en las Estrategias Evolutivas o Algoritmos Genéticos es debido a la competencia. Existen ciertas reglas que siguen las bandadas [64]:

1. **Vuelo seguro**: Cuando las aves vuelan no tienen permitido colisionar entre ellas o con obstáculos.
2. **Dispersión**: Cada ave mantendrá una distancia máxima respecto a otra.

3. **Unión** : Cada ave mantendrá una distancia mínima respecto a otra.
4. **Retorno**: Cada ave tendrá la capacidad de encontrar la fuente de comida o el nido.

En el modelo de PSO adoptado por Kennedy y Eberhart no se considera la regla de dispersión ni la de vuelo seguro. En otras palabras, las partículas pueden acercarse todo lo que puedan. Las reglas de retorno y unión son válidas para el modelo de PSO. La regla de unión es equivalente a que las partículas se desplacen en un espacio factible y la regla de retorno permite que cualquier miembro del enjambre pueda encontrar el óptimo global.

Kennedy y Eberhart siguen 5 principios fundamentales, que determinan si un grupo es un enjambre [65]:

1. **Principio de Proximidad**: La población debería ser capaz de realizar cálculos sencillos de espacio y tiempo.
2. **Principio de Calidad**: La población debería responder a factores de calidad del ambiente.
3. **Principio de Respuesta Diversa**: la población no debería comprometer su actividad a canales excesivamente estrechos.
4. **Principio de Estabilidad**: la población no debería cambiar su comportamiento cada vez que el ambiente cambia.
5. **Principio de Adaptabilidad**: la población debería ser capaz de cambiar su comportamiento cuando el costo computacional sea factible.

3.7.2. Proceso de optimización con enjambre de partículas

Kennedy y Eberhart [65] desarrollaron el modelo PSO para optimizar funciones. En PSO, las soluciones son obtenidas a través de una búsqueda aleatoria y la inteligencia del enjambre. Esta búsqueda es realizada a través de un set aleatorio de posibles soluciones, este set es conocido como *enjambre* y cada solución potencial es conocida como *partícula*.

En PSO, las partículas son influenciadas por dos tipos de aprendizaje. Cada partícula aprende de otra partícula y de su experiencia previa al moverse. El aprendizaje a partir de otros es generalmente referido como *aprendizaje social*, mientras que el aprendizaje basado en las experiencias propias es denominado como *aprendizaje cognitivo*. Como resultado del aprendizaje social, las partículas almacenan en su memoria la mejor solución visitada por el enjambre, denominada como **gbest**. Como resultado del aprendizaje cognitivo, la partícula almacena en su memoria la mejor solución visitada por ella misma, denominada como **pbest**.

El cambio de la dirección y de la magnitud de cualquier partícula es decidido por un factor denominado como *velocidad*. Este es el cambio de la posición respecto al tiempo. En un marco referente a PSO el tiempo es definido por las iteraciones. De esta manera, para PSO la

velocidad puede ser definida como la tasa de cambio de la posición respecto a las iteraciones. Como el número de estas crece unitariamente, la dimensión de la velocidad v y el de la posición x es la misma.

Para un espacio de búsqueda N-dimensional, la i -ésima partícula de un enjambre en un paso de tiempo t es representada por un vector N-dimensional, $x_i^t = (x_{i1}^t, x_{i2}^t, \dots, x_{iN}^t)^T$ y su velocidad es representada por un otro vector N-dimensional $v_i^t = (v_{i1}^t, v_{i2}^t, \dots, v_{iN}^t)^T$. A su vez, la mejor posición visitada por una partícula es denotada como $p_i^t = (p_{i1}^t, p_{i2}^t, \dots, p_{iN}^t)^T$. El índice g indica cual es la mejor partícula del enjambre. La velocidad y la posición de una partícula pueden ser actualizadas utilizando respectivamente las ecuaciones 3.17 y la ecuación 3.18.

$$v_{in}^{t+1} = v_{in}^t + c_1 r_1 (p_{in}^t - x_{in}^t) + c_2 r_2 (p_{gn}^t - x_{id}^t) \quad (3.17)$$

$$x_{in}^{t+1} = x_{in}^t + v_{in}^{t+1}, \quad (3.18)$$

donde $n = 1, 2, \dots, N$ representa la dimensión, $i = 1, 2, \dots, S$ representan el índice de la partícula, S es el tamaño del enjambre y c_1 y c_2 son constantes denominadas como parámetros cognitivo o social, respectivamente, o simplemente coeficientes de aceleración. De igual forma, r_1 y r_2 son números aleatorios en el rango $[0, 1]$ con distribución uniforme. Se puede observar de las ecuaciones 3.17 y 3.18 que cada dimensión es actualizada independiente de las otras. La única relación entre las dimensiones está dada por la función objetivo a través de $pbest$ y $gbest$. Las ecuaciones 3.17 y 3.18 definen la versión básica de PSO. Un procedimiento algorítmico para PSO es definido en la tabla 3.3.

```

Crear y inicializar un enjambre N-dimensional  $S$ ;
Iniciar los vectores de velocidad de las partículas del enjambre;
for  $t=1$  a la cantidad máxima de iteraciones do
  for  $i=1$  a  $S$  do
    for  $n=1$  a  $N$  do
      Aplicar la ecuación 3.17 para actualizar la velocidad;
      Aplicar la ecuación 3.18 para actualizar la posición;
    end for
    Calcular la función objetivo de la nueva posición del enjambre;
    Actualizar la información histórica de  $pbest$  y  $gbest$ 
  end for
  Terminar si es que  $gbest$  cumple con los criterios del problema;
end for

```

Tabla 3.3. Algoritmo básico PSO

3.7.3. Ecuaciones de posición y velocidad

El lado derecho de la expresión 3.17 contiene tres términos aditivos, que se pueden interpretar como:

1. La velocidad anterior v puede ser vista como el momento de la partícula. Este término previene un cambio drástico de la velocidad de la partícula.
2. El segundo término es conocido como la componente cognitiva o egoísta [66]. Este término atrae a la partícula a la mejor posición en la que ella ha estado. De esta manera, durante el proceso de búsqueda, la partícula recuerda su posición y evita deambular. Es importante notar que $(p_{in}^t - x_{in}^t)$ es un vector que apunta hacia la mejor posición de la partícula. Es importante mantener el orden, ya que, en caso contrario la partícula sería repelida de esta posición.
3. El tercer término es llamado componente social y es responsable de compartir la información a todo el enjambre. Debido a este término, cada partícula es atraída a la mejor posición del enjambre. El término $(p_{gn}^t - x_{id}^t)$ apunta hacia la mejor posición del enjambre.

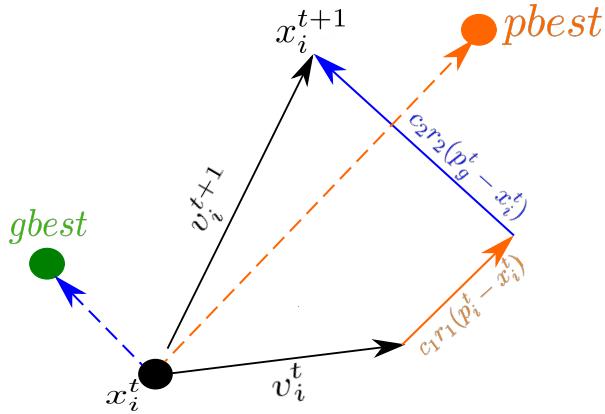


Figura 3.7. Representación 2D de algoritmo PSO.

Es claro que los términos c_1 y c_2 restringen cuánto se va a desplazar la partícula, en la dirección de la mejor posición de la partícula y la mejor posición del enjambre, respectivamente. Al controlar estos parámetros se puede controlar la velocidad o éxito de la convergencia.

La figura 3.7 representa geométricamente el movimiento de las partículas en un plano 2D. El algoritmo básico de PSO diseñado por Kennedy y Eberhart [65] sigue los 5 principios mencionados en la sección 3.7.1. En todo paso de tiempo de PSO el enjambre sigue la posición de $gbest$ y $pbest$ y por ende, cumple con el principio de calidad. Como la partícula se mueve aleatoriamente hacia $gbest$ y $pbest$, se cumple el principio de diversidad. El principio

de estabilidad se justifica por que el enjambre no se mueve aleatoriamente, solo las partículas. En enjambre cambia su comportamiento cuando $gbest$ cambia, por lo tanto, se adhiere al principio de adaptabilidad.

3.8. Comentarios finales

En este capítulo se presenta los diferentes algoritmos metaheurísticos utilizados en este trabajo. Cada uno de estos algoritmos está implementado a través de un código de elaboración propia para optimizar el tiempo computacional. Sin embargo, estos algoritmos son estándar y los resultados pueden reproducirse con cualquier librería de acceso libre.

Los algoritmos metaheurísticos son utilizados en los capítulos 4 y 5 para caracterizar materiales hiperelásticos isótropos y anisótropos, respectivamente. En resumen, estos herramientas son usadas para maximizar la coincidencia entre los resultados experimentales y los modelos hiperelásticos, a través de una **función objetivo**.

Capítulo 4

Caracterización de materiales hiperelásticos isótropos con algoritmos evolutivos

4.1. Introducción

Los modelos constitutivos hiperelásticos son utilizados cuando un material es sometido a grandes deformaciones y este a su vez presenta una respuesta elástica. Estos modelos consideran grandes cambios en su geometría como el comportamiento no lineal del material. Se pueden encontrar aplicaciones para modelar elastómeros como el caucho, polímeros sintéticos y para modelar tejido blando (por ejemplo: arterias, nervios u otros).

Aunque las características de estos materiales son conocidas, el proceso de caracterización es complejo, ya que el material es no lineal y es necesario modelar correctamente diferentes modos de deformación, dificultando las posibilidades de predecir su comportamiento con herramientas numéricas. Como consecuencia, simulaciones que utilizan métodos numéricos como elementos finitos con modelos hiperelásticos, en algunos casos, no permiten predecir correctamente el comportamiento mecánico del material.

A pesar de que existan una gran cantidad de modelos constitutivos [13], sus constantes materiales no son de fácil obtención. Para encontrar estos parámetros, generalmente se utilizan algoritmos de optimización que dependen de gradientes y que están condicionadas a un **proceso iterativo** que depende de la **inicialización** de los parámetros y la **diferenciación** de la función objetivo. Diversos autores utilizan el método de Levenberg-Marquardt [67] para así encontrar el conjunto de parámetros que minimizan el error cuadrático del modelo respecto al experimento. El problema de los métodos descritos anteriormente, es que la convergencia al mínimo global (el mejor conjunto de parámetros) está condicionada por la inicialización y la diferenciación de la función objetivo y sólo se puede asegurar la convergencia a un óptimo local y no a un óptimo global. Por lo tanto, en este capítulo se utiliza los algoritmos metaheu-

rísticos mencionados en el capítulo 3, ya que son **independientes de los gradientes** y están **orientados a la optimización global**.

En este capítulo se presentan inicialmente las ecuaciones que modelan el comportamiento de un material hiperelástico isótropo. A partir de estas ecuaciones, se define un modelo matemático que permite relacionar las tensiones de un material con las deformaciones y modelar los ensayos de tracción uniaxial, biaxial, presurización y corte.

Para evaluar y comparar los algoritmos metaheurísticos introducidos en el capítulo 3, se utiliza un problema de optimización propuesto por J. R. Fernández et al. [68]. Este problema tiene solución conocida y es utilizado como métrica para evaluar la robustez de los algoritmos.

Posteriormente, se estudia las características de la función objetivo de un material hiperelástico isótropo. Generalmente, los ajustes de curvas experimentales están asociadas a espacios de solución restringidos, con regiones valles y múltiples óptimos locales.

Para caracterizar un material considerando múltiples modos de deformación, es necesario considerar varios ensayos mecánicos. Para ello, se plantean funciones mono objetivos que permiten ajustar los ensayos simultáneamente. También se estudia como es que los ensayos mecánicos aportan información única o no, a la función de densidad de energía. El objetivo es analizar como realizar la menor cantidad de ensayos mecánicos y que estos a su vez capten múltiples modos de deformación. También es estudiado el efecto de la cantidad de parámetros del modelo constitutivo y como los ensayos mecánicos condicionan al problema de caracterización.

Finalmente, se realiza un ajuste experimental de un material real. En este caso se utilizan guantes de látex y se obtienen sus parámetros característicos de acuerdo al modelo de Yeoh.

4.2. Modelo analítico isótropo para deformación homogénea incompresible

Antes de caracterizar los materiales con los algoritmos de optimización, es necesario definir un modelo analítico que permita modelar la respuesta de los ensayos mecánicos. Este modelo analítico considera que el gradiente de deformación es homogéneo, lo cual no es estrictamente cierto, ya que el gradiente de deformación va a estar determinado por la solución de una ecuación diferencial. Aun así, se utilizan estas ecuaciones como aproximaciones al comportamiento real del material. Algunos ejemplos son el ensayo uniaxial, biaxial, corte simple, corte puro y presurización.

Si el gradiente de deformación es homogéneo, este se puede expresar en término de sus valores principales:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Dado que el material es incompresible ($J = 1$), los alargamientos principales se encuen-

tran restringidos por

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 = J. \quad (4.2)$$

Debido a la restricción de incompresibilidad 4.2, el estado de tensiones esta condicionado por un multiplicador de lagrange p . Por lo tanto, el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff se puede escribir en términos de la función de densidad de energía y el multiplicador de lagrange

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} + p \mathbf{C}^{-1}. \quad (4.3)$$

La función de densidad de energía es independiente de I_3 , debido a que no existen variaciones volumétricas. Como consecuencia, la función se puede expresar como

$$W = W(I_1, I_2). \quad (4.4)$$

El tensor de Cauchy es obtenido al llevar el segundo tensor de Piola-Kirchhoff a la configuración deformada

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}. \quad (4.5)$$

Con la expresión 4.5, se puede obtener el estado de tensiones principales en función de los alargamientos principales

$$\sigma_i = 2[\lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \lambda_i^{-2} \frac{\partial W}{\partial I_2}] - p. \quad (4.6)$$

Para un estado de deformación uniaxial o biaxial, el parámetro p se deduce de la ecuación $\sigma_3 = 0$. Finalmente, las ecuaciones quedan determinadas por

$$\sigma_1 = 2[(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}) \frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}) \frac{\partial W}{\partial I_2}] \quad y \quad (4.7)$$

$$\sigma_2 = 2[(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}) \frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}) \frac{\partial W}{\partial I_2}]. \quad (4.8)$$

Las ecuaciones 4.7 y 4.8 permiten modelar el comportamiento de ensayos uniaxiales, biaxiales, cortante o de presurización. Es importante recalcar que estas ecuaciones consideran que la deformación es homogénea. En algunos casos esta aproximación puede diferir bastante de la realidad.

4.3. Evaluación de algoritmos metaheurísticos

Para demostrar el potencial de los algoritmos evolutivos, se seleccionan tres constantes del modelo de Mooney-Rivlin C_{10} , C_{01} y C_{11} con valores conocidos de 10, 20 y 5 MPa, respectivamente. Con estos valores se genera una curva analítica y se simula el proceso de obtención de los parámetros del modelo a través de la curva sintética y los algoritmos de opti-

mización. En teoría los algoritmos evolutivos deberían ser capaces de obtener las constantes propuestas del modelo hiperelástico. Por lo tanto, usando los tres parámetros conocidos, se genera una curva de tensión uniaxial, hasta un nivel de deformación de 300 %. Cabe mencionar que se considerara que el material es incompresible. La curva generada se presenta en la figura 4.1.

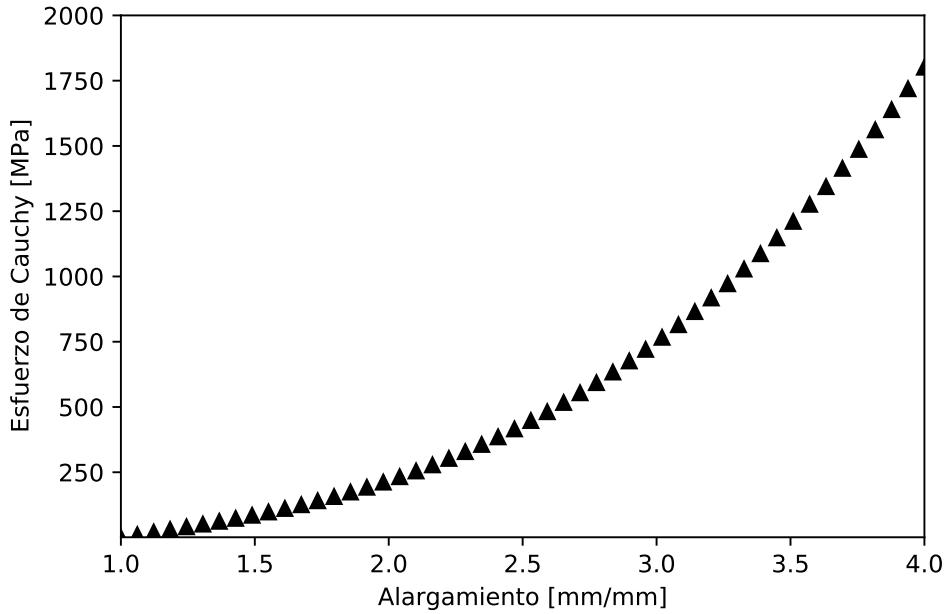


Figura 4.1. Curva generada de ensayo uniaxial utilizando parámetros conocidos de modelo de Mooney-Rivlin $C_{10} = 10$ [MPa], $C_{01} = 20$ [MPa] y $C_{11} = 5$ [MPa].

4.3.1. Resultado y análisis de los algoritmos metaheurísticos

En el trabajo realizado por J. R. Fernández *et al.* [68] se genera la curva de la figura 4.1 y utilizan GA, para encontrar los parámetros conocidos de esta curva. Por lo tanto, se replicarán las condiciones en las que fueron encontradas estas constantes y se compara el resultado obtenido con optimización por enjambre de partículas PSO y la estrategia evolutiva ES. Es importante tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- La comparación de los diferentes algoritmos, se realiza igualando la cantidad de evaluaciones de la función objetivo.
- PSO y ES realizan la búsqueda del óptimo global en un dominio continuo, en cambio el GA implementado por J. R. Fernández [68] y el implementado en esta tesis, realizan la búsqueda en un espacio discreto.
- Para estudiar la consistencia de la solución, se resuelve 100 veces el problema de optimización y se analizan estadísticamente los parámetros obtenidos. Los resultados re-

portados por J. R. Fernandez [68] no presentan análisis estadísticos, pero los resultados de GA de fuente propia sí.

- Los estimadores estadísticos a utilizar son la media y la desviación estándar, considerando que el conjunto de parámetros obtenidos presentan una distribución probabilística normal.
- Los parámetros obtenidos por J. R. Fernandez [68] no presentan un dominio de búsqueda, ni los parámetros de búsqueda del algoritmo.

Cuando se utilice el término de **realizaciones** en el contexto de los algoritmos metaheurísticos, se hace referencia a la cantidad de veces que se realiza la optimización del problema. Los algoritmos metaheurísticos implementados son clasificados como **optimización estocástica**, debido a que la solución obtenida depende de un conjunto de variables generadas aleatoriamente. Una solución puede variar de otra, ya que hay una componente de aleatoriedad en los algoritmos. Sin embargo, si existe un óptimo global y el algoritmo es consistente, entonces los valores obtenidos entre las realizaciones, no deberían presentar una gran dispersión.

En consecuencia, se realizan múltiples realizaciones para cada uno de los algoritmos, para estudiar estadísticamente la consistencia de la solución obtenida con los métodos.

Se compara inicialmente GA, PSO y las estrategias evolutivas ES, en sus dos variantes, las cuales son una selección elitista y una selección no elitista. Para comparar con la publicación de J. R. Fernandez, se efectúa la comparación con base en la cantidad de evaluaciones de la función objetivo. Estos parámetros son los de la tabla 4.1.

Generaciones	50
Población	40
Realizaciones	100

Tabla 4.1. Generaciones y población para primera comparación de los algoritmos metaherísticos

En este problema de caracterización utilizando un ensayo uniaxial, la función objetivo va a quedar definida como

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}^n} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma(\lambda_i, \mathbf{x}))^2. \quad (4.9)$$

El símbolo σ_i representa el esfuerzo uniaxial experimental, n la cantidad de puntos de la curva a ajustar y $\sigma(\lambda_i, \mathbf{x})$ el esfuerzo de Cauchy analítico, definido por el alargamiento uniaxial del ensayo y el conjunto de parámetros \mathbf{x} . El símbolo \mathbf{A}^n representa el conjunto de parámetros, al cual está restringida la solución. El dominio de búsqueda esta acotado por $x_i \in [0, 60] kPa$. Los resultados obtenidos de los diferentes algoritmos metaheurísticos son los de la tabla 4.2.

Parámetros [kPa]	GA [68]	GA ¹		PSO		ES elitista		ES no elitista	
		μ	IC95 %	μ	IC95 %	μ	IC95 %	μ	IC95 %
$C_{01} = 20$	22,5	17,28	0,609	17,61	0,650	18,11	0,231	18,09	0,158
$C_{10} = 10$	8,73	11,27	0,366	11,43	0,392	11,02	0,156	11,13	0,197
$C_{11} = 5$	5,078	4,87	0,031	4,89	0,029	4,92	7,8E-3	4,88	7,2E-2
TPR [s]	83	8,1		0,115		0,016		0,016	
MSE	0,24	0,26		0,22		0,16		0,21	

Tabla 4.2. Evaluación de ES, PSO y GA, replicando las condiciones de la publicación de J.R. Fernández *et al.* [68]. MSE es el error cuadrático medio, TPR es el tiempo por realización, μ es el valor medio y IC 95 % es el intervalo de confianza.

En la tabla 4.2 se presentan los resultados de GA, PSO y ES (cada uno de estos códigos son de fuente propia), y son comparados a los resultados de J. R. et al. [68]. De los resultados obtenidos es importante destacar:

- GA presenta el mayor error cuadrático medio. Este método realiza la búsqueda en un dominio discreto, en cambio, los demás algoritmos efectúan la búsqueda en un dominio continuo.
- PSO obtiene buenos resultados, aunque este método presenta cierta inercia a la convergencia del óptimo global, lo cual se puede observar con la alta dispersión de los parámetros, respecto a las estrategias evolutivas. Es importante recordar que la velocidad de cada individuo, depende de la velocidad previa de este y de la mejor posición registrada del colectivo e individuo. Una estrategia para mejorar los resultados, sería aumentar las generaciones, para así, refinar la solución obtenida.
- Los mejores resultados se obtiene con la estrategia evolutiva debido a que utilizan mutación adaptativa. La mutación adaptativa permite una búsqueda más eficiente y una convergencia con menor necesidad de iteraciones.
- Una implementación eficiente del código es fundamental, en este caso el único código que está optimizado y paralelizado, son las estrategias evolutivas. Esto explica la gran diferencia de tiempo de computo respecto a los otros métodos.
- En todos los casos el **error cuadrático medio** es bajo (MSE<=0,26). Con GA se obtiene el mayor MSE y este ajusta correctamente todo el rango experimental (figura 4.2).
- La estrategia evolutiva elitista exhibe mejores resultados respecto a selección no elitista, ya que la convergencia de la solución tiene un comportamiento monotónico decreciente. Esto se explica porque los mejores descendientes de una generación, pueden continuar en la siguiente si es que son los suficientemente buenos.

¹Estos resultados de GA fueron obtenidos con un programa de elaboración propia.

- Debido a que el código de ES esta optimizado y es numéricamente eficiente, se puede obtener una mejor solución al aumentar la cantidad de iteraciones y el tamaño de la población, sin agregar un tiempo computacional excesivo.

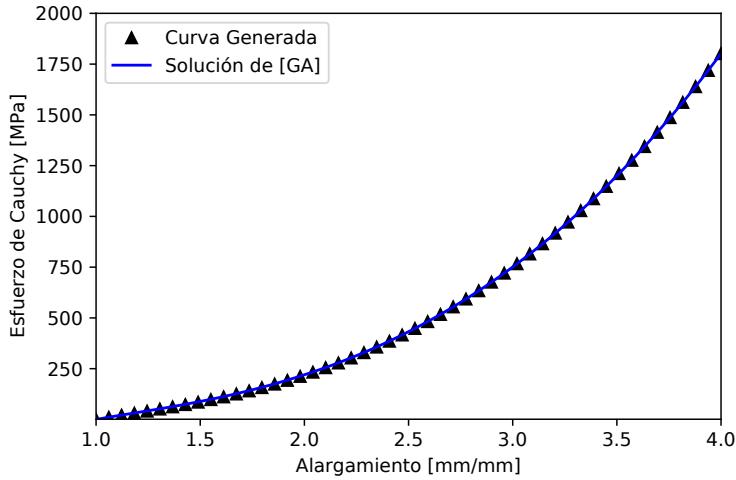


Figura 4.2. Curva ajustada de ensayo uniaxial utilizando parámetros conocidos de modelo de Mooney-Rivlin

Como todos los parámetros obtenidos ajustan muy bien la curva generada ($MSE \leq 0.26$), se analiza el ajuste respecto a la función de densidad de energía, que depende del invariante I_1 y I_2 . Si se considera un gradiente de deformación homogéneo y el material es incompresible, entonces el ensayo uniaxial permite obtener la función de densidad de energía solo para ciertos valores del espacio de los invariantes, que está determinado por una curva paramétrica. Esto es de suma importancia, ya que si se caracteriza un material utilizando un ensayo uniaxial, solo se garantiza un ajuste a la función de densidad de energía, para cierto dominio de los invariantes.

El camino de deformación en el espacio de los invariantes, presentado en la figura 4.3, está determinado de forma paramétrica por

$$I_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}, \quad I_2 = 2\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1^2}. \quad (4.10)$$

En la figura 4.3, se observa que la función de densidad de energía presenta un buen ajuste, para el dominio perteneciente al ensayo uniaxial. A medida que la función de densidad de energía se aleja del dominio de ensayo uniaxial, se aprecia que las soluciones obtenidas divergen (ver círculo fucsia de la figura 4.3). Sin embargo, la función de energía es muy similar a la teórica.

Como ES y PSO presentan mejores resultados que GA se realiza una nueva prueba utilizando solo estos dos algoritmos. La finalidad es verificar si con más generaciones y una población más grande se consigue una mejor solución. Se utiliza una población de 114, un total de 100 generaciones y 100 realizaciones. Los resultados son los de la tabla 4.3.

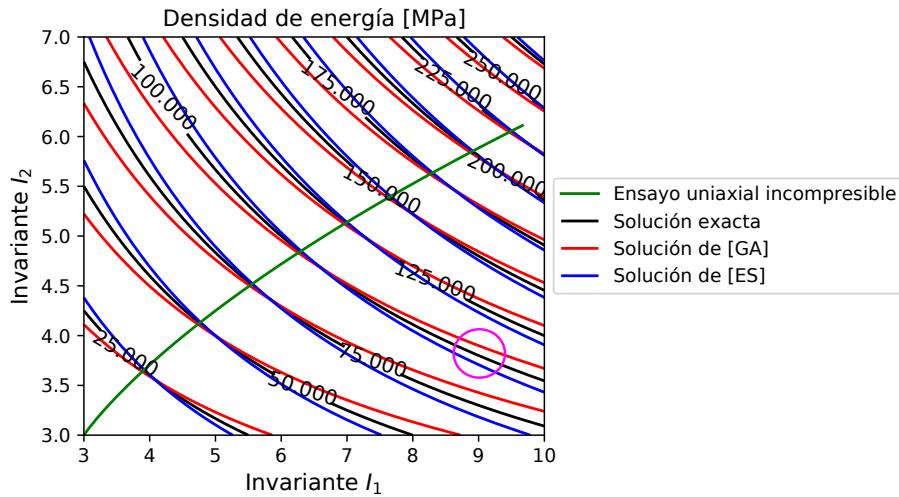


Figura 4.3. Función de densidad de energía $W(I_1, I_2)$, para los valores teóricos y los valores ajustados

Parámetros	PSO		ES Elitista		ES No elitista	
	μ	IC 95 %	μ	IC 95 %	μ	IC 95 %
$C_{01} = 20$	17,71	0,827	19,93	0,082	18,09	0,113
$C_{10} = 10$	11,38	0,499	10,03	0,049	11,13	0,066
$C_{11} = 5$	4,89	0,037	4,99	1,96E-3	4,88	5,09E-2
TPR [s]	0,76		0,032		0,032	
MSE	0,11		9,05E-5		3,05E-4	

Tabla 4.3. Evaluación de ES y PSO para el ajuste del modelo de Mooney-Rivlin con una población de 114, 100 generaciones y 100 realizaciones.

Como se puede apreciar en la tabla 4.3, una mayor cantidad de generaciones y una mayor población mejora la calidad de los resultados. En este caso, ES elitista es el algoritmo que presenta los mejores resultados, debido a que exhibe el menor error cuadrático medio (MSE=9,05E-5) y el intervalo de confianza más acotado. Es importante recalcar que se utiliza los errores cuadráticos medios como la métrica comparativa de los algoritmos, ya que así, se evidencia la capacidad optimizadora de estos. Por lo tanto, para caracterizar materiales, se utiliza preferentemente **ES elitista**.

4.4. Sensibilidad de la función objetivo

Un problema de optimización está definido por una función objetivo y un espacio de solución factible. Una función objetivo se puede formular de diferentes maneras y tener la misma solución. Generalmente, para ajustar curvas se utiliza el método de los mínimos cuadrados no-lineales. En problemas simples, la función objetivo tiende a ser convexa y el óptimo local coincide con el global. En cambio en modelos no lineales, con datos perturbados, discontinui-

dades, restricciones numéricas, modelos no adecuados u otros, hay una gran probabilidad de la existencia de múltiples mínimos locales y un óptimo global difícil de determinar.

Los mínimos locales son un problema para los métodos dependientes de gradientes, ya que las soluciones se estancan rápidamente en estos puntos de equilibrio. Algunos de los problemas que presentan los métodos dependientes de gradientes son:

- Necesidad de diferenciar la función objetivo.
- Es necesario asegurar que no existan discontinuidades.
- La solución obtenida, solo garantiza que esta sea un óptimo local y no un óptimo global.
- Hay que recurrir a otras técnicas matemáticas para agregar restricciones.
- El éxito de estos métodos depende de la inicialización.

Los algoritmos evolutivos tienen la ventaja de no depender de los gradientes, pueden ser aplicados a problemas discontinuos, permiten implementar restricciones numéricas de forma simple y tienden a encontrar el óptimo global de un problema de optimización.

