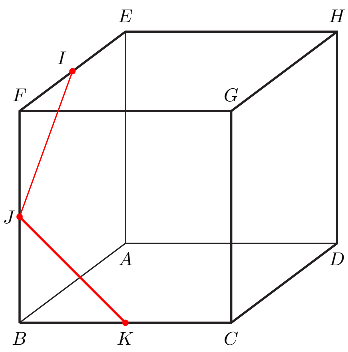
Exercice n° 1.
On considère un cube $ABCDEFGH$
On note I le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[FB]$ et K le milieu de $[BC]$
Calculer l'angle $\widehat{IJK}$

Correction



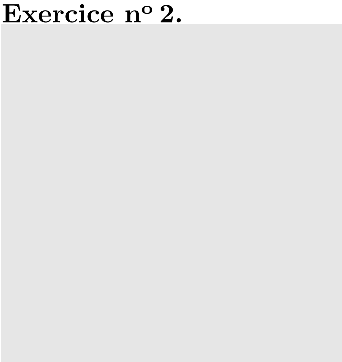
On note $\theta = \widehat{(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JK})}$ (angle non orienté)
On note $\mathcal{R} = \left(B, \overrightarrow{BK}, \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ}\right)$
$\mathcal{R}$ est un repère orthonormé.

$$K\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad J\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad I\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad JK = JI = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{JI}}{JK \times JI} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$$

Exercice n° 2.



a) On considère un cube $ABCDEFGH$.
Montrer que $ACFH$ est un tétraèdre régulier.

b) On note O le centre du tétraèdre $ACFH$.
Calculer l'angle $\widehat{AOC}$.

c) On considère une molécule de méthane CH_4
Que vaut l'angle $\widehat{\mathrm{HCH}}$ où les H désignent deux atomes d'hydrogène de la molécule ?

Correction

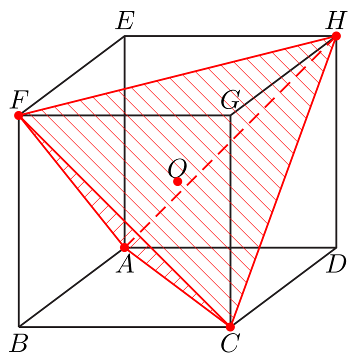
a) Le tétraèdre $ACFH$ est régulier puisque toutes ses arêtes sont des diagonales de faces du cube.

b) On note $\theta = \widehat{AOC}$ (angle non orienté)
Soit $\mathcal{R} = \left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}\right)$ $\mathcal{R}$ est orthonormé

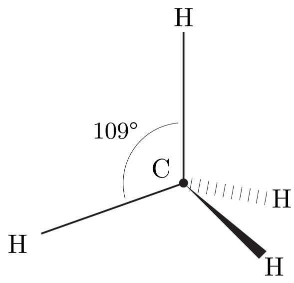
$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad O\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}}{OA \times OF} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$$

donc $\boxed{\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \simeq 109°\ 28'}$



c) Dans une molécule de méthane CH_4, l'atome de carbone se trouve au centre du tétraèdre formé par les quatre atomes d'hydrogène, donc $\widehat{\mathrm{HCH}} \simeq 109° \, 28'$

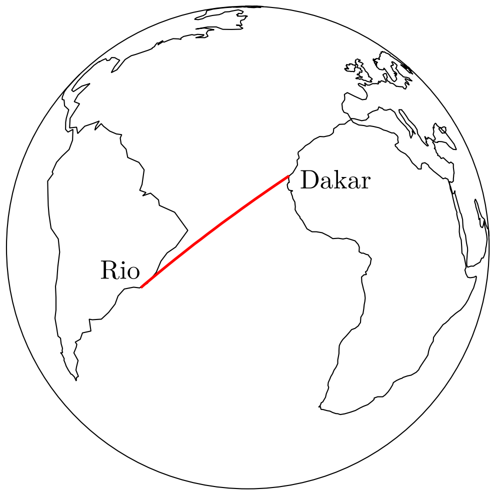


Exercice n° 3.

On donne ci-dessous les longitudes et latitudes des villes de Dakar et de Rio de Janeiro :

	longitude	latitude
Dakar	$\theta_1 = 17°$ O	$\psi_1 = 15°$ N
Rio de Janeiro	$\theta_2 = 43°$ O	$\psi_2 = 23°$ S

On demande de calculer la distance à « vol d'oiseau » entre Dakar et Rio de Janeiro sachant que le rayon terrestre est de $R = 6\,378$ km.

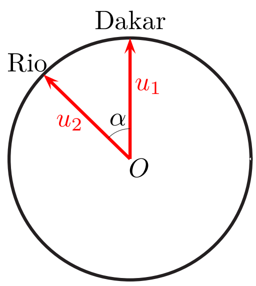


Correction

On note O le centre de la Terre $\quad M_1$ le point correspondant à Dakar $\quad u_1 = \overrightarrow{OM_1}$

M_2 le point correspondant à Rio de Janeiro $\quad u_2 = \overrightarrow{OM_2}$

	longitude	latitude
Dakar	$\theta_1 = -17°$	$\psi_1 = 15°$
Rio de Janeiro	$\theta_2 = -43°$	$\psi_2 = -23°$



Le point de la surface terrestre de longitude θ et de latitude ψ a pour coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = R\cos\psi\cos\theta \\ y = R\cos\psi\sin\theta \\ z = R\sin\psi \end{cases}$$

$$u_1 \begin{pmatrix} R\cos\psi_1\cos\theta_1 \\ R\cos\psi_1\sin\theta_1 \\ R\sin\psi_1 \end{pmatrix} \qquad u_2 \begin{pmatrix} R\cos\psi_2\cos\theta_2 \\ R\cos\psi_2\sin\theta_2 \\ R\sin\psi_2 \end{pmatrix}$$

donc $\quad u_1 \cdot u_2 = R^2\big(\cos\psi_1\cos\theta_1\cos\psi_2\cos\theta_2 + \cos\psi_1\sin\theta_1\cos\psi_2\sin\theta_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2\big)$

donc $\quad \cos\left(\widehat{u_1, u_2}\right) = \cos\psi_1\cos\theta_1\cos\psi_2\cos\theta_2 + \cos\psi_1\sin\theta_1\cos\psi_2\sin\theta_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2$

$\alpha = \left(\widehat{u_1, u_2}\right) = \arccos\big(\cos\psi_1\cos\theta_1\cos\psi_2\cos\theta_2 + \cos\psi_1\sin\theta_1\cos\psi_2\sin\theta_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2\big)$

La distance entre Rio de Janeiro et Dakar est donc :

$$d = R\arccos\big(\cos\psi_1\cos\theta_1\cos\psi_2\cos\theta_2 + \cos\psi_1\sin\theta_1\cos\psi_2\sin\theta_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2\big)$$

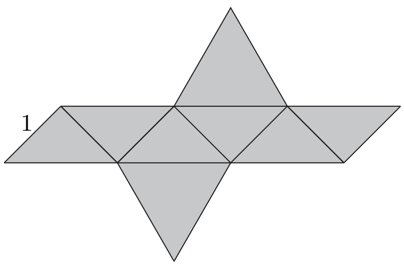
On peut simplifier un peu cette écriture en écrivant :

$$\boxed{d = R\arccos\big(\cos\psi_1\cos\psi_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \sin\psi_1\sin\psi_2\big)}$$

Application numérique : $d = 5\,088$ km

Remarque : Le moteur de recherche scientifique WolframAlpha propose ce type de calcul. Par exemple, pour la distance de Dakar à Rio, il suffit de taper : `Dakar Rio`. On a de plus une visualisation de la trajectoire.

Exercice n° 4. *Extrait du rallye mathématique d'Aquitaine, 2001*
Désireux de lancer une nouvelle marque de jus d'orange, un fabricant décide de la commercialiser sous une forme originale d'emballage, dont on a représenté un patron ci-dessous. Ce patron est constitué de six triangles rectangles isocèles de même taille et de deux triangles équilatéraux.
Calculer le volume de ce nouveau conditionnement.



