

Politechnika Warszawska

Informatyka II

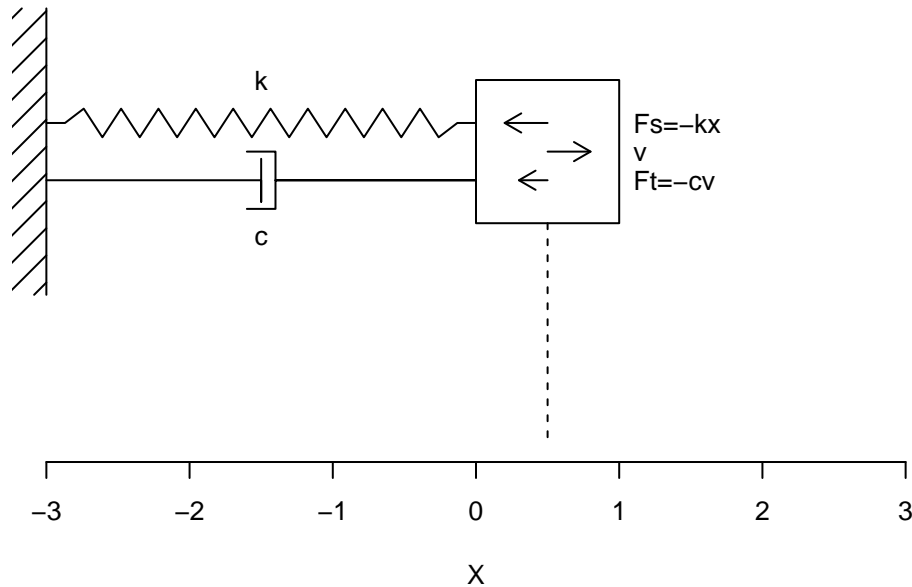
UKŁAD ZE SPRĘŻYNĄ O NIELINIOWEJ CHARAKTERYSTYCE

Jan Adamski 123456
Adam Jański 654321

Prowadzący: Jakiś Ktoś

Data oddania: **01.06.2019 r.**

1 Opis problemu



Charakterystyka nieliniowa sprężyny: $k = k_1(1 + k_2x^2)$

2 Równania ruchu

Siła wywierana na masę przez sprężynę:

$$F_s = -kx = -k_1(1 + k_2x^2)x$$

Siła wywierana na masę przez tłumik:

$$F_t = -c\dot{x}$$

Równanie ruchu:

$$m\ddot{x} = F_s + F_t = -k_1(1 + k_2x^2)x - c\dot{x}$$

Równanie to można przekształcić na układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m}(-k_1(1 + k_2x^2)x - cy) \end{cases} \quad (1)$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Energia potencjalna sprężyny:

$$E_p = \int k_1(1 + k_2x^2)x \cdot dx = \int (k_1x + k_1k_2x^3) dx = \frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_1k_2x^4}{4}$$

Całkowita energia mechaniczna:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_1 k_2 x^4}{4}$$

Uwaga: bez straty ogólności, w dalszej części pracy będziemy przyjmować $m = 1$.

3 Metoda Obliczeniowa

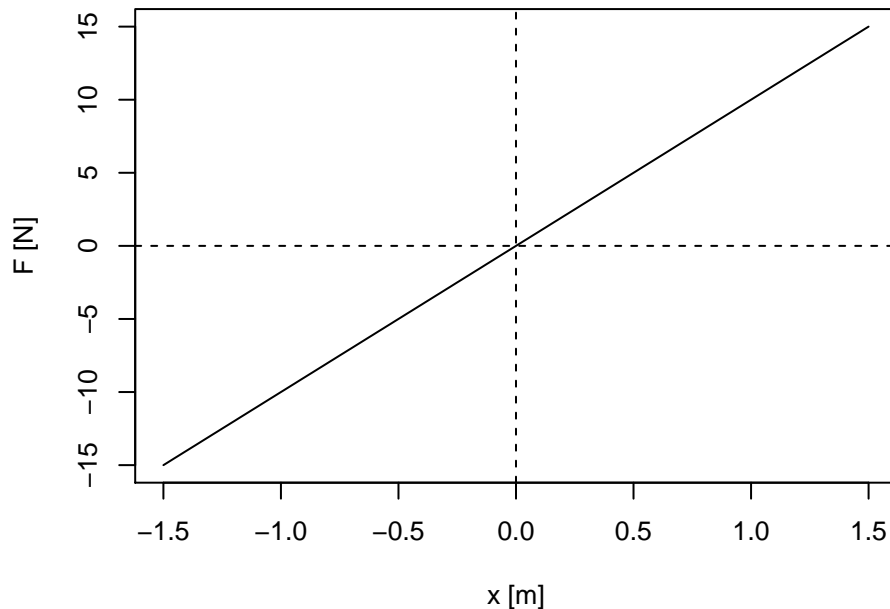
Układ równań został scałkowany przy pomocy metody Runge-Kutta 4-tego rzędu. Czas całkowania: 10s. Krok całkowania: $\frac{10s}{1500}$.