Para ilustrar el comportamiento de una función objetivo en un ajuste por mínimos cuadrados de un material hiperelástico, se grafica la función objetivo en 3D. Por lo tanto, la función objetivo tiene que depender de dos variables. Para ello, se presentan 3 casos de estudio que son ilustrativos para visualizar las complejidades del problema de optimización. Los casos de estudio ilustran complejidades relacionadas a:

1. **Restricciones.**
2. **Regiones valle en del espacio factible de solución.**
3. **Multimodalidad.**

4.4.1. Restricciones

Los modelos hiperelásticos tienen que cumplir ciertas restricciones para asegurar la estabilidad material y un comportamiento físico coherente con la realidad. Cada modelo constitutivo expresa una forma funcional diferente, dependiente de constantes que son los grados de libertad que permiten ajustar y caracterizar un material. La restricción de estabilidad material se define como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{ij}} \geq 0; \quad \partial \sigma_{ij} \partial \epsilon_{ij} \geq 0, \quad (4.11)$$

donde ϵ es alguna métrica de deformación y podría ser remplazada por los alargamientos principales λ . La expresión 4.11 señala que, si la deformación aumenta, la energía solo puede crecer. Este criterio es pocas veces utilizado para encontrar los parámetros característicos de

un material. Por ejemplo, los parámetros de Mooney-Rivlin de 3 parámetros tienen que cumplir con $C_{10} + C_{01} > 0$ y $C_{01} > 0$.

Por lo tanto, los problemas de caracterización de materiales hiperelásticos siempre están sujetos a restricciones de inequidad. En consecuencia, es posible que el óptimo global pueda estar en la intersección del espacio factible de solución y una restricción activa.

Para ilustrar este comportamiento, se gráfica la función objetivo del modelo de Mooney-Rivlin de 2 parámetros. El valor de la función objetivo sera calculado respecto a la siguiente curva analítica²

$$\sigma_i = 500(\lambda - 1)^2 \quad [kPa] \quad (4.12)$$

Utilizando la curva 4.12 y un $\lambda \in [1, 2]$, se calcula la función objetivo como:

$$f(C_{10}, C_{01}) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma(\lambda_i, C_{10}, C_{01}))^2 \quad (4.13)$$

La ecuación 4.13 es idéntica a la 4.9, la única diferencia es que esta función objetivo depende de C_{10} y C_{01} . La gráfica de la función objetivo se presenta en la figura 4.4.

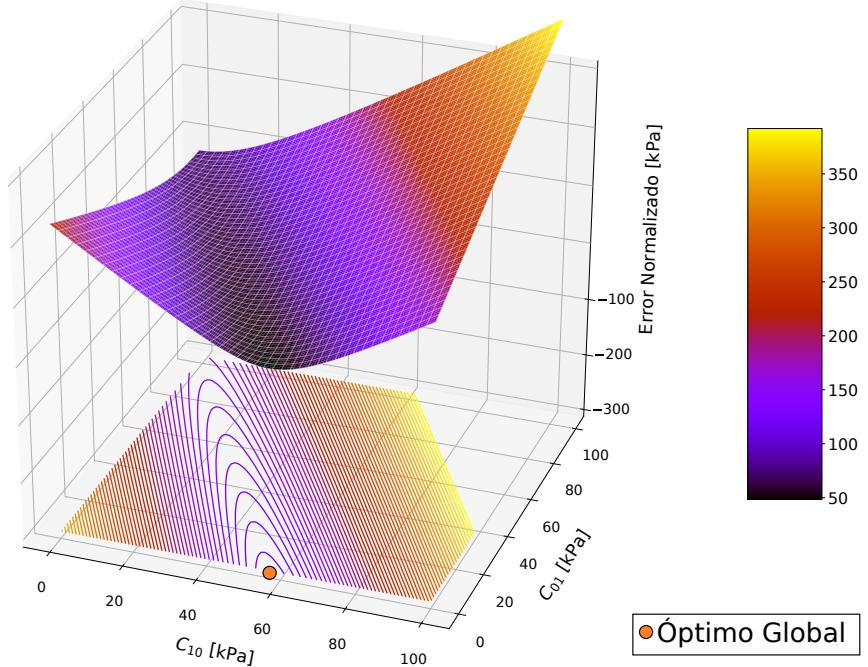


Figura 4.4. Función objetivo Mooney-Rivlin 2 Parámetros con restricción.

Como es posible visualizar en la figura 4.4, la mejor solución se encuentra al límite de una

²Esta curva es generada para producir un conjunto de datos que complica el ajuste utilizando el modelo de Mooney-Rivlin de 2 parámetros.

restricción. Es posible intuir que el óptimo global se encuentra cuando $C_{01} < 0$. Los algoritmos dependientes de gradientes, sin algún tipo de restricción tenderían a converger a una solución fuera del espacio de decisión.

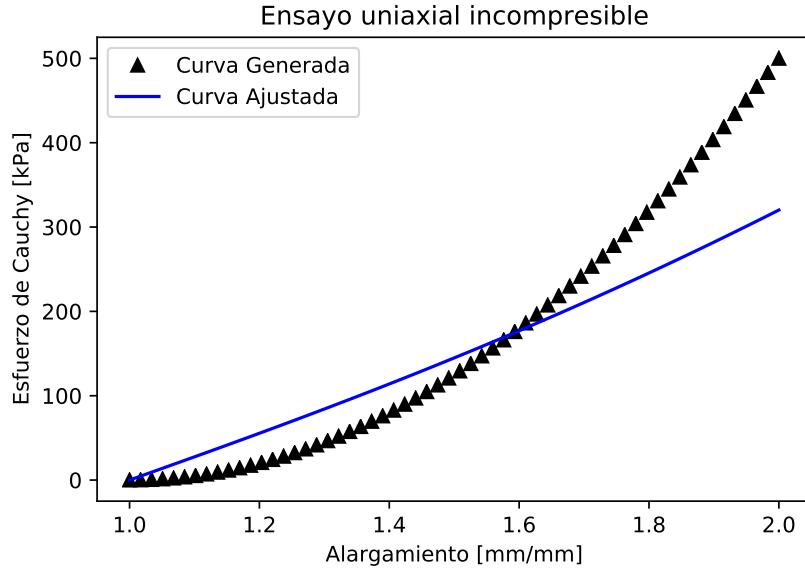


Figura 4.5. Curva generada y ajustada para Mooney-Rivlin 2 Parámetros en espacio factible de solución.

En cambio, los algoritmos evolutivos tenderían a encontrar la solución en el espacio factible de solución. Por ende, un problema de optimización sencillo se convierte en un problema bastante más complejo, solo por las restricciones de estabilidad material.

La mejor solución obtenida cumpliendo los criterios de estabilidad material, son los parámetros $C_{10} = 57[kPa]$ y $C_{01} = 0$. La curva generada y la curva ajustada se presentan en la figura 4.5. La diferencia observada entre estas curvas, es debido a que no hay una mejor solución en el dominio de estabilidad. Es posible obtener una mejor solución, si no se cumple el criterio de estabilidad.

4.4.2. Regiones valle en del espacio factible de solución

La función de Rosenbrock, también referida como **función valle**, es un problema de tipo *benchmark*. Esta función es utilizada para probar diferentes algoritmos de optimización basados en gradientes. Se ilustra la función, en su versión bidimensional en la figura 4.6

La función de Rosenbrock es unimodal y el óptimo global se encuentra en un valle parabólico estrecho. Sin embargo, encontrar el valle es fácil pero la convergencia al mínimo global es difícil de encontrar [69].

Generar un valle con los modelos hiperelásticos es muy sencillo. Para demostrar este hecho, se utiliza el modelo de Mooney Rivlin de 3 parámetros, donde C_{01} es conocido y $(C_{10},$

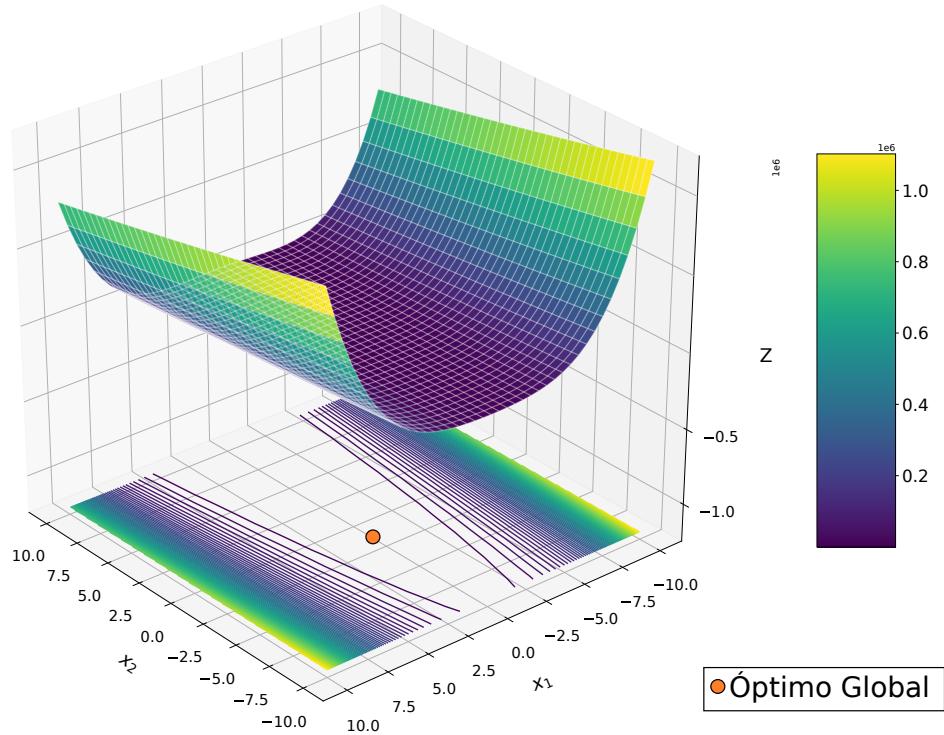


Figura 4.6. Función de Rosenbrock.

C_{11}) son variables. Se utiliza el modelo de Mooney-Rivlin de 3 parámetros debido a que este presenta términos cuadráticos en la función de densidad de energía y permite visualizar el valle. Para este caso la función objetivo se puede escribir como:

$$f(C_{01}, C_{11}) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma(\lambda_i, C_{10}, C_{01}, C_{11}))^2 \quad (4.14)$$

La ecuación 4.14 es idéntica a 4.9, la única diferencia es que C_{10} es conocido. Los valores experimentales de la función objetivo son generados y se analizan 2 casos de estudios. Estos son:

1. Caso ideal: Se genera una curva experimental de parámetros conocidos, con la ecuación 4.7 y se gráfica la función objetivo.
2. Caso con desviaciones experimentales: Se utiliza la curva experimental del caso ideal y se agrega una dispersión estadística a la curva con la ecuación 4.15.

$$\sigma_i = \sigma_i(1 + 0,05rN(0, 1)) \quad (4.15)$$

La función $rN(0, 1)$ representa un número aleatorio con distribución normal y genera una

desviación aleatoria respecto a la tendencia central. Finalmente, cabe mencionar que los parámetros de las curva experimental son $C_{01} = 10[kPa]$, $C_{10} = 15[kPa]$ y $C_{11} = 22[kPa]$.

El ensayo uniaxial, generado con el modelo de Mooney-Rivlin, se puede observar en la figura 4.7. Estas son las curvas que se busca ajustar.

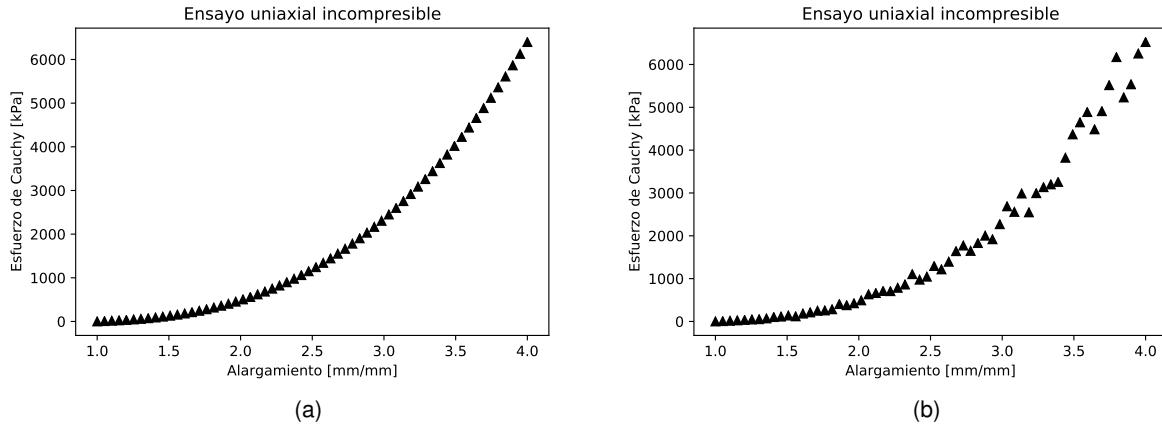


Figura 4.7. Curvas generadas con modelo de Mooney-Rivlin y parámetros conocidos: a) caso ideal, b) caso dispersivo.

En la figura 4.8, se puede apreciar que la función objetivo es convexa, continua y solo presenta un mínimo global. Los isocontornos son claros y concéntricos al óptimo global. Claramente el valor de C_{11} es más sensible que el valor de C_{01} , existiendo una combinación de parámetros que presentan valores de la función objetivo muy bajos. Aun así, **la función presenta un valle**, donde los algoritmos de optimización dependientes de gradientes tienen problemas para encontrar el óptimo global, al igual que en la función de Rosenbrock.

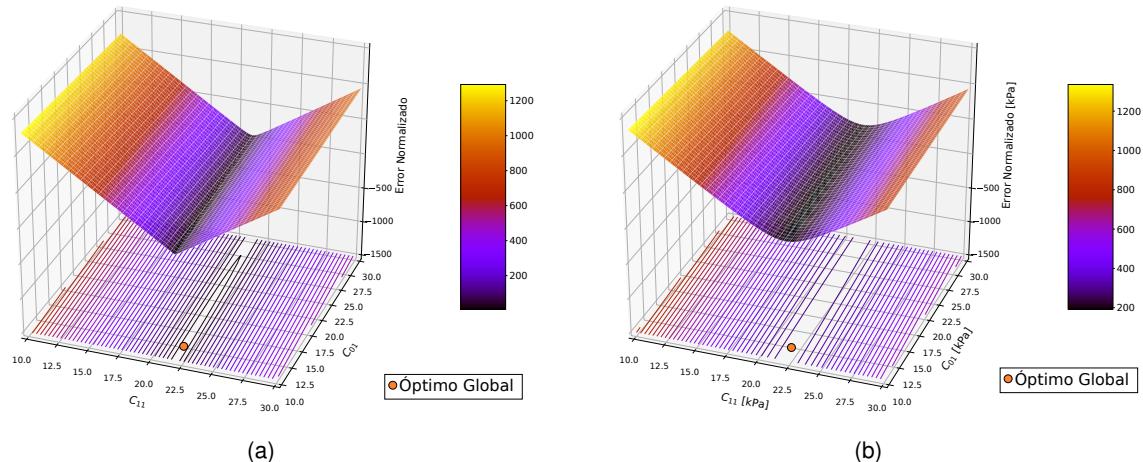


Figura 4.8. Función objetivo de las curvas generadas con el modelo de Mooney-Rivlin: a) caso ideal, b) caso dispersivo.

Por lo tanto, la caracterización de materiales hiperelásticos presenta este tipo de valles, que dificulta la obtención del óptimo global. En la figura 4.8b se observa que:

- Al comparar 4.8a con 4.8b, la dispersión experimental amplifica el efecto del valle.
- Debido a que en la zona valle existen múltiples soluciones que ajustan muy bien los datos experimentales, es probable que el óptimo global no coincida con el conjunto de parámetros con los que se construye la curva, pero si que se encuentre en las cercanías de este.

4.4.3. Multimodalidad

Hay autores que han reportado la multimodalidad del proceso de caracterización de materiales hiperelásticos [70]. Para demostrar que los procesos de caracterización de estos materiales están sujetos a múltiples óptimos y no convexidad, se utiliza el modelo de Ogden [39]. Con este modelo se genera una curva con parámetros conocidos y se gráfica la función objetivo en 3D. Se utiliza el modelo con constantes $\alpha_1 = 2,4$ y $\mu_1 = 2,5$. Además, solo se expande el primer término del modelo constitutivo. Para el ensayo uniaxial, el esfuerzo de Cauchy queda definido como:

$$\sigma = \mu_1(\lambda_1^{\alpha_1} - \lambda_1^{-\frac{1}{2}\alpha_1}) \quad (4.16)$$

Con las constantes del modelo de Ogden y la expresión 4.16, se genera la curva de la figura 4.9:

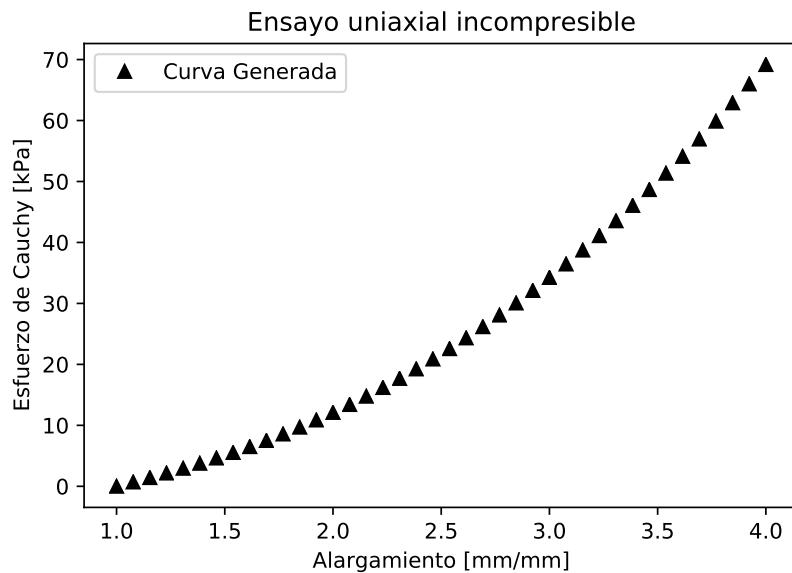


Figura 4.9. Curva generada con el modelo de Ogden.

Como los parámetros tienen sensibilidad exponencial, se aplica logaritmo natural a la función objetivo y se define como:

$$\text{LEN} = \ln(f(\mu_1, \alpha_1) + 1) = \ln\left(\sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma(\lambda_i, \mu_1, \alpha_1))^2 + 1\right) \quad (4.17)$$

La gráfica de la función objetivo se presenta en la figura 4.10. Se puede observar que esta función presenta múltiples óptimos locales (multimodalidad). Además presenta regiones valles, que son oblicuas. Obtener un ajuste con este modelo es muy fácil por que existen múltiples combinaciones de parámetros que permiten ajustar los datos. Sin embargo, esto facilita la falta de unicidad de la solución. Cabe mencionar que en las dos zonas donde existen óptimos locales, se cumple el criterio de estabilidad $\mu_1\alpha_1 > 0$.

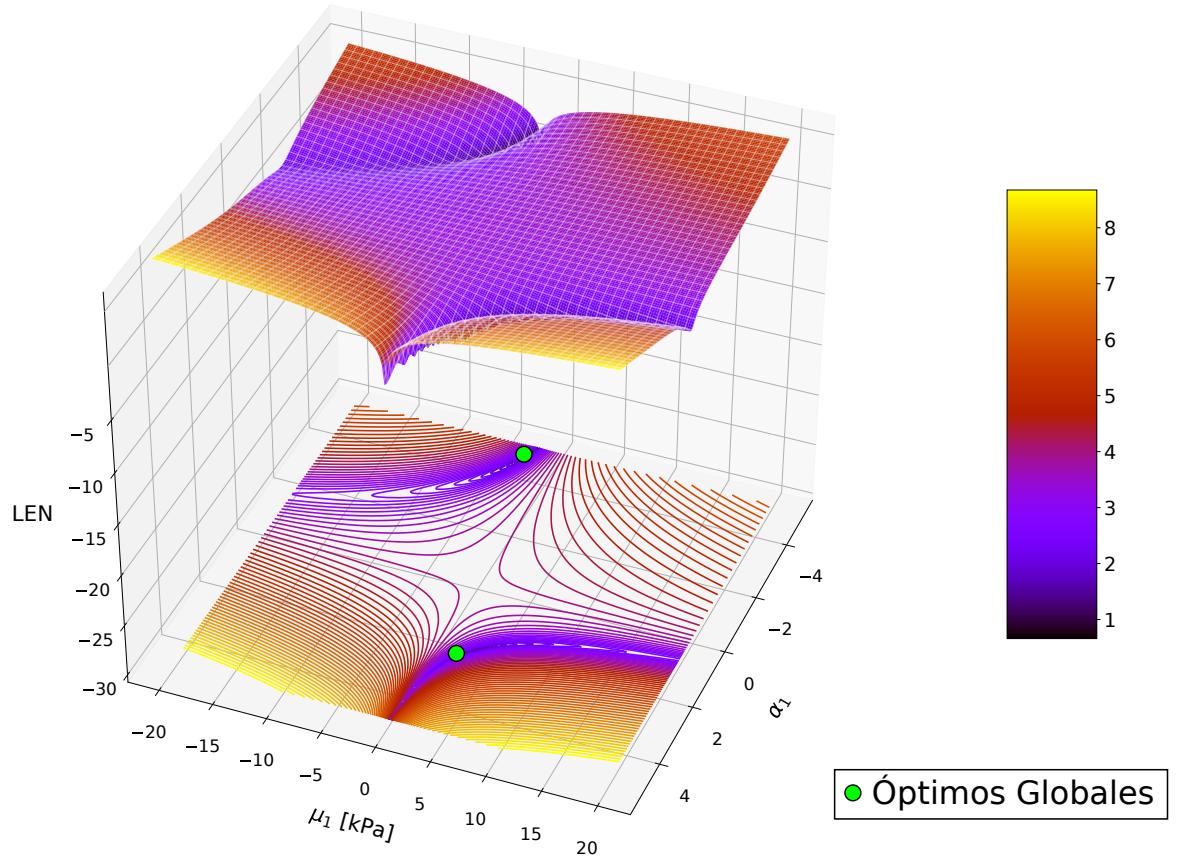


Figura 4.10. Función objetivo con modelo de Ogden.

4.5. Caracterización simultánea de múltiples ensayos utilizando estrategias evolutivas

Caracterizar un material utilizando una curva experimental es un problema complejo, si se utilizan algoritmos dependientes de gradientes. Esto es debido a que sólo se puede asegurar que la solución obtenida sea un óptimo local. El uso de algoritmos evolutivos está orientado a la optimización global y son ideales para problemas complejos en los cuales existen muchos óptimos locales. Los algoritmos metaheurístico son ideales cuando la diferenciación de la función objetivo es compleja y el problema es altamente no lineal, presentando múltiples mínimos locales o restricciones activas. Un ejemplo de un problema que presenta estas características, es la caracterización simultánea de múltiples ensayos mecánicos de un material. **En este segmento se detalla en profundidad como se puede realizar un ajuste simultaneo de curvas, usando algoritmos evolutivos.**

Para demostrar el potencial y posibles usos de los algoritmos evolutivos en la caracterización de materiales, se genera una curva de un ensayo uniaxial y una curva de ensayo de presurización. Los parámetros de las curvas sintéticas son conocidos, por ende, los parámetros ajustados deberían coincidir con los propuestos. Se estudian dos casos, el primero es una curva generada con los parámetros del modelo analítico. El segundo caso es similar al primero, con la diferencia de que a la curva analítica se le agrega perturbaciones numéricas. La idea de agregar estas perturbaciones, es simular datos experimentales y desafiar al algoritmo a solucionar un problema ligeramente más complejo.

Como se demuestra en la sección anterior 4.3, ES elitista es el algoritmo con mejor resultados respecto a PSO y GA. La solución obtenida con ES es consistente, la velocidad de convergencia es mayor respecto a sus pares y tiende a encontrar el óptimo global del problema. Por lo tanto, en este apartado solo se utiliza ES con selección elitista para caracterizar materiales.

Para modelar el ensayo de presurización, se utiliza un diámetro inicial de $D_0 = 25[\text{mm}]$ y un espesor inicial de $e_0 = 1[\text{mm}]$. Con estas dimensiones se puede aproximar las tensiones a un modelo de pared delgada. Se puede derivar la ecuación de presurización utilizando 4.7 y 4.8. Por lo tanto, las tensiones del cilindro presurizado quedan determinadas por

$$\sigma_\theta = \frac{PD}{2e} = 2\left[\left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}\right) \frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(\lambda_\theta^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}\right) \frac{\partial W}{\partial I_2}\right], \quad (4.18)$$

$$P = \frac{4e}{D} \left[\left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}\right) \frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(\lambda_\theta^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}\right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad y \quad (4.19)$$

$$\sigma_z = 2\left[\left(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}\right) \frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(\lambda_z^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}\right) \frac{\partial W}{\partial I_2}\right], \quad (4.20)$$

donde, $\sigma_r = 0$, $D = D_0 \lambda_\theta$, $e = e_0 \lambda_r$ y P corresponde a la presión interior del cilindro.

Cabe mencionar que el alargamiento $\lambda_z = 1$ es constante.

Para ajustar las curvas generadas se define la función objetivo como la suma de los errores cuadráticos entre los datos experimentales y la curva del modelo. Hay que considerar la magnitud de las variables de los diferentes ensayos ya que si los errores cuadráticos de las curvas son desproporcionados, entonces, el ajuste no va a ser equitativo. Esto quiere decir que una curva va a ser favorecida con un mejor ajuste, mientras que las otras curvas son penalizadas. Por lo tanto, se utiliza un ponderador para estandarizar los errores cuadráticos de los ensayos. La función objetivo se define como

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}^n} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma(\lambda_i, \mathbf{x}))^2 + w_p^2 \sum_{i=1}^m (P_i - P(\lambda_i^c, \mathbf{x}))^2. \quad (4.21)$$

El símbolo σ_i representa el esfuerzo uniaxial experimental, n la cantidad de puntos del ensayo uniaxial y $\sigma(\lambda_i, \mathbf{x})$ el esfuerzo de Cauchy analítico, definido por el alargamiento uniaxial del ensayo y el conjunto de parámetros \mathbf{x} . Análogamente P_i representa la presión experimental, m la cantidad de datos del ensayo de presurización y $P(\lambda_i^c, \mathbf{x})$ es la presión obtenida del modelo analítico que depende de \mathbf{x} y el alargamiento circunferencial. El símbolo \mathbf{A}^n representa el conjunto de parámetros, la cual está restringida la solución y w_p es una constante que permite que los errores cuadráticos de las curvas sean proporcionales. Esta constante queda definida como:

$$w_p = \frac{\sigma_n}{P_m} \sqrt{\frac{n}{m}} \quad (4.22)$$

La expresión 4.22 permite estandarizar los errores de los ensayos y también permite estandarizar el error según la cantidad de puntos de las curvas. El beneficio de utilizar este ponderador es que permite obtener un ajuste equilibrado. Por ejemplo, si existiesen 2 curvas con valores similares pero con distinta cantidad de puntos, entonces el ajuste sera mejor para la curva con una mayor cantidad de puntos.

Como se desea generar curvas similares a ensayos mecánicos reales, se agrega una componente de ruido a las curvas. Para generar el ruido se utiliza la siguiente expresión:

$$\sigma_i = \sigma_i (1 + 0,05rN(0, 1)) \quad (4.23)$$

$$P_i = P_i (1 + 0,05rN(0, 1)) \quad (4.24)$$

La expresión 4.23 y 4.47, añade un número aleatorio según una distribución gaussiana normalizada, proporcional al valor de la variable de interés.

4.5.1. Caracterización de material de Demiray

Se utiliza el modelo de Demiray para generar curvas de ensayos mecánicos y así cuantificar la habilidad de los algoritmos evolutivos para resolver el ajuste de múltiples curvas. Este modelo depende de dos parámetros materiales. . Diferentes autores ([71],[72],[73]) han utilizado este modelo para caracterizar tejido blando y utilizan los ensayos uniaxiales o de presurización para determinar las constantes materiales. La función de densidad de energía de Demiray tiene un comportamiento exponencial y depende del primer invariante de deformación. Los parámetros escogidos para generar las curvas son $k_1 = 20[kPa]$ y $k_2 = 0,01$.

Se estudian dos casos, el primer caso consiste en ajustar la curva de los datos generados analíticamente sin ninguna modificación y el segundo caso consiste en agregar un error con distribución normal y media igual a cero. Por lo tanto, se verá la capacidad de estos algoritmos, para recuperar los parámetros originales para cada uno de los casos de estudio.

Para ajustar las curvas, se utilizan parámetros constantes en los algoritmos metaheurísticos. Se utilizarán 100 generaciones, 1140 individuos en la población y 100 realizaciones. Las 100 soluciones obtenidas son analizadas estadísticamente para demostrar la consistencia del óptimo obtenido.

4.5.1.1. Ensayos sin perturbaciones.

En este primer caso sin perturbaciones, la solución obtenida con ES coincide con el conjunto de parámetros seleccionados. Se puede observar en las figuras 4.11 y 4.12 la gran calidad del ajuste. En la tabla 4.4, se presentan los resultados obtenidos donde el valor medio de las 100 realizaciones es la solución exacta y el intervalo de confianza es prácticamente cero (menor a 1E-12). Por lo tanto, la solución obtenida es consistente y es la correcta.

Parámetros [kPa]	[ES] Elitista	
	μ	IC 95 %
$k_1 = 20$	20,00	1,82E-14
$k_2 = 0,01$	0,01	9,23E-13
Error Estándar	0,00	

Tabla 4.4. Parámetros recuperados del modelo de Demiray con ruido

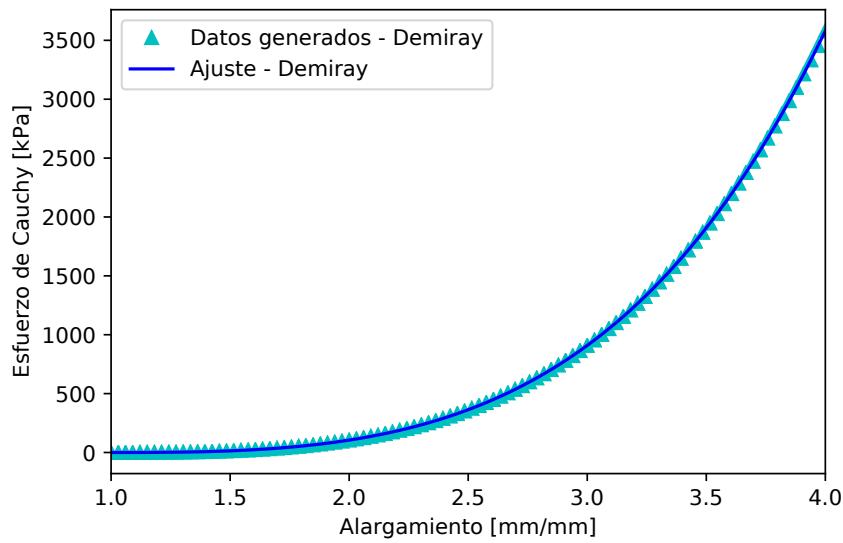


Figura 4.11. Ajuste de ensayo uniaxial con modelo de Demiray

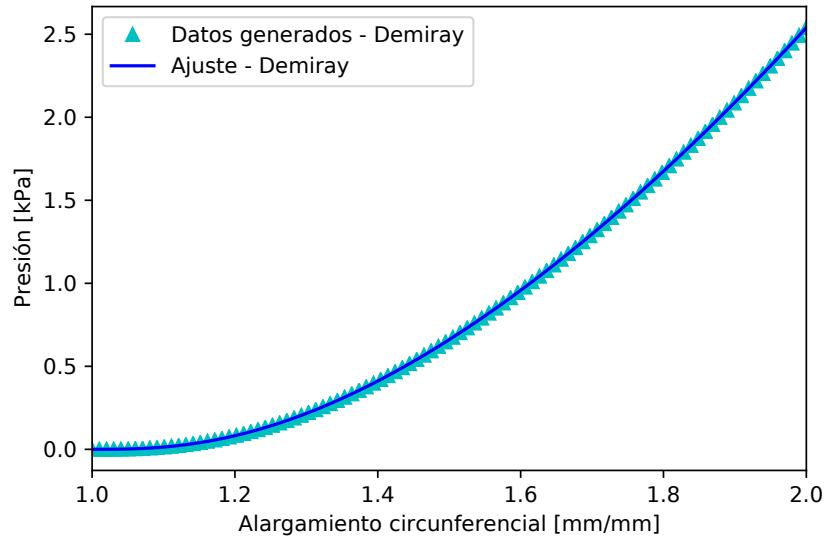


Figura 4.12. Ajuste de ensayo de presurización con modelo de Demiray

4.5.1.2. Ensayos con perturbaciones.

Al agregar ruido a las curvas de los ensayos mecánicos, se está agregando otro grado de dificultad al problema. Esto es debido a que las perturbaciones complejiza el espacio de la función objetivo como se ha visto en la sección 4.4. No se puede asegurar que la solución del ajuste coincida con la teórica ya que al agregar las perturbaciones el óptimo global puede ser otro. Aun así, la solución debería ajustar las curvas con perturbaciones y probablemente los

parámetros obtenidos deberían ser similares a los teóricos.

En las figuras 4.13 y 4.14 se puede observar los datos perturbados y el ajuste correspondiente. Es posible visualizar que el ajuste obtenido maximiza la coincidencia con los datos perturbados. Los parámetros obtenidos, reportados en la tabla 4.5, son muy similares a los teóricos. Es importante destacar que al evaluar los parámetros con los que se generaron la curva, se obtiene un error estándar de 74,74 y el error estándar de la solución obtenida con metaheurística es de 72,36. Esto quiere decir que al agregar perturbaciones experimentales, el óptimo global se ve modificado, ya que la solución obtenida con las estrategias evolutivas es mejor que la solución original.

En este caso, no existe una solución que presente un error estándar nulo, ya que al agregar ruido a las curvas de los ensayos mecánicos el modelo constitutivo no es capaz de modelar el efecto de las perturbaciones.

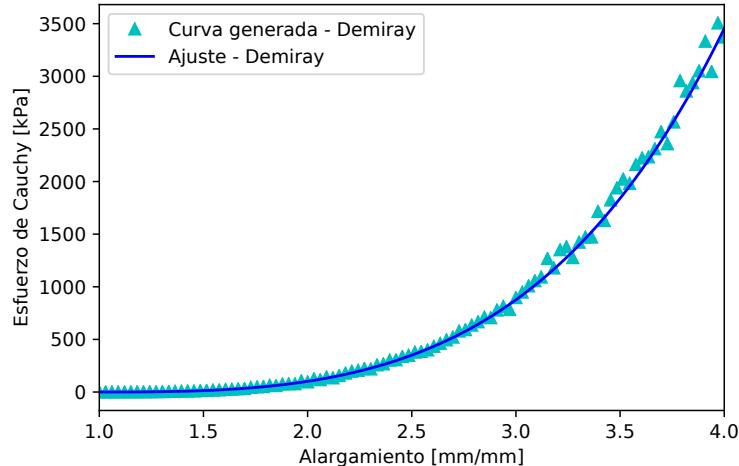


Figura 4.13. Ajuste de ensayo uniaxial con modelo de Demiray con ruido

Es importante reconocer que los parámetros obtenidos con perturbaciones ajustan bien las curvas, pero esto no implica que una función de densidad de energía esté bien definida para diferentes configuraciones de deformación. Solo se puede asegurar un correcto modelo en las cercanías del dominio de los ensayos mecánicos.

Parámetros [kPa]	[ES] Elitista	
	μ	IC 95 %
$k_1 = 20$	19,29	6,62E-3
$k_2 = 0,01$	0,0138	4,13E-5
Error Estándar	72,36	

Tabla 4.5. Parámetros recuperados del modelo de Demiray con ruido

La calidad de los resultados obtenidos demuestra preliminarmente el potencial de estos algoritmos, para caracterizar materiales isótropos.

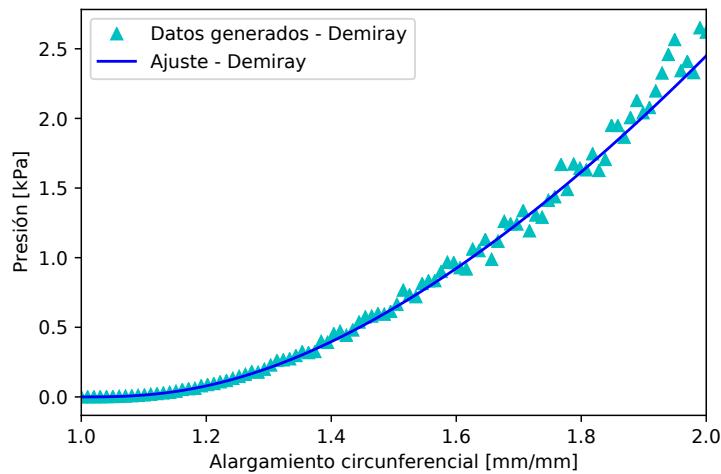


Figura 4.14. Ajuste de ensayo de presurización con modelo de Demiray con ruido

4.6. Estrategias para caracterizar materiales hiperelásticos isótropos incompresibles

En este apartado se plantean diferentes estrategias para caracterizar materiales isótropos (cuasi-incompresibles). En este tipo de materiales se puede escribir la función de densidad de energía como $W(I_1, I_2)$. Si esta función modela correctamente la respuesta mecánica del material para diferentes caminos de deformación, entonces se cumple el objetivo de la caracterización.

Los ensayos mecánicos son las herramientas que permiten obtener la densidad de energía para diferentes caminos de deformación. La información de los ensayos es entregada de forma indirecta, ya que se miden experimentalmente los desplazamientos y las cargas aplicadas. Con la cinemática simplificada de los ensayos mecánicos, es posible obtener una expresión analítica que relacione las deformaciones, las tensiones y el modelo constitutivo usado.

Una vez realizados los ensayos mecánicos, es necesario ajustar los parámetros de un modelo constitutivo con los datos experimentales. Este proceso de ajuste está asociado a un problema de optimización. Este problema consiste en encontrar los parámetros que mejor modelen los datos experimentales.

Siguiendo esta lógica de trabajo, nacen las siguientes preguntas:

- ¿Qué ensayos mecánicos son recomendables realizar?
- Al realizar diferentes ensayos mecánicos ¿Existen ensayos mecánicos redundantes?
- ¿Cómo afectan los errores experimentales en los resultados obtenidos?

- ¿Un modelo con una mayor cantidad de parámetros, necesita una mayor cantidad de ensayos para ser definido correctamente?

La respuesta a estas preguntas se encuentran en las siguientes secciones.

4.6.1. Ensayos mecánicos y configuraciones de deformación

Los ensayos mecánicos son las herramientas que permiten conocer las propiedades de un sólido sujeto a cargas. En los materiales hiperelásticos una función de densidad de energía determina como el material se deformará. Los ensayos mecánicos permiten determinar la función de energía, pero esto se logra de forma indirecta. En la mayoría de los casos, se obtiene el estado de tensión de un material, pero no la densidad de energía. Esta densidad de energía se puede obtener al relacionar la cinemática del cuerpo deformado con las cargas aplicadas. Para un material hiperelástico, homogéneo, isótropo y incompresible se sabe que W depende de I_1 y I_2 . Por lo tanto, para conocer $W(I_1, I_2)$, es necesario obtener experimentalmente diferentes puntos de W en el espacio de los invariantes.

Por ende, se origina la siguiente pregunta **¿Cómo es que los ensayos mecánicos aportan información a W en el espacio de los invariantes I_1 y I_2 ?** Para resolver esta interrogante, se analizan diferentes ensayos mecánicos, que son unos de los más utilizados.

1. **Ensayo de tracción y compresión.**
2. **Ensayo biaxial.**
3. **Ensayo de presurización.**
4. **Ensayo de corte simple.**
5. **Ensayo de corte puro.**

1. Ensayo de tracción y compresión

El ensayo uniaxial es uno de los más utilizados para caracterizar diferentes tipos de materiales, ya sea, en compresión o en tracción. Este ensayo permite conocer el comportamiento de un material ante un modo de deformación simple. La ventaja de este ensayo es la fácil ejecución experimental y una tendencia a la homogeneidad de la deformación. Considerando que el gradiente de deformación es homogéneo, la cinemática de deformación del ensayo uniaxial se puede definir como

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} X_2 \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} X_3 \quad (4.25)$$

La ecuación 4.25 cumple con la incompresibilidad del material. Con esta expresión se procede a calcular el gradiente de deformación del ensayo uniaxial

$$\mathbf{F}_u = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Como el gradiente de deformación 4.26 solo tiene componentes en la diagonal, basta con elevar al cuadrado cada una de las componentes para obtener el tensor de Cauchy-Green por la derecha. Por lo tanto, los invariantes del tensor \mathbf{C} quedan definidos como

$$I_1^u = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}, I_2^u = 2\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1^2}. \quad (4.27)$$

Como el material es incompresible, siempre se cumple que I_1 y I_2 son mayor a 3. El dominio del ensayo uniaxial, en el espacio de los invariantes, se puede visualizar en la figura 4.15.

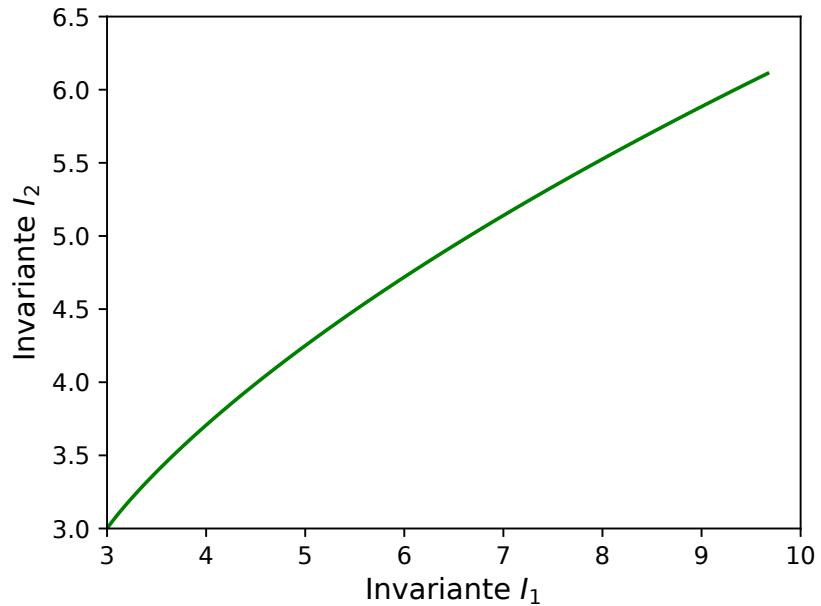


Figura 4.15. Dominio de ensayo de tracción y compresión para un material hiperelástico, isótropo e incompresible

2. Ensayo biaxial

El ensayo biaxial carga de forma controlada una probeta plana en 2 direcciones ortogonales, definiendo un estado de tensión plana. La figura 4.16 ilustra de forma simplificada el ensayo biaxial. Este ensayo permite alargar en diferente magnitud, cada eje de estiramiento

to. Se puede definir la cinemática de este ensayo, al considerar que las deformaciones son homogéneas. Por lo tanto, la cinemática de este ensayo está definida por la ecuación 4.28 :

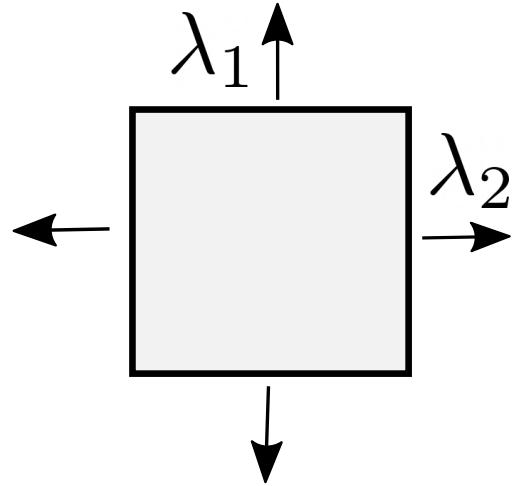


Figura 4.16. Ensayo biaxial.

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2, \quad x_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} X_3 \quad (4.28)$$

Al derivar la expresión 4.28, se obtiene el gradiente de deformación

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Con el gradiente de deformación, se obtiene los invariantes de \mathbf{C}

$$I_1^b = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad I_2^b = (\lambda_1 \lambda_2)^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}. \quad (4.30)$$

Un caso especial es cuando el ensayo biaxial es equiaxial. Esto quiere decir que el alargamiento λ_1 es igual a λ_2 . Los invariantes para este caso, quedan definidos como:

$$I_1^E = 2\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^4}, \quad I_2^E = (\lambda_1)^4 + \frac{2}{\lambda_1^2}. \quad (4.31)$$

Otro caso especial es cuando el alargamiento $\lambda_2 = 1$ y λ_1 es creciente. Los invariantes para este caso quedan definidos como

$$I_1 = 1 + \lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \quad y \quad I_2 = 1 + (\lambda_1)^2 + \frac{1}{\lambda_1^2}. \quad (4.32)$$

Si $\lambda_2 = 1$, entonces se cumple que $I_1 = I_2$. Varios ensayos mecánicos presentan este camino de deformación, asociado a una deformación cortante. Para ilustrar los diferentes caminos de deformación que puede realizar un ensayo biaxial, se presentan diferentes relaciones de estiramientos $\lambda_1 : \lambda_2$. En la figura 4.17 se ilustra los diferentes caminos de deformación,

para diferentes relaciones de estiramiento. Es importante mencionar que como el material es isótropo, una relación $\lambda_1 : \lambda_2$ es igual a una $\lambda_2 : \lambda_1$.

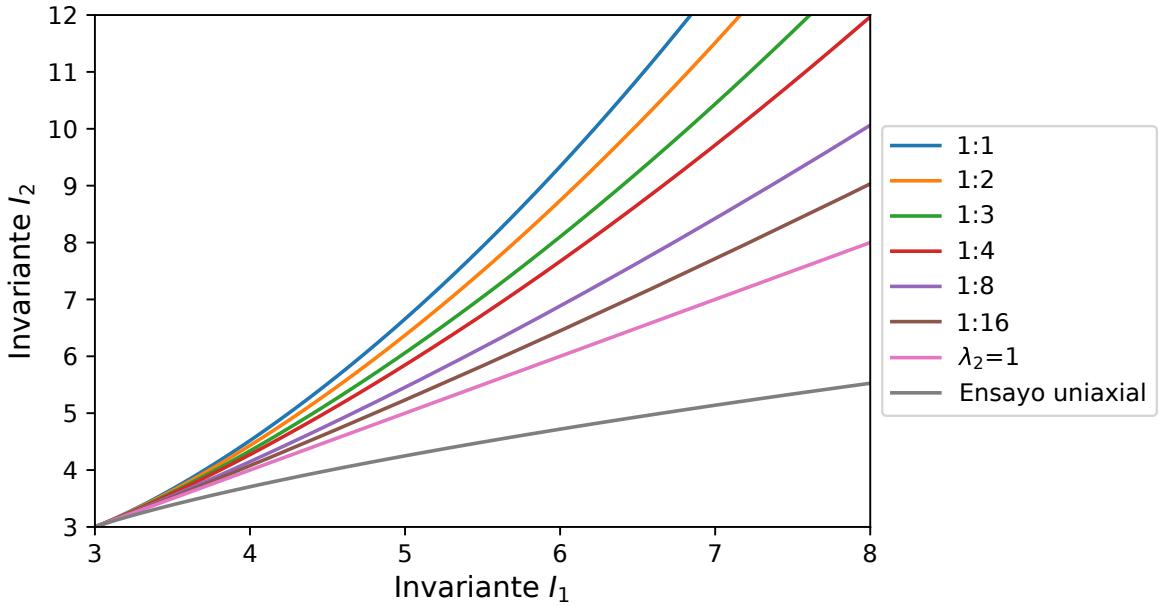


Figura 4.17. Ensayo biaxial en el espacio de los invariantes

En la figura 4.17 se puede apreciar que los caminos de deformación para el caso biaxial, están acotados por el ensayo equiaxial (1:1) y el ensayo con $\lambda_2 = 1$ (1: ∞). Controlando λ_1 y λ_2 , se puede obtener cualquier curva acotada por el ensayo equiaxial y un ensayo con $\lambda_2 = 1$, considerando que la probeta está sujeta a tracción y λ_1 y λ_2 . También combinando acortamientos con alargamientos, se puede lograr el camino de deformación del ensayo uniaxial, al considerar que $\lambda_2 = 1/\sqrt{\lambda_1}$.

En resumen, si el material es incompresible el ensayo biaxial es capaz de generar todos los caminos de deformación posibles, ya que, los invariantes dependen de λ_1 y λ_2 , y con el ensayo biaxial se pueden imponer ambos alargamientos.

3. Ensayo de presurización

El ensayo de presurización consiste en sujetar una probeta cilíndrica y inflar su interior (Véase la figura 4.19). En este ensayo se mide la deformación diametral a medida que se aumenta la presión interna. Las ecuaciones analíticas 4.19 permiten relacionar las deformaciones con la presión, siempre y cuando el material sea isótropo e incompresible.

Para obtener la función de *mapping* [74], es necesario definir la configuración material en coordenadas cilíndricas (R, Θ, Z) , tal que, $A \leq R \leq B$, $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ y $0 \leq Z \leq L$. Si se considera que la probeta deformada tiene un radio interno a , un radio externo b y un largo l ,

se puede obtener la función de *mapping*

$$r^2 = a^2 + \lambda_z^{-1}(R^2 - A^2), \quad \theta = \Theta, \quad z = \lambda_z Z. \quad (4.33)$$

Derivando la expresión 4.33, se obtiene el siguiente gradiente de deformación que es válido para un tubo lo suficientemente largo, tal que no afecte la fijación axial

$$\mathbf{F}_\theta = \begin{bmatrix} \lambda_\theta & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Como el gradiente de deformación 4.34 presenta sólo términos en la diagonal, entonces los invariantes de \mathbf{C} son

$$I_1^\theta = \lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2, \quad I_2^\theta = (\lambda_r \lambda_\theta)^2 + (\lambda_z \lambda_\theta)^2 + (\lambda_z \lambda_r)^2. \quad (4.35)$$

Es importante mencionar que λ_z es un parámetro constante. Un caso peculiar es cuando $\lambda_z = 1$, lo que conlleva a que se cumpla la siguiente ecuación:

$$I_1^\theta = I_2^\theta \quad (4.36)$$

Por lo tanto, cuando $\lambda_z = 1$, el dominio esta determinado por una recta de 45° que pasa por el origen. Sin embargo, la recta existe solo desde (3, 3) hacia adelante, debido a la incompresibilidad del material. En la figura 4.36 se presenta el dominio del ensayo de presurización para diferentes λ_z .

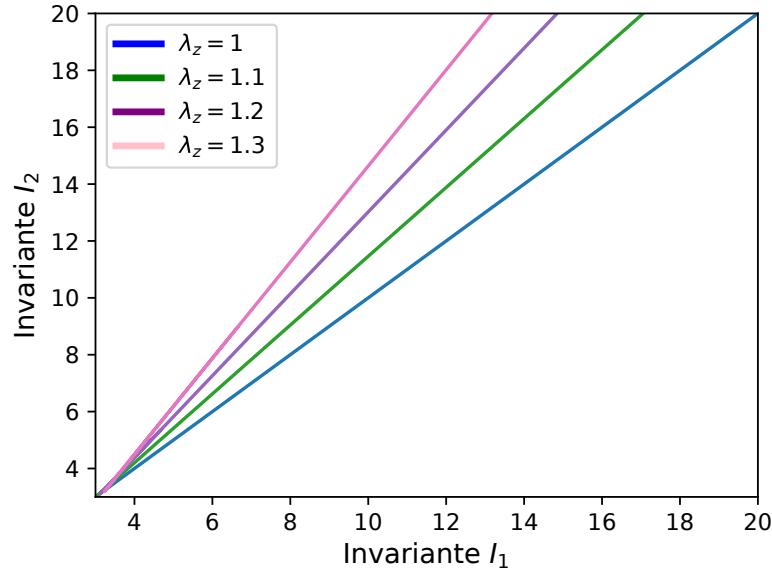


Figura 4.18. Dominio de ensayo de presurización para diferentes λ_z

Un punto importante, es que el ensayo de presurización puede generar caminos de deformación muy similares a los que se obtienen con el ensayo biaxial. Sin embargo, los ensayos presentan diferentes rangos de operación y resolución de las mediciones obtenidas.

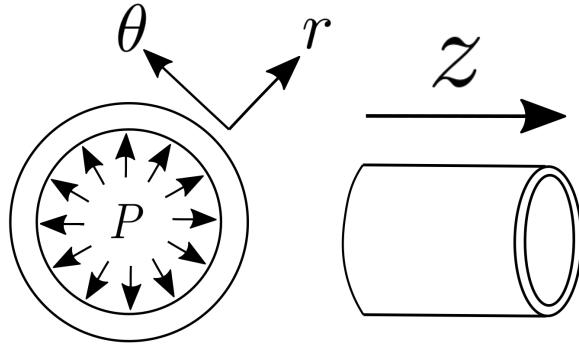


Figura 4.19. Ensayo de presurización

4.- Ensayo de corte simple

En este ensayo, se utiliza un bloque rectangular de material a cuyas caras superior e inferior se adhiere una junta de traslape (Véase figura 4.20). La configuración deformada, en función de la configuración material, queda definida por la ecuación 4.37

$$x_1 = X_1 + kX_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 \quad (4.37)$$

El parámetro k corresponde a la cantidad de deformación cortante. Se deriva la ecuación 4.37 para obtener el gradiente de deformación

$$\mathbf{F}_{cs} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Para calcular los invariantes, es necesario obtener el tensor de Cauchy-Green por la derecha

$$\mathbf{C}_{cs} = \mathbf{F}_{cs}^T \mathbf{F}_{cs} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & k^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Con el tensor 4.39 se obtienen los invariantes en función de k

$$I_1^{cs} = k^2 + 3; I_2^{cs} = k^2 + 3. \quad (4.40)$$

Es importante notar que en este ensayo mecánico se cumple que $I_1^{cs} = I_2^{cs}$. Por lo tanto, el dominio en el espacio de los invariantes, esta determinado por una recta de 45° que inicia

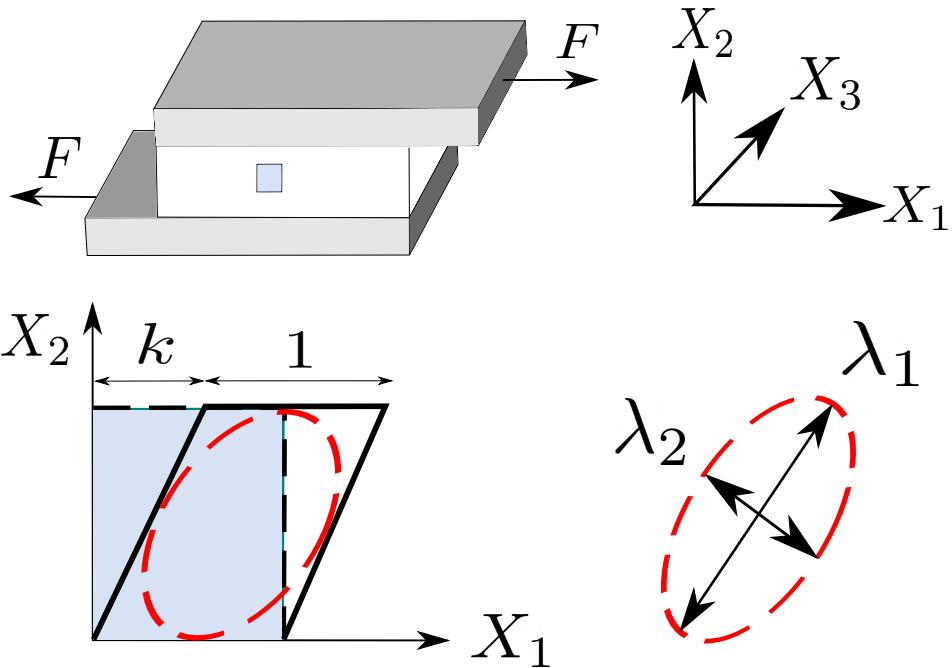


Figura 4.20. Ensayo de corte simple.

en el punto $(3, 3)$. Este ensayo entrega la misma información para $W(I_1, I_2)$, que el ensayo de presurización, cuando $\lambda_z = 1$. Es importante destacar que el ensayo de corte simple a grandes deformaciones deja de ser uniforme debido a la presencia de inestabilidades de compresión.

5.- Ensayo de corte puro

A diferencia del ensayo de corte simple, el ensayo de corte puro se logra utilizando una probeta muy delgada sometida a carga uniaxial (figura 4.21). Como el material es incompresible, la función de *mapping* queda definida por la ecuación 4.41

$$x_1 = \lambda X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3. \quad (4.41)$$

Por lo tanto, el tensor de deformación para cortante puro queda definido como

$$\mathbf{F}_{cp} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

En consecuencia el tensor \mathbf{C} es

$$\mathbf{C}_{cp} = \mathbf{F}_{cp}^T \mathbf{F}_{cp} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

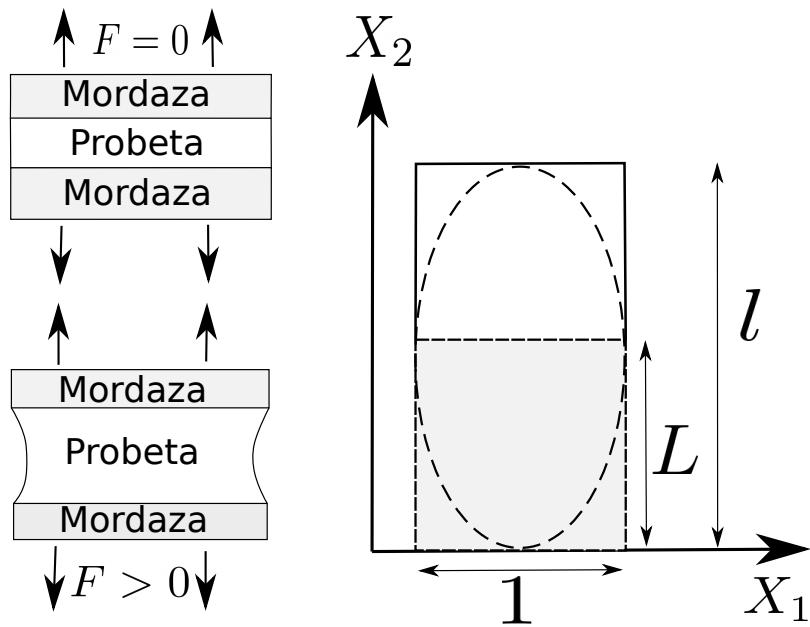


Figura 4.21. Ensayo de corte puro.

Con el tensor 4.43, se calcula los invariantes del ensayo de corte puro

$$I_1^{cp} = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1; I_2^{cp} = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1. \quad (4.44)$$

Al igual que el ensayo de corte simple, se obtiene que $I_1^{cp} = I_2^{cp}$. El dominio del ensayo de corte puro, en el espacio de los invariantes está determinado por una recta de 45° que inicia en el punto $(3, 3)$. Finalmente, se puede apreciar que los ensayos de corte puro, corte simple y presurización con $\lambda_z = 1$, tienen el mismo dominio en el espacio de los invariantes.

Recomendaciones para caracterizar un material hiperelástico isótropo

Se han estudiado diferentes ensayos y cual es el dominio de los invariantes en los que trabajan. Al momento de caracterizar, es importante hacer un muestreo de $W(I_1, I_2)$ para diferentes configuraciones de los invariantes. Como se ilustra en la figura 4.22, cada ensayo muestrea la función W de acuerdo con las posibles combinaciones de I_1 y I_2 . Por lo tanto, es fundamental considerar los siguientes puntos al momento de caracterizar un material:

- Al caracterizar un material con un cierto tipo de ensayo, existe una curva de muestreo para W , determinada por $F(I_1, I_2) = 0$. Solo se puede asegurar que W predecirá correctamente el comportamiento del material en la vecindad del camino de deformación. Un ejemplo claro es el resultado ilustrado en la figura 4.3. En este caso se ajustan los datos de un ensayo de tracción uniaxial y se observa que los parámetros obtenidos ajustan muy bien para este camino de deformación. Sin embargo, a medida que los invariantes se alejan del camino de deformación uniaxial, la función de densidad de

energía tiende a divergir .

- Es aconsejable ajustar un material sujeto a diferentes ensayos mecánicos. Es importante destacar que existen algunos ensayos que pueden llegar a ser redundantes (como el ensayo de corte simple y corte puro). Lo importante es conocer $W(I_1, I_2)$ para diferentes puntos en el espacio de los invariantes.
- Los ensayos de corte puro, corte simple y presurización con $\lambda_z = 1$ cumplen con $I_1 = I_2$. Esto quiere decir que muestran la misma trayectoria para W . Se podría decir que estos ensayos no aportan información distinta para W , pero tienen diferente resolución de muestreo, error experimental, entre otros.
- De los ensayos estudiados, el que presenta una mayor pendiente ($\frac{dI_2}{dI_1}$) es el ensayo equiaxial. Por otro lado, el ensayo con menor pendiente es el ensayo uniaxial. Los ensayos de corte puro, corte simple, uniaxial y presurización pueden ser replicados utilizando el ensayo biaxial. Notar que un ensayo biaxial es capaz de cubrir todos los caminos de deformación de un material incompresible.
- Una estrategia para caracterizar un material es utilizar el ensayo equiaxial (límite superior), ensayo uniaxial (límite inferior) y un ensayo intermedio, como el ensayo de presurización.

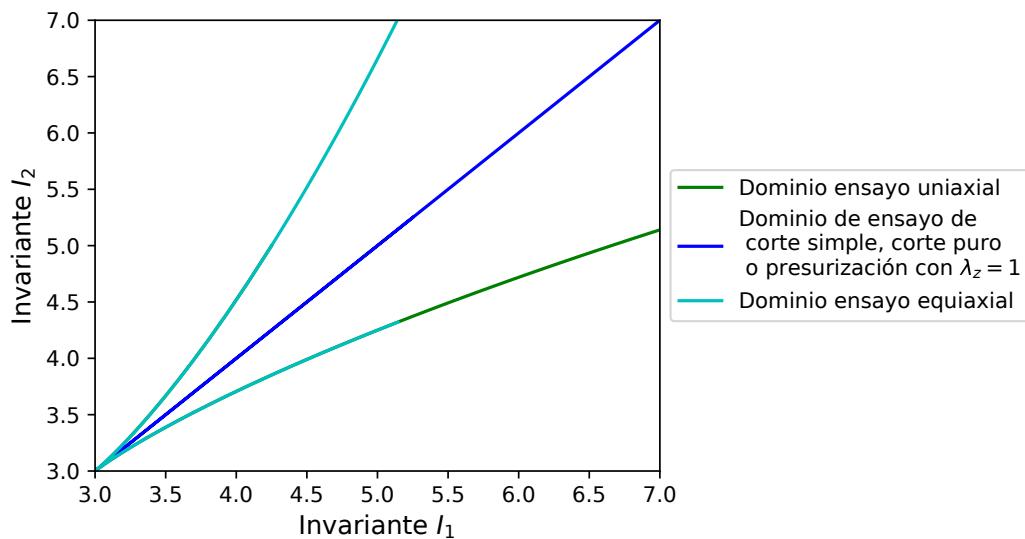


Figura 4.22. Caminos de deformación para los diferentes ensayos mecánicos

4.6.2. Análisis de caracterización isótropa: ensayos mecánicos, número de parámetros y perturbaciones experimentales

En esta sección se estudian como los ensayos mecánicos, número de parámetros de un modelo constitutivo y como perturbaciones experimentales afectan o condicionan la caracterización de un material hiperástico. Para realizar este estudio, se generan curvas experimentales con ecuaciones analíticas basadas en el modelo de Mooney-Rivlin de k parámetros. Además, se generan las curvas los ensayos uniaxial, presurización y equiaxial. **La idea principal es analizar como se condiciona la función objetivo**, cuando:

1. La función objetivo incorpora información de diferentes ensayos mecánicos. En este análisis, se considera los siguientes casos:
 - a) Ajuste ensayo uniaxial.
 - b) Ajuste simultáneos de los ensayos uniaxial y de presurización con una única función objetivo.
 - c) Ajuste simultáneos de los ensayos uniaxial, presurización y equiaxial con una única función objetivo.
2. El modelo constitutivo presenta múltiples grados de libertad. En este caso, los grados de libertad son los valores de C_{ij} del modelo de Mooney Rivlin de k parámetros. El análisis se realiza para todos los $k \in [2, 5]$.
3. Los datos presentan una componente dispersa. La dispersión se simula al sumar un número aleatorio con distribución normal, proporcional a la variable independiente a estudiar.

En resumen, se estudiarán 24 casos diferentes. Cada caso es ajustado utilizando estrategias evolutivas. Por lo tanto, se genera las curvas experimentales (sintéticas) considerando que los parámetros de Mooney-Rivlin ($C_{01}, C_{10}, C_{11}, C_{20}, C_{02}$) son (20, 15, 12, 7, 6), respectivamente. Si el modelo es de i parámetros, se utilizan solo los primeros i coeficientes mencionados anteriormente. Por ejemplo, al generar las curvas de Mooney-Rivlin con $k = 3$, se utilizan solo los coeficientes C_{01}, C_{10}, C_{11} . La función objetivo del ajuste de las curvas se define como

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}^n} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma(\lambda_i, \mathbf{x}))^2 + w_p^2 \sum_{i=1}^m (P_i - P(\lambda_i^c, \mathbf{x}))^2 + w_e^2 \sum_{i=1}^q (\sigma_i^e - \sigma^e(\lambda_i^e, \mathbf{x}))^2. \quad (4.45)$$

La ecuación 4.45 esta basada en la función objetivo 4.21, con la diferencia de que se le agregan los errores cuadráticos del ensayo equiaxial. El símbolo σ_i^e representa el esfuerzo equiaxial experimental, q la cantidad de puntos de este ensayo y $\sigma(\lambda_i^e, \mathbf{x})$ el esfuerzo de

Cauchy analítico, definido por el alargamiento del ensayo y el conjunto de parámetros \mathbf{x} . El peso w_e^2 permite normalizar los errores cuadráticos, y es calculado como

$$w_e = \frac{\sigma_n}{\sigma_q^e} \sqrt{\frac{n}{q}}. \quad (4.46)$$

Las curvas dispersivas, se obtienen al utilizar las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_i = \sigma_i(1 + 0,03rN(0, 1)), P_i = P_i(1 + 0,03rN(0, 1)) \text{ y } \sigma_i^e = \sigma_i^e(1 + 0,03rN(0, 1)), \quad (4.47)$$

donde $rN(0, 1)$ es un número aleatorio con distribución normal estandarizada. Se utilizan los siguientes parámetros para ajustar las curvas experimentales con ES:

- Población inicial = 114,
- Población secundaria = 1000,
- Realizaciones de ES = 100,
- $C_{ij} \in [0, 60]$,
- Generaciones = 100.

La calidad del ajuste obtenido se determina de forma cualitativa y cuantitativa. Esta última mide el error normalizado estándar de cada curva experimental, definido por la ecuación 4.48

$$\text{NRMSD} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}, \quad (4.48)$$

donde la variable n es la cantidad de datos de una curva, y es la medición experimental, \hat{y} es el valor ajustado numéricamente y $\Delta = |y_{max} - y_{min}|$. También se calcula el error relativo de la solución obtenida como

$$\text{Error Relativo} = \frac{\|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{z}\|_2}, \quad (4.49)$$

donde \mathbf{z} es la solución exacta y $\hat{\mathbf{z}}$ es la solución obtenida.

Resultados de ajustes de curvas sin dispersión

Los resultados de los ajustes de las curvas sin dispersión se presentan en la tabla 4.6 y 4.7.

Curva-Sin Dispersión		Parámetros de Mooney-Rivlin			
		2	3	4	5
Ajuste Uniaxial	NRSMD Uniaxial	0	3,03E-06	3,78E-06	3,77E-05
Ajuste Uniaxial -Presurización	NRSMD Uniaxial	0	6,76E-09	3,55E-05	8,41E-05
	NRSMD Presurización	0	1,23E-08	6,50E-06	3,42E-06
Ajuste Uniaxial- Presurización- Equiaxial	NRSMD Uniaxial	0	0	3,32E-07	4,29E-06
	NRSMD Presurización	0	0	3,46E-07	1,61E-05
	NRSMD Equiaxial	0	0	1,84E-07	3,48E-05

Tabla 4.6. NRMSD de ajuste de múltiples curvas sin dispersión.

¿Los parámetros obtenidos presentan un error relativo <0,5 %?							
Curva-Sin ruido		Uniaxial		Uniaxial- Presurización		Uniaxial- Presurización- Equiaxial	
Cantidad de Parámetros de Mooney-Rivlin	2	SI	0,00 %	SI	0,00 %	SI	0,00 %
	3	SI	0,16 %	SI	0,00 %	SI	0,00 %
	4	NO	4,49 %	SI	0,25 %	SI	0,00 %
	5	NO	7,75 %	NO	0,84 %	SI	0,00 %

Tabla 4.7. Evaluación cualitativa y cuantitativa del ajuste de datos experimentales, sin dispersión.

Se realizan las siguientes observaciones de los resultados obtenidos:

- De la tabla 4.6, es posible visualizar que un modelo constitutivo con menos grados de libertad es más fácil de ajustar. Esto es debido a que el espacio de búsqueda está acotado por menos dimensiones.
- De la tabla 4.6 y 4.7 se puede concluir que una mayor cantidad de ensayos mecánicos condiciona la función objetivo. Como se demostró en la sección 4.6.2, los diferentes ensayos mecánicos aportan información nueva a W para diferentes modos de deformación. Esta información permite descartar ciertas regiones, del espacio factible de solución, que dan buen resultado para un ensayo en particular. Por ejemplo, si se realiza el ajuste del ensayo uniaxial, podría ser que los parámetros que ajustan bien a la curva uniaxial, no ajusten bien el ensayo equiaxial. Sin embargo, si se consideran ambos ensayos en la función objetivo, la mejor solución se restringe a un espacio de decisión que ajusta ambas curvas y los parámetros obtenidos son coherentes para diferentes modos de deformación.
- Para estandarizar los errores cuadráticos de los diferentes ensayos mecánicos, se utilizo ponderadores como el de la ecuación 4.46. Al observar el valor de NRSMD de la tabla 4.7, es posible concluir que cuando se ajusta más de un ensayo, los ajustes son balanceados. En otras palabras, no se favorece de forma desproporcionada el ajuste de los otros ensayos, debido a los ponderadores 4.22 y 4.46.

Resultados de ajustes de curvas con dispersión

Los resultados de los ajustes de las curvas con dispersión se presentan en las tablas 4.8 y 4.9.

Curva-Con Dispersión		Parámetros de Mooney-Rivlin			
		2	3	4	5
Ajuste Uniaxial	NRSMD Uniaxial	5,15E-04	6,11E-04	7,51E-03	6,94E-03
Ajuste Uniaxial -Presurización	NRSMD Uniaxial	1,16E-03	1,35E-03	8,19E-03	8,40E-03
	NRSMD Presurización	1,02E-02	4,51E-03	4,38E-04	5,58E-03
Ajuste Uniaxial- Presurización- Equiaxial	NRSMD Uniaxial	1,36E-03	1,25E-03	8,37E-03	8,09E-03
	NRSMD Presurización	1,03E-02	5,43E-03	1,02E-03	5,50E-03
	NRSMD Equiaxial	1,35E-03	4,46E-03	2,04E-03	3,44E-03

Tabla 4.8. NRMSD de ajuste de múltiples curvas con dispersión.

¿Los parámetros obtenidos presentan un error relativo < 20 %?							
Curva-Con ruido		Uniaxial		Uniaxial- Presurización		Uniaxial- Presurización- Equiaxial	
Cantidad de Parámetros de Mooney-Rivlin	2	SI	1,14 %	SI	0,05 %	SI	0,04 %
	3	SI	0,99 %	SI	0,62 %	SI	0,03 %
	4	NO	23,4 %	SI	2,24 %	SI	0,67 %
	5	NO	31,0 %	SI	1,82 %	SI	0,26 %

Tabla 4.9. Evaluación cualitativa y cuantitativa del ajuste de datos experimentales, con dispersión.

Las observaciones de los datos ajustados son las siguientes:

- Como se discute en la sección 4.4.2, la dispersión experimental genera que la función objetivo sea menos sensible al óptimo global y que los parámetros obtenidos puedan diferir de los teóricos. En consecuencia, si un parámetro presenta un error relativo menor al 20 %, se considera que converge al óptimo global.
- Los valores de NRSMD son mayores en el caso dispersivo, ya que la dispersión Gaussiana genera un error base respecto a la tendencia central.
- A pesar de la dispersión se puede obtener parámetros que modelen bien la densidad de energía del material, solo si se considera diferentes modos de deformación.

Consideraciones al momento de caracterizar un material hiperelástico

Se entregan algunas consideraciones, que es recomendable seguir, al momento de caracterizar un material hiperelástico.

- La implementación de diferentes ensayos mecánicos, con diferentes caminos de deformación permite que los parámetros obtenidos modelen correctamente el comportamiento del material. Además, se condiciona el valor de la función objetivo.

- El uso de un modelo constitutivo de múltiples parámetros puede que ajuste bien una curva, debido a la gran cantidad de grados de libertad. Sin embargo, este proceso puede ser engañoso, debido a que la curva puede presentar múltiples soluciones que ajusten muy bien los datos, pero es posible que no funcionen para otros modos de deformación. En otras palabras, un modelo con múltiples grados de libertad necesita información variada que restrinja el comportamiento de la función de densidad de energía, para diferentes modos de deformación.

4.7. Caracterización experimental de material usando estrategia evolutiva

Se realizan ensayos experimentales para caracterizar un material hiperelástico, en este caso **látex**. Para realizar este ensayo se dispone de probetas cuadradas de aproximadamente 45x45 mm. Debido a que la obtención de probetas con cortes perfectos es algo complejo, se utilizan las probetas cuadradas mencionadas anteriormente, cabe señalar que estas presentan bordes irregulares, por lo que se estudia la zona central de la probeta, delimitado por un área de estudio de aproximadamente 16x16 [mm]. Este ensayo es calibrado de forma tal que la deformaciones sean iguales en los dos ejes y así obtener un ensayo equiaxial. En la figura 4.23, se puede observar el ensayo biaxial.

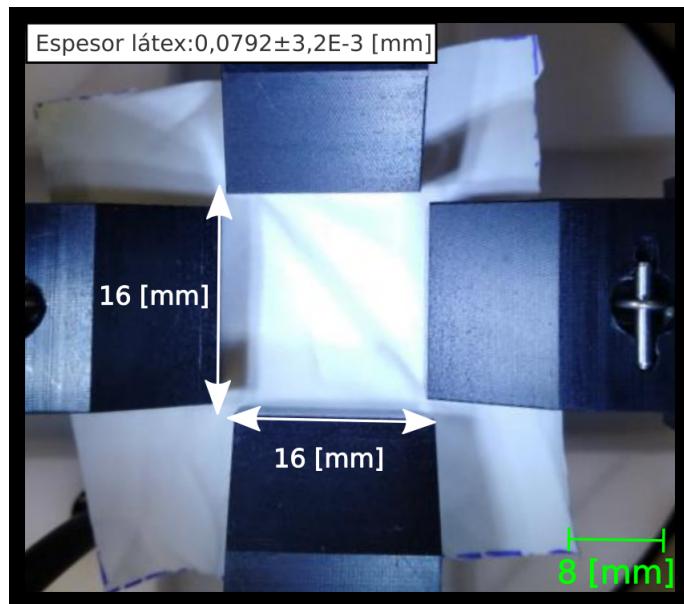


Figura 4.23. Probeta de látex montada en un equipo biaxial.

Se realiza el ensayo biaxial al látex y se muestran aproximadamente 8 probetas, donde 5 son seleccionadas debido a que los otros 3 ensayos presentaron errores al momento de realizar las mediciones. La velocidad de desplazamiento es igual para los dos ejes, con

una velocidad de 25 [mm/min]. Para procesar los datos se promedian las curvas en ambas direcciones y se obtiene la dispersión del conjunto de datos.

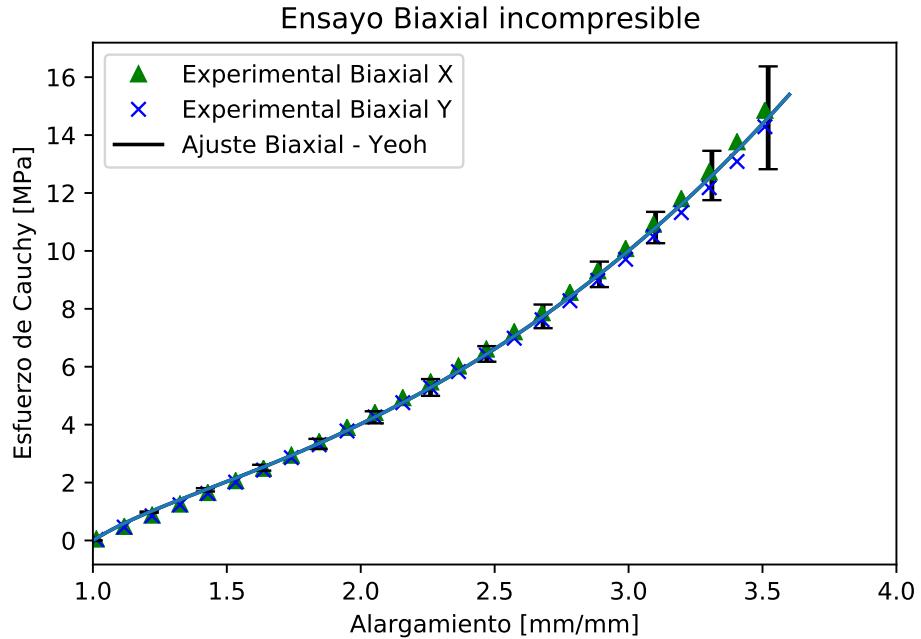


Figura 4.24. Ajuste de datos experimentales con modelo de Yeoh

El espesor de las probetas de látex es de $0,0792 \pm 3,2E-3$ [mm], considerando un intervalo de confianza de 95 %. Los guantes de látex presentan un espesor bastante homogéneo, debido a que son un producto estandarizado. El alargamiento en cada dirección se mide como

$$\lambda_i = \frac{l_i}{L_i}; \quad i = 1, 2. \quad (4.50)$$

donde L_i es el largo inicial y l_i es el largo deformado en la dirección i . El esfuerzo de Cauchy σ_i , se puede calcular como:

$$\sigma_i = \frac{F_i \lambda_i}{A_i} \quad (4.51)$$

La variable i indica la dirección, F_i es la fuerza ejercida en la probeta y A_i es el área en la configuración inicial y λ_i es el alargamiento en la dirección i . Para caracterizar el material se utiliza un modelo dependiente del primer invariante. En este caso, se utiliza el modelo de Yeoh, el cual consiste en una expansión polinómica en función del primer invariante. Se utilizará la expansión de tres términos para realizar el ajuste.

Para determinar los parámetros, se utiliza ES con una población de 114, 100 generaciones y 100 realizaciones.

De los resultados de la tabla 4.10, se puede observar que la solución obtenida con las estrategias evolutivas es consistente, ya que el intervalo de confianza de la solución es menor

Parámetros [MPa]	[ES] Elitista	
	μ	IC 95 %
C_1	4,881E-1	5,224E-4
C_2	10,21	3,712E-5
C_3	7,572E-6	1,009E-6
Error Estándar	0,173	

Tabla 4.10. Parámetros recuperados con el modelo de Yeoh para ensayo biaxial

a 5,3E-4. También es posible observar en la figura 4.23 que, el ajuste obtenido está contenido por el intervalo de confianza de los datos experimentales. Por lo tanto, los parámetros obtenidos permiten modelar mecánicamente el comportamiento del material con un grado de incertidumbre bajo.

Finalmente, el material ha sido caracterizado considerando que es incompresible y que es independiente del segundo invariante. El ajuste de los datos experimentales permite modelar correctamente el material. También es posible observar la isotropía del material, ya que la curva promedio consta de 5 probetas orientadas aleatoriamente y presenta la misma respuesta mecánica en ambas direcciones. Por lo tanto, el material presenta un comportamiento isótropo.

Capítulo 5

Caracterización de material anisótropo con estrategias evolutivas

5.1. Introducción

En este capítulo se estudia como las estrategias evolutivas pueden ser utilizadas para caracterizar material hiperelástico anisótropo. Se discute que ajustar curvas experimentales no es suficiente para caracterizar un material anisótropo y es necesario aplicar algunos criterios de estabilidad. Como no existe un criterio de estabilidad asociado al balance entre isotropía y anisotropía, se proponen algunas restricciones que permiten regular un comportamiento físico coherente del modelo.

Inicialmente, se estudia si es que las estrategias evolutivas son capaces de caracterizar un material anisótropo con una solución conocida. Posteriormente, se discute acerca de la estabilidad del modelo y consideraciones prácticas para caracterizar un material de forma exitosa. Finalmente, se utiliza elementos finitos para simular la respuesta mecánica del material y así ajustar los datos experimentales mediante las estrategias evolutivas, a través de la resolución de un problema inverso.

5.2. Modelo analítico anisótropo para deformación homogénea incompresible

Para caracterizar materiales hiperelásticos anisótropos es necesario desarrollar expresiones matemáticas que permitan modelar su comportamiento mecánico. Los tejidos blandos tienden a presentar un comportamiento hiperelástico anisótropo e incompresible [2] [25]. Es decir, es necesario que se cumpla que $I_3 = \det \mathbf{C} = 1$. Por lo tanto, el esfuerzo de Cauchy se tiene que expresar como

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}. \quad (5.1)$$

El valor de p es el multiplicador de Lagrange que restringe la incompresibilidad. Los materiales biológicos generalmente presentan fibras que refuerzan el material en ciertas direcciones. En el caso de una familia de fibras localmente alineadas, esta puede ser caracterizada utilizando un vector unitario \mathbf{M} . Este tipo de material presenta un comportamiento transversalmente isótropo. Como se utiliza una familia de fibras, es necesario definir la función de densidad de energía $W(\mathbf{C}, \mathbf{M})$. Además, si el material es independiente de la dirección de \mathbf{M} se tiene que cumplir que $W(\mathbf{C}, \mathbf{M}) = W(\mathbf{C}, -\mathbf{M})$, por lo tanto W depende de \mathbf{M} a través del tensor estructural $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$. Un material transversalmente isótropo depende de una función de densidad de energía $W(\mathbf{C}, \mathbf{M} \otimes \mathbf{M})$. Estos dos tensores tienen asociados dos invariantes independientes dados por

$$I_4 = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{M}) \quad \text{e} \quad I_5 = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{C}^2\mathbf{M}) . \quad (5.2)$$

El invariante I_4 tiene interpretación directa como los alargamientos cuadráticos en la dirección de las fibras, pero I_5 no tiene una representación inmediata. En un material incompresible reforzado por una familia de fibras, W depende de I_1, I_2, I_4 y I_5 . Por lo tanto, el esfuerzo de Cauchy depende de los nuevos invariantes para considerar la anisotropía del material y queda definido como

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2W_1\mathbf{b} + 2W_2(I_1\mathbf{b} - \mathbf{b}^2) + 2W_4\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + 2W_5(\mathbf{m} \otimes \mathbf{b}\mathbf{m} + \mathbf{b}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) , \quad (5.3)$$

donde $\mathbf{m} = \mathbf{F}\mathbf{M}$ representa el vector unitario en la configuración deformada, mientras que $W_i = \frac{\partial W}{\partial I_i}$ para $i = 1, 2, 4, 5$.

Se puede obtener el tensor de Cauchy para un estado de tensión biaxial. Este estado de tensión permite modelar el comportamiento de los ensayos uniaxial, corte simple, corte puro, biaxial. Por lo tanto, las componentes del tensor de Cauchy para un estado de tensión plano ($\sigma_{i3} = 0, i = 1, 2, 3$) quedan definidas como

$$\sigma_{11} = 2(b_{11} - b_{33})W_1 + 2[(b_{11} - b_{33})b_{22} - b_{12}^2]W_2 + 2m_1^2W_4 + 4m_1(b_{11}m_1 + b_{12}m_2)W_5 , \quad (5.4)$$

$$\sigma_{22} = 2(b_{22} - b_{33})W_1 + 2[(b_{22} - b_{33})b_{11} - b_{12}^2]W_2 + 2m_2^2W_4 + 4m_2(b_{12}m_1 + b_{22}m_2)W_5 \quad (5.5)$$

y

$$\sigma_{12} = 2b_{12}W_1 + 2b_{12}b_{33}W_2 + 2m_1m_2W_4 + 2[m_1m_2(b_{11}b_{22}) + b_{12}(m_1^2 + m_2^2)]W_5 . \quad (5.6)$$

Los valores de b_{ij} son las componentes del tensor de Cauchy-Green por la izquierda \mathbf{b} , con $b_{13} = b_{23} = 0$ y (m_1, m_2, m_3) son las componentes de \mathbf{m} , con $m_3 = 0$. La ecuaciones

5.4, 5.5 y 5.6 contienen 4 ecuaciones constitutivas independientes W_1, W_2, W_4 y W_5 . Sin embargo, solo 3 componentes de deformación (b_{11}, b_{12}, b_{22}) son incluidas en estas ecuaciones. Se puede observar que no es posible resolver las ecuaciones para W_1, W_2, W_4 y W_5 . Por lo tanto, un estado biaxial no es suficiente para poder caracterizar las propiedades elásticas del material, si es que se consideran los cuatro invariantes.

Cuando el gradiente de deformación \mathbf{F} es homogéneo, se puede escribir en término de los alargamientos principales λ_1, λ_2 y λ_3 , como en la ecuación 4.1. Utilizando la restricción de incompresibilidad, se tiene que $\lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}$. Las componentes del tensor de Cauchy para un gradiente de deformación homogéneo son:

$$\sigma_{11} = 2(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})(W_1 + \lambda_2^2W_2) + 2m_1^2W_4 + 4\lambda_1^2m_1^2W_5, \quad (5.7)$$

$$\sigma_{22} = 2(\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})(W_1 + \lambda_1^2W_2) + 2m_2^2W_4 + 4\lambda_2^2m_2^2W_5 \quad y \quad (5.8)$$

$$\sigma_{12} = 2m_1m_2[W_4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)W_5]. \quad (5.9)$$

Los invariantes en términos de los alargamientos principales se definen como

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}, \quad I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_1^2\lambda_2^2 \quad y \quad (5.10)$$

$$I_4 = m_1^2 + m_2^2, \quad I_5 = \lambda_1^2m_1^2 + \lambda_2^2m_2^2. \quad (5.11)$$

Es importante notar que al no haber deformación cortante ($b_{12} = 0$) existe un σ_{12} distinto de cero, a menos que $m_1 = 0$ o $m_2 = 0$.

Cuando un material presenta 2 familias de fibras, es necesario definir un vector unitario \mathbf{M}' . Así como se agrega la dirección de la familia de fibras, también es necesario definir los invariantes I_6 y I_7 , que son análogos a los invariantes de la familia de fibra \mathbf{M} (I_4 y I_5). La interacción entre las dos familias de fibras puede cuantificarse al agregar el invariante I_8 . Estos invariantes se definen como:

$$I_6 = \mathbf{M}' \cdot \mathbf{C}\mathbf{M}', \quad I_7 = \mathbf{M}' \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{M}' \quad y \quad I_8 = [\mathbf{M} \cdot \mathbf{C}\mathbf{M}'](\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}'). \quad (5.12)$$

Un material anisótropo e incompresible depende de los invariantes $I_1, I_2, I_4, I_5, I_6, I_7$ y I_8 . Es importante observar que el esfuerzo de Cauchy dependerá de las funciones constitutivas $W_i, i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8$. Existen 7 relaciones funcionales y solo 6 componentes en el tensor de deformación \mathbf{b} , las que no permiten determinar las relaciones constitutivas y sería necesario obtener otras ecuaciones para determinar el comportamiento del material. De forma similar, no se puede determinar las funciones constitutivas para el ensayo biaxial. Es por este motivo

que la anisotropía de un material se expresa generalmente como

$$W(I_1, I_4, I_6) . \quad (5.13)$$

Las tensiones de Cauchy para este caso simplificado son

$$\sigma_{11} = 2(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})(W_1) + 2m_1^2W_4 + 2m_1'^2W_6 , \quad (5.14)$$

$$\sigma_{22} = 2(\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})(W_1) + 2m_2^2W_4 + 2m_2'^2W_6 \quad y \quad (5.15)$$

$$\sigma_{12} = 2[m_1m_2W_4 + m_1'm_2'W_6] . \quad (5.16)$$

5.3. Evaluación de estrategias evolutivas para caracterizar un material hiperelástico anisótropo

Caracterizar un material anisótropo suele ser más complejo que caracterizar un material isotropo. La principal diferencia radica en que hay que capturar la anisotropía del material, lo cual se logra con modelos hiperelásticos más complejos y una mayor cantidad de ensayos. Los algoritmos metaheurísticos son aplicados para varios problemas de optimización, pero no se sabe que tan eficientes y robustos son para la caracterización de modelos constitutivos hiperelásticos anisótropos

Con el fin de probar la aptitud de las estrategias evolutivas para caracterizar un material anisótropo, se realiza una prueba de rendimiento. Ésta consiste en encontrar los parámetros característicos de un material a través de la simulación de datos experimentales de tracción de arterias. Para simular los datos de estas, se utiliza el modelo constitutivo de Holzapfel-Gasser-Ogden (Véase la sección 2.7.4) y un conjunto de parámetros conocidos. Cuando se realizan los ensayos experimentales, generalmente se ejecuta un ensayo de tracción longitudinal y otro circunferencial. Las probetas obtenidas de la arteria, son obtenidas y cargadas de acuerdo a lo ilustrado en la figura 5.1.

Se sabe que en las arterias, las familias de fibras de colágeno están en el plano normal a la dirección radial del cilindro. Por ende, cuando se realizan los ensayos de tracción longitudinal y circunferencial se esta estudiando el plano de anisotropía del material.

Las ecuaciones 5.14 y 5.15 gobiernan el comportamiento mecánico del ensayo de tracción uniaxial. El tensor gradiente de deformación para una deformación homogénea y uniaxial queda definido por λ_1 y $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, donde λ_1 es el alargamiento de tracción uniaxial y (λ_2, λ_3) son los alargamientos transversales. Sin embargo, en el caso anisótropo el tensor

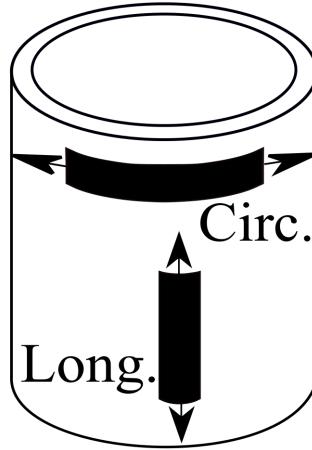


Figura 5.1. Representación gráfica de las probetas obtenidas en una arteria

gradiente de deformación queda definido como

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Como el material es anisótropo, no es posible suponer que $\lambda_2 = \lambda_3$. Por ende, es necesario cuantificar este alargamiento. Una forma de obtenerlo es deduciéndolo de la ecuación 5.15 y esta se puede expresar como:

$$\sigma_{22}(\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{x}) = 0 = 2(\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})(W_1) + 2m_2^2W_4 + 2m_2'^2W_6, \quad (5.18)$$

donde el vector \mathbf{x} representa los parámetros del modelo constitutivo y se es puede ver que, para obtener el alargamiento λ_2 es necesario definir los parámetros del modelo constitutivo. **Por lo tanto, para cada punto de la curva de tracción uniaxial y un conjunto de parámetros constitutivos, es necesario resolver la ecuación no lineal 5.18.**

El modelo constitutivo Holzapfel-Gasser-Ogden [3], utilizado para generar numéricamente las curvas experimentales simuladas, consta de los parámetros $\mathbf{x} = (\mu, \kappa, k_1, k_2, \theta)$. Un punto importante a recalcar es que, al utilizar este modelo, se está considerando que hay dos familias de fibras y que comparten las características mecánicas. Además, las familias de fibras son simétricas respecto al eje longitudinal formando un angulo θ . La simetría se ilustra en la figura 5.2.

Como la familia de fibras son simétricas, se obtiene que el invariante $I_4 = I_6$ para el caso de tracción uniaxial. Con estos cambios, la función de densidad de energía se puede escribir como $W(I_1, I_4)$. Las ecuaciones del esfuerzo de Cauchy 5.14 y 5.15 quedan expresadas como

$$\sigma_{11} = 2(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})(W_1) + 4m_1^2W_4 \quad y \quad (5.19)$$

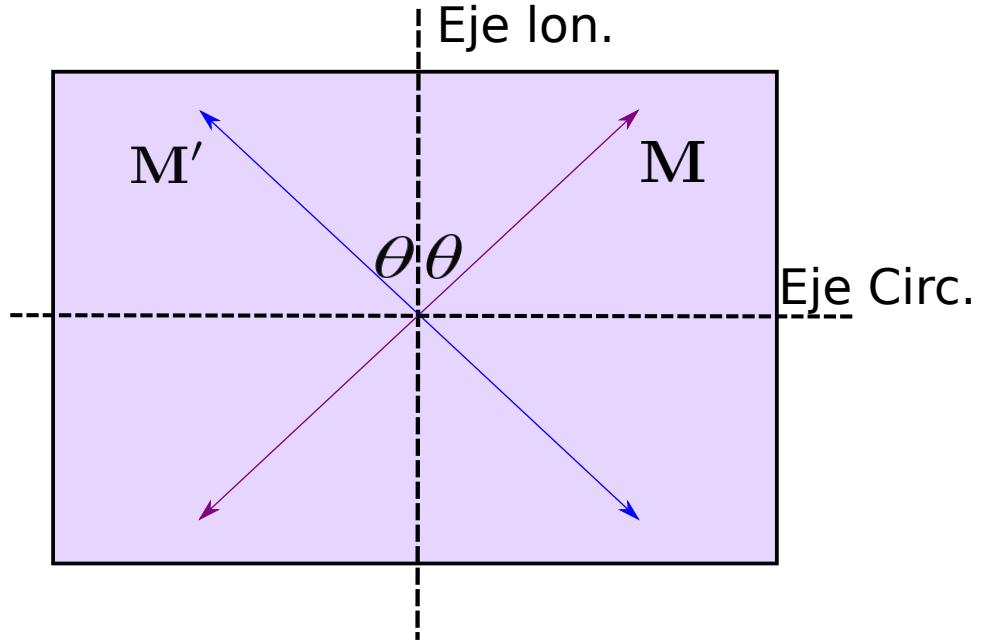


Figura 5.2. Simetría longitudinal de la familia de fibras

$$\sigma_{22}(\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{x}) = 0 = 2(\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})(W_1) + 4m_2^2W_4. \quad (5.20)$$

Con estas ecuaciones se obtiene un modelo implícito del ensayo uniaxial anisótropo y se generan las curvas de tracción longitudinal y circunferencial. La idea es generar las curvas con un conjunto de parámetros conocidos y verificar si mediante el modelo matemático y las curvas generadas, se es posible encontrar los parámetros que mejor ajustan los datos experimentales. Por lo tanto, la solución del problema de optimización tiene que coincidir los parámetros conocidos.

La función objetivo tiene que ajustar dos curvas experimentales y encontrar los cinco parámetros del modelo, esta función es la siguiente

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}^n} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{lon} - \sigma^{lon}(\lambda_i^{lon}, \mathbf{x})}{n\sigma_n^{lon}} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma_i^{cir} - \sigma^{cir}(\lambda_i^{cir}, \mathbf{x})}{m\sigma_m^{cir}} \right)^2, \quad (5.21)$$

donde n y m son la cantidad de puntos de las curvas longitudinal y circunferencial, respectivamente. Los parámetros \mathbf{x} a minimizar, tienen que pertenecer espacio de decisión \mathbf{A}^n . Los argumentos de los sumandos, son la diferencia cuadrática normalizada entre el esfuerzo de Cauchy del modelo y el experimental. La variable σ_i^{lon} o σ_i^{cir} hace referencia al esfuerzo experimental longitudinal y circunferencial. De manera similar, $\sigma^{lon}(\lambda_i, \mathbf{x})$ y $\sigma^{cir}(\lambda_i, \mathbf{x})$ hacen referencia al esfuerzo analítico.

El conjunto de parámetros conocidos, que consisten en la solución del problema del ajuste de los datos experimentales, se presenta en la tabla 5.1. También se detalla el dominio de bús-

queda y los hiperparámetros de las estrategias evolutivas. La solución obtenida del algoritmo evolutivo, siendo posible que en algunas realizaciones del algoritmo se logre convergencia al óptimo global y en otras no. Por lo tanto, se efectúan 100 realizaciones del problema de optimización y se hace un análisis estadístico de las 100 soluciones obtenidas.

Parámetros	Solución conocida	Límite Inferior	Límite Superior
$\mu [kPa]$	22,589	0,00	1,00E+05
$k_1 [kPa]$	224,217	0,00	1,00E+06
k_2	2,464	0,00	1,00E+01
κ	0,285	0,00	0,3333
θ	39,624°	0,0°	90°
Generaciones	150	Población	1140

Tabla 5.1. Hiperparámetros de ES para encontrar una solución conocida

Las curvas generadas con los parámetros conocidos y el ajuste obtenido con las estrategias evolutivas se ilustran en la figura 5.3. Es posible ver a simple vista que el conjunto de parámetros obtenidos ajustan de manera correcta las dos curvas. En la tabla 5.2 se presentan los resultados obtenidos con las estrategias evolutivas, el promedio de las 100 realizaciones coincide con la solución del problema y presentan un intervalo de confianza bastante acotado. Por lo tanto, en este caso todas las soluciones obtenidas son consistentes con el óptimo global, demostrando la capacidad de resolutiva del algoritmo evolutivo.

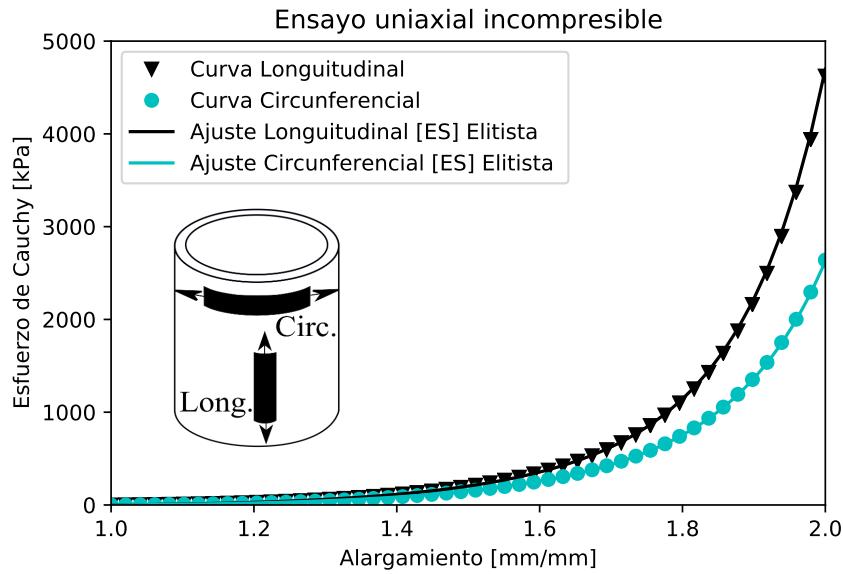


Figura 5.3. Ajuste de una solución conocida de un material anisótropo con estrategias evolutivas

De la tabla 5.2 se puede observar que la estrategia elitista presenta mejores resultados que la estrategia no elitista. En este caso, ambas variantes encuentran el óptimo global, pero

Parámetros	ES Elitista		ES No-Elitista	
	Promedio	95 % IC	Promedio	95 % IC
μ [kPa]	2,2260E+01	8,3100E-02	2,1930E+01	8,9184E-02
k_1 [kPa]	2,1303E+02	2,3413E+00	1,9990E+02	1,2902E+00
k_2	2,3705E+00	1,9879E-02	2,2650E+00	1,4794E-02
κ	2,7391E-01	2,3596E-03	2,6000E-01	1,8826E-03
θ	4,0400E+01	1,7648E-01	4,8742E+01	7,5583E-03
Función objetivo	5,06E-05		7,06E-05	

Tabla 5.2. Resultados del ajuste de una solución conocida utilizando el modelo de Holzapfel-Gasser-Ogden

la estrategia elitista converge más rápido, ya que este tipo de selección presenta una convergencia monótona decreciente [75].

Una forma de ilustrar que los parámetros obtenidos son los correctos, es contrastar los isocontornos de la función de densidad de energía $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de la solución exacta y la solución obtenida. Ya que el material es incompresible, un alargamiento principal queda determinado por los otros y la función de densidad de energía se puede expresar como $W(\lambda_1, \lambda_2)$. En la figura 5.4 se puede visualizar que los isocontornos se sobreponen y que la función de densidad de energía es prácticamente la misma.

Es importante notar que la curva verde y la curva cian representan como varían los alargamientos en el ensayo de tracción. El camino de esta curva no es constante, como en el caso isótropo y esta sujeto a la solución de una ecuación no lineal. Otra forma equivalente para determinar el alargamiento secundario es con la siguiente ecuación

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 0. \quad (5.22)$$

Esta ecuación se puede obtener al desarrollar la ecuación 2.48 y se puede visualizar que se cumple, en la figura 5.4. En otras palabras, se verifica que el gradiente es cero en la intersección con los isocontornos. En el caso de la curva circunferencial también se cumple que el gradiente $\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0$, la única diferencia es que el alargamiento principal es λ_2 y el secundario es λ_1 .

En esta sección se ha demostrado que las estrategias evolutivas son capaces de caracterizar un material hiperelástico anisótropo de forma consistente, utilizando el modelo de Gasser [3]. Es importante reconocer que el éxito de las estrategias evolutivas depende de los hiperparámetros seleccionados y la complejidad del problema a resolver. Otro punto que se discute en secciones posteriores es que ajustar datos experimentales no garantiza una respuesta física coherente y es necesario otro tipo de herramientas.

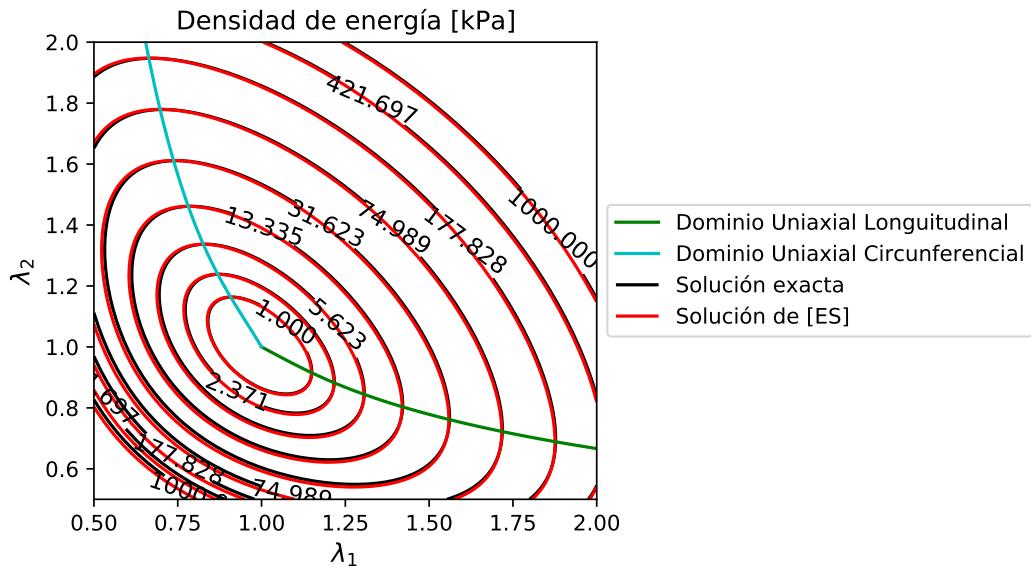


Figura 5.4. Solución exacta y la solución obtenida con ES elitista

5.3.1. Sensibilidad de la función objetivo anisótropa

La complejidad de un problema de optimización está determinado por las características de la función objetivo. En el caso de un material anisótropo, la función objetivo tiende a ser más compleja que en el caso isótropo, por lo que generalmente es necesaria una mayor cantidad de ensayos mecánicos para capturar la anisotropía de forma correcta. Adicionalmente, los modelos matemáticos anisótropos son más complejos y generalmente dependen de una mayor cantidad de variables, por ejemplo, para determinar el valor de la función objetivo 5.21 es necesario resolver una ecuación no lineal.

Solucionar el problema de optimización de la ecuación 5.21 es claramente un problema de optimización no lineal. Este tipo de problema puede presentar discontinuidades, múltiples óptimos locales, un espacio de decisión factible complejo (determinado por restricciones físicas o numéricas), entre otros.

Por lo tanto, como se ha discutido en la sección 4.4, la función objetivo de un material hiperelástico tiende a presentar complejidades asociadas a:

1. **Restricciones**
2. **Regiones valles en el espacio factible de solución**
3. **Multimodalidad**

Para ilustrar la complejidad de la función objetivo 5.21, esta se grafica en la figura 5.5 utilizando solo dos variables de decisión. Se utilizarán como variables de decisión κ y θ , principalmente debido a que estas dos variables pertenecen a un dominio acotado por $[0, 1/3]$ y

$[0, \frac{\pi}{2}]$ respectivamente. Estas dos variables presentan una estrecha relación con la anisotropía del material. La variable κ determina el grado de anisotropía y θ el ángulo de las fibras.

En otras palabras, la función objetivo que se grafica considera que los parámetros (μ, k_1, k_2) son constantes y tienen los valores de la tabla 5.1. La función objetivo modificada es la siguiente:

$$f(\kappa, \theta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{lon} - \sigma_i^{lon}(\lambda_i^{lon}, \kappa, \theta)}{n\sigma_n^{lon}} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma_i^{cir} - \sigma_i^{cir}(\lambda_i^{cir}, \kappa, \theta)}{m\sigma_m^{cir}} \right)^2 \quad (5.23)$$

Los datos experimentales que permiten evaluar la función objetivo son los que se ilustran en la figura 5.3. Como la función objetivo presenta un comportamiento exponencial respecto a los parámetros κ y θ , se aplica logaritmo natural a esta, que se define como

$$LEN = \ln(f(\kappa, \theta) + 1) . \quad (5.24)$$

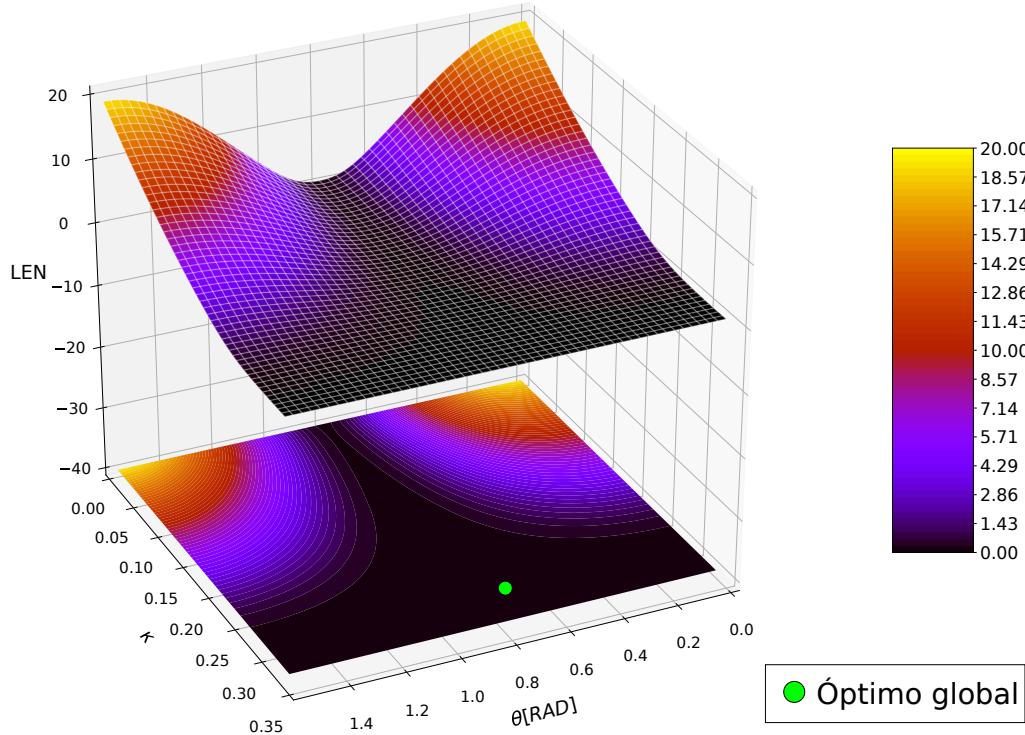


Figura 5.5. Función objetivo anisótropa en términos de (κ, θ)

En este caso, la función objetivo presenta 4 restricciones asociadas al dominio de las variables de decisión (κ, θ) . Las restricciones del parámetro κ están asociadas a la coherencia física y convexidad del modelo (discutida en 2.9.2). Las restricciones del parámetro θ están asociadas a la periodicidad de la función, es decir, sin esta restricción existirían infinitos ópti-

mos globales desplazados $\frac{\pi}{2}$.

La gráfica de la función objetivo se puede visualizar en la figura 5.5, siendo posible apreciar que existe una región valle importante. Los algoritmos dependientes de gradientes tienden a encontrar el valle pero presentan múltiples dificultades en encontrar el óptimo global, como en el caso de la función de Rosenbrook [69].

En la figura 5.6 se ilustra la función objetivo en un intervalo más pequeño, para visualizar lo que ocurre en la región valle. En esta región se puede visualizar que existe una zona que es oblicua, donde se encuentra el óptimo global.

Se puede ver en la figura 5.5, que la función objetivo es bastante compleja, siendo que solo depende de 2 parámetros. Por lo tanto, el problema de optimización que considera las 5 variables de decisión es bastante más complejo. Claramente, utilizar un algoritmo que dependiente de gradientes, no es la mejor opción. En cambio, las estrategias evolutivas son una excelente opción para resolver este tipo de problemas, donde existen múltiples restricciones, puntos de estancamiento, posibles discontinuidades numéricas, multimodalidad, etc.

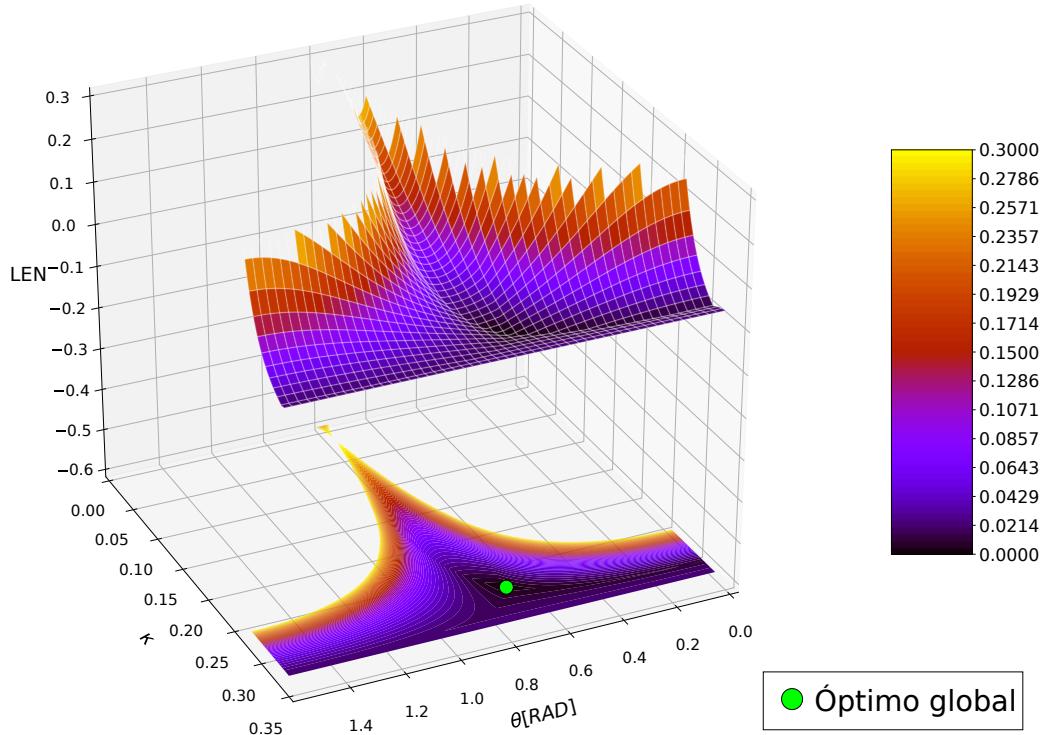


Figura 5.6. Función objetivo anisótropa en términos de (κ, θ) en región valle.

5.4. Alargamientos transversales del ensayo de tracción para cuantificar anisotropía

La gran mayoría de los modelos hiperelásticos anisótropos [5], plantean una descomposición aditiva entre la función de densidad de energía isótropa y anisótropa. Cuando se ajustan los datos experimentales a las ecuaciones analíticas 5.14 y 5.15, se obtiene un conjunto de parámetros que funciona bien para esos datos experimentales, pero no se verifica si el balance entre las funciones de densidad energía isótropas y anisótropas es el correcto.

Una forma directa para cuantificar la anisotropía del material, es a través del ensayo de tracción (figura 5.7). Generalmente, se mide el alargamiento principal λ_1 y la fuerza ejercida en la probeta F . Sin embargo, con el alargamiento λ_2 o λ_3 se puede determinar el balance entre la isotropía y anisotropía del material. A continuación se explicará como cuantificar la anisotropía con los alargamientos transversales. Primero, se considerará que las fibras están orientadas según

$$\mathbf{M} = \cos(\theta_1)\hat{\mathbf{E}}_1 + \sin(\theta_1)\hat{\mathbf{E}}_2; \quad \mathbf{M}' = \cos(\theta_2)\hat{\mathbf{E}}_1 + \sin(\theta_2)\hat{\mathbf{E}}_2. \quad (5.25)$$

Las variables θ_1 y θ_2 permiten determinar la dirección de las fibras en el plano de anisotropía. El vector de fibras deformado se obtiene utilizando el gradiente de deformación 5.17

$$\mathbf{F}\mathbf{M} = \mathbf{m} = \lambda_1 \cos(\theta_1)\hat{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2 \sin(\theta_1)\hat{\mathbf{e}}_2; \quad \mathbf{F}\mathbf{M}' = \mathbf{m}' = \lambda_1 \cos(\theta_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2 \sin(\theta_2)\hat{\mathbf{e}}_2. \quad (5.26)$$

Si es que se considera que la función de energía depende de $W(I_1, I_4, I_6)$ y se remplaza la ecuación 5.26 en 5.18, se obtiene

$$0 = (\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})W_1 + [\lambda_2 \sin(\theta_1)]^2 W_4 + [\lambda_2 \sin(\theta_2)]^2 W_6. \quad (5.27)$$

Despejando λ_2 de la ecuación anterior, se obtiene la siguiente ecuación

$$\lambda_2 = \left[\frac{W_1 + \sin(\theta_1)^2 W_4 + \sin(\theta_2)^2 W_6}{W_1} \right]^{-1/4} \lambda_1^{-1/2} = \Psi^{-1/4} \lambda_1^{-1/2}. \quad (5.28)$$

Se introduce la variable Ψ para simplificar la expresión de la ecuación 5.28. Sin embargo, Ψ esconde un significado físico importante y es que esta expresión esta conformada por un cociente entre la rigidez en el plano de anisotropía y la rigidez isótropa. **En otras palabras, Ψ permite cuantificar el grado de anisotropía del material y el balance entre isotropía y anisotropía.** Se puede observar que $\Psi \geq 1$ y si $\Psi = 1$, significa que el material presenta un comportamiento isótropo en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{e}}_3$.

Como el material es considerado como incompresible, se tiene que cumplir que $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$.

Por ende, la ecuación 5.28 se puede escribir en términos de λ_3 como

$$\lambda_3 = \Psi^{1/4} \lambda_1^{-1/2}. \quad (5.29)$$

Por lo tanto, caracterizar un material considerando los alargamientos transversales permite conocer el balance entre la parte isótropa y anisótropa del material, siempre y cuando se conozca el angulo de las fibras.

Un punto relevante que se discute en las secciones posteriores es que, si la función de densidad de energía anisótropa crece mucho más rápido que la parte isótropa, generando un comportamiento no físico del material. Por esta razón, cuantificar la razón de anisotropía del material es fundamental.

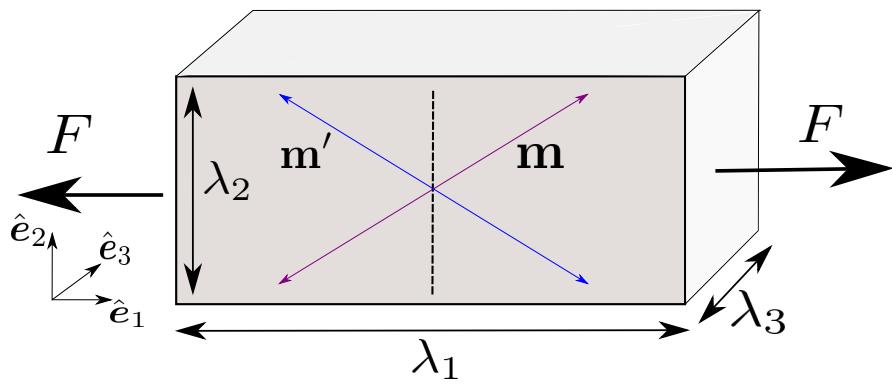


Figura 5.7. Representación de un material anisótropo siendo traccionado, ante un gradiente de deformación homogéneo.

5.5. Ajuste de datos experimentales y respuesta no física anisótropa

En esta sección se utilizan las estrategias evolutivas para obtener los parámetros característicos de datos experimentales publicados en el trabajo de García et al [76]. En este trabajo se realizan experimentos y modelamiento de la respuesta mecánica pasiva de la aorta torácica descendente de humanos. Para ello, se realizan ensayos de tracción uniaxial en muestras sanas de arterias de recién nacidos, jóvenes y adultos. Posteriormente, se utilizan los datos del ensayo de tracción uniaxial para calibrar el modelo de Holzapfel (2000) [2]. Estos parámetros son obtenidos utilizando el algoritmo Levenberg Marquardt.

Por lo tanto, con los datos publicados de tracción uniaxial [76] se procede a calibrar los parámetros del modelo de Holzapfel (2000) con las estrategias evolutivas. Al utilizar el modelo de Holzapfel, se supone que la familia de fibras presenta una simetría en el eje longitudinal de la arteria (figura 5.2). Dada la simetría de las fibras, se obtiene que el invariante $I_4 = I_6$ para el caso de tracción uniaxial. Con estos cambios, la función de densidad de energía se puede

escribir como $W(I_1, I_4)$. Por consiguiente, las ecuaciones del ensayo de tracción uniaxial considerando un gradiente de deformación homogéneo y el modelo de Holzapfel son

$$\sigma_{11} = \mu(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}) + 4\lambda_1^2 \cos(\theta)^2 W_4 \quad y \quad (5.30)$$

$$\sigma_{22} = \mu(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}) + 4\lambda_2^2 \sin(\theta)^2 W_4. \quad (5.31)$$

Cabe mencionar que cuando $\theta = 0$, el ángulo coincide con el eje longitudinal de las arterias. Es importante considerar que hay que rotar 90° el ángulo θ si el ensayo uniaxial se realiza de forma circunferencial. En el trabajo de García et al. [76], las arterias son sometidas a un ensayo de tracción uniaxial longitudinal y uno circunferencial (figura 5.1). Por lo tanto, es necesario ajustar las dos curvas para un mismo conjunto de parámetros. La ecuación 5.21 es utilizada para calibrar los parámetros del modelo, en este caso los parámetros son $\mathbf{x} = (\mu, k_1, k_2, \theta)$.

Existen 3 grupos de datos experimentales, el grupo A son arterias de recién nacidos, el grupo B son arterias de jóvenes y el grupo C son arterias de adultos. Cada uno de estos grupos representa un conjunto de parámetros. Cada grupo representa el valor promedio de los ensayos de tracción de varios individuos. No se entrará en mayor detalle acerca de los individuos, ni la dispersión de los datos, sólo se utilizará la curva promedio para caracterizar el material.

Por lo tanto, se procede a encontrar los parámetros del modelo constitutivo de Holzapfel para cada grupo con las estrategias evolutivas. Los hiperparámetros de las estrategias evolutivas se presentan en la tabla 5.3, indicando el intervalo de búsqueda. Es importante recalcar que el ángulo θ está acotado al intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Parámetros	Límite inferior	Límite superior
μ [kPa]	0,00	1,0E+3
k_1 [kPa]	0,00	1,0E+4
k_2	0,00	6,00
θ °	0,0°	90,0°
Generaciones	150	
Población	1140	
Realizaciones	100	

Tabla 5.3. Parámetros de ES para caracterizar datos de García et al. con modelo de Holzapfel.

Las realizaciones corresponden a la cantidad de veces que se encuentra el conjunto de parámetros de un grupo y este valor determina la consistencia de la solución de las estrategias evolutivas. Los valores experimentales de cada grupo se presentan en la figura 5.8. Además se presenta el ajuste obtenido por García et al. [76] utilizando Levenberg Marquardt y el ajuste de elaboración propia con estrategias evolutivas. A la derecha de los ensayos de tracción se presenta el alargamiento λ_3 de cada una de las curvas de tracción uniaxial (figura 5.7).

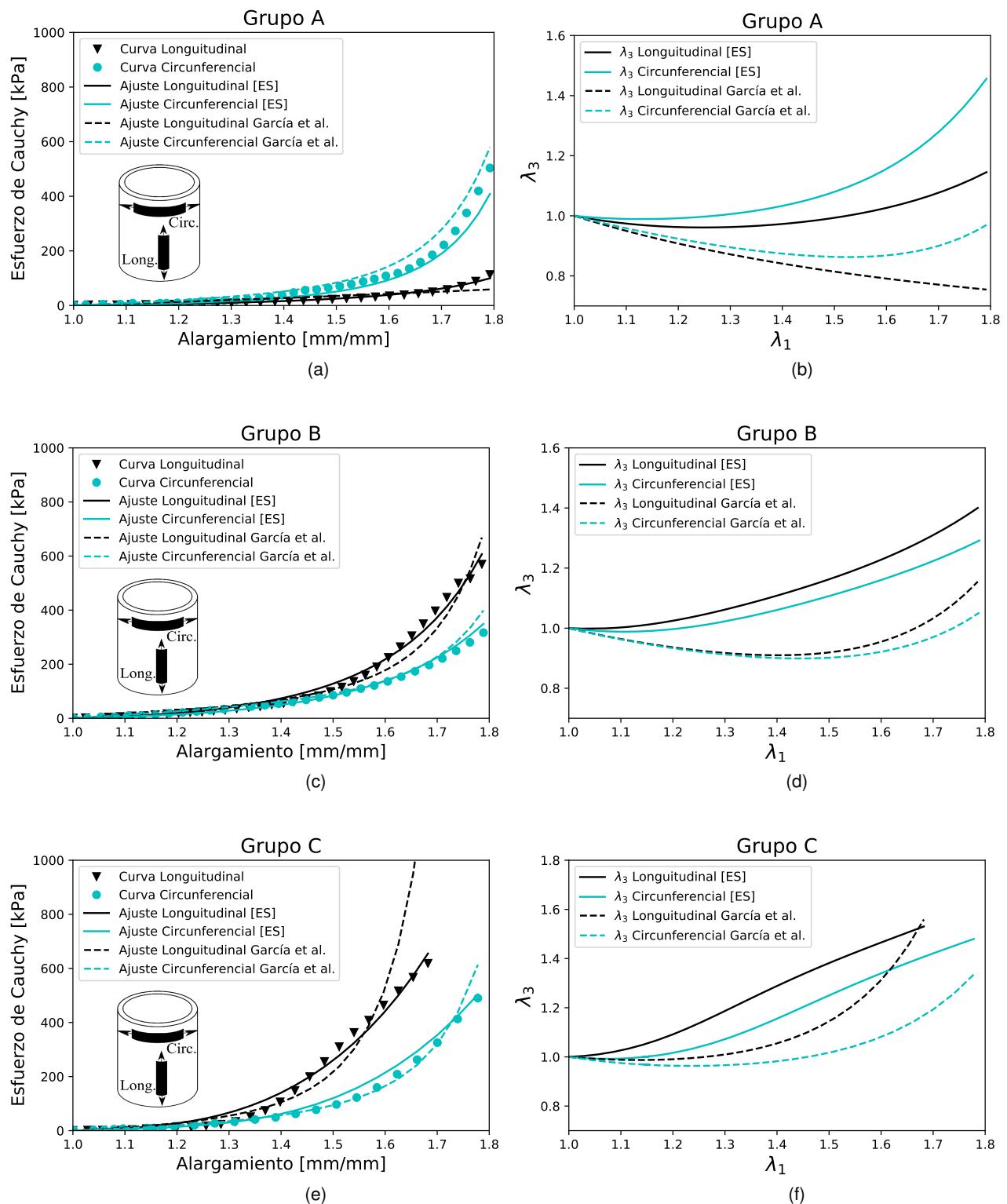


Figura 5.8. Ajustes de los datos experimentales de tracción uniaxial publicados por García et al. [76] y los alargamientos transversales λ_3 correspondientes a cada uno de los grupos experimentales.

Los parámetros obtenidos con las estrategias evolutivas son presentados en la tabla 5.4. La función objetivo 5.23 es utilizada como métrica para evaluar la calidad del ajuste. Mientras menor sea el valor de la función objetivo, menores son los errores cuadráticos estandarizados del modelo. Es posible observar que los parámetros obtenidos con las estrategias evolutivas tienen una mejor coincidencia con los resultados experimentales, que los parámetros publicados por García [76]. Sin embargo, es posible visualizar en la figura 5.8, que existen regiones en los que el alargamiento λ_3 tiende a crecer.

Parámetros		μ [kPa]	k_1 [kPa]	k_2	θ°	Función Objetivo
García et al.	Grupo A	21,972	3,011	0,7667	67,67°	3,921
	Grupo B	37,202	14,985	3,4752	41,88°	3,251
	Grupo C	24,655	45,055	5,3279	42,19°	48,29
ES Elitista	Grupo A	Media	7,390	13,934	2,1334	48,24°
		IC 95 %	2,38E-5	2,96E-5	1,15E-7	4,38E-8
	Grupo B	Media	14,554	61,099	1,0632	43,28°
		IC 95 %	2,08E-5	4,087E-5	1,44E-6	2,01E-8
	Grupo C	Media	13,147	150,36	0,3559	42,40°
		IC 95 %	1,47E-5	6,21E-5	1,25E-6	1,27E-8

Tabla 5.4. Parámetros de los ajustes obtenidos de los datos experimentales de García et al. [76] con estrategias evolutivas y modelo de Holzapfel

El alargamiento λ_3 de un ensayo de tracción uniaxial debería decrecer. No obstante, la solución obtenida de la resolución del problema de optimización presenta una respuesta física inadecuada, ya que λ_3 tiende a crecer.

Es posible observar en la figura 5.8 que, los parámetros obtenidos por García et al. [76], presentan un rango de estabilidad inicial, hasta que λ_3 comienza a crecer. En cambio, con los parámetros obtenidos con las estrategias evolutivas, los alargamientos de λ_3 son más inestables que los publicados. Por lo tanto, es importante destacar los siguientes puntos:

- Las estrategias evolutivas son una herramienta orientada a encontrar el óptimo global de un problema. Debido a como se formula la función objetivo en este caso, se encuentra el conjunto de parámetros que maximiza la coincidencia con los ensayos de tracción uniaxial.
- Los parámetros obtenidos con las estrategias evolutivas (tabla 5.4) presentan un mejor ajuste que los publicados por García, ya que la función objetivo es menor para estos. Sin embargo, los parámetros de García presentan mejor consistencia física que los obtenidos con estrategias evolutivas. Aun así, solo existe un rango acotado de estabilidad.
- Ajustar las curvas del ensayo de tracción uniaxial, no garantiza que el conjunto de parámetros obtenidos tenga consistencia física.

- Es necesario replantear la función objetivo, para que se los parámetros obtenidos maximicen el intervalo de estabilidad.

5.6. Consideraciones de estabilidad de isotropía transversal

Como se discute en la sección anterior, cuando se realiza el ensayo de tracción existe una respuesta no física del material anisótropo. Si el alargamiento principal λ_1 crece, los alargamientos transversales λ_2 y λ_3 deberían de decrecer. Sin embargo, como se ha visto en el modelo de Holzapfel, el alargamiento normal al plano de anisotropía λ_3 , tiende a crecer para cierto conjunto de parámetros.

Un material incompresible y transversalmente isótropo es estable al ser traccionado de forma uniaxial en el plano de anisotropía, presenta un alargamiento normal a este plano decreciente. Si se considera que el gradiente de deformación es homogéneo para el caso de tracción uniaxial como en la ecuación 5.17, el criterio de estabilidad transversal se define como

$$\frac{d\lambda_3}{d\lambda_1} \leq 0. \quad \text{Criterio de estabilidad transversal} \quad (5.32)$$

5.6.1. Ecuaciones de estabilidad transversal para dos familias de fibras

En esta sección se desarrollan las ecuaciones que permiten determinar si un material presenta estabilidad transversal. Si se considera que la función de densidad de energía depende de $W(I_1, I_4, I_6)$, entonces esta función se puede escribir en términos de los alargamientos principales

$$W(I_1, I_4, I_6) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (5.33)$$

Como se sabe que el material es incompresible y que $\lambda_3 = 1/(\lambda_1\lambda_2)$, entonces la función de densidad de energía se puede escribir como

$$W(I_1, I_4, I_6) = W(\lambda_1, \lambda_2). \quad (5.34)$$

El plano de anisotropía está conformado por los vectores de las familias de fibras fibras en la configuración material (figura 5.7)

$$\mathbf{M} = \cos(\theta_1)\hat{\mathbf{E}}_1 + \sin(\theta_1)\hat{\mathbf{E}}_2; \quad \mathbf{M}' = \cos(\theta_2)\hat{\mathbf{E}}_1 + \sin(\theta_2)\hat{\mathbf{E}}_2. \quad (5.35)$$

Las variables θ_1 y θ_2 permiten determinar la dirección de las fibras en el plano de aniso-

tropía. El vector de fibras deformado se obtiene utilizando el gradiente de deformación 5.17

$$\mathbf{FM} = \mathbf{m} = \lambda_1 \cos(\theta_1) \hat{e}_1 + \lambda_2 \sin(\theta_1) \hat{e}_2; \quad \mathbf{FM}' = \mathbf{m}' = \lambda_1 \cos(\theta_2) \hat{e}_1 + \lambda_2 \sin(\theta_2) \hat{e}_2. \quad (5.36)$$

Con el vector de fibras deformadas, se pueden obtener los invariantes (I_1, I_4, I_6) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}, \\ I_4 &= \lambda_1^2 \cos(\theta_1)^2 + \lambda_2^2 \sin(\theta_1)^2 \quad y \\ I_6 &= \lambda_1^2 \cos(\theta_2)^2 + \lambda_2^2 \sin(\theta_2)^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Con las ecuaciones planteadas se puede establecer el criterio de estabilidad transversal, en función de las propiedades del modelo anisótropo. Como punto de partida se recuerda, de la ecuación 5.29, que el alargamiento transversal λ_3 puede ser escrito como

$$\lambda_3 = \Psi^{1/4} \lambda_1^{-1/2}, \quad (5.38)$$

donde Ψ puede entenderse como la relación entre la anisotropía e isotropía transversal del material

$$\Psi = \left[\frac{W_1 + \sin(\theta_1)^2 W_4 + \sin(\theta_2)^2 W_6}{W_1} \right]. \quad (5.39)$$

Por lo tanto, si se reemplaza la ecuación 5.38 en la inecuación 5.40 se obtiene

$$\frac{d\lambda_3}{d\lambda_1} = \frac{1}{4} \Psi^{-3/4} \lambda_1^{-1/2} \frac{d\Psi}{d\lambda_1} - \frac{1}{2} \Psi^{1/4} \lambda_1^{-3/2} \leq 0. \quad (5.40)$$

De las ecuaciones de estabilidad material 2.94, se sabe que $W_k > 0$ para $k = (1, 2, 4)$. Por lo tanto $\Psi \geq 1$. También se sabe que $\lambda_1 > 0$ y por ende la inecuación 5.40 se puede escribir como

$$\frac{d\Psi}{d\lambda_1} \leq \frac{2\Psi}{\lambda_1}. \quad (5.41)$$

Una observación importante es que si Ψ es constante para $\lambda_1 > 1$, entonces el criterio de estabilidad se cumple (recordar que $\Psi \geq 1$). Es importante destacar que la ecuación 5.41 establece que la estabilidad transversal se puede controlar a través de la tasa de crecimiento de la energía anisótropa del material. Una forma alternativa de presentar la inecuación 5.41, es expresar la derivada de Ψ en términos de λ_1 y λ_2

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} \leq \frac{2\Psi}{\lambda_1}. \quad (5.42)$$

Para evaluar $\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}$ se utiliza la condición de incompresibilidad y se obtiene la siguiente

expresión

$$\frac{d\lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)}{d\lambda_1} = \frac{-1}{\lambda_1^2 \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} \leq 0 \Rightarrow \frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} \geq \frac{-\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (5.43)$$

Al remplazar la inecuación 5.43 en 5.41 se obtiene

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \Psi}{d\lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \frac{2\Psi}{\lambda_1}. \quad (5.44)$$

La ecuación 5.44 puede ser utilizada para establecer el criterio de estabilidad transversal en función de las derivadas de I_1 , I_4 y I_6 . Primero, es necesario aplicar la regla de la cadena en $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1}$ y $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2}$ de manera que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} &= \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_6} \frac{\partial I_6}{\partial \lambda_1} \quad y \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} &= \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_6} \frac{\partial I_6}{\partial \lambda_2}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Al substituir la ecuación 5.37 en la ecuación 5.45 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} &= 2\Psi_1[\lambda_1 - \lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}] + 2\Psi_4\lambda_1\cos(\theta_1)^2 + 2\Psi_6\lambda_1\cos(\theta_2)^2 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} &= 2\Psi_1[\lambda_2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3}] + 2\Psi_4\lambda_2\sin(\theta_1)^2 + 2\Psi_6\lambda_2\sin(\theta_2)^2, \end{aligned} \quad (5.46)$$

donde $\Psi_i = \frac{\partial \Psi}{\partial I_i}$ para $i = 1, 2, 4$. La ecuación 5.46 es evaluada en la inecuación 5.44. Tras simplificar la expresión obtenida y ordenar los términos se obtiene

$$\Psi_1[\lambda_1^2 - \lambda_2^2] + \Psi_4[\lambda_1^2\cos(\theta_1)^2 - \lambda_2^2\sin(\theta_1)^2] + \Psi_6[\lambda_1^2\cos(\theta_2)^2 - \lambda_2^2\sin(\theta_2)^2] \leq \Psi. \quad (5.47)$$

Finalmente, se obtiene una inecuación que permite determinar si el material es transversalmente estable en función de los invariantes. En las secciones posteriores, se utilizará la inecuación para demostrar propiedades importantes de los modelos constitutivos anisótropos.

5.6.2. Estabilidad transversal del modelo de Holzapfel

En esta subsección se demuestra que el modelo de Holzapfel [10] es transversalmente **inestable** para un alargamiento λ_1 que tiende a infinito. Este modelo constitutivo esta dado por

$$W(I_1, I_4, I_6) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} (\exp(k_2(I_i - 1)^2) - 1]. \quad (5.48)$$

Para simplificar la inecuación 5.47, se supone que existe un ángulo crítico θ , que coincide con la dirección de ambas familias de fibras. Por ende, solo es necesario considerar el

invariante I_4 . Además, es posible observar que Ψ es independiente de I_1

$$\Psi(I_4) = \frac{\mu/2 + \sin(\theta)^2 W_4(I_4)}{\mu/2} . \quad (5.49)$$

Se substituir la ecuación 5.49 en la inecuación 5.47 se obtiene

$$\Psi_4[\lambda_1^2 \cos(\theta)^2 - \lambda_2^2 \sin(\theta)^2] \leq \Psi . \quad (5.50)$$

De evaluar las derivadas y simplificar la inecuación 5.50 se llega a la siguiente inecuación

$$W_{44}[\lambda_1^2 \cos(\theta_1)^2 - \lambda_2^2 \sin(\theta_1)^2] - \frac{\mu}{2 \sin(\theta)^2} \leq W_4 . \quad (5.51)$$

A partir de la inecuación 5.51 es posible determinar que si $\theta = \pi/2$ ó $\theta = 0$, entonces se cumple la estabilidad transversal del material. Por lo tanto, el ángulo crítico de inestabilidad transversal θ debe pertenecer al intervalo $]0, \pi/2[$. Para continuar el desarrollo de la inecuación 5.51, se calculan las derivadas del modelo de Holzapfel

$$\begin{aligned} W_4 &= k_1[I_4 - 1]e^{k_2(I_4-1)^2} \quad y \\ W_{44} &= e^{k_2(I_4-1)^2}[k_1 + 2k_1k_2(I_4 - 1)^2] . \end{aligned} \quad (5.52)$$

Al remplazar las ecuaciones 5.52 en 5.51 y posteriormente simplificar se obtiene

$$\left(\frac{k_1}{I_4 - 1} + 2k_1k_2(I_4 - 1)\right)(\lambda_1^2 \cos(\theta)^2 - \lambda_2^2 \sin(\theta)^2) \leq \frac{\mu}{2 \sin(\theta)^2} e^{-k_2(I_4-1)^2} + k_1 . \quad (5.53)$$

Es importante mencionar que la inecuación anterior se obtuvo considerando que

$$\lambda_2 \in]0, 1]; \quad \lambda_1 \geq 1; \quad k_1, k_2, \mu, I_4 > 0 . \quad (5.54)$$

Si $\lambda_1 \rightarrow \infty$, entonces $I_4 \rightarrow \infty$ y $\lambda_2 \rightarrow 0$. Al considerar que λ_1 tiende infinito en la inecuación 5.53, se obtiene

$$\infty \leq k_1 . \quad (5.55)$$

Como la inecuación 5.55 no se cumple, entonces **el modelo de Holzapfel no es estable transversalmente**. Es decir, existe un λ_x lo suficientemente grande, que para todo $\lambda_1 > \lambda_x$ el modelo de Holzapfel no es estable.

5.6.3. Estabilidad del modelo de Gasser

En esta subsección se demuestra que el modelo de Gasser [3] es transversalmente **estable** para un alargamiento λ_1 que tiende a infinito. Este modelo constitutivo está dado por

$$W(I_1, I_4, I_6) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} (\exp(k_2(I_1\kappa + (1 - 3\kappa)I_i - 1)^2) - 1). \quad (5.56)$$

Para demostrar la estabilidad del modelo, se supone que existe un ángulo crítico θ que coincide con la dirección de ambas familias de fibras. Por ende, solo es necesario considerar el invariante I_4 . Además, es posible observar que Ψ depende de I_1 y I_4

$$\Psi(I_1, I_4) = \frac{W_1(I_1, I_4) + \sin(\theta)^2 W_4(I_1, I_4)}{W_1(I_1, I_4)}. \quad (5.57)$$

Al calcular las derivadas del modelo de Gasser se obtiene

$$\Psi(I_1, I_4) = 1 + \frac{k_1 E_4 (1 - 3\kappa) \sin(\theta)^2}{\mu/2 + e^{-k_2 E_4^2} + k_1 \kappa E_4}, \quad (5.58)$$

donde el valor de E_4 está definido por

$$E_4 = I_1\kappa + (1 - 3\kappa)I_4 - 1. \quad (5.59)$$

Si $\lambda_1 \rightarrow \infty$, entonces $I_1 \rightarrow \infty$, $I_4 \rightarrow \infty$ y $E_4 \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el valor de Ψ cuando λ_1 tiende a infinito es

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \Psi = 1 + \frac{(1 - 3\kappa) \sin(\theta)^2}{\kappa}; \quad \kappa \neq 0. \quad (5.60)$$

El valor de κ debe pertenecer al intervalo $[0, 1/3]$. Es posible observar que cuando $\kappa = 0$, el modelo de Gasser es idéntico al modelo de Holzapfel y presenta inestabilidad transversal. Sin embargo, si el valor de κ pertenece al intervalo de $[0, 1/3]$, entonces el valor de Ψ converge a un valor real positivo cuando $\lambda_1 \rightarrow \infty$. Como el valor de Ψ converge a una constante positiva, entonces

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{d\Psi}{d\lambda_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa \in [0, 1/3]. \quad (5.61)$$

Por lo tanto, con las resultados de 5.60 y 5.61, se evalúa la inecuación 5.41:

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{d\Psi}{d\lambda_1} \leq \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{2\Psi}{\lambda_1} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 0 \quad (5.62)$$

Como la inecuación 5.62 se cumple, entonces **el modelo de Gasser es estable transversalmente**. Es decir, existe un λ_x lo suficientemente grande, que para todo $\lambda_1 > \lambda_x$ el modelo de Gasser es estable.

5.6.4. Función de penalización para estabilidad transversal

Como se ha visto en la sección 5.5, ajustar las curvas de los ensayos de tracción longitudinal y circunferencial no garantizan la estabilidad transversal del modelo. Por lo tanto, es necesario regularizar el comportamiento físico de los parámetros obtenidos.

Una de las formas más fáciles de estabilizar la respuesta mecánica de los parámetros obtenidos del ajuste experimental, es medir y considerar en el ajuste los alargamientos transversales (λ_2 ó λ_3). Sin embargo, realizar el montaje experimental para medir los alargamientos transversales puede resultar complicado.

En esta subsección se presenta una alternativa numérica para definir el espacio de decisión factible, que presenta estabilidad transversal en el rango de los datos experimentales. Como $\Psi \geq 1$, la inecuación 5.41, que define la estabilidad transversal se puede escribir como

$$\frac{d\Psi}{d\lambda_1} \leq \frac{2\Psi}{\lambda_1} h(\lambda_1), \quad (5.63)$$

donde $h(\lambda_1)$ es una función real $\in [0,1]$. Esta función es utilizada para definir que tan estricto es el criterio de estabilidad transversal. Además, esta función permite modular el grado de anisotropía del material en el dominio de los parámetros estables. Con el criterio de estabilidad 5.63 se puede definir un término penalizador y establecer la siguiente función objetivo

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}^n} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{lon} - \sigma^{lon}(\lambda_i^{lon}, \mathbf{x})}{n\sigma_n^{lon}} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma_i^{cir} - \sigma^{cir}(\lambda_i^{cir}, \mathbf{x})}{m\sigma_m^{cir}} \right)^2 + g(\mathbf{x}, \lambda_i^{lon}, \lambda_i^{cir}), \quad (5.64)$$

donde g representa la función de penalización y esta definida como

$$g(\mathbf{x}, \lambda_i^{lon}, \lambda_i^{cir}) = \begin{cases} C, & \text{Si } \frac{d\Psi}{d\lambda_1} > \frac{2\Psi}{\lambda_1} h(\lambda_1) \quad \forall \quad \lambda_1 \in \{\lambda_i^{cir}, \lambda_i^{lon}\} \\ 0, & \text{De otra manera} \end{cases}. \quad (5.65)$$

La constante C es un valor muy grande que penaliza la función objetivo cuando la estabilidad transversal no se cumple. Con la función objetivo 5.64 se puede encontrar un conjunto de parámetros que ajusta a los datos de tracción uniaxial y presenta estabilidad transversal.

Un punto importante es que la función $h(\lambda_1)$ puede ser simplificada como una constante. Un valor recomendado para el modelo de Gasser es $h = 0,7$. Si $h = 1$, el conjunto de parámetros obtenidos puede que en algunas regiones λ_3 esté en la condición critica de estabilidad. En cambio, si $h = 0$, se obtiene un conjunto de parámetros con un comportamiento totalmente isótropo. En resumen, se recomienda la siguiente función de penalización para el modelo de Gasser:

$$g_1(\mathbf{x}, \lambda_i^{lon}, \lambda_i^{cir}) = \begin{cases} C, & \text{Si } \frac{d\Psi}{d\lambda_1} > \frac{7\Psi}{5\lambda_1} \quad \forall \quad \lambda_1 \in \{\lambda_i^{cir}, \lambda_i^{lon}\} \\ 0, & \text{De otra manera} \end{cases}. \quad (5.66)$$

5.7. Ajuste de datos experimentales con criterio de estabilidad transversal

Al igual que en la sección 5.5, en esta sección se ajustan los datos experimentales de García et al. [76]. No obstante, en esta sección se regulariza la estabilidad transversal de los parámetros obtenidos. Como ya se ha demostrado, el modelo de Holzapfel es inherentemente inestable para un alargamiento uniaxial que tiende a infinito. Por lo tanto, se utiliza el modelo de Gasser para caracterizar los datos experimentales, ya que el modelo de Gasser es estable para un alargamiento que tiende infinito (si $\kappa \neq 0$).

Para asegurar la estabilidad de los parámetros obtenidos, se utiliza el término penalizador de la ecuación 5.66 y la siguiente función objetivo

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}^n} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{lon} - \sigma^{lon}(\lambda_i^{lon}, \mathbf{x})}{n\sigma_n^{lon}} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma_i^{cir} - \sigma^{cir}(\lambda_i^{cir}, \mathbf{x})}{m\sigma_m^{cir}} \right)^2 + g_1(\mathbf{x}, \lambda_i^{lon}, \lambda_i^{cir}). \quad (5.67)$$

Con esta función objetivo se pretende encontrar los parámetros $\mathbf{x} = (\mu, \kappa, k_1, k_2, \theta)$ del modelo de Gasser que sean estables y presenten el mejor ajuste posible. Para evaluar el esfuerzo analítico de tracción uniaxial de Cauchy, se utilizan las ecuaciones 5.14 y 5.15.

Con las estrategias evolutivas se ajustarán los datos experimentales de los grupos A, B y C, presentados en la figura 5.8. Los parámetros de búsqueda de la estrategias evolutivas se presentan en la tabla 5.5.

Parámetros	Límite inferior	Límite superior
μ [kPa]	0,00	1,0E+3
k_1 [kPa]	0,00	1,0E+4
k_2	0,00	6,00
κ	0,00	1/3
θ °	0,0°	90,0°
Generaciones	150	
Población	1140	
Realizaciones	100	

Tabla 5.5. Parámetros de ES para caracterizar modelo de Gasser

Es importante recalcar que se obtiene 100 veces el conjunto de parámetros solución, para estudiar estadísticamente la consistencia de óptimo obtenido con las estrategias evolutivas.

Los parámetros obtenidos con las estrategias evolutivas son presentados en la tabla 5.6. La función objetivo 5.67 es utilizada como métrica para evaluar la calidad del ajuste. Mientras menor sea el valor de la función objetivo, menores serán los errores cuadráticos estandarizados del modelo, respecto a los datos experimentales.

Parámetros	Grupo A		Grupo B		Grupo C	
	Media	IC 95 %	Media	IC 95 %	Media	IC 95 %
$\mu [kPa]$	10,297	1,60E-1	13,429	7,57E-2	5,9967	8,20E-2
κ	0,2784	7,69E-4	0,2945	1,14E-4	0,2985	5,94E-4
$k_1 [kPa]$	1,388	1,22E-1	137,66	7,77E-2	307,27	1,37E+0
k_2	3,9815	1,50E-2	2,0267	8,79E-3	1,2580	5,80E-3
θ°	62,905	3,55E-1	32,663	3,77E-1	72,078	3,32E-1
Fun. Obj.	0,2770	-	0,6975	-	1,4734	-

Tabla 5.6. Parámetros de los ajustes de los datos experimentales de García et al. [76] con estrategias evolutivas y modelo de Gasser

Es posible observar en la tabla 5.6 que el ajuste obtenido utilizando el modelo de Gasser es mejor, que el ajuste obtenido con el modelo de Holzapfel, cuyos parámetros están presentados en la tabla 5.4. Es importante recalcar que el espacio de decisión, de la función objetivo del modelo de Gasser, se encuentra restringido a un espacio de decisión que cumple con el criterio de estabilidad transversal. A pesar de que el ajuste obtenido con el modelo de Gasser se encuentra más restringido que el ajuste obtenido con el modelo de Holzapfel, el modelo de Gasser permite encontrar un conjunto de parámetros estables y con mejor coincidencia experimental.

En la figura 5.9 se presentan los ajustes obtenidos con el término estabilizador, comparados con los resultados obtenidos por García et al. [76]. Es evidente que el conjunto de parámetros obtenidos presenta estabilidad transversal y un mejor ajuste experimental. Esto es principalmente debido a que, el modelo de Gasser incorpora el parámetro κ en la función de densidad de energía y permite controlar el balance entre isotropía y anisotropía del material. Este balance es clave para que se cumpla el criterio de estabilidad transversal (Véase la subsección 5.6.3).

Cabe mencionar que la función de penalización permite estabilizar la respuesta física de los parámetros obtenidos. Sin embargo, el camino correcto sería medir y ajustar los alargamientos transversales de los ensayos de tracción uniaxial. Esto es debido a que la respuesta de los alargamientos transversales depende de la relación entre anisotropía e isotropía del material y por lo tanto, al considerar estos alargamientos, sería posible obtener parámetros que representen una función de densidad de energía con la proporción correcta entre isotropía y anisotropía.

Finalmente, utilizando las estrategias evolutivas, con el modelo de Gasser y la función de penalización propuesta, es posible obtener un conjunto de parámetros que representen los datos experimentales y presenten estabilidad transversal.

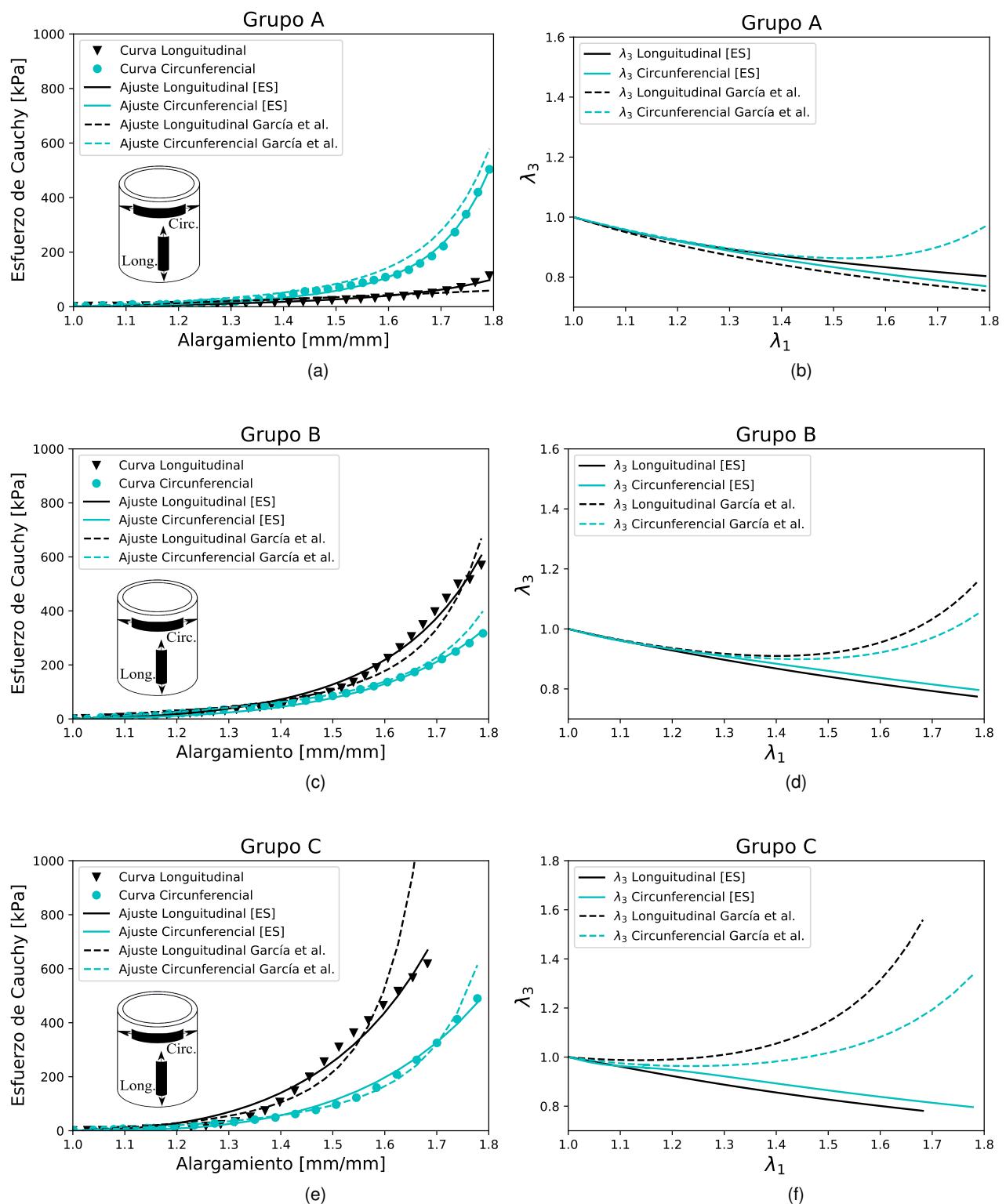


Figura 5.9. Ajustes de los datos experimentales de tracción uniaxial con el modelo de Gasser y los alargamientos transversales λ_3 correspondientes a cada uno de los ajustes.

5.8. Caracterización inversa a través de elementos finitos y estrategias evolutivas

En esta sección se utilizan las estrategias evolutivas y elementos finitos para la caracterización inversa de arterias. Con este fin, se utilizan los datos provenientes del trabajo de Rivera et al. [77] para caracterizar el comportamiento mecánico pasivo de la aorta torácica de corderos. En esta sección no se realiza un análisis biomecánico de las arterias y el estudio se limita a tratar los ensayos experimentales como un problema de calibración de parámetros del modelo constitutivo de Gasser [3].

Los datos experimentales se separan en dos grupos, el primero grupo se denomina como grupo de control (CN) y el segundo grupo se denomina como el grupo melatonina (MN). El grupo CN esta conformado por seis corderos a los que se les administra una solución de 1.4 % de etanol por día (0.5 ml/kg) y el grupo MN esta conformado por 5 corderos a los que se les administra de forma oral melatonina (1mg/kg de melatonina en una solución de etanol de 1.4 %, 0.5 ml/kg por día).

A cada individuo de estos dos grupos se le realiza un ensayo de tracción longitudinal, tracción circunferencial y de presurización. Los ensayos se realizan sobre muestras de la aorta torácica de los corderos. Cada uno de estos ensayos es utilizado para caracterizar el material.

En las siguientes secciones se describe el procedimiento propuesto para caracterizar arterias utilizando elementos finitos y también se presentan los resultados obtenidos.

5.8.1. Diagramas de bloques

El procedimiento utilizado para caracterizar las arterias con elementos finitos y estrategias evolutivas es similar al procedimiento de la sección 5.7. La principal diferencia es que se utilizan los elementos finitos para simular y ajustar la respuesta del ensayo de presurización. El diagrama de bloque que describe el problema de optimización, se presenta en la figura 5.10.

El modelo analítico del ensayo de tracción uniaxial, que considera un gradiente de deformación homogéneo, presenta una respuesta bastante similar a la obtenida con modelos numéricos [78]. No obstante, el modelo analítico del ensayo de presurización es simplificado y está limitado al caso de pared delgada [25]. En la realidad, los gradientes de deformación no son homogéneos y en la pared arterial existe una distribución de esfuerzos no lineal. Por lo tanto, se utiliza el método de elementos finitos para simular el ensayo de presurización de forma numérica, y así comparar la respuesta experimental con esta. Es importante mencionar que cada vez que se evalúa la función objetivo, es necesario realizar una simulación y estas son realizadas en el software VULCAN.

La función objetivo determina el problema de optimización, en este caso se puede calcular siguiendo el diagrama de bloques de la figura 5.11. Inicialmente se obtienen los errores cu-

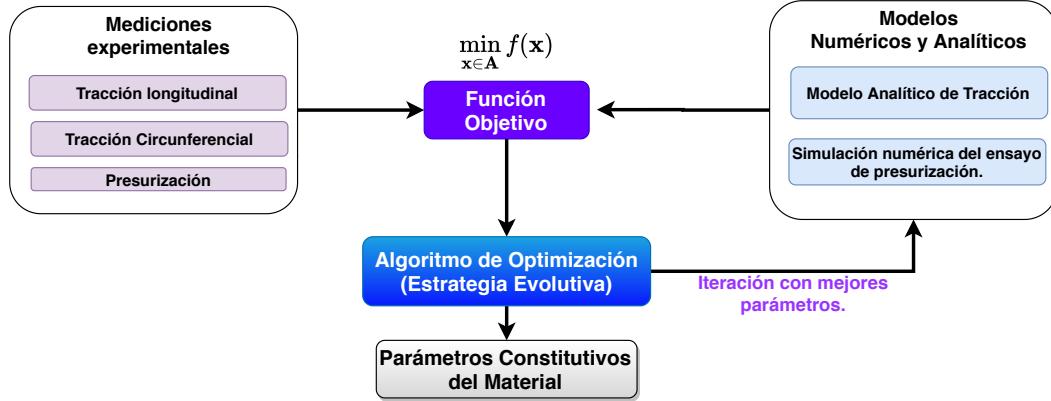


Figura 5.10. Diagrama de bloques que describe de forma ilustrativa el problema de optimización.

dráticos de los ensayos de tracción longitudinal y circunferencial y se determina si el conjunto de parámetros presenta estabilidad transversal en el rango experimental, si no se cumple este criterio, la función objetivo es penalizada y toma un valor muy grande. Si los parámetros no son estables, no es necesario realizar la simulación. De manera similar, si la simulación de presurización no converge para un conjunto de parámetros dados, se penaliza el valor de la función objetivo con un valor muy grande. Si el conjunto de parámetros del modelo de Gasser cumple con ser estable en el rango experimental y la simulación de presurización converge, se evalúa la función objetivo 5.68

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}^n} f(\mathbf{x}) = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{lon} - \sigma^{lon}(\lambda_i^{lon}, \mathbf{x})}{n\sigma_n^{lon}} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma_i^{cir} - \sigma^{cir}(\lambda_i^{cir}, \mathbf{x})}{m\sigma_m^{cir}} \right)^2 \\ & + 2 \sum_{i=1}^k \left(\frac{\lambda_i^\theta - \lambda^\theta(P_i, \mathbf{x})}{k(\lambda_k^\theta - \lambda_1^\theta)} \right)^2 + g_1(\mathbf{x}, \lambda_i^{lon}, \lambda_i^{cir}), \end{aligned} \quad (5.68)$$

donde k es la cantidad de puntos de la curva experimental de presurización, λ_i^θ es el alargamiento circunferencial experimental para el dato i y $\lambda^\theta(P_i, \mathbf{x})$ es el alargamiento circunferencial obtenido con simulación de elementos finitos, en función de la presión experimental P_i . Cabe mencionar que se ajustan los alargamientos, ya que la respuesta de la simulación de elementos finitos está dada por la presión interna de la aorta.

Es importante destacar que cada uno de las sumatorias representan el error estandarizado de los ensayos mecánicos. En este caso, los errores estandarizados del ensayo de presurización se encuentran duplicados, para que el ensayo de presurización tenga el mismo peso que los dos ensayos de tracción. **La función objetivo es planteada de forma general y es opcional cuantos términos se deseen considerar**, por ejemplo, es opcional considerar el término estabilizador o los ensayos uniaxiales.

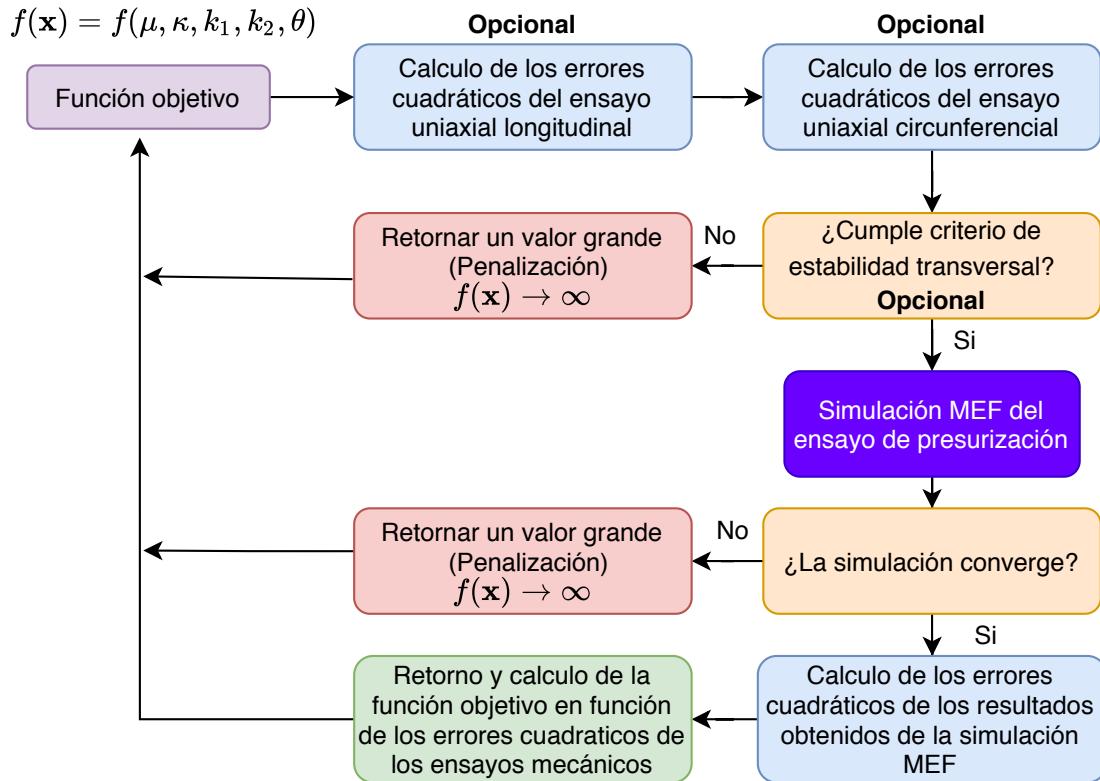


Figura 5.11. Diagrama de bloque que describe de forma ilustrativa como se evalúa la función objetivo.

5.8.2. Ensayo de presurización y simulación numérica

El ensayo de presurización se utiliza para replicar las condiciones de carga *In vivo* de vasos sanguíneos. En este ensayo mecánico, una parte del vaso sanguíneo es sometido a un alargamiento uniaxial en una máquina de tracción, seguido por la aplicación de una presión interna por medio de un fluido (solución salina libre de calcio) que recorre el interior del vaso sanguíneo y genera una carga radial [76]. Los extremos de la muestra cilíndrica de la aorta torácica son sujetados a una boquillas metálicas. El montaje experimental es similar al descrito por Guinea et al. [79]. La figura 5.12 representa el montaje utilizado en el trabajo de Rivera et al. [77].

La presión interna y el diámetro externo de la aorta son grabados durante toda la prueba mecánica, estos datos son procesados para obtener las curvas de presión interna vs alargamiento diametral. El alargamiento circunferencial (o diametral) se define como D/D_0 , donde D y D_0 denotan el diámetro deformado y el diámetro sin deformar, respectivamente. Se realizan 10 ciclos de carga hasta una presión de 170 [mmHg] para precondicionar las muestras. El último ciclo es utilizado para realizar el análisis del ensayo.

La simulación numérica a utilizar consiste en una simulación 2D axisimétrica, utilizando elementos finitos, debido a que se idealiza la geometría de la aorta como un cilindro perfecto

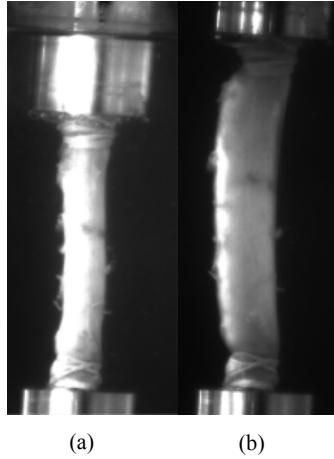


Figura 5.12. Ensamblaje experimental. (a) Aorta torácica sin estirar (b) Aorta torácica presurizada con un pre-estiramiento. Fuente: Rivera et al. [77].

y se simplifica el problema con una simetría. La simulación se realiza a través de dos pasos:

El primer paso consiste en someter a tracción uniaxial a la aorta hasta llegar a un alargamiento fisiológico. En el trabajo de Rivera et al. [77] se determina el valor $\lambda_z = 1,2$. Este alargamiento se mantiene constante durante todo el proceso de presurización. El segundo paso corresponde al proceso de presurización (inflado), donde una presión interna es aplicada a la pared arterial que cubre el rango fisiológico hasta hipertensión, es decir la presión aplicada a la pared arterial varía desde 0 [mmHg] hasta 170 [mmHg]. La figura 5.13a representa el ensayo de presurización.

La geometría de la arteria es simplificada como una superficie rectangular obtenida al hacer un corte longitudinal al tubo cilíndrico. Las dimensiones que definen la geometría se obtienen con el promedio de las mediciones de la aorta torácica. El largo de las muestras se obtienen con el promedio obtenido del ensayo de presurización. Las dimensiones del radio interno, espesor y largo son CN: $R_0 = 3,71\text{mm}$, $t = 2,06\text{mm}$, $L = 14\text{mm}$; MN: $R_0 = 3,51\text{mm}$, $t = 2,14\text{mm}$, $L = 14\text{mm}$.

Las mallas utilizadas tienen 2626 nodos y 2500 elementos cuadriláteros (25 x 100). La malla presenta un refinamiento en la base de la arteria, donde esta es sujetada (figura 5.13b). Con esta simulación numérica, se puede determinar el alargamiento circunferencial en función de los parámetros del modelo de Gasser \mathbf{x} y la presión interna P como

$$\lambda^\theta(\mathbf{x}, P) = 1 + \frac{u_r(\mathbf{x}, P)}{D_0}, \quad (5.69)$$

donde u_r es el desplazamiento radial, del nodo ubicado en el diámetro exterior, al borde de la simetría longitudinal (punto rojo figura 5.59). Con esta expresión se evalúa la función objetivo 5.68.

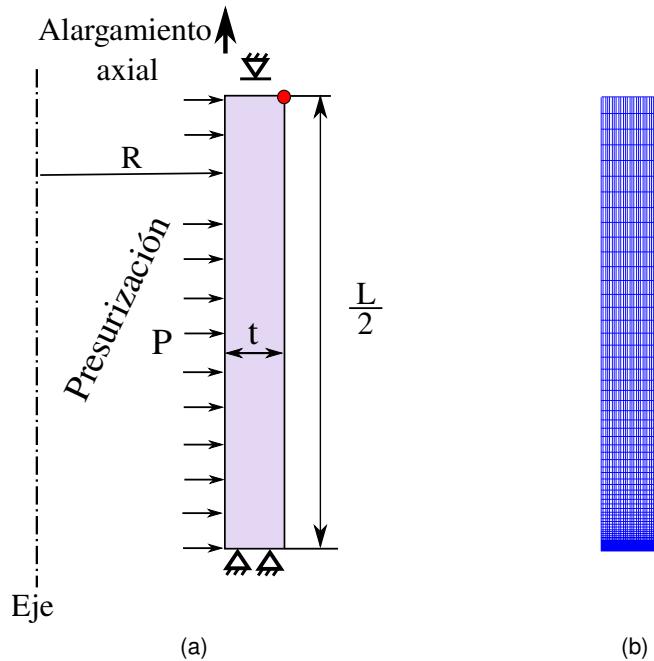


Figura 5.13. (a) Representación 2D de las condiciones de contorno para la simulación del ensayo de presurización. (b) Malla estructurada de la simulación de elementos finitos con 2500 elementos cuadriláteros. Fuente: Propia

5.8.3. Ajuste de datos experimentales

Cada grupo experimental es ajustado de dos formas diferentes. El primero consiste en ajustar sólo el ensayo de presurización y utiliza los ensayos de tracción uniaxial para validar la respuesta mecánica del conjunto de parámetros obtenidos. El segundo, consiste en ajustar el ensayo de presurización y los ensayos de tracción uniaxial al mismo tiempo. Este procedimiento se realiza sin considerar el término penalizador y sólo se incorpora, si es que el conjunto de parámetros obtenidos del ajuste presenta inestabilidad transversal.

Unos de los problemas de calcular la función objetivo con simulaciones de elementos finitos es el costo computacional asociado. En este caso, se trata de reducir al mínimo la cantidad de evaluaciones de la función objetivo. Los parámetros de búsqueda de la estrategia evolutiva son presentados en la tabla 5.7.

El programa de estrategias evolutivas es compilado con GNU FORTRAN y está paralelizado con la librería OPENMP. Este programa es ejecutado en un servidor con dos procesadores de 10 núcleos: Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2670 v2 @ 2.50GHz. Esta implementación es específica para este problema, ya que permite llamar al programa de elementos finitos VULCAN y realizar la mayor cantidad de simulaciones en el menor tiempo posible.

Para que las simulaciones reduzcan la posibilidad de tener problemas relacionados a la convexidad de la función de densidad de energía, el valor de μ mínimo es de 10 [kPa]. Este valor garantiza una componente isótropa base, que permite estabilizar las simulaciones de

Parámetros	Límite inferior	Límite superior
μ [kPa]	10,0	1,0E+3
k_1 [kPa]	0,00	1,0E+4
k_2	0,00	6,00
κ	0,00	1/3
θ °	0,0°	90,0°
Generaciones	100	
Población	200	

Tabla 5.7. Parámetros de ES para caracterizar modelo de Gasser con elementos finitos

elementos finitos de presurización.

Ajuste de Grupo MN sin término estabilizador

Los parámetros de los ajustes realizados a los datos experimentales se presentan en la tabla 5.8 y los errores cuadráticos estandarizados en la tabla 5.9. Los gráficos de los ajustes obtenidos, se presentan en la figura 5.14. Es importante destacar los siguientes puntos:

- El conjunto de parámetros que se obtiene al ajustar el ensayo presurización, es capaz de capturar correctamente el comportamiento de este ensayo. Se puede ver en la figura 5.14 que, los parámetros presentan una buena coincidencia con las curvas de tracción uniaxial, pero estas tienden a divergir para alargamientos grandes ($\lambda \approx 1,6$).
- Al ajustar las curvas de tracción uniaxial y presurización, se obtiene un conjunto de parámetros que representa, de manera correcta, los diferentes ensayos mecánicos en todo el rango experimental. Esto se puede verificar al observar que el ajuste está dentro del intervalo de confianza de los datos experimentales.
- Es posible apreciar que los parámetros obtenidos de los dos ajustes son estables en el rango experimental, debido a que los alargamientos λ_3 son decrecientes en este intervalo. Es importante recordar que la función objetivo no considera el término penalizador de estabilización transversal.
- Los dos ajustes representan de manera correcta el comportamiento mecánico de la aorta torácica del grupo MN. Si se requiere un conjunto de parámetros que funcione mejor ante un estado de tensión de presurización, sería mejor utilizar la solución obtenida del ajuste que sólo considera el ensayo de inflado. Si se desea que el conjunto de parámetros funcione bien para múltiples configuraciones de deformación, sería aconsejable utilizar el conjunto de parámetros obtenidos al ajustar simultáneamente los ensayos de presurización y tracción.
- Los parámetros obtenidos son transversalmente estables y no es necesario penalizar la función objetivo, ya que podría sobre restringir el problema de optimización.

Parámetros	Grupo MN sin término estabilizador	
	Presurización	Presurización y tracción uniaxial
μ [kPa]	16,577	12,323
k_1 [kPa]	27,974	30,875
k_2	0,75746	4,065E-2
κ	0,25273	0,2194
θ°	49,22	51,69
Tiempo de Computo [Hr]	12,6	12,7

Tabla 5.8. Parámetros del modelo de Gasser obtenidos para el grupo MN sin término estabilizador.

NRSMD	MN Sin término estabilizador	
	Ajuste presurización	Ajuste presurización y uniaxial
Presurización	6,95E-06	4,19E-05
Uniaxial Longitudinal	2,80E-04	6,68E-06
Uniaxial Circunferencial	5,15E-04	7,99E-05

Tabla 5.9. Errores cuadráticos estandarizados del grupo MN sin término estabilizador.

Ajuste de grupo CN sin término estabilizador

Inicialmente, se ajustan los datos experimentales del grupo CN sin el término estabilizador. Los parámetros obtenidos con las estrategias evolutivas se presentan en la tabla 5.10, los errores cuadráticos estandarizados en la tabla 5.11 y las curvas ajustadas en la figura 5.15. Es importante destacar los siguientes puntos:

- Al ajustar sólo el ensayo de presurización, se obtiene un conjunto de parámetros que ajusta correctamente los diferentes ensayos mecánicos, ya que los errores cuadráticos estandarizados (tabla 5.11) son bajos. No obstante, los parámetros obtenidos son transversalmente inestables (figura 5.15)
- Al ajustar los ensayos de tracción y presurización, se obtiene un ajuste balanceado, ya que la magnitud de los errores cuadráticos estandarizados (tabla 5.11) son similares. Sin embargo, los parámetros obtenidos son inestables transversalmente (figura 5.15).
- **Es necesario considerar el término estabilizador para este caso.**

Parámetros	Grupo CN sin término estabilizador	
	Presurización	Presurización y tracción uniaxial
μ [kPa]	16,212	10,015
k_1 [kPa]	15,790	20,315
k_2	0,6839	0,17068
κ	4,704E-1	5,1799E-3
θ°	45,71	45,83
Tiempo de Computo [Hr]	12,3	12,4

Tabla 5.10. Parámetros del modelo de Gasser obtenidos para el grupo MN con término estabilizador.

NRSMD	CN sin término estabilizador	
	Ajuste presurización	Ajuste presurización y uniaxial
Presurización	1,28E-05	8,11E-05
Uniaxial Longitudinal	1,00E-04	1,31E-05
Uniaxial Circunferencial	2,60E-04	2,09E-05

Tabla 5.11. Errores cuadráticos estandarizados del grupo CN sin término estabilizador.

Ajuste de grupo CN con término estabilizador

Para ajustar los datos experimentales considerando la estabilidad transversal, se utiliza el término penalizador de inestabilidad. Los parámetros de los ajustes realizados se presentan en la tabla 5.12, los errores cuadráticos estandarizados en la tabla 5.13 y los gráficos de los ajustes se presentan en la figura 5.16. Es importante destacar los siguientes puntos:

- El ajuste que considera solo la curva de presurización representa de forma fidedigna este ensayo. No obstante, las curvas de los ensayos de tracción uniaxial no están en el intervalo de confianza de los datos experimentales.
- Al ajustar las curvas de tracción uniaxial y presurización se obtiene un conjunto de parámetros que representa, de manera correcta, los diferentes ensayos mecánicos en todo el rango experimental. Esto puede verificarse al observar que el ajuste está dentro del intervalo de confianza de los datos experimentales.
- Es posible observar que los parámetros obtenidos de los dos ajustes son estables en el rango experimental, ya que el alargamiento λ_3 es decreciente. Es importante recordar que la función objetivo no considera el término penalizador de estabilización transversal.
- En este caso es recomendable utilizar el conjunto de parámetros de los ajustes de los ensayos de presurización y tracción. Es posible ver en la figura 5.16 que, los parámetros funcionan bien para los diferentes ensayos y son estables transversalmente.

Parámetros	Grupo CN con término estabilizador	
	Presurización	Presurización y Uniaxial
μ [kPa]	25,667	18,668
k_1 [kPa]	25,060	24,905
k_2	2,5299	0,2912
κ	0,2292	0,1367
θ°	39,82	46,44
Tiempo de Computo [Hr]	12,1	12,0

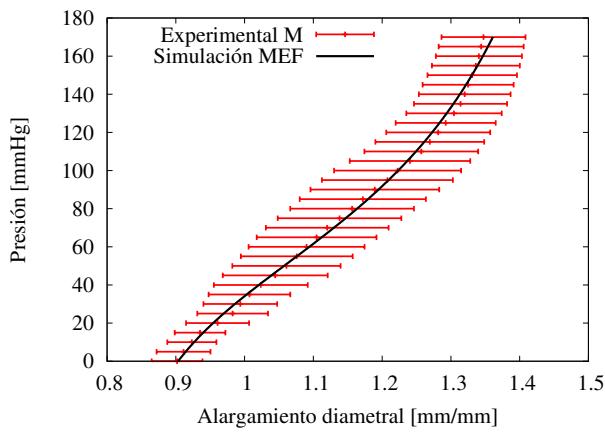
Tabla 5.12. Parámetros del modelo de Gasser obtenidos para el grupo CN con término estabilizador.

NRSMD	CN con término estabilizador	
	Ajuste presurización	Ajuste presurización y uniaxial
Presurización	1,09E-05	8,28E-05
Uniaxial Longitudinal	2,31E-02	2,35E-05
Uniaxial Circunferencial	8,91E-04	1,10E-04

Tabla 5.13. Errores cuadráticos estandarizados del grupo CN con término estabilizador.

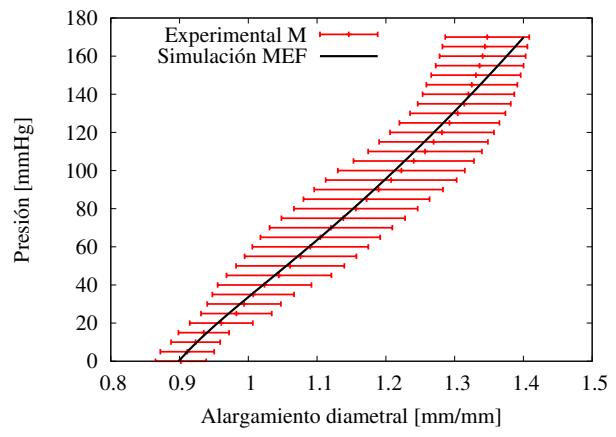
Finalmente, se demuestra que al utilizar las estrategias evolutivas y las simulaciones de elementos finitos considerando el criterio de estabilidad transversal a través del término penalizador, se obtiene un conjunto de parámetros que representan de forma fidedigna el comportamiento mecánico del material.

Ajuste de presurización



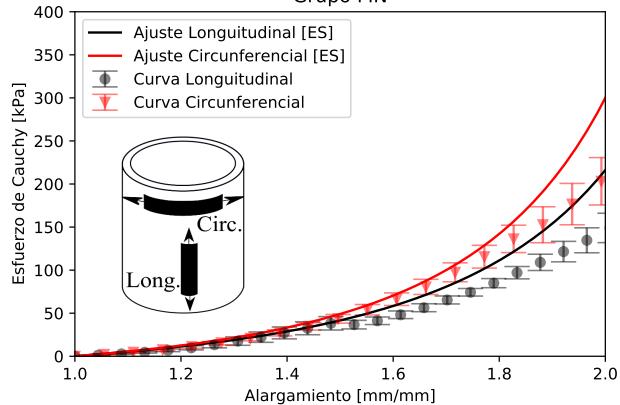
(a) Presurización

Ajuste de presurización y tracción



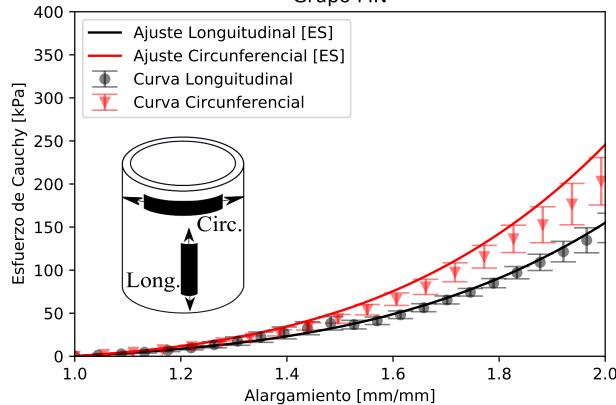
(b) Presurización

Grupo MN



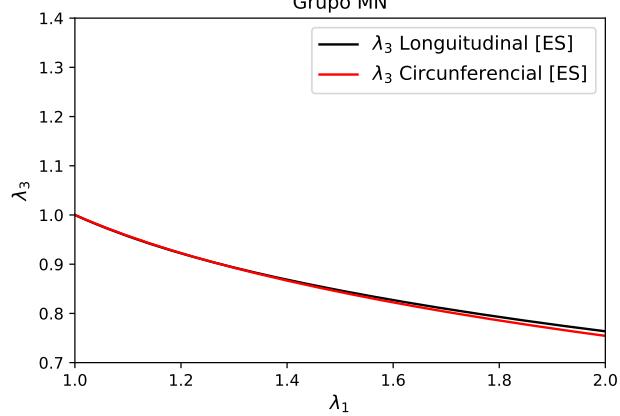
(c) Tracción uniaxial

Grupo MN



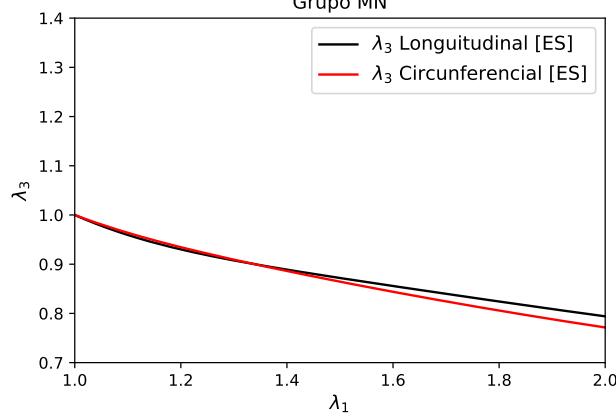
(d) Tracción uniaxial

Grupo MN



(e) Alargamientos transversales

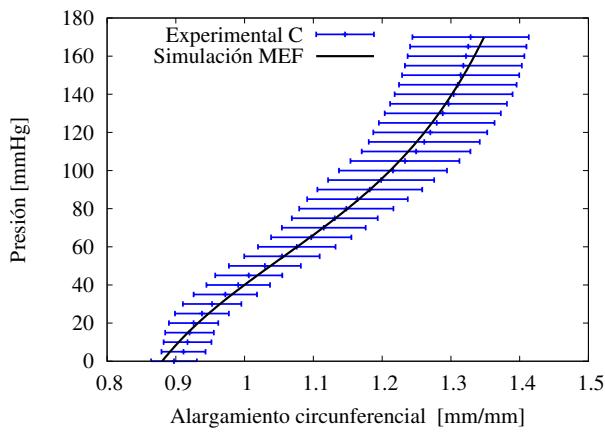
Grupo MN



(f) Alargamientos transversales

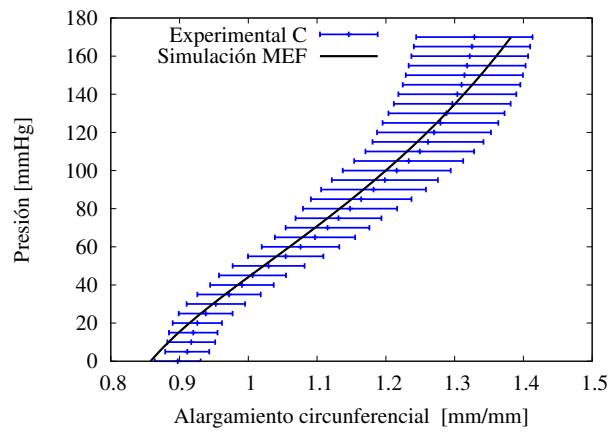
Figura 5.14. Ajustes del grupo MN sin término estabilizador. A la izquierda están los resultados del ajuste de solo presurización y a la derecha el ajuste considerando los ensayos de presurización y tracción uniaxiales

Ajuste de presurización



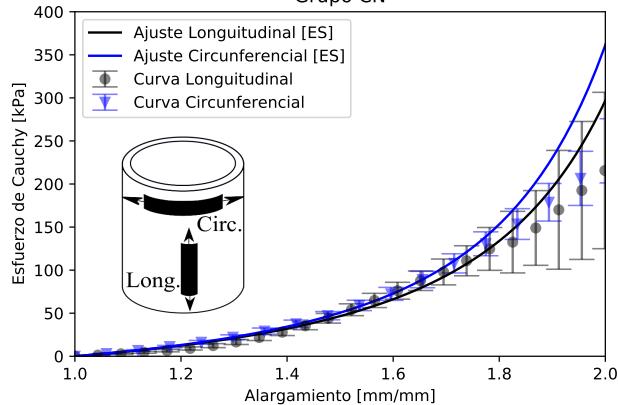
(a) Presurización

Ajuste de presurización y tracción



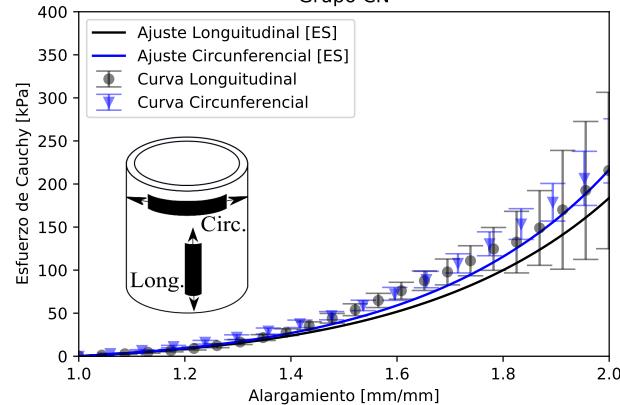
(b) Presurización

Grupo CN



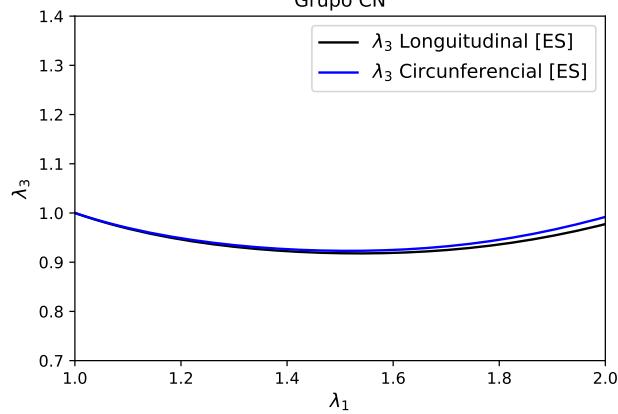
(c) Tracción uniaxial

Grupo CN



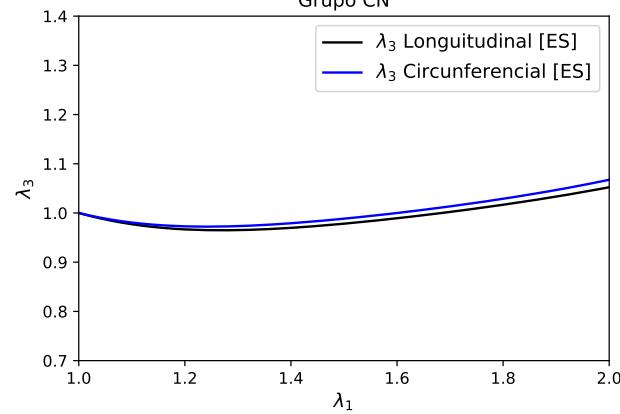
(d) Tracción uniaxial

Grupo CN



(e) Alargamientos transversales

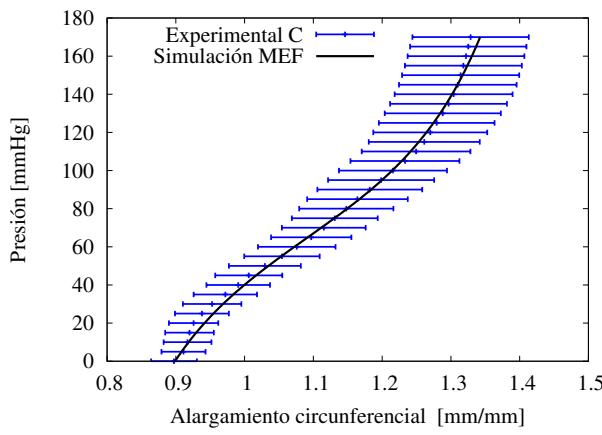
Grupo CN



(f) Alargamientos transversales

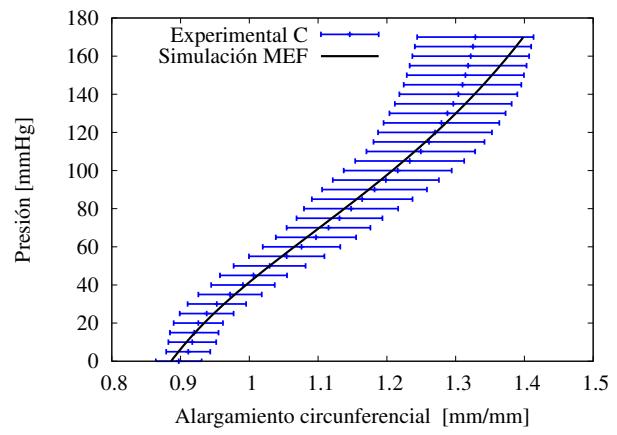
Figura 5.15. Ajustes del grupo CN sin término estabilizador. A la izquierda están los resultados del ajuste de solo presurización y a la derecha el ajuste considerando los ensayos de presurización y tracción uniaxiales

Ajuste de presurización



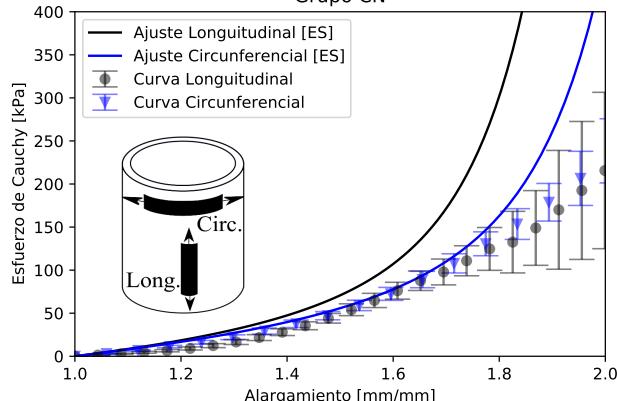
(a) Presurización

Ajuste de presurización y tracción



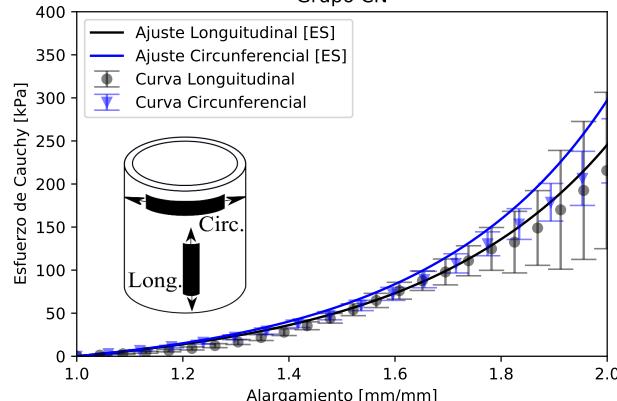
(b) Presurización

Grupo CN



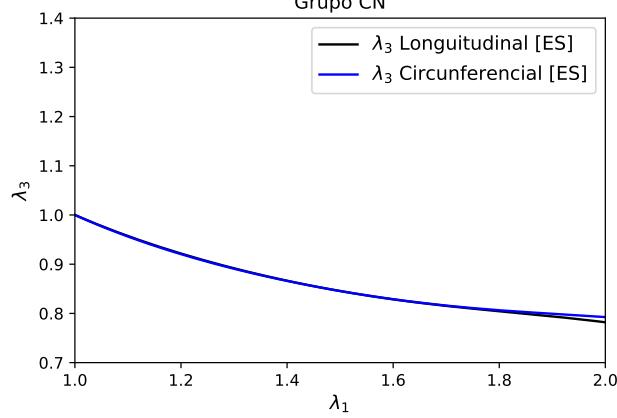
(c) Tracción uniaxial

Grupo CN



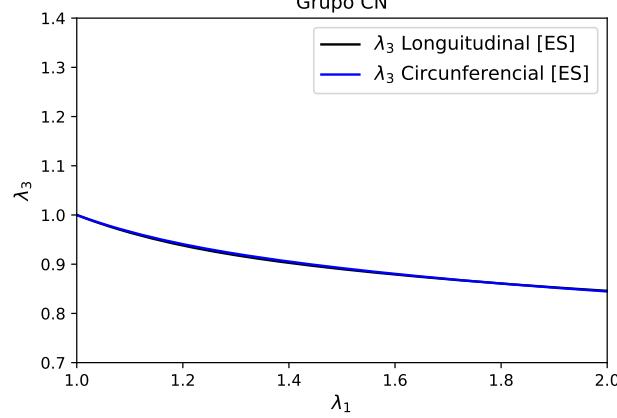
(d) Tracción uniaxial

Grupo CN



(e) Alargamientos transversales

Grupo CN



(f) Alargamientos transversales

Figura 5.16. Ajustes del grupo CN con término estabilizador. A la izquierda están los resultados del ajuste de solo presurización y a la derecha el ajuste considerando los ensayos de presurización y tracción uniaxiales

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas futuras

En este capítulo se presentan las principales conclusiones obtenidas en el desarrollo de este trabajo de tesis, además de las aportaciones y posibles líneas futuras de trabajo.

6.1. Conclusiones generales

En el presente trabajo se ha estudiado el proceso de caracterización de un material hiperelástico, isótropo o anisótropo, utilizando los algoritmos metaheurísticos de optimización. Específicamente, se ha implementado el algoritmo genético, la optimización por enjambre de partículas y las estrategias evolutivas.

Se presenta un marco teórico de mecánica del medio continuo que fundamenta la teoría de hiperelásticidad y se presentan los diferentes modelos constitutivos isótropos o anisótropos, que permiten caracterizar un material. También se detallan los diferentes criterios de estabilidad existentes, que restringen los parámetros de los modelos constitutivos. Los algoritmos implementados de optimización metaheurística son estudiados al detalle, con el fin de conocer sus ventajas, desafíos y limitaciones.

En este estudio, los algoritmos metaherísticos son comparados al ajustar datos experimentales del modelo de Mooney-Rivlin con solución conocida. De los resultados obtenidos se observa que todos los algoritmos implementados son capaces de caracterizar el material de forma correcta. Sin embargo, las estrategias evolutivas demuestran una mejor consistencia de la solución obtenida y una mayor velocidad de convergencia, atribuible a la mutación adaptativa.

Se demuestra que la función objetivo, que permite caracterizar un material hiperelástico presenta diferentes desafíos como múltiples óptimos locales, diversas restricciones y regiones valles en el espacio de decisión. No obstante, se ha demostrado que los algoritmos de optimización metaheurísticos no tienen mayor problema para caracterizar un material hiperelástico, ya sea un material isótropo o anisótropo.

También se ha logrado caracterizar el material sujeto a múltiples ensayos mecánicos, a través de una función mono-objetivo. Este punto es estudiado al detalle y se observa que es

necesario utilizar diferentes ensayos mecánicos para capturar el comportamiento bajo diferentes configuraciones de deformación. También se hace notar que existen ensayos mecánicos que presentan el mismo camino de deformación y que algunos pueden llegar a ser redundantes. Es importante recalcar que un ensayo biaxial puede generar todas las configuraciones de deformación de un material isótropo incompresible y que es recomendable realizar un ensayo de tracción uniaxial, equiaxial y de corte, para así capturar un espectro amplio de diferentes configuraciones de deformación.

Encontrar los parámetros constitutivos de un material anisótropo no es tarea fácil, ya que es necesario capturar la anisotropía del material a través de múltiples ensayos, asegurando que los parámetros obtenidos representen de manera fidedigna el comportamiento del material. Al utilizar un conjunto de datos experimental con solución conocida, se demuestra que las estrategias evolutivas son capaces de caracterizar un material anisótropo. Un punto importante es que ajustar los ensayos de tracción uniaxial no garantizan que el conjunto de parámetros presente una respuesta física coherente. Para ello, se plantea un nuevo criterio de estabilidad, denominado como estabilidad transversal. Principalmente, se estable que un material es estable transversalmente, si es que al ser sometido a tracción uniaxial, no crece en las direcciones transversales. Con este criterio de estabilidad, se demuestra que el modelo de Holzapfel es inestable para un alargamiento de tracción uniaxial que tiende a infinito y que el modelo de Gasser es estable ante esta condición.

Para regularizar el comportamiento mecánico del material anisótropo se propone una función de penalización, en términos del criterio de estabilidad transversal. Utilizando esta función de penalización y el modelo de Gasser se ajustan con las estrategias evolutivas los datos publicados por Garcia et al. [76] y se obtiene un conjunto de parámetros que representa de manera fidedigna y estable el comportamiento del material.

Finalmente, se ajustan datos experimentales de aortas torácicas de corderos, limitando el estudio a un procedimiento de calibración de parámetros. Para ello, se utilizan las estrategias evolutivas en conjunto con simulaciones de elementos finitos. Solo se simula el ensayo de presurización, debido a que el modelo analítico es muy simple para capturar el comportamiento del ensayo y se utiliza la respuesta numérica. Este procedimiento permite obtener un conjunto de parámetros que representa de manera correcta el comportamiento mecánico de las aortas, bajo diferentes condiciones de deformación y cumpliendo el criterio de estabilidad transversal. La metodología implementada es robusta pero presenta un problema y es el alto costo computacional.

6.2. Principales aportes

Del presente trabajo de tesis se pueden destacar las siguientes contribuciones:

- Evaluación y comparación de la capacidad resolutiva de diferentes algoritmos metaheurísticos para caracterizar material hiperelástico. En este trabajo se observa que las es-

trategias evolutivas presentan la mayor consistencia de la solución obtenida y éxito en la convergencia respecto a los otros algoritmos metaheurísticos implementados. Sin embargo, el éxito del algoritmo de optimización depende del problema y suele ser variable.

- Se han descrito las principales ventajas de caracterizar un material utilizando algoritmos metaheurísticos. Principalmente, estos algoritmos están orientados a encontrar el óptimo global del problema de optimización y pueden adaptarse fácilmente para resolver problemas no lineales, discontinuos, de n variables y con múltiples restricciones. La función objetivo que permite calibrar los parámetros de un material hiperelástico presenta estas características.
- Se ha presentado un esquema de ajuste de los parámetros de modelos constitutivos hiperelásticos, con algoritmos metaheurísticos. También se ha estudiado como los diferentes ensayos mecánicos aportan información relevante a la caracterización del material.
- Se han desarrollado formas de caracterizar múltiples ensayos mecánicos que aseguran la estabilidad del material, al utilizar algoritmos metaheurísticos y una función monoobjetivo.
- Formulación de un nuevo criterio de estabilidad anisótropo y proponer una función de penalización para regular el comportamiento del material. Se observa que cuando la energía anisótropa crece de forma desproporcionada respecto a la energía isótropa, existe un comportamiento no físico del material. La inestabilidad ocurre cuando el material al ser traccionado de forma uniaxial, presenta un engrosamiento en algunos de sus alargamientos transversales. **Este criterio de estabilidad regula el balance entre isotropía y anisotropía del material.**
- Se propone un nuevo procedimiento para caracterizar materiales hiperelásticos, con base en estrategias evolutivas y elementos finitos. Los resultados obtenidos demuestran buena concordancia con los datos experimentales. Este método es una buena alternativa cuando no existe una expresión analítica eficiente para modelar un ensayo mecánico. Es posible extender este procedimiento de caracterización, para otro tipo de materiales.

6.3. Lineas futuras de investigación

A partir del desarrollo del presente trabajo de tesis, dadas las limitaciones del mismo, se generan los siguientes lineamientos para futuras investigaciones, propuestos a continuación.

- En este trabajo se optimizaron problemas mono-objetivos, existen alternativas metaheurísticas multi-objetivo que podrían ser utilizadas para ajustar simultáneamente múltiples ensayos mecánicos.

- Uno de los problemas de utilizar elementos finitos para caracterizar un material, es el costo computacional asociado. Una alternativa es plantear un meta-modelo que modele la respuesta de cierto ensayo mecánico al ser simulado. Una forma de implementar un meta-modelo, es entrenar una red neuronal y así predecir el comportamiento del ensayo mecánico. El desafío consiste en generar la base de datos necesaria para entrenar la red neuronal. Una vez entrenada la red neuronal, sería posible evaluar la función de costo con un tiempo computacional bastante inferior al requerido por una simulación numérica.
- Es posible extender los procedimientos realizados para caracterizar un material hiperelásticos a otro tipos de materiales. Un ejemplo sería caracterizar materiales que presenten plasticidad, visco-elasticidad, daño o una combinación de estos.
- Como se ha demostrado, existe una inestabilidad en los modelos anisótropos. Esta inestabilidad es evitada con una función de penalización, pero lo ideal sería que el modelo constitutivo sea incondicionalmente estable. Por lo tanto, una línea futura de investigación, podría ser plantear un modelo constitutivo anisótropo **transversalmente estable**.

Bibliografía

1. **MORÉ, Jorge J.** The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory. En: *Numerical analysis*. Springer, 1978, págs. 105-116.
2. **HOLZAPFEL, Gerhard A.** Biomechanics of Soft Tissue. *Handbook of material behavior*. 2000.
3. **GASSER, T Christian, OGDEN, Ray W y HOLZAPFEL, Gerhard A.** Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *Journal of the royal society interface*. 2006, vol. 3, n.º 6, págs. 15-35.
4. **HELFENSTEIN, J et al.** On non-physical response in models for fiber-reinforced hyperelastic materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2010, vol. 47, n.º 16, págs. 2056-2061.
5. **CHAGNON, Grégory, REBOUAH, Marie y FAVIER, Denis.** Hyperelastic energy densities for soft biological tissues: a review. *Journal of Elasticity*. 2015, vol. 120, n.º 2, págs. 129-160.
6. **BONET, Javier y WOOD, Richard D.** Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. 2008.
7. **MARSDEN, Jerrold E y HUGHES, Thomas JR.** *Mathematical foundations of elasticity*. Courier Corporation, 1994.
8. **BASAR, Yavuz y WEICHERT, Dieter.** *Nonlinear continuum mechanics of solids: fundamental mathematical and physical concepts*. Springer Science & Business Media, 2013.
9. **BELYTSCHKO, Ted et al.** *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John wiley & sons, 2013.
10. **HOLZAPFEL, Gerhard A, GASSER, Thomas C y OGDEN, Ray W.** A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of elasticity and the physical science of solids*. 2000, vol. 61, n.º 1-3, págs. 1-48.
11. **BALL, John M.** Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archive for rational mechanics and Analysis*. 1976, vol. 63, n.º 4, págs. 337-403.
12. **BALZANI, Daniel et al.** A polyconvex framework for soft biological tissues. Adjustment to experimental data. *International journal of solids and structures*. 2006, vol. 43, n.º 20, págs. 6052-6070.
13. **MARCKMANN, Gilles y VERRON, Erwan.** Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber chemistry and technology*. 2006, vol. 79, n.º 5, págs. 835-858.
14. **HOLZAPFEL, A Gerhard.** Nonlinear solid mechanics II. 2000.
15. **NOLL, Walter.** On the continuity of the solid and fluid states. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*. 1955, vol. 4, págs. 3-81.

16. **CASSELS, JWS, HITCHIN, NJ et al.** *Nonlinear elasticity: theory and applications*. Cambridge University Press, 2001.
17. **TRELOAR, LRG.** Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation. *Rubber Chemistry and Technology*. 1944, vol. 17, n.º 4, págs. 813-825.
18. **MOONEY, Melvin.** A theory of large elastic deformation. *Journal of applied physics*. 1940, vol. 11, n.º 9, págs. 582-592.
19. **RIVLIN, RSI.** Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1948, vol. 240, n.º 822, págs. 459-490.
20. **RIVLIN, RS.** Large elastic deformations of isotropic materials IV. Further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1948, vol. 241, n.º 835, págs. 379-397.
21. **NOORDERMEER, JWM, DARYANANI, R y JANESCHITZ-KRIEGL, H.** Flow birefringence studies of polymer conformation: cellulose tricarbanilate in two characteristic solvents. *Polymer*. 1975, vol. 16, n.º 5, págs. 359-369.
22. **YEOH, Oon H.** Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. *Rubber chemistry and technology*. 1990, vol. 63, n.º 5, págs. 792-805.
23. **DEMIRAY, Hilmi.** A note on the elasticity of soft biological tissues. *Journal of biomechanics*. 1972, vol. 5, n.º 3, págs. 309-311.
24. **PICINBONO, Guillaume, DELINGETTE, Herve y AYACHE, Nicholas.** Nonlinear and anisotropic elastic soft tissue models for medical simulation. En: *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 01CH37164)*. 2001, vol. 2, págs. 1370-1375.
25. **HOLZAPFEL, Gerhard A. y OGDEN, Ray W.** Modelling the layer-specific three-dimensional residual stresses in arteries, with an application to the human aorta. *Journal of the Royal Society Interface*. 2010, vol. 7, n.º 46, págs. 787-799. ISSN 17425662.
26. **HOLZAPFEL, Gerhard A. y GASSER, Thomas C.** A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models. *Journal of Elasticity*. 2000, vol. 64, págs. 1-48.
27. **SOLER, Javier Rodríguez.** Modelos numéricos para mecánica cardiovascular de las paredes arteriales y sus procesos de adaptación. *Tutor: Goicolea Ruigómez, JM Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España*. 2003.
28. **DIRICHLET, G Lejeune.** Über die Stabilität des Gleichgewichts. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1846, vol. 1846, n.º 32, págs. 85-88.
29. **MERODIO, J y OGDEN, RW.** Material instabilities in fiber-reinforced nonlinearly elastic solids under plane deformation. *Archives of Mechanics*. 2002, vol. 54, n.º 5-6, págs. 525-552.
30. **BALL, John M.** Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics. En: *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt symposium*. 1977, vol. 1, págs. 187-241. N.º 4.
31. **SCHRÖDER, Jörg y NEFF, Patrizio.** Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. *International journal of solids and structures*. 2003, vol. 40, n.º 2, págs. 401-445.

32. **DAVIES, Penny J.** A simple derivation of necessary and sufficient conditions for the strong ellipticity of isotropic hyperelastic materials in plane strain. *Journal of Elasticity*. 1991, vol. 26, n.º 3, págs. 291-296.
33. **ZEE, Layne y STERNBERG, Eli.** Ordinary and strong ellipticity in the equilibrium theory of incompressible hyperelastic solids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1983, vol. 83, n.º 1, págs. 53-90.
34. **MERODIO, J y OGDEN, RW.** On tensile instabilities and ellipticity loss in fiber-reinforced incompressible non-linearly elastic solids. *Mechanics Research Communications*. 2005, vol. 32, n.º 3, págs. 290-299.
35. **MERODIO, J y OGDEN, RW.** Instabilities and loss of ellipticity in fiber-reinforced compressible non-linearly elastic solids under plane deformation. *International Journal of Solids and Structures*. 2003, vol. 40, n.º 18, págs. 4707-4727.
36. **MIELKE, Alexander.** Necessary and sufficient conditions for polyconvexity of isotropic functions. *Journal of Convex Analysis*. 2005, vol. 12, n.º 2, págs. 291.
37. **SCHRÖDER, Jörg, NEFF, Patrizio y BALZANI, Daniel.** A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity. *International journal of solids and structures*. 2005, vol. 42, n.º 15, págs. 4352-4371.
38. **STEIGMANN, David J.** On Isotropic, Frame-Invariant, Polyconvex Strain-Energy Functions. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2003, vol. 56, n.º 4, págs. 483-491.
39. **OGDEN, Raymond William.** Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1972, vol. 326, n.º 1567, págs. 565-584.
40. **STEIGMANN, David J.** Frame-invariant polyconvex strain-energy functions for some anisotropic solids. *Mathematics and mechanics of Solids*. 2003, vol. 8, n.º 5, págs. 497-506.
41. **TRIANTAFYLLODIS, N y ABEYARATNE, R.** Instabilities of a finitely deformed fiber-reinforced elastic material. 1983.
42. **OGDEN, Ray W.** Nonlinear elasticity, anisotropy, material stability and residual stresses in soft tissue. En: *Biomechanics of soft tissue in cardiovascular systems*. Springer, 2003, págs. 65-108.
43. **HOLZAPFEL, Gerhard A, GASSE, Thomas C y OGDEN, Ray W.** Comparison of a multi-layer structural model for arterial walls with a Fung-type model, and issues of material stability. *Journal of biomechanical engineering*. 2004, vol. 126, n.º 2, págs. 264-275.
44. **WALTON, Jay R y WILBER, J Patrick.** Sufficient conditions for strong ellipticity for a class of anisotropic materials. *International journal of non-linear mechanics*. 2003, vol. 38, n.º 4, págs. 441-455.
45. **VICINI, Alessandro y QUAGLIARELLA, Domenico.** Airfoil and wing design through hybrid optimization strategies. *AIAA journal*. 1999, vol. 37, n.º 5, págs. 634-641.
46. **MACIAS, Demetrio et al.** Heuristic optimization for the design of plasmonic nanowires with specific resonant and scattering properties. *Optics express*. 2012, vol. 20, n.º 12, págs. 13146-13163.

47. **DARWIN, Charles y BYNUM, William F.** *The origin of species by means of natural selection: or, the preservation of favored races in the struggle for life.* Penguin Harmondsworth, 2009.
48. **BEYER, Hans-Georg.** *The theory of evolution strategies.* Springer Science & Business Media, 2001.
49. **FOGEL, Lawrence J, OWENS, Alvin J y WALSH, Michael J.** Artificial intelligence through simulated evolution. 1966.
50. **HOLLAND, John Henry et al.** *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence.* MIT press, 1992.
51. **KOZA, John R.** *Non-linear genetic algorithms for solving problems.* Google Patents, 1990. US Patent 4,935,877.
52. **BACK, Thomas.** *Evolutionary algorithms in theory and practice: evolution strategies, evolutionary programming, genetic algorithms.* Oxford university press, 1996.
53. **KHARE, Anula y RANGNEKAR, Saroj.** A review of particle swarm optimization and its applications in solar photovoltaic system. *Applied Soft Computing.* 2013, vol. 13, n.º 5, págs. 2997-3006.
54. **NOCEDAL, Jorge y WRIGHT, Stephen.** *Numerical optimization.* Springer Science & Business Media, 2006.
55. **VIKHAR, Pradnya A.** Evolutionary algorithms: A critical review and its future prospects. En: *2016 International conference on global trends in signal processing, information computing and communication (ICGTSPICC).* 2016, págs. 261-265.
56. **AFFENZELLER, Michael et al.** *Genetic algorithms and genetic programming: modern concepts and practical applications.* Crc Press, 2009.
57. **ZAMES, G et al.** Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. *Information Technology Journal.* 1981, vol. 3, n.º 1, págs. 301-302.
58. **MICHALEWICZ, Z.** Genetic Algorithms+ Data Structures= Evolution Programs. Springer-Verlag, 1999. *Google Scholar Google Scholar Digital Library Digital Library.* 1999.
59. **YANG, Xin-She y KOZIEL, Slawomir.** *Computational optimization and applications in engineering and industry.* Springer Science & Business Media, 2011.
60. **MACÍAS, Demetrio, VIAL, Alexandre y BARCHIESI, Dominique.** Application of evolution strategies for the solution of an inverse problem in near-field optics. *JOSA A.* 2004, vol. 21, n.º 8, págs. 1465-1471.
61. **FISTER, Iztok.** On the mutation operators in evolution strategies. En: *Adaptation and Hybridization in Computational Intelligence.* Springer, 2015, págs. 69-89.
62. **KENNEDY, James y EBERHART, Russell.** Particle swarm optimization. En: *Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks.* 1995, vol. 4, págs. 1942-1948.
63. **WILSON, Edward O.** *Sociobiology: The new synthesis.* Harvard University Press, 2000.
64. **MATARIC, Maja J.** Interaction and intelligent behavior. 1994.
65. **EBERHART, Russell y KENNEDY, James.** A new optimizer using particle swarm theory. En: *MHS'95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science.* 1995, págs. 39-43.

66. **CLERC, Maurice.** *Particle swarm optimization*. John Wiley & Sons, 2010.
67. **NUNES, LCS.** Mechanical characterization of hyperelastic polydimethylsiloxane by simple shear test. *Materials Science and Engineering: A*. 2011, vol. 528, n.º 3, págs. 1799-1804.
68. **FERNÁNDEZ, JR et al.** A genetic algorithm for the characterization of hyperelastic materials. *Applied Mathematics and Computation*. 2018, vol. 329, págs. 239-250.
69. **PICHENY, Victor, WAGNER, Tobias y GINSBOURGER, David.** A benchmark of kriging-based infill criteria for noisy optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2013, vol. 48, n.º 3, págs. 607-626.
70. **KENJA, Krishna, MADIREDDY, Sandeep y VEMAGANTI, Kumar.** Calibration of hyperelastic constitutive models: the role of boundary conditions, search algorithms, and experimental variability. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2020, págs. 1-18.
71. **BUDDAY, S et al.** Mechanical characterization of human brain tissue. *Acta biomaterialia*. 2017, vol. 48, págs. 319-340.
72. **REUTER, T y PONOMAREV, I.** Biomechanical parameter determination of scaffold-free cartilage constructs (SFCCs) with the hyperelastic material models Yeoh, Ogden and Demiray. *Current Directions in Biomedical Engineering*. 2015, vol. 1, n.º 1, págs. 442-445.
73. **TENG, Zhongzhao et al.** The influence of constitutive law choice used to characterise atherosclerotic tissue material properties on computing stress values in human carotid plaques. *Journal of biomechanics*. 2015, vol. 48, n.º 14, págs. 3912-3921.
74. **HOLZAPFEL, Gerhard A y OGDEN, Ray W.** Constitutive modelling of arteries. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010, vol. 466, n.º 2118, págs. 1551-1597.
75. **BANSAL, Jagdish Chand, SINGH, Pramod Kumar y PAL, Nikhil R.** *Evolutionary and swarm intelligence algorithms*. Springer, 2019.
76. **GARCÍA-HERRERA, Claudio M et al.** Mechanical characterisation of the human thoracic descending aorta: experiments and modelling. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2012, vol. 15, n.º 2, págs. 185-193.
77. **MANCILLA, Eugenio Rivera et al.** Effects of melatonin on the passive mechanical response of arteries in chronic hypoxic newborn lambs. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2020, págs. 104013.
78. **SASSO, M et al.** Characterization of hyperelastic rubber-like materials by biaxial and uniaxial stretching tests based on optical methods. *Polymer Testing*. 2008, vol. 27, n.º 8, págs. 995-1004.
79. **ATIENZA, José M et al.** The influence of pressure and temperature on the behavior of the human aorta and carotid arteries. *Revista Española de Cardiología (English Edition)*. 2007, vol. 60, n.º 3, págs. 259-267.