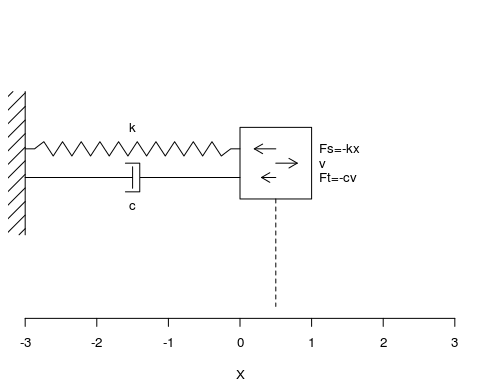
Układ ze sprężyną o nieliniowej charakterystyce

# Opis problemu



Charakterystyka nieliniowa sprężyny:

# Równania ruchu

Siła wywierana na masę przez sprężynę:

Siła wywierana na masę przez tłumik:

Równanie ruchu:

Równanie to można przekształcić na układ równań pierwszego rzędu:

Energia kinetyczna:

Energia potencjalna sprężyny:

Całkowita energia mechaniczna:

**Uwaga:** bez straty ogólności, w dalszej części pracy będziemy przyjmować .

# Metoda Obliczeniowa

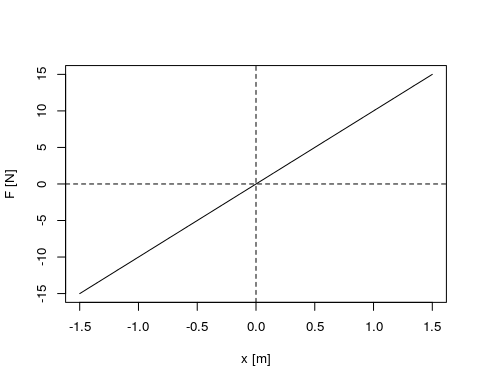
Układ równań został scałkowany przy pomocy metody Runge-Kutta 4-tego rzędu. Czas całkowania: . Krok całkowania: .

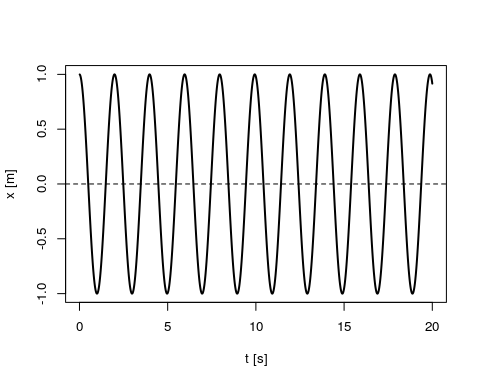
# Wyniki

Przeprowadzono symulację dla czterech przypadków: Liniowej i nieliniowej charakterystyki sprężyny, a także z i bez tłumienia.

## Przypadek liniowej sprężyny ()

Liniowa sprężyna charakteryzuje się liniową zależnością pomiędzy wychyleniem a siłą:

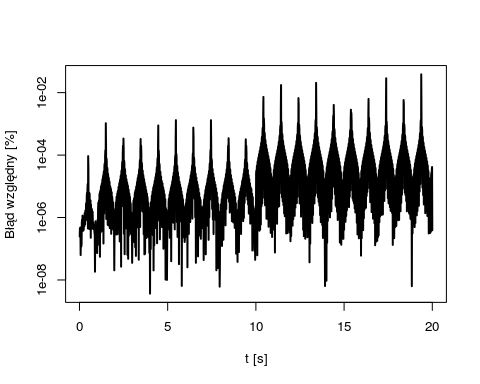
 Rozwiązanie numeryczne tego układu jest zgodne z oczekiwanym sinusoidalnym kształtem:



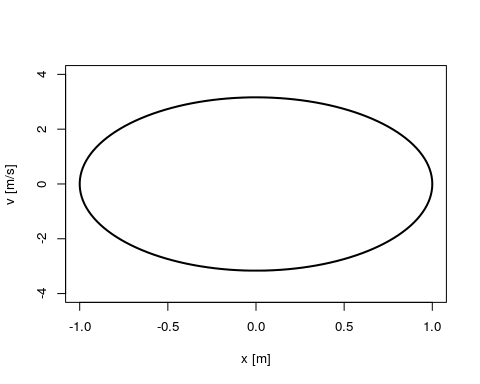
Dla tak prostego układu , możemy wyznaczyć rozwiązanie analityczne przez podstawienie . Otrzymane rozwiązanie ogólne (po usunięciu części urojonej) ma postać:

Dla warunków początkowych mamy:

Wizualnie rozwiązanie numeryczne pokryłoby się z analitycznym, możemy jednak zwizualizować błąd względny () w skali logarytmicznej:



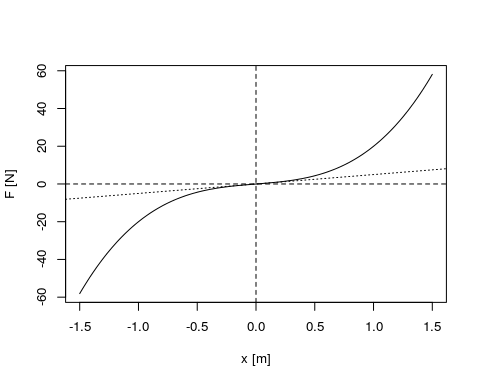
W przestrzeni fazowej () rozwiązanie jest zamkniętą elipsą. Nie ma tu sensu mówienie o jej proporcjach, ponieważ obie osie mają różne skale.



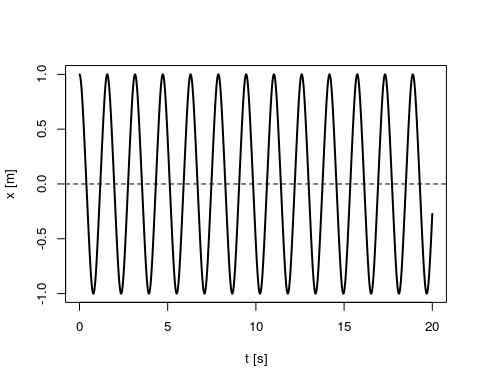
Zamknięta ścieżka w przestrzeni fazowej sugeruje, że układ nie traci energii.

## Przypadek nieliniowej sprężyny ()

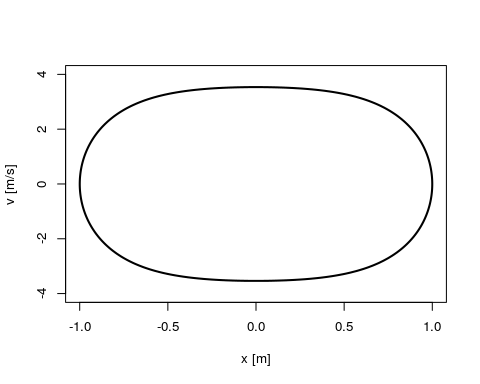
Zależność siły od wychylenia dla omawianej nieliniowej sprężyny:



Rozwiązanie numeryczne dla nieliniowej sprężyny ma “ostrzej” zakończone maxima i minima. Jest to związane z wyższą siłą siłą przy dużych wychyleniach niż w przypadku liniowej sprężyny.

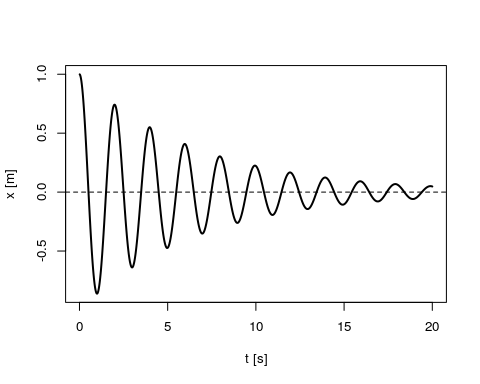


W przestrzeni fazowej, trajektoria nadal jest zamkniętą pętlą, lecz nie jest już elipsą:

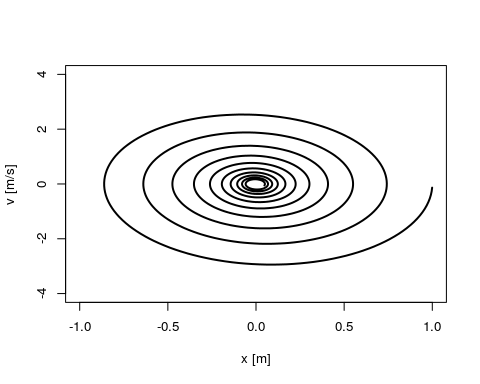


## Przypadek liniowej sprężyny z tłumikiem ()

Rozwiązanie numeryczne dla liniowej sprężyny z tłumikiem, ma wykładniczy spadek. W związku z tym, że częstotliwość drgania układu liniowego nie zależy od wychylenia, odstępy pomiędzy momentami przejścia przez zero są ciągle stałe.



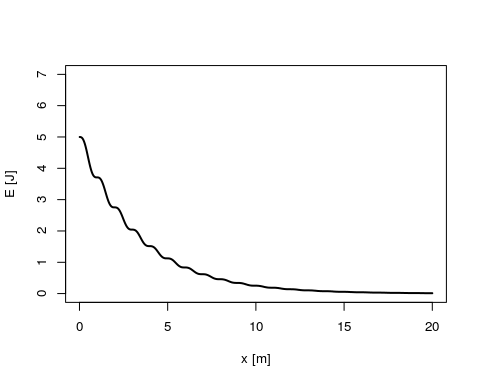
W przestrzeni fazowej, trajektoria nie jest już zamknięta i schodzi spiralnie do zera:



Tłumik wprowadza element niezachowawczy do układu. Powoduje to spadek energii. Łatwo ten efekt zobaczyć wymnażając oryginalny układ przez :

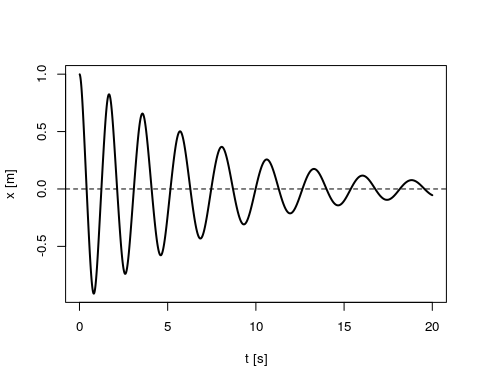
Po przekształceniu mamy:

Na wykresie całkowitej energii widać wyraźnie spadek energii, który następuje w momentach wysokiej prędkości.

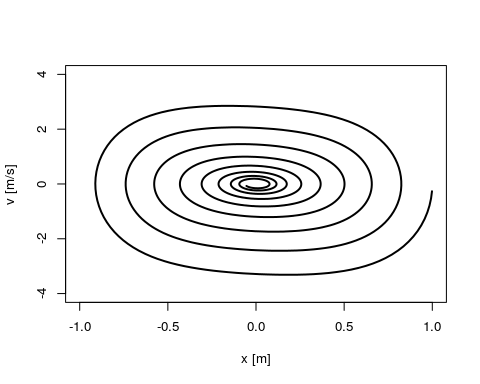


## Przypadek nieliniowej sprężyny z tłumikiem ()

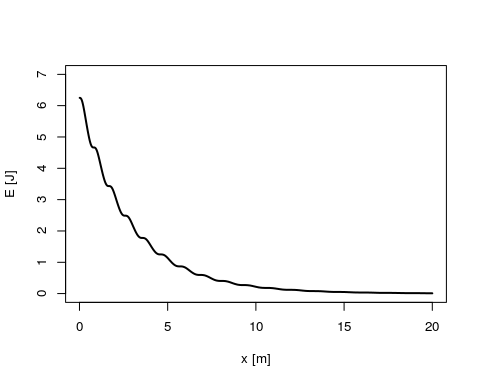
Rozwiązanie numeryczne dla nie-liniowej sprężyny z tłumikiem, ma także wykładniczy spadek. Dla nieliniowej sprężyny częstotliwość zmienia się wraz z maksymalnym wychyleniem. Dlatego odstępy pomiędzy przejściami przez zero będą się wydłużać.



W przestrzeni fazowej, trajektoria jest nieeliptyczną spiralą. Dodatkowo można zauważyć że gdy wychylenie się zmniejsza, trajektoria robi się coraz bardziej eliptyczna:



Tak jak w poprzednim przypadku, energia spada w czasie:



# Omówienie wyników