4 Wyniki

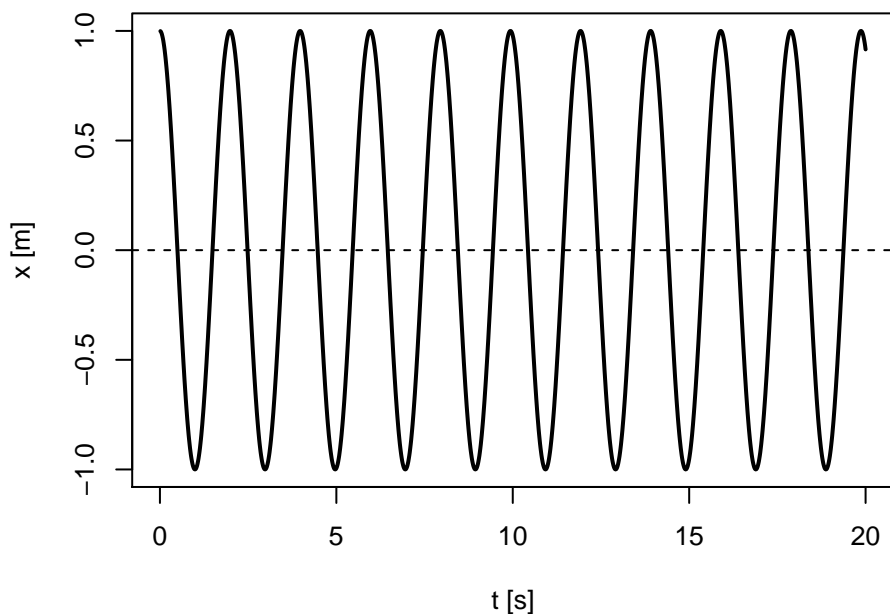
Przeprowadzono symulację dla czterech przypadków: Liniowej i nieliniowej charakterystyki sprężyny, a także z i bez tłumienia.

4.1 Przypadek liniowej sprężyny ($k_1 = 10$)

Liniowa sprężyna charakteryzuje się liniową zależnością pomiędzy wychyleniem a siłą:



Rozwiązanie numeryczne tego układu jest zgodne z oczekiwanym sinusoidalnym kształtem:



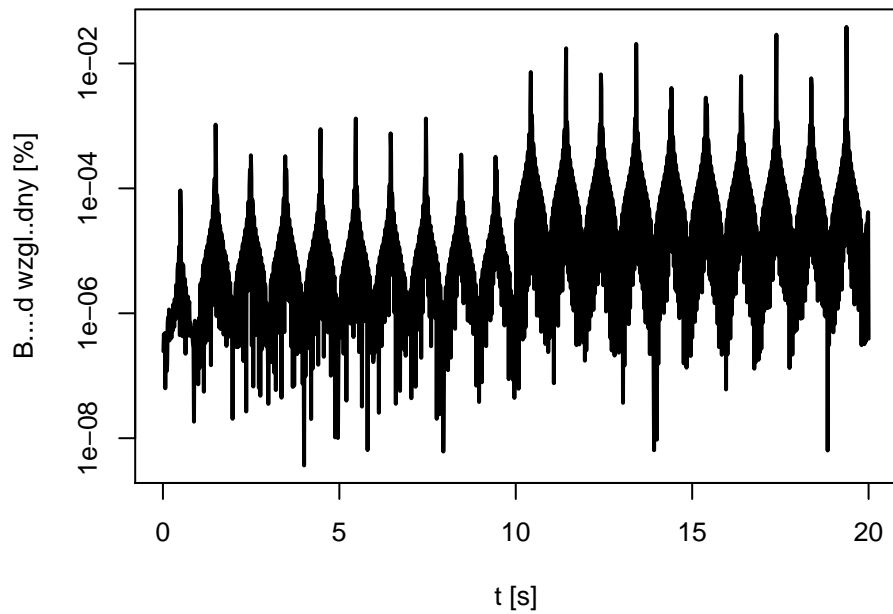
Dla tak prostego układu $m\ddot{x} + k_1x = 0$, możemy wyznaczyć rozwiązanie analityczne przez podstawienie $x = e^{rt}$. Otrzymane rozwiązanie ogólne (po usunięciu części urojonej) ma postać:

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k_1}{m}}t + B \sin \sqrt{\frac{k_1}{m}}t$$

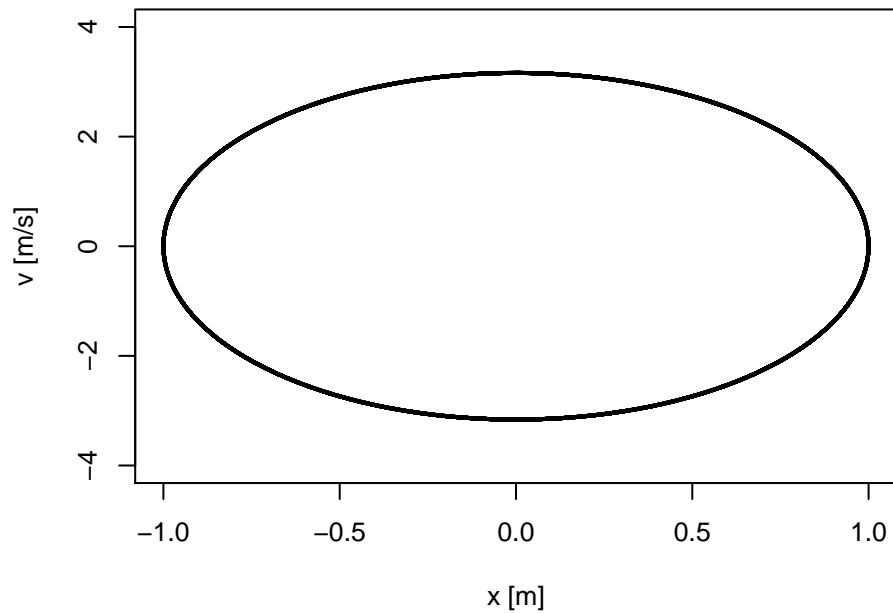
Dla warunków początkowych $x(0) = 1 \wedge \dot{x}(0) = 1$ mamy:

$$x(t) = \cos \sqrt{\frac{k_1}{m}}t$$

Wizualnie rozwiązanie numeryczne pokryłoby się z analitycznym, możemy jednak zwizualizować błąd względny ($\left| \frac{x_n - x_a}{x_a} \right|$) w skali logarytmicznej:



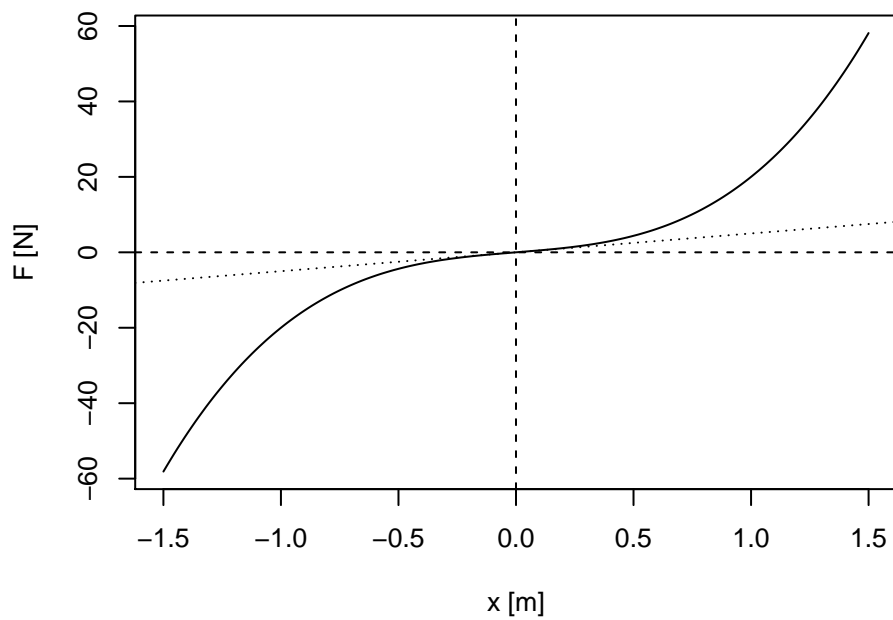
W przestrzeni fazowej ($x - v$) rozwiązanie jest zamkniętą elipsą. Nie ma tu sensu mówienie o jej proporcjach, ponieważ obie osie mają różne skale.



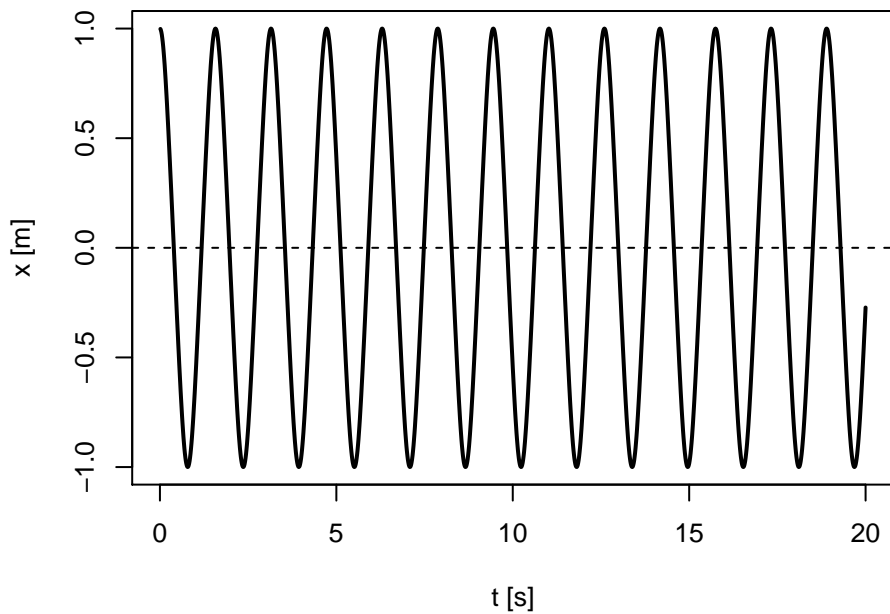
Zamknięta ścieżka w przestrzeni fazowej sugeruje, że układ nie traci energii.

4.2 Przypadek nieliniowej sprężyny ($k_1 = 5$ $k_2 = 3$)

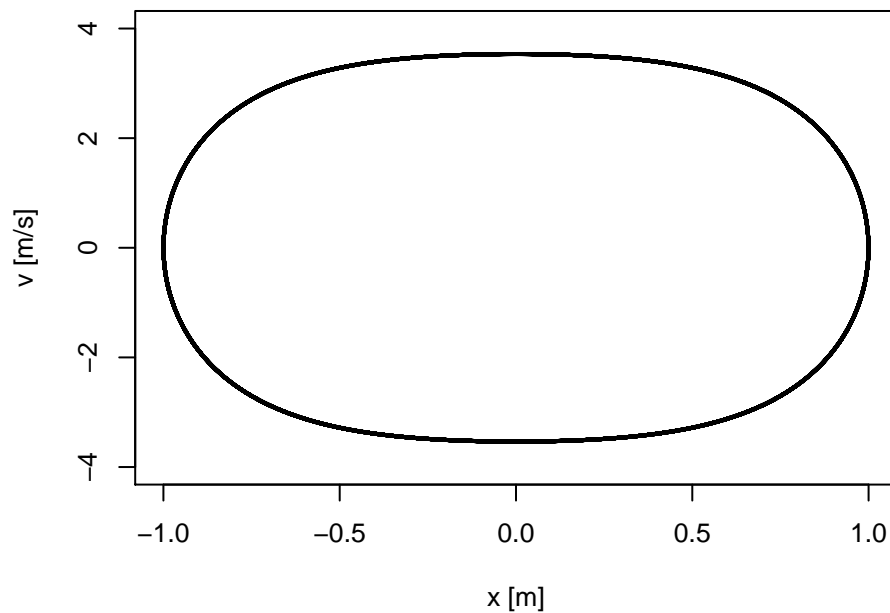
Zależność siły od wychylenia dla omawianej nieliniowej sprężyny:



Rozwiązanie numeryczne dla nieliniowej sprężyny ma “ostrzej” zakończone maxima i minima. Jest to związane z wyższą siłą przy dużych wychyleniach niż w przypadku liniowej sprężyny.

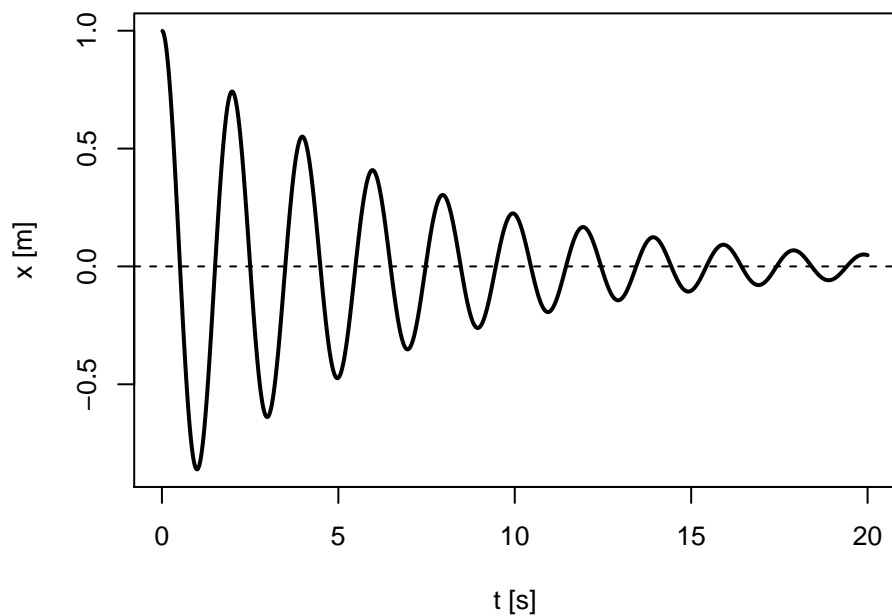


W przestrzeni fazowej, trajektoria nadal jest zamkniętą pętlą, lecz nie jest już elipsą:

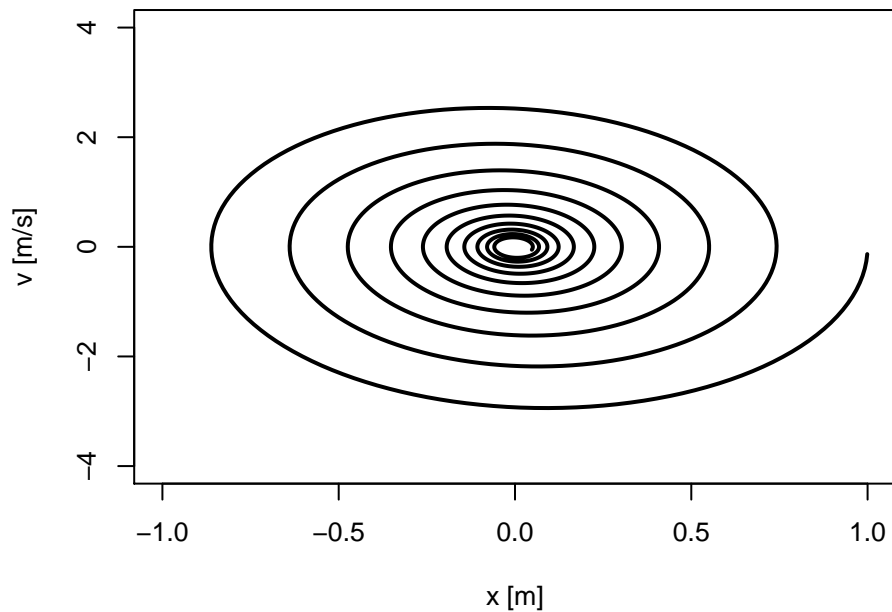


4.3 Przypadek liniowej sprężyny z tłumikiem ($k_1 = 10$ $c = 0.3$)

Rozwiązanie numeryczne dla liniowej sprężyny z tłumikiem, ma wykładniczy spadek. W związku z tym, że częstotliwość drgania układu liniowego nie zależy od wychylenia, odstępów pomiędzy momentami przejścia przez zero są ciągle stałe.



W przestrzeni fazowej, trajektoria nie jest już zamknięta i schodzi spiralnie do zera:



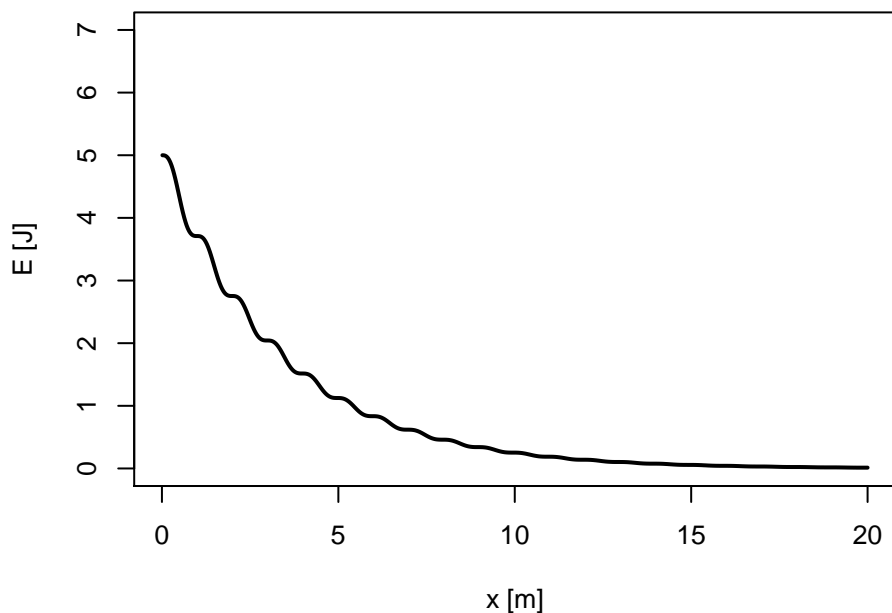
Tłumik wprowadza element niezachowawczy do układu. Powoduje to spadek energii. Łatwo ten efekt zobaczyć wymnażając oryginalny układ przez \dot{x} :

$$\dot{x}m\ddot{x} + \dot{x}c\dot{x} + \dot{x}k_1x = 0$$

Po przekształceniu mamy:

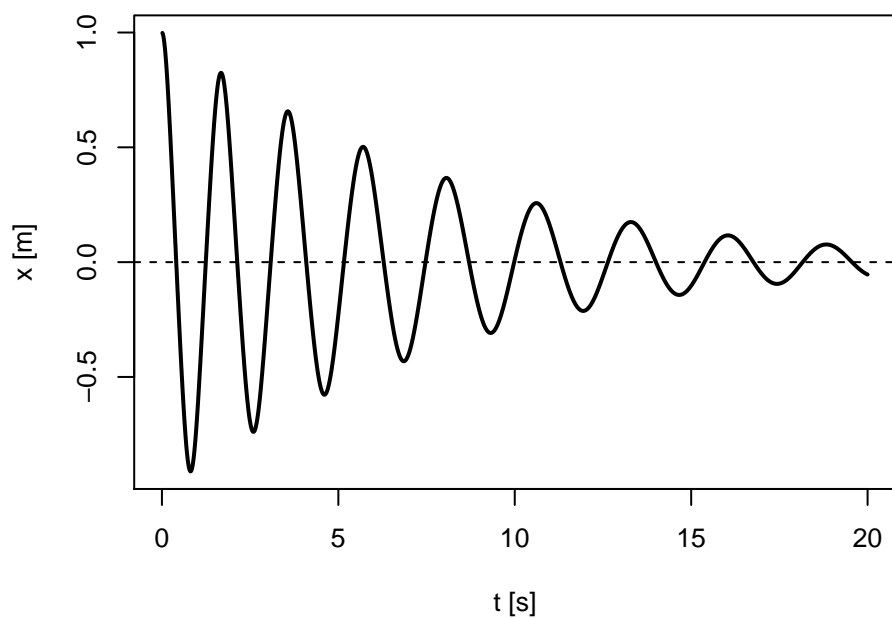
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_1 x^2}{2} \right) = -c\dot{x}^2$$

Na wykresie całkowitej energii widać wyraźnie spadek energii, który następuje w momentach wysokiej prędkości.

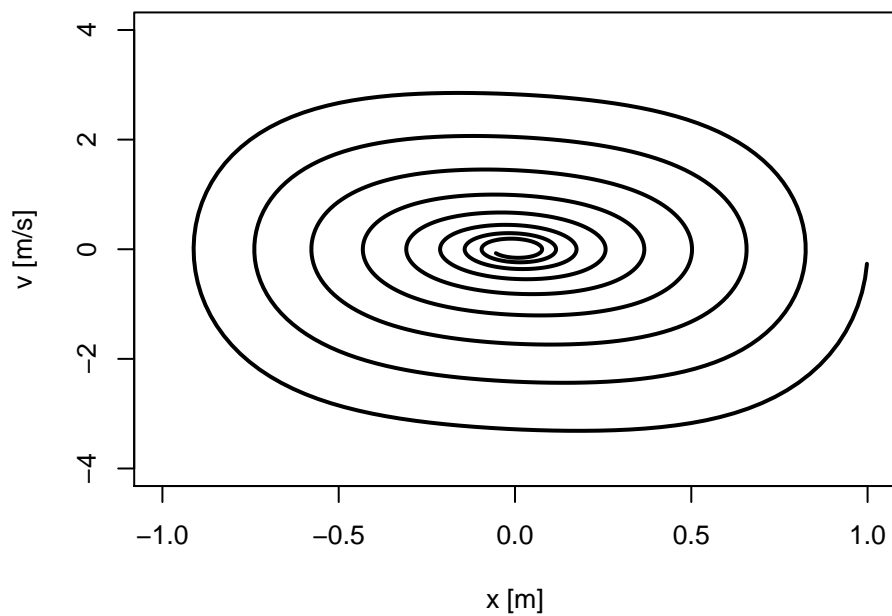


4.4 Przypadek nieliniowej sprężyny z tłumikiem ($k_1 = 5$ $k_2 = 3$ $c = 0.3$)

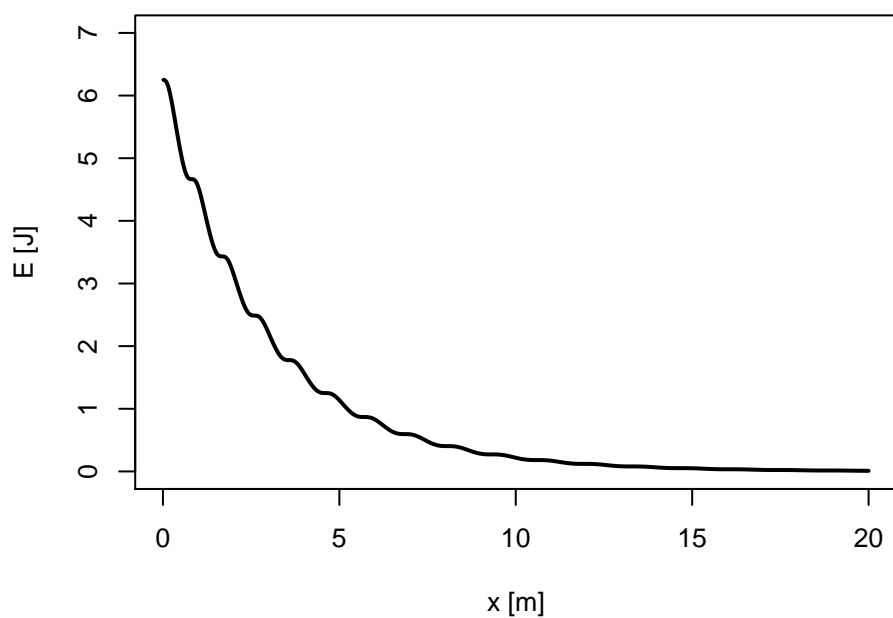
Rozwiązanie numeryczne dla nie-liniowej sprężyny z tłumikiem, ma także wykładniczy spadek. Dla nieliniowej sprężyny częstotliwość zmienia się wraz z maksymalnym wychyleniem. Dlatego odstępy pomiędzy przejściami przez zero będą się wydłużać.



W przestrzeni fazowej, trajektoria jest nieeliptyczną spiralą. Dodatkowo można zauważyć że gdy wychylenie się zmniejsza, trajektoria robi się coraz bardziej eliptyczna:



Tak jak w poprzednim przypadku, energia spada w czasie:



5 Omówienie wyników