Correction

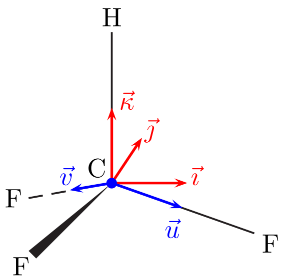
Le solide considéré possède huit faces, dont deux triangles équilatéraux isométriques et six triangles rectangles isocèles isométriques.
Les triangles rectangles isocèles ont des côtés de l'angle droit égal à 1 et donc des diagonales égales à $\sqrt{2}$.
Les deux triangles équilatéraux ont donc leurs côtés de longueur $\sqrt{2}$.

En construisant le solide à partir du patron, on se rend compte qu'il peut être décomposé en deux pyramides dont la base est un rectangle et dont les quatre autres faces sont constituées par un triangle équilatéral et trois triangles rectangles isocèles.
La base de ces pyramides est un rectangle de largueur 1 et de longueur $\sqrt{2}$ dont l'aire vaut donc $\sqrt{2}$.
La hauteur de ces pyramides est la hauteur du triangle rectangle isocèle, à savoir $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Le volume de ces pyramides est égal à $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}$.

Le volume total du solide est donc égal à $\frac{2}{3}$

On propose ci-contre un modèle 3D manipulable à la souris dans Adobe Reader du berlingorange considéré dans cet exercice.

Exercice n° 5.



Le trifluorométhane, aussi appelé R23, est un fluide frigorigène de formule CHF_3 (contrairement aux anciens CFC, il n'attaque pas la couche d'ozone).
On s'intéresse à la géométrie d'une molécule de trifluorométhane.
On considère comme connu l'angle $\alpha = \widehat{\mathrm{HCF}} \simeq 110.6°$.
(source : `http://www.colby.edu/chemistry/webmo/CHF3.html`)
On désire calculer l'angle $\widehat{\mathrm{FCF}}$

On considère le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa}\right)$ indiqué ci-dessus. ($O = \mathrm{C}$)
Dans ce repère, on utilisera les « coordonnées sphériques » r, θ, φ où r est le *rayon*, θ la *colatitude* et φ la *longitude*.

a) Donner les « coordonnées sphériques » des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Donner les coordonnées cartésiennes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

c) Calculer l'angle $\widehat{\mathrm{FCF}}$

Correction

a) $\vec{u}\left|\begin{array}{l} r = 1 \\ \theta = \alpha \\ \varphi = 0 \end{array}\right. \qquad \vec{v}\left|\begin{array}{l} r = 1 \\ \theta = \alpha \\ \varphi = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

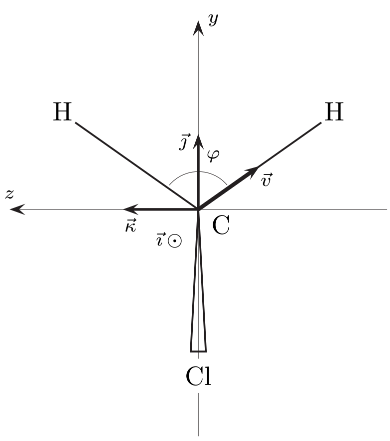
b) Les relations donnant les coordonnées cartésiennes sont : $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

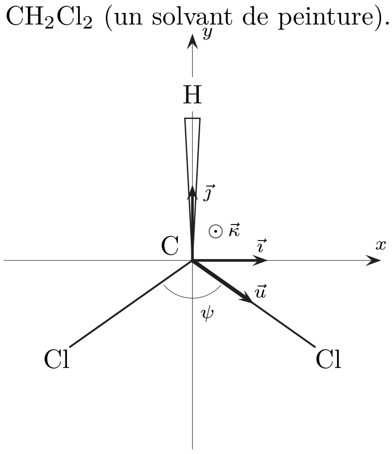
Donc $\vec{u}\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} (\sin\alpha)(-\frac{1}{2}) \\ (\sin\alpha)\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) $\cos\widehat{\mathrm{FCF}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\alpha$

$\boxed{\widehat{\mathrm{FCF}} = \arccos\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\alpha\right)} \qquad \widehat{\mathrm{FCF}} \simeq 108.3°$

Exercice n° 6.
On considère une molécule de dichlorométhane CH_2Cl_2 (un solvant de peinture).





On suppose connus les angles $\varphi = \widehat{\mathrm{HCH}}$ et $\psi = \widehat{\mathrm{ClCCl}}$
On souhaite calculer l'angle $\theta = \widehat{\mathrm{HCCl}} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$

a) Montrer que $\cos\theta = -\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

b) Linéariser cette expression de $\cos\theta$

c) On donne les valeurs $\varphi \simeq 112°$ et $\psi \simeq 114°$
(source : `http://www.colby.edu/chemistry/webmo/CH2Cl2.html`)
Calculer la valeur de θ au degré près. On utilisera une table trigonométrique et pas de calculatrice.

Correction

a) On a $\vec{u}\begin{pmatrix} \sin\frac{\psi}{2} \\ -\cos\frac{\psi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$ or $\cos\theta = \vec{u}\cdot\vec{v}$ donc $\boxed{\cos\theta = -\cos\dfrac{\psi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}$

b) On utilise la relation de trigonométrie : $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$
$\cos\theta = -\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + \cos\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$

c) $\cos\theta = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + \cos\frac{\varphi-\psi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos 113° + \cos 1°\right) = -\frac{1}{2}(-0.391+1) = -0.304$
$\cos\theta = -\sin(18°) = \cos(108°)$
donc $\boxed{\theta \simeq 108°}$ (la linéarisation a permis de faire les calculs sans multiplication)

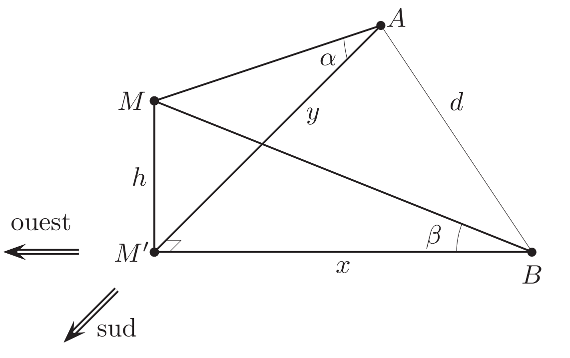
Remarque : On peut retrouver l'angle $\widehat{\mathrm{HCH}}$ d'une molécule de méthane :

Dans le cas d'une molécule de méthane, les angles θ, φ et ψ sont égaux.

$\cos\theta = -\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ $\qquad \cos\theta = -\cos^2\frac{\theta}{2}$ $\qquad \cos\theta = -\frac{\cos\theta+1}{2}$ $\qquad \boxed{\cos\theta = -\frac{1}{3}}$

Exercice n° 7.
Une montgolfière est observée, au même moment, de deux points A et B situés dans une plaine, et distants de d. De A, on l'aperçoit plein sud, à une hauteur angulaire α au dessus de l'horizon et de B, on l'aperçoit plein ouest, à une hauteur angulaire β au dessus de l'horizon.
Déterminer l'altitude h de la montgolfière.

Correction



On note M la position occupée par la montgolfière (M est donc un point).
On note H le projeté orthogonal du point M sur le sol (qui est un plan horizontal).
On note $x = HB$ et $y = HA$.
$*$ le triangle HBA est rectangle en H donc $x^2 + y^2 = d^2$ $\quad (\star)$
$*$ le triangle HBM est rectangle en H donc $\tan\beta = \frac{h}{x}$
$*$ le triangle HAM est rectangle en H donc $\tan\alpha = \frac{h}{y}$

on a donc $x = \frac{h}{\tan\beta}$ et $y = \frac{h}{\tan\alpha}$

on reporte ces expressions dans la relation ($\star$) et on obtient : $\left(\dfrac{h}{\tan\beta}\right)^2 + \left(\dfrac{h}{\tan\alpha}\right)^2 = d^2$

donc $\quad h^2\left(\dfrac{1}{\tan^2\beta} + \dfrac{1}{\tan^2\alpha}\right) = d^2 \qquad h^2 \cdot \dfrac{\tan^2\alpha + \tan^2\beta}{\tan^2\alpha\tan^2\beta} = d^2 \qquad h^2 = \dfrac{d^2\tan^2\alpha\tan^2\beta}{\tan^2\alpha + \tan^2\beta}$

d'où $\quad \boxed{h = \dfrac{d\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta}}}$

Exercice n° 8. *Sphéromètre*

Un *sphéromètre* est un appareil que l'on peut utiliser pour mesurer le rayon des surfaces sphériques, par exemple des miroirs sphériques.

