2025 牛客寒假营第五场题解

2025 年 2 月 8 日

A 小 L 的三则运算

签到题，分别对每个运算符讨论一下即可。

如果是加号，输出 $x-1$ 和 1 。

如果是减号，输出 $x+1$ 和 1 。

如果是乘号，输出 x 和 1 。

询问 $O(1)$ 即可。

B 小 L 出师了

小思维题。

转化一下，就是我们考虑用 k 个隔板把 $n-k$ 个排成一排的箱子分成 $k+1$ 份，转化后就允许为空了。然后使其尽可能多的份数大于等于 t ，所以答案就是 $min(\lfloor\frac{n-k}{t}\rfloor, k+1)$ 。

一次回答复杂度 $O(1)$ 。

C 小 L 的位运算

有关贪心的小思维题。

由于反置代价小于等于交换代价，那么一定不能用交换去代替反置。

首先，如果交换的代价大于了两次反置的代价，那么直接全部使用反置即可。

否则，我们将不匹配的位置分类，发现最多只有四类，ab 分别是 $00, 01, 10, 11$ ，任意两个不同种类不匹配的话，我们一定可以交换其中的某一位 0 和 1 使之两两匹配，那么我们就只看最多的一类不匹配的位置的数量有没有超过总数的一半即可。

如果超过就超过的部分反置，其余匹配，否则一定存在一种分配方式使之匹配后至多仅剩一个。

循环枚举一下即可，复杂度 $O(n)$ 。

D 小 L 的字符串翻转

有关贡献的小思维题。

出于个人习惯，我们将数字称呼为颜色。

如果对于每个 k 单独考虑。注意到最后答案的段数等于颜色段分界的数量加一，而只有在分段后存在两种不同颜色的段才会有颜色段的分界，那么其实答案就是存在两种不同

颜色的段的数量加一。预处理一下 0 和 1 的前缀和，再调和级数枚举一下可以 $O(nlogn)$ 通过此题。

我们换一种方式考虑，我们想想哪些段不会产生贡献，也就是只有一种颜色的段，它们在原来的整个字符串里也只有一种颜色。那么我们就去枚举整个字符串同色的每一段，看它可能对哪些 k 有贡献，这样去计算，复杂度 $O(n)$ 。

其实出题人的期望做法是下面这个，不过卡调和级数比较没意思，遂都放过了。

E 小 L 的井字棋

披着搜索外壳的分类讨论题。

你可以使用记忆化搜索去做，码量比较大，复杂度比较玄学，不同的搜索方式不一样，有部分这样写的代码可以通过，这里不再赘述。

再往下想想，其实我们可以发现先手下的人赢面本来就很大。

首先如果棋盘上没有棋子，那么我们下中间，然后再使用特权随便下两个可以连起来的地方，即可胜利。

如果棋盘上已经各有一颗棋子，那么这颗棋子一定至少有一个方向没有对方的棋子，我可以直接使用特权胜利。

如果棋盘上已经各有四颗棋子，直接填入后判断即可。

如果棋盘上已经各有三颗棋子，那么一定是使用特权更优，三种方式枚举一下，结果或起来即可。

如果棋盘上已经各有两颗棋子，手算枚举一下各个情况，发现无论怎么下都是先手必胜的，直接 Yes 即可。

按照上面的情况即可通过此题，复杂度为 check 函数的复杂度，大概为几十的常数。

F 小 L 的抽卡

披着概率壳子的分治题。

设每个位置的概率为 $p_i = \frac{1}{a_i}$ ，把每个位置看成一个一次多项式 $p_i * x + (1 - p_i)$ ，那么 x^t 的系数就表示得到 t 个 up 角色的概率。由于存在转化机制，这个多项式的指数是 $mod\ P$ 意义下的，每次乘上一次多项式的时候将溢出的部分加到指数取模后的数的系数上就好了。

然后考虑离线处理询问。对于一个 $[l, r]$ 的区间，我们如果能求解 $l - mid$ 的后缀的多项式，$mid + 1 - r$ 的前缀的多项式，那么将两者乘起来就能得到我们想要的多项式。

这里我们使用到分治的技巧，先去处理 $[1, n]$ 区间的中点到两端的前后缀多项式，然后对于包含了这个中点的所有区间，我们都可以用这些前后缀多项式合并起来获取答案，没有经过的，我们就递归地进入下一层进行处理。在合并前后缀多项式的时候，由于我们每个 l, r 只关心一个 P ，那么我们只需要枚举 k 次就行了。

最后的时间复杂度是 $O(nklogn + qk)$ 。

G 小 L 的三元组

出题人以为很麻烦其实被验题人用比较简单的写法通过的计数题。

首先，注意到 $w_x = w_y$ ，那么自然地想到了虚树。我们对权值建立虚树，然后按权值从大到小开始枚举虚树，使用线段树计算出虚树上每个边的权值，然后再在虚树上使用树

形 dp 获取这棵虚树的贡献，接着把这棵虚树的值插入线段树中，用以更新下一棵虚树的边的权值。

由于是值域线段树，我们还需要离散化。

处理虚树边权有两种方法，一是树剖，二是直接处理到根的贡献后差分，前者多一个 log 。

复杂度为 $O(nlogn)$ 或者 $O(nlog^2n)$ 。

当然，你也可以使用主席树 + 点分治离线完成上面的询问，据我所知是有人在赛时这样通过的。

验题人好像基本全是写的 dsu on tree，疑似码量小很多。

H 小 L 的 min-max 问题

一道计数题。

考虑每一个段的贡献。枚举每一个段，剩下的左右一共要分成 $k-1$ 个段。左边的长度如果为 x ，右边为 y ，那么 $x+y \geq k-1$ 。满足这个条件，开始分别枚举左右的段数，设左边分 i 段，那么右边分 $k-1-i$ 段，那么答案即为 $\sum C(x-1,i-1)*C(y-1,k-2-i)$ 。这个式子可以使用类似于范特蒙德卷积的方式，或者自己写一下递推式子进行递推，可以得到式子为 $C(x-1+y-1,k-3)$ ，对于边界的情况再特殊讨论一下即可。

I 小 L 的数学题

一道可以猜猜就过的题。

n 和 m 中仅有一个是 0 ，就是 No 。

如果都是 0 ，就是 Yes 。

否则，大于 0 的正整数是一定可以互相转换的，证明如下：

首先，任何正整数都能达到 1 。

考虑一个数 $k^{2^j} \leq x < (k+1)^{2^j}$，那么 x 做 j 次 sqrt 就可以得到 k 。

两边取 log_2，j 足够大的时候 $2^j(log_2(k+1)-log_2(k)) > 1$ ，所以一定有整数 i 在 $2^jlog_2(k)$ 和 $2^jlog_2(k+1)$ 之间。

取 $x=2^i$ 。

即可得到 k 。

J 小 L 的汽车行驶问题

一道简单的模拟题。

按照题目要求维护一个速度，然后每秒钟加上速度 v 的值就行了。

油门就加 10 ，刹车就减 5 ，离合就不便，只是加上的速度是 $max(v-10,0)$ 。

复杂度 $O(n)$ 。

K 小 L 的几何题

一道披着几何外衣的数论题。

由于坐标范围很小，于是有效半径的范围也很小。那么我们可以获取每个半径上对应的整点。

这要求我们处理出所有的勾股数。这里给出一种方法：

$a^2+b^2=c^2$ ，则 $b^2=(c+a)*(c-a)$ 。

我们设 $t=c+a$ ，则 $(c-a)*t=b^2$ ，那么反解得到 $c=\frac{b^2+t^2}{2t}, a=\frac{t^2-b^2}{2t}$ ，枚举 b^2 的约数 t 再验证即可，在题目给出的数据范围内跑 $400ms$。

然后对于每一个半径验证一下是否有点出现即可，复杂度 $O(n*max(cnt))$ ，$max(cnt)$ 表示圆上最多的整点的个数。

L 小 L 的构造

一道构造题。

$n \leq 3$ 时，无解。

$n > 3$ 时候，分 $mod\ 6$ 考虑。

首先 $p=n/3$ 。

模 6 余小于等于 2 时，直接连续六个一组，设最小的为 x ，那么 $x, x+1, x+3$ 与 $x+2, x+4, x+5$ 一定符合条件，因为 $x+3$ 与 $x+1$ 都是偶数，不互质，x 与 $x+1$ 互质，$x+3$ 与 x 相差 3 ，但它们都不是 3 的倍数，故互质。$x+2$ 与 $x+5$ 都是 3 的倍数，故不互质，$x+4$ 与 $x+5$ 互质，$x+4$ 与 $x+2$ 是相邻的奇数，互质。故符合条件。

大于等于 3 时，先把前 9 个数拿出来匹配，前 9 个可以配成 $1,2,4;3,9,5;6,8,7$ ，后面形如上面匹配即可。

复杂度 $O(n)$ 。