Le sphéromètre possède trois pointes A, B et C situées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a. On pose ces trois pointes sur la surface sphérique dont on veut mesurer le rayon.

Une quatrième pointe coulisse selon la droite D orthogonale au plan (ABC) et passant par le centre G du triangle ABC.

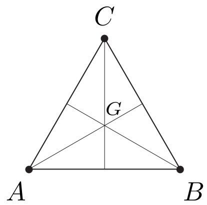
On fait coulisser cette quatrième pointe jusqu'à ce qu'elle touche à son tour la surface sphérique en un point D et des graduations permettent alors de lire la distance du point D au plan (ABC) (que l'on notera d).

On souhaite dans cet exercice calculer le rayon R de la surface sphérique en fonction de d (et de a).

a) On note O le centre de la surface sphérique.
   $ABCO$ est une pyramide dont la base est le triangle équilatéral ABC et dont le sommet O se trouve « à la verticale » du centre G du triangle ABC.
   Calculer la hauteur h de cette pyramide en fonction de R et de a.

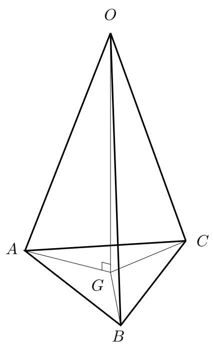
b) En déduire le rayon R de la sphère en fonction de d et a.

Correction



a) ABC est un triangle équilatéral de côté a.
   Sa hauteur vaut donc $a\frac{\sqrt{3}}{2}$

   On a donc[*] : $\quad AG = \frac{2}{3}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$



Le triangle OGA est rectangle en G et donc, d'après le théorème de Pythagore :

$OA^2 = OG^2 + AG^2 \qquad$ donc $\quad R^2 = h^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \qquad$ donc $\quad h = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}$

b) On a $\quad d = R - h \quad$ donc $\quad d = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} \qquad$ (c'est une équation d'inconnue R)

   $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} = R - d \qquad$ donc $\quad R^2 - \frac{a^2}{3} = (R-d)^2 \qquad$ donc $\quad \cancel{R^2} - \frac{a^2}{3} = \cancel{R^2} - 2Rd + d^2$

   donc $\quad 2Rd = d^2 + \frac{a^2}{3} \qquad$ donc $\quad \boxed{R = \dfrac{d^2 + \frac{a^2}{3}}{2d}}$

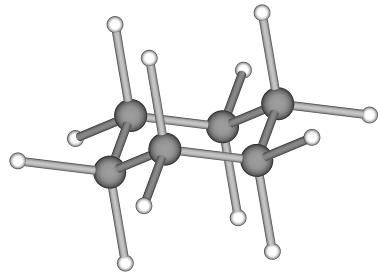
*. On rappelle que, dans un triangle, le centre de gravité se trouve aux deux tiers de chaque médiane à partir des sommets.

Exercice n° 9.
L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les six points suivants :

$$C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad C_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad C_4\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \qquad C_5\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} \qquad C_6\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

a) Montrer que dans le « polygone » $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ les six côtés sont de même longueur.
b) Montrer que dans le « polygone » $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ les angles entre deux côtés adjacents sont tous égaux à $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$
c) Montrer que les six points C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6 sont équidistants de leur isobarycentre G

Interprétation en chimie organique :
C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6 sont les 6 atomes de carbone d'une molécule de cyclohexane C_6H_{12} en « conformation chaise » :



Correction

a) On a six longueurs à calculer :

$$C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C_1C_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad C_1C_2=\sqrt{3}$$

$$C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad C_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C_2C_3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad C_2C_3=\sqrt{3}$$

$$C_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \quad C_4\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C_3C_4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad C_3C_4=\sqrt{3}$$

$$C_4\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \quad C_5\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C_4C_5}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad C_4C_5=\sqrt{3}$$

$$C_5\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} \quad C_6\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C_5C_6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad C_5C_6=\sqrt{3}$$

$$C_6\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \quad C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C_6C_1}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad C_6C_1=\sqrt{3}$$

b) $\overrightarrow{C_2C_1}\cdot\overrightarrow{C_2C_3}=\|\overrightarrow{C_2C_1}\|\,\|\overrightarrow{C_2C_3}\|\,\cos\left(\overrightarrow{C_2C_1},\overrightarrow{C_2C_3}\right) \qquad \cos\left(\overrightarrow{C_2C_1},\overrightarrow{C_2C_3}\right)=\dfrac{\overrightarrow{C_2C_1}\cdot\overrightarrow{C_2C_3}}{\|\overrightarrow{C_2C_1}\|\,\|\overrightarrow{C_2C_3}\|}$

On a déjà calculé les normes des vecteurs : $\|\overrightarrow{C_2C_1}\|=\|\overrightarrow{C_2C_3}\|=\sqrt{3}$

Il reste à calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{C_2C_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C_2C_3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_2C_1}\cdot\overrightarrow{C_2C_3}=-1$

Donc $\cos\left(\overrightarrow{C_2C_1},\overrightarrow{C_2C_3}\right)=-\frac{1}{3} \qquad \left(\overrightarrow{C_2C_1},\overrightarrow{C_2C_3}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\simeq 109°\ 23'$

Pour montrer que tous les angles valent $109°\ 23'$, on voit qu'il faut montrer que tous les produits scalaires valent -1.

$$\overrightarrow{C_3C_2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_3C_4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_3C_2}\cdot\overrightarrow{C_3C_4}=-1$$

$$\overrightarrow{C_4C_3}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_4C_5}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_4C_3}\cdot\overrightarrow{C_4C_5}=-1$$

$$\overrightarrow{C_5C_4}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_5C_6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_5C_4}\cdot\overrightarrow{C_5C_6}=-1$$

$$\overrightarrow{C_6C_5}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_6C_1}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_6C_5}\cdot\overrightarrow{C_6C_1}=-1$$

$$\overrightarrow{C_1C_6}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_1C_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{C_1C_6}\cdot\overrightarrow{C_1C_2}=-1$$

c) On obtient les coordonnées de l'isobarycentre G des six points en calculant la moyenne des abscisses, la moyenne des ordonnées et la moyenne des cotes.

Donc $G\begin{pmatrix}3/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{C_1G}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C_2G}\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C_3G}\begin{pmatrix}1/2\\-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C_4G}\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\-3/2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C_5G}\begin{pmatrix}-3/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C_6G}\begin{pmatrix}1/2\\-3/2\\-1/2\end{pmatrix}$

Ces six vecteurs ont la même norme, égale à $\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

Exercice n° 10.
On considère un triangle ABC et M un point situé à l'intérieur de ce triangle.

a) Montrer que $AB \leqslant MA+MB \leqslant AC+AB$

b) En déduire que M est compris entre le demi-périmètre et le périmètre du triangle ABC

Correction

a)
- D'après l'inégalité triangulaire dans le triangle ABM, on a $AB \leqslant AM+MB$
- On note P le point d'intersection de (AM) et de (BC)

$$\begin{aligned}
AM+MB &\leqslant AM+(MP+PB) && \text{(inégalité triangulaire dans } BMP)\\
&\leqslant (AM+MP)+PB && \text{(associativité de l'addition)}\\
&\leqslant AP+PB && (\text{car } M\in[AP])\\
&\leqslant (AC+CP)+PB && \text{(inégalité triangulaire dans } APC)\\
&\leqslant AC+(CP+PB) && \text{(associativité de l'addition)}\\
&\leqslant AC+CB && (\text{car } P\in[CB])
\end{aligned}$$

b) On note p le périmètre du triangle ABC : $p=AB+AC+BC$
En utilisant trois fois le résultat de la question précédente, on obtient :
On a donc
$$\begin{array}{lll}
AB\leqslant & AM+BM & \leqslant AC+BC\\
AC\leqslant & AM+CM & \leqslant AB+BC\\
BC\leqslant & BM+CM & \leqslant AB+AC\\
\hline
\multicolumn{3}{c}{p\leqslant 2(AM+BM+CM)\leqslant 2p}
\end{array}$$
La somme $AM+BM+CM$ est donc comprise entre le demi-périmètre et le périmètre du triangle.

Exercice n° 11. *Trois allèles*
On considère un gène pour lequel trois allèles a, b et c sont possibles.[*]

a) Donner les différents génotypes possibles. Combien y en a-t-il ?

*. On peut prendre comme exemple le gène à l'origine du principal système de groupes sanguins, à savoir le système ABH. Il y a trois allèles possibles pour ce gène : a, b et 0.

b) On suppose que dans la population totale, l'allèle a (resp. b, c) se trouve avec la fréquence p (resp. q, r). Ceci signifie que si on considère au hasard un individu de la population, et que l'on choisit ensuite au hasard l'un des deux allèles dont il est porteur, on a alors une probabilité p d'obtenir l'allèle a. Bien entendu, on a $p+q+r=1$
On suppose que les mariages se font suivant des conditions de panmixie (relativement au gène considéré). Quelle est la répartition des différents génotypes dans la population ?

c) On note $\mathcal{P}$ la probabilité pour un individu d'être homozygote. Calculer $\mathcal{P}$ (en fonction de p, q et r).

d) Montrer que la quantité $\mathcal{P}$ est minimale lorsque p, q et r sont égaux à $\frac{1}{3}$. Quelle est la valeur minimale de $\mathcal{P}$?

Correction

a) Les différents génotypes possibles sont les six suivants : aa, bb, cc, ab, ac, bc

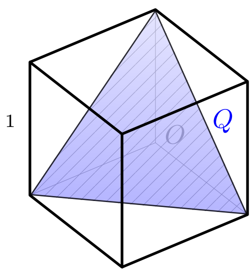
On peut donner une formule générale pour le nombre de génotypes dans le cas de n allèles (pour un organisme diploïde) : il y a n génotypes homozygotes, et $\binom{n}{2}$ génotypes hérérozygotes, ce qui fait un nombre total N de génotypes :
$N = n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
On peut en fait encore généraliser cette formule pour un organisme p-ploïde (c.-à-d. à p chromosomes) et n allèles. Le nombre total de génotypes est alors :
$N = \Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ (Γ_n^p est ce que l'on appelle une « combinaison avec répétition »)

b) Il s'agit de la répartition de Hardy-Weinberg. Les probabilités de chacun des 6 génotypes sont données dans le tableau suivant :

génotype	aa	bb	cc	ab	ac	bc
probabilité	p^2	q^2	r^2	$2pq$	$2pr$	$2qr$

c) On a bien entendu : $\mathcal{P} = p^2 + q^2 + r^2$

d) Il s'agit de minimiser la quantité $\mathcal{P} = p^2 + q^2 + r^2$ avec la contrainte $p+q+r=1$
Le plus simple est de faire une interprétation géométrique.

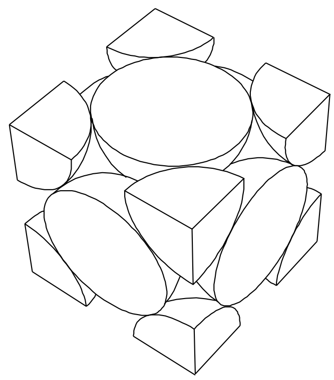


On considère un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ de l'espace.
On note M le point de coordonnées (p, q, r)
$p^2+q^2+r^2$ est le carré de la longueur OM
On cherche le point M du plan $Q : p+q+r=1$ qui minimise la longueur OM : ce point est le projeté orthogonal de O sur le plan Q : c'est donc le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

La valeur minimale de la probabilité $\mathcal{P}$ d'être homozygote vaut $\frac{1}{3}$
On peut être sûr qu'il y a au moins un tiers d'homozygotes dans la population.

Exercice n° 12.

On peut modéliser la structure microscopique de la plupart des corps chimiques simples par un empilement de sphères de même rayon : chaque sphère représente un atome de l'élément en question.
Par exemple, dans le cas de l'aluminium, les centres de ces sphères sont répartis selon un réseau cubique à faces centrées. On a représenté ci-contre une section cubique de cet empilement de sphères. On demande de calculer la compacité d'un tel empilement, c'est-à-dire la part du volume total occupé par ces sphères.



(Les réseaux cubiques à faces centrées atteignent la compacité maximale des empilements de sphères de même rayon.)

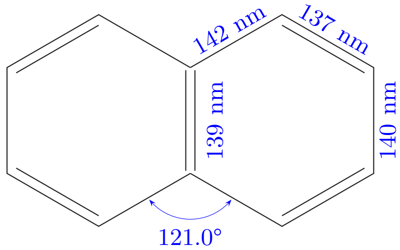
Correction

On note a le côté des cubes du réseau cubique à faces centrées considéré.
On note R le rayon des sphères.
On constate que le rayon R est égal au quart de la diagonale d'un carré de côté a : $\quad R = \frac{\sqrt{2}}{4}a$
Dans un cube de côté a comme celui dessiné ci-dessus, les sphères occupent un volume total correspondant à 8 huitièmes de sphère et 6 demi-sphères, soit le volume total de 4 sphères.
La compacité de cet empilement cubique à faces centrées est donc :

$$\frac{4 \times \frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{4 \times \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^3}{a^3} = 4 \times \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{6}\pi \simeq 0.74$$

Exercice n° 13.

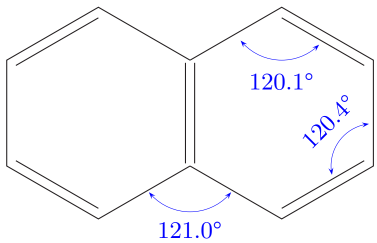
Une molécule de naphtalène[*] est constituée de deux noyaux benzéniques accolés l'un à l'autre et est donc plane.
Dans *Traité de chimie organique*, Vollhardt et Schore, 4e édition, p. 643, on trouve le schéma suivant concernant la géométrie de la molécule de naphtalène :



Remarque : Le placement des doubles-liaisons sur cette figure n'est qu'une des structures en résonance du naphtalène. En fait, il y a 10 électrons qui sont délocalisés sur l'ensemble de la molécule.

On demande de calculer (au dixième de degré près) les deux angles manquants.

Correction



Exercice n° 14.
On dit qu'un tétraèdre est *orthocentrique* lorsque ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

a) On considère un tétraèdre $ABCD$.

α) Simplifier l'expression $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$
et en déduire que $\;ABCD\;$ est orthocentrique $\quad$ ssi $\quad (AB) \perp (CD) \quad$ et $\quad (AC) \perp (BD)$

β) Montrer que $\quad ABCD\;$ est orthocentrique $\quad$ ssi $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$

b) On suppose que $ABCD$ est un tétraèdre orthocentrique.
et on note $\quad \alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$

α) On note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
Calculer $\quad \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{DB} \quad \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BC}$
En déduire que le point H est l'orthocentre du triangle BCD (point de concours des hauteurs)

β) On note $\;h = AH \quad t = \dfrac{\alpha}{h^2} \quad$ et $\;O\;$ le point tel que $\;\overrightarrow{AO} = t\overrightarrow{AH}$
Calculer $\quad \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AC}$

γ) Montrer que les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ se coupent en O (appelé *orthocentre* du tétraèdre $ABCD$)

[*]. Le naphtalène est le composant principal de la *naphtaline*, antimite bien connu. Il a été reconnu comme étant relativement cancérigène. Il a donc été remplacé par d'autres composés comme le para-dichlorobenzène, lui-même maintenant remplacé par d'autres composants.

Correction

a) α) On note $u = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$u = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

Donc $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0 \\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$

Donc $ABCD$ est orthocentrique ssi $(AB)\perp(CD)$ et $(AC)\perp(BD)$

β) $(\Rightarrow)$ on suppose que $ABCD$ est orthocentrique montrons que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$ car $(AB)\perp(DC)$

$(\Leftarrow)$ on suppose que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ montrons que $(AB)\perp(CD)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right) = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$

On montre de même que $(AC)\perp(BD)$ $(AD)\perp(BC)$

$ABCD$ est donc orthocentrique.

b) α) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$

en effet $\begin{cases} \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 & \text{car le tétraèdre est orthocentrique} \\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 & \text{car } H \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur } (BCD) \end{cases}$

H est donc situé sur la hauteur du triangle (BCD) issue de B

On montre de même que H est situé sur les deux autres hauteurs et donc que H est l'orthocentre du triangle (BCD)

β) $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= -\alpha + t\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= -\alpha + t\overrightarrow{AH}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)$

$= -\alpha + tAH^2 + t\,\cancel{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}}$

$= -\alpha + tAH^2 = -\alpha + th^2 = -\alpha + \dfrac{\alpha}{h^2}h^2 = 0$

γ) $*$ par définition, (AH) est la hauteur issue de A O se trouve sur cette hauteur

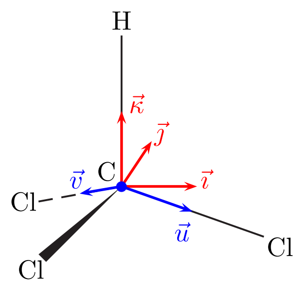
$*$ on a montré que $(BO)\perp(AC)$ on montre de même que $(BO)\perp(AD)$

on a donc $(BO)\perp(ACD)$ et donc O se trouve sur la hauteur issue de B

$*$ on montre de même que O se trouve sur la hauteur issue de C et sur la hauteur issue de D

$*$ les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCD$ sont donc concourantes en O

Exercice n° 15.



Le trichlorométhane, aussi appelé chloroforme, était autrefois utilisé comme anesthésiant.
Comme son nom l'indique, sa formule chimique est $CHCl_3$.
On s'intéresse à la géométrie d'une molécule de trichlorométhane.
On considère comme connu l'angle $\alpha = \widehat{\mathrm{HCCl}} \simeq 107.4°$.
(source : `http://www.colby.edu/chemistry/webmo/CHCl3.html`)
On désire calculer l'angle $\widehat{\mathrm{ClCCl}}$

On considère le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \big(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa}\,\big)$ indiqué ci-dessus. ($O =$ C)
Dans ce repère, on utilisera les « coordonnées sphériques » r, θ et φ où r est le *rayon*, θ la *colatitude* et φ la *longitude*.

a) Donner les « coordonnées sphériques » des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Donner les coordonnées cartésiennes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

c) Calculer l'angle $\widehat{\mathrm{ClCCl}}$

Correction

a) $\vec{u}\left|\begin{array}{l} r = 1 \\ \theta = \alpha \\ \varphi = 0 \end{array}\right. \qquad \vec{v}\left|\begin{array}{l} r = 1 \\ \theta = \alpha \\ \varphi = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

b) Les relations donnant les coordonnées cartésiennes sont : $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

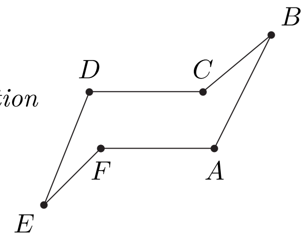
Donc $\vec{u}\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} (\sin\alpha)(-\frac{1}{2}) \\ (\sin\alpha)\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) $\cos\widehat{\mathrm{ClCCl}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\alpha$

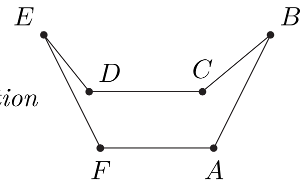
$\boxed{\widehat{\mathrm{ClCCl}} = \arccos\big(1 - \frac{3}{2}\sin^2\alpha\big)} \qquad \widehat{\mathrm{ClCCl}} \simeq 111.5°$

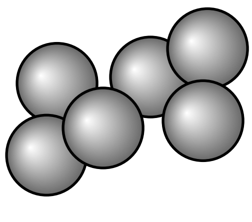
Exercice n° 16. *Molécule de cyclohexane*
Le cyclohexane a pour formule chimique C_6H_{12}
Les six atomes de carbone forment une chaîne cyclique où chaque liaison a pour longueur 154 pm et où chaque angle vaut $\arccos(-\frac{1}{3})$
Il existe deux conformations possibles pour cette chaîne carbonée appelées la conformation « bateau » et la conformation « chaise », et dessinées ci-dessous (on n'a représenté *que* les atomes de carbone) :

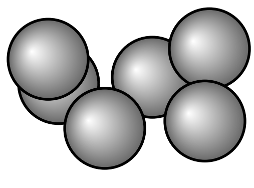
conformation chaise



conformation bateau







Pour fixer les idées, on va étudier la conformation chaise : les positions des six atomes de carbone ont été nommées A, B, C, D, E, et F

On choisit comme unité de longueur la longueur d'une liaison C–C, à savoir 154 pm.
On se placera dans le repère orthonormé direct $\big(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa}\big)$ défini comme suit :

- ⋆ on prend le point A comme origine
- ⋆ $\vec{\imath} = \overrightarrow{FA}$
- ⋆ $\vec{\jmath} = \frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}$
- ⋆ le vecteur $\vec{\kappa}$ est choisi de telle sorte que $\big(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa}\big)$ soit orthonormé direct

a) On note $B\big(x_B, y_B, z_B\big)$. Utiliser l'angle $\widehat{FAB}$ pour déterminer la valeur de x_B

b) Exprimer les coordonnées de C à partir des inconnues y_B et z_B

c) Utiliser les informations $AB = 1$ et $\widehat{ABC} = \arccos(-\frac{1}{3})$ pour en déduire les valeurs de y_B et z_B

d) Donner les coordonnées des six points A, B, C, D, E et F

Correction

a) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AF}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\big(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\big) = -\frac{1}{3}$

or $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ $\quad$ donc $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = -x_B$ $\quad$ d'où : $x_B = \frac{1}{3}$

b) $C\begin{pmatrix}0\\2y_B\\0\end{pmatrix}$

c)
- $AB = 1$ $\quad$ donc $x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 = 1$ $\quad$ donc $\frac{1}{9} + y_B^2 + z_B^2 = 1$ $\quad$ $y_B^2 + z_B^2 = \frac{8}{9}$
- $\widehat{ABC} = \arccos\big(-\frac{1}{3}\big)$ $\quad$ donc $\cos\widehat{ABC} = -\frac{1}{3}$ $\quad$ donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}$

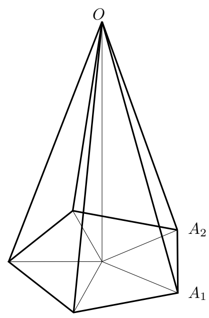
  d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}$ $\quad$ or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-x_B\\y_B\\-z_B\end{pmatrix}$

  d'où $-x_B^2 + y_B^2 - z_B^2 = \frac{1}{3}$ $\quad$ donc $y_B^2 - z_B^2 = \frac{4}{9}$
- $\begin{cases} y_B^2 + z_B^2 = \frac{8}{9} \\ y_B^2 - z_B^2 = \frac{4}{9} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y_B = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ z_B = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

d) $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad B\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$ $\quad C\begin{pmatrix}0\\\frac{2\sqrt{6}}{3}\\0\end{pmatrix}$ $\quad D\begin{pmatrix}-1\\\frac{2\sqrt{6}}{3}\\0\end{pmatrix}$ $\quad E\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$ $\quad F\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

Exercice n° 17.

On considère une toiture de clocher ayant la forme dessinée ci-contre.
Les points A_1, A_2, ..., A_n forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R (sur la figure $n = 5$, mais, dans l'exercice, on laissera n arbitraire).
On note H le centre de ce polygone. Le point O est situé verticalement au-dessus de H à une hauteur h (qui est donc la hauteur du clocher).
On souhaite calculer l'angle $\alpha = \widehat{A_1OA_2}$.



a) Calculer la longueur OA_1

b) Calculer la longueur A_1A_2

c) En déduire que $\cos\alpha = \dfrac{R^2 \cos\frac{2\pi}{n} + h^2}{R^2 + h^2}$

Correction

a) Le triangle OHA_1 est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $\quad OA_1 = \sqrt{R^2 + h^2}$

b)
- *Première méthode : avec les nombres complexes*
  Dans le plan complexe, les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. Les côtés de ce polygone ont pour longueur :
  $|e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1| = \left|e^{i\frac{\pi}{n}}\big(e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}\big)\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{n}} 2i \sin\frac{\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{\pi}{n}$

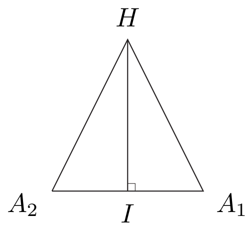
  Le polygone de base du clocher étant pour sa part inscrit dans un cercle de rayon R, les côtés de ce polygone ont pour longueur : $\quad A_1A_2 = 2R\sin\frac{\pi}{n}$

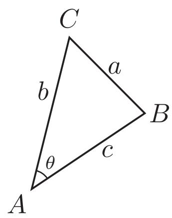
- *Deuxième méthode : avec le produit scalaire (et une démarche dans le style « Al-Kashi »)*
  $A_1A_2^2 = \overrightarrow{A_1A_2}^2 = \left(\overrightarrow{A_1H} + \overrightarrow{HA_2}\right)^2 = A_1H^2 + A_2H^2 - 2\cos\left(\overrightarrow{HA_1}, \overrightarrow{HA_2}\right) = 2R^2 - 2R^2\cos\widehat{H}$
  donc $\quad A_1A_2^2 = 2R^2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)$
  donc $\quad A_1A_2 = \sqrt{2R^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = 2R\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}$

  Cette méthode n'aboutit pas directement au résultat sous sa forme la plus simple. On doit pour l'obtenir faire une petite transformation trigonométrique :
  $A_1A_2 = 2R\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}} = R\sqrt{2\left(1-(1-2\sin^2\frac{\pi}{n})\right)} = R\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{n}} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$

- *Troisième méthode : la plus géométrique*

  Le triangle HA_1A_2 est isocèle de sommet H
  On note I le milieu de $[A_1A_2]$
  Le triangle HA_1I est rectangle en I
  donc $A_1I = HA_1 \cdot \sin\widehat{A_1HI} = R\sin\frac{\pi}{n}$
  D'où $\quad A_1A_2 = 2A_1I = 2R\sin\frac{\pi}{n}$





c) On redémontre d'abord la formule d'Al-Kashi dans un triangle ABC :
$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

D'où $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \qquad$ d'où $\quad \cos\theta = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

On applique cette relation dans le triangle OA_1A_2 qui est isocèle de sommet O :
$\cos\alpha = \frac{OA_1^2+OA_2^2-A_1A_2^2}{2\cdot OA_1\cdot OA_2} = \frac{2OA_1^2-A_1A_2^2}{2OA_2^2} = \frac{2(R^2+h^2)-(2R\sin\frac{\pi}{n})^2}{2(R^2+h^2)} = \frac{R^2+h^2-2R^2\sin^2\frac{\pi}{n}}{R^2+h^2}$

donc $\quad \cos\alpha = \frac{R^2(1-2\sin^2\frac{\pi}{n})+h^2}{R^2+h^2} \qquad$ or $\quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

donc $\quad \boxed{\cos\alpha = \dfrac{R^2\cos\frac{2\pi}{n}+h^2}{R^2+h^2}}$

Exercice n° 18.
Vicenzo Viviani (1622-1703), mathématicien, physicien et astronome italien, était un disciple de Galilée.

Il a démontré, entres autres, le théorème suivant, appelé de nos jours *théorème de Viviani* :

Dans un polygone régulier, la somme des distances d'un point intérieur au polygone aux côtés du polygone est indépendante de la position de ce point.

Le but de cet exercice est de démontrer ce résultat, ainsi qu'une réciproque.

On considère un polygone convexe à n côtés : $A_1A_2A_3\ldots A_n$

On note $D_1 = (A_1A_2)$, $D_2 = (A_2A_3)$, $\ldots$ jusqu'à $D_{n-1} = (A_{n-1}A_n)$ ainsi que $D_n = (A_nA_1)$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note n_i l'unique vecteur normal à D_i qui soit unitaire et dirigé vers l'intérieur du polygone.

On fixe un point O quelconque à l'intérieur du polygone qui servira d'origine.

a) M étant un point intérieur au polygone, la somme des distances de M aux droites D_1, D_2, $\ldots$, D_n vaut, à une constante additive près : $\quad S = \overrightarrow{OM}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} n_i$

b) En déduire le théorème de Viviani.

c) *Réciproque*
On suppose que la quantité S est constante. Montrer qu'il existe alors un polygone tel que :
- tous ses côtés sont de longueur 1 ;
- ses côtés sont parallèles aux côtés du polygone $A_1A_2A_3\ldots A_n$

Correction

a) Si on considère un point M situé à l'intérieur du polygone, alors la distance du point M à la droite D_i est, à une constante additive près, égale au produit scalaire de n_i et du vecteur $\overrightarrow{OM}$

La somme des distances du point M aux droites D_1, D_2, ... , D_n sera donc égale, à une constante additive près, à :
$S = \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i$

b) On suppose que $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ est un polygone régulier.
$\sum_{i=1}^{n} n_i = 0 \quad \text{donc} \quad S$ est constante.

c) La somme S étant constante, le vecteur $\sum_{i=1}^{n} n_i$ est nul.
On a donc n vecteurs unitaires dont la somme est nulle.

Pour tout i entre 1 et n, on note z_i l'affixe de n_i
On a donc n nombres complexes de module 1 dont la somme est nulle.

Le polygone étant convexe, les nombres complexes z_1, z_2, ... , z_n sont rangés dans le sens des arguments croissants (on parle évidemment ici des mesures principales des arguments).
On note également, pour tout i entre 1 et n, a_i l'affixe du point A_i
n_1 étant orthogonal à la droite $D_1 = (A_1A_2)$, le nombre complexe z_1 fait un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec le nombre complexe $a_2 - a_1$
$i \cdot z_1$ est donc un nombre complexe « colinéaire » à $a_2 - a_1$
$i \cdot z_1$ sera le deuxième sommet (après le point O) d'un nouveau polygone que l'on va construire.
On note donc $B_0 = O$ et B_1 le point d'affixe $i \cdot z_1$
On note alors B_2 le point d'affixe $i \cdot z_1 + i \cdot z_2$
Le vecteur $\overrightarrow{B_1B_2}$ a donc pour affixe $i \cdot z_2$: il est donc orthogonal au vecteur n_2 qui est un vecteur normal de la droite D_2. Le vecteur $\overrightarrow{B_1B_2}$ est donc colinéaire à la droite D_2

De la même manière, on note, pour tout k entre 1 et n, B_2 le point d'affixe $i \sum_{\alpha=1}^{k} z_\alpha$
Le point B_n est confondu avec le point O car la somme des nombres complexes z_α est nulle.

Les côtés du polygone $B_1B_2 \ldots B_n$ sont tous de longueur égale à 1 car tous les z_α sont de module 1.

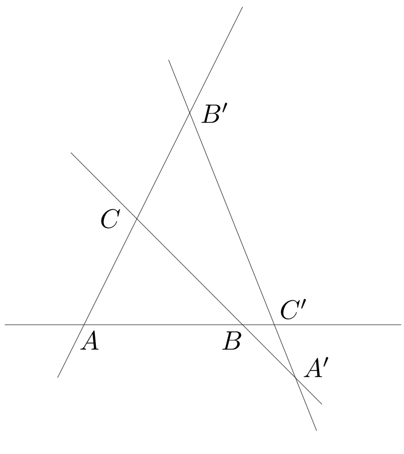
D'autre part, les côtés du polygone sont bien parallèles aux côtés correspondants du polygone $A_1A_2 \ldots A_n$

Exercice n° 19.

Soit A, B, C, A', B' et C' 6 points du plan tels que les triplets ABC', $AB'C$, $A'BC$, $A'B'C'$ soient formés de points alignés et que A, B, C ne soient pas alignés.

On note I, J et K les milieux respectifs de $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$

Montrer que les points I, J et K sont alignés.

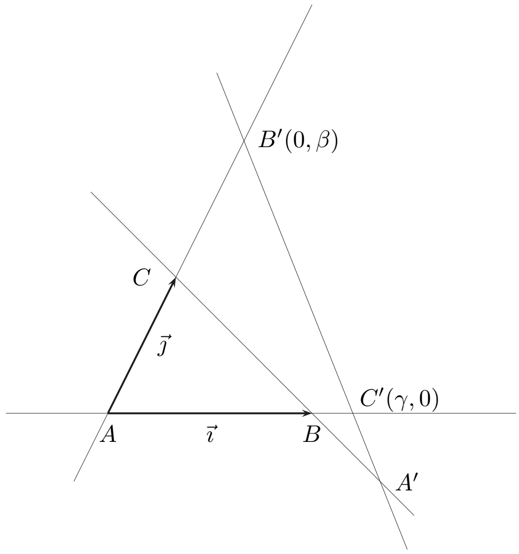


Correction

On travaille dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ On note $B'\,(\,0,\beta\,)$ $C'\,(\,\gamma,0\,)$

(BC) et $(B'C')$ ne sont pas parallèles, donc $\beta \neq \gamma$



- On cherche une équation de la droite (BC) :

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (BC)$ ssi $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

ssi $\begin{vmatrix}x-1 & -1\\ y & 1\end{vmatrix} = 0$ ssi $x+y-1=0$

- On cherche une équation de la droite $(B'C')$:

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (B'C')$ ssi $\overrightarrow{B'M}\begin{pmatrix}x\\y-\beta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B'C'}\begin{pmatrix}\gamma\\-\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires

ssi $\begin{vmatrix}x & \gamma\\ y-\beta & -\beta\end{vmatrix} = 0$ ssi $-\beta x - \gamma(y-\beta) = 0$ ssi $\beta x + \gamma y = \beta\gamma$

- On cherche les coordonnées de A' on note $A'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ on a $\begin{cases} x + y = 1\\ \beta x + \gamma y = \beta\gamma\end{cases}$

$x+y=1$ $x = 1-y$ $\beta(1-y)+\gamma y = \beta\gamma$ $\beta - \beta y + \gamma y = \beta\gamma$ $(\gamma-\beta)y = \beta\gamma - \beta$

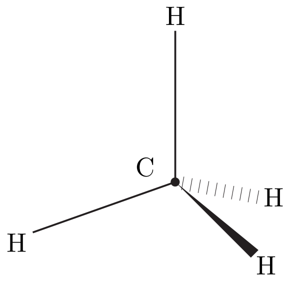
$y = \frac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta}$ $x = 1-y = 1 - \frac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta} = \frac{\gamma-\beta-\beta\gamma+\beta}{\gamma-\beta} = \frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}$ On a donc $A'\begin{pmatrix}\dfrac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}\\ \dfrac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta}\end{pmatrix}$

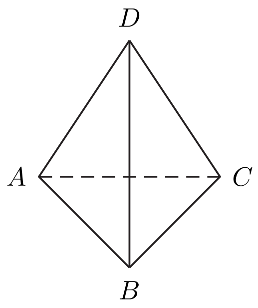
- On a donc $I\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta}\end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{\beta}{2}\end{pmatrix}$ $K\begin{pmatrix}\dfrac{\gamma}{2}\\ \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$

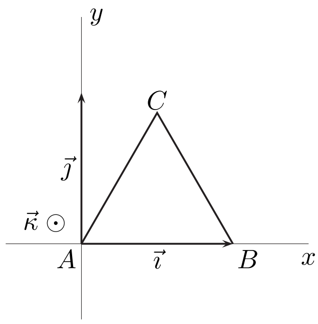
- $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}\frac{1-\gamma}{2}\\ \frac{\beta-1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta} = \frac{\gamma-\beta-\gamma(1-\beta)}{2(\gamma-\beta)} = \frac{-\beta+\beta\gamma}{2(\gamma-\beta)} = \frac{\beta(\gamma-1)}{2(\gamma-\beta)} = -\frac{\beta}{\gamma-\beta}\cdot\frac{1-\gamma}{2}\\ \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta} = \frac{\beta}{2}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma-\beta}\right) = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{-\beta+1}{\gamma-\beta} = -\frac{\beta}{\gamma-\beta}\cdot\frac{\beta-1}{2}\end{array}\right.$

On a donc $\overrightarrow{IJ} = -\frac{\beta}{\gamma-\beta}\overrightarrow{KJ}$ $\boxed{I,\ J \text{ et } K \text{ sont donc alignés}}$

Exercice n° 20.
On considère une molécule de méthane CH_4
Calculer l'angle $\widehat{\mathrm{HCH}}$ où les H désignent deux atomes d'hydrogène de la molécule.







Correction

On considère le tétraèdre régulier $ABCD$ et on note G son centre (G est donc l'isobarycentre des quatre points A, B, C et D.)
On choisit le repère suivant :

- unité de longueur : le côté du tétraèdre (régulier)
- origine du repère : le point A (qui est un des sommets du tétraèdre)
- premier vecteur du repère $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$
- on choisit $\vec{\jmath}$ de telle sorte que C soit dans le plan $O\,\vec{\imath}\,\vec{\jmath}$ avec une ordonnée positive.

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{pmatrix}$

Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan ABC
H est le centre de gravité du triangle ABC $\qquad H\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/6\\0\end{pmatrix}$

D a donc pour coordonnées $D\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/6\\z\end{pmatrix}$ or $AD = 1$ donc $z = \frac{\sqrt{6}}{3}$ $\qquad D\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/6\\\sqrt{6}/3\end{pmatrix}$

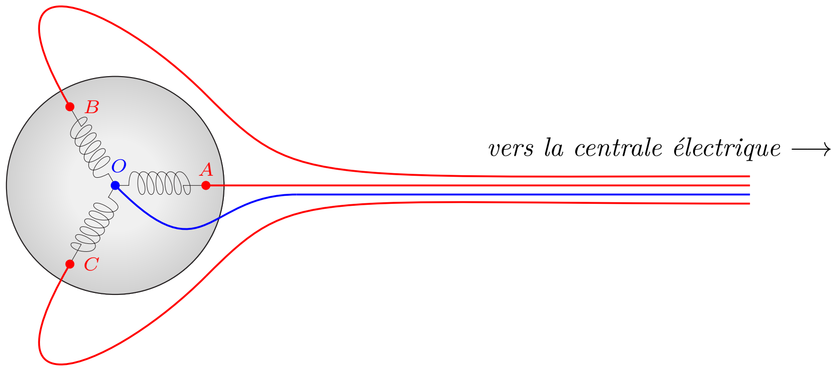
G étant l'isobarycentre de ces quatre points, on obtient les coordonnées de G (les deux premières sont immédiates et la troisième est le quart de celle de D) $\qquad G\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/6\\\sqrt{6}/12\end{pmatrix}$

En notant θ la mesure (géométrique de l'angle) $\widehat{AGD}$, on obtient : $\qquad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GD}}{\|\overrightarrow{GA}\|\,\|\overrightarrow{GD}\|}$

$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GD}}{\|\overrightarrow{GA}\|\,\|\overrightarrow{GD}\|} = \frac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GD}}{GD^2} = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{6}{16}} = -\frac{1}{3}$ On a donc $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\qquad \theta \simeq 109°$

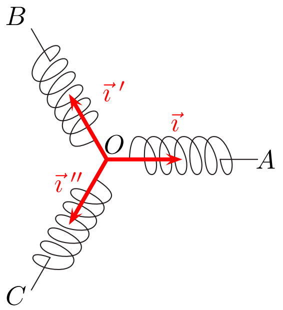
Exercice n° 21.
On considère trois bobines électriques identiques placées géométriquement comme indiqué sur la figure. Cela signifie que le triangle ABC est un triangle équilatéral et que le point O en est le centre.
Les points A, B et C sont reliés aux trois phases d'une prise de courant triphasée et le point O est relié au neutre. Cela entraîne que les courants qui circulent dans les trois bobines sont trois fonctions sinusoïdales de

même amplitude déphasées de $\frac{2\pi}{3}$ les unes par rapport aux autres.



Montrer que le champ magnétique créé au point O par ces trois bobines est un champ magnétique tournant. Déterminer sa vitesse de rotation en fonction de la pulsation ω du courant.
(Il suffit de mettre ensuite un aimant mobile au point O pour que cet aimant suive le champ magnétique tournant : c'est le principe du moteur triphasé asynchrone.)

Correction



champ créé par la première bobine	$B_0\cos(\omega t)\vec{\imath}$
champ créé par la deuxième bobine	$B_0\cos(\omega t+\frac{2\pi}{3})\vec{\imath}\,'$
champ créé par la troisième bobine	$B_0\cos(\omega t-\frac{2\pi}{3})\vec{\imath}\,''$

Le champ total créé en O par les 3 bobines est $\quad \vec{B}=B_0\big(\cos(\omega t)\vec{\imath}+\cos(\omega t+\frac{2\pi}{3})\vec{\imath}\,'+\cos(\omega t-\frac{2\pi}{3})\vec{\imath}\,''\big)$

- *Première méthode* : On pose $B_0=1$ et on considère l'affixe z de ce vecteur :
  $$\begin{aligned} z &= \cos(\omega t)+\cos\left(\omega t+\tfrac{2\pi}{3}\right)j+\cos\left(\omega t-\tfrac{2\pi}{3}\right)j^2\\ &= \mathrm{Re}(e^{i\omega t})+\mathrm{Re}(e^{i\omega t}j)j+\mathrm{Re}(e^{i\omega t}j^2)j^2\\ &= \tfrac{1}{2}\Big(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}+(e^{i\omega t}j+e^{-i\omega t}\bar{\jmath})j+(e^{i\omega t}\bar{\jmath}+e^{-i\omega t}j)\bar{\jmath}\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}\Big(e^{i\omega t}\cancel{(1+j+j^2)}+e^{-i\omega t}(1+j^3+j^3)\Big)=\tfrac{3}{2}e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

- *Deuxième méthode* : On décompose les vecteurs dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ $\quad$ (base orthonormée directe)
  $$\begin{aligned}&\cos(\omega t)\vec{\imath}+\cos\left(\omega t+\tfrac{2\pi}{3}\right)\vec{\imath}\,'+\cos\left(\omega t-\tfrac{2\pi}{3}\right)\vec{\imath}\,''\\ &\qquad=\cos(\omega t)\vec{\imath}+\left(-\tfrac{1}{2}\cos\omega t-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t\right)\vec{\imath}\,'+\left(-\tfrac{1}{2}\cos\omega t+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t\right)\vec{\imath}\,''\\ &\qquad=\left(\vec{\imath}-\tfrac{1}{2}\vec{\imath}\,'-\tfrac{1}{2}\vec{\imath}\,''\right)\cos\omega t+\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath}\,'+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath}\,''\right)\sin\omega t\end{aligned}$$
  $$\vec{\imath}-\tfrac{1}{2}\vec{\imath}\,'-\tfrac{1}{2}\vec{\imath}\,''=\vec{\imath}-\tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{2}\vec{\imath}+\cancel{\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}}\big)-\tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{2}\vec{\imath}-\cancel{\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}}\big)=\tfrac{3}{2}\vec{\imath}$$
  $$-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath}\,'+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath}\,''=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(-\tfrac{1}{2}\vec{\imath}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\big)+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(-\tfrac{1}{2}\vec{\imath}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\big)=-\tfrac{3}{4}\vec{\jmath}-\tfrac{3}{4}\vec{\jmath}=-\tfrac{3}{2}\vec{\jmath}$$
  $$\overrightarrow{B}=B_0\big((\cos\omega t)\vec{\imath}-(\sin\omega t)\vec{\jmath}\big)$$

Le champ magnétique résultant tourne donc (dans le sens indirect) à une vitesse angulaire égale à ω

Si le courant a une fréquence de 50 Hz, alors le champ tourne à 3 000 tours par minute.

Exercice n° 22.

Déterminer une équation du plan (ABC) avec $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Correction

Le plan (ABC) admet une équation de la forme $(ABC) : ax+by+cz+d=0$
Les coordonnées des points A B et C vérifient cette équation :

$$\begin{cases} a+2b+3c+d=0\\ 3a-b+2c+d=0\\ b+c+d=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 7 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)_{L_2\leftarrow 3L_1-L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 7 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0\end{array}\right)_{L_3\leftarrow L_2-7L_3}$$

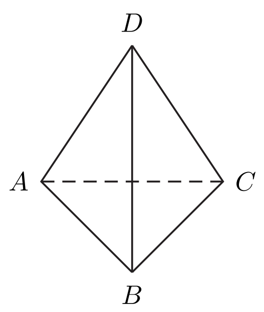
$$\begin{cases} a+2b+3c+d=0\\ 7b+7c+2d=0\\ -5d=0\end{cases}$$

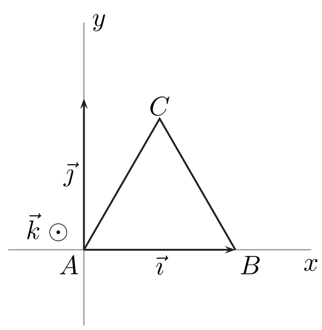
Une solution non nulle est $a=-1$ $b=-1$ $c=1$ $d=0$ $\quad (ABC) : -x-y+z=0$

Exercice n° 23.

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Calculer l'angle α entre le plan (ABC) et la droite (AD)

Correction





On choisit le repère suivant :

- unité de longueur : le côté du tétraèdre (régulier)
- origine du repère : le point A (qui est un des sommets du tétraèdre)
- premier vecteur du repère $\vec{\imath}=\overrightarrow{AB}$
- on choisit $\vec{\jmath}$ de telle sorte que C soit dans le plan $O\,\vec{\imath}\,\vec{\jmath}$ avec une ordonnée positive.

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad C\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix}$

Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan ABC
H est le centre de gravité du triangle ABC $\quad H\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ 0\end{pmatrix}$

D a donc pour coordonnées $\quad D\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ z\end{pmatrix}$ $\quad$ or $\quad AD = 1 \quad$ donc $\quad z = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad D\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

On note A' le milieu de $[BC]$ $\quad A'\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}\\ 0\end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}}{AA'\times AD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 54.73°$$

Exercice n° 24.

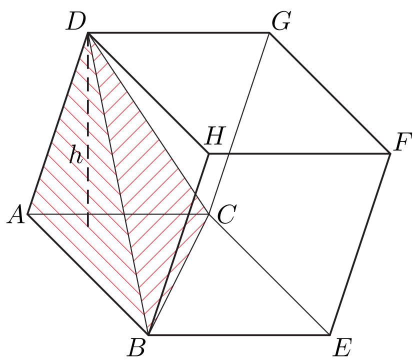
On considère les points $\quad A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad D\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$
En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$

Correction

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix}-1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = -4$$

Le volume (géométrique) du parallélépipède $ABCEDHFG$ est donc 4



$$\begin{cases}\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{ABC}\times h\\ \mathcal{V}_{ABECDHFG} = \mathcal{A}_{ABEC}\times h = 2\times\mathcal{A}_{ABC}\times h\end{cases}$$

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}\times\mathcal{V}_{ABECDHFG} = \frac{2}{3}$$

Exercice n° 25.

Soit A, B, C trois points non alignés.
Soit $P\in(BC)$, $Q\in(AC)$ et $R\in(AB)$ fixés.
On considère les trois points I, J, K tels que $ARIQ$, $BRJP$ et $CQKP$ soient des parallélogrammes.
Montrer que : $\quad P$, Q et R sont alignés $\quad$ ssi $\quad I$, J et K sont alignés

Correction

On se place dans le repère (non orthonormé) $\quad \mathcal{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
On note $\quad Q\begin{pmatrix}0\\ \lambda\end{pmatrix} \quad P\begin{pmatrix}\mu\\ 1-\mu\end{pmatrix} \quad R\begin{pmatrix}\nu\\ 0\end{pmatrix}$ $\qquad$ (la droite (BC) a pour équation $\quad x+y=1$)

$*$ $ARIQ$ est un parallélogramme donc $\quad \overrightarrow{RI} = \overrightarrow{AQ} \quad \begin{cases}x_I - \nu = 0\\ y_I - 0 = \lambda\end{cases} \quad I\begin{pmatrix}\nu\\ \lambda\end{pmatrix}$

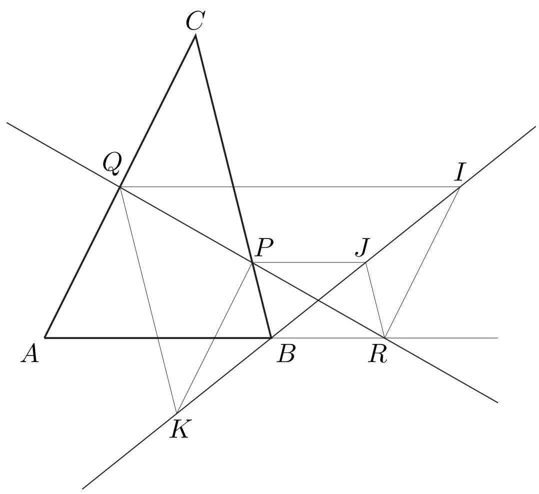
$*$ $BRJP$ est un parallélogramme donc $\quad \overrightarrow{RJ} = \overrightarrow{BP} \quad \begin{cases}x_J - \nu = \mu - 1\\ y_J - 0 = 1 - \mu - 0\end{cases} \quad J\begin{pmatrix}\nu+\mu-1\\ 1-\mu\end{pmatrix}$

$*$ $CQKP$ est un parallélogramme donc $\quad \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{CQ} \qquad \begin{cases} x_K - \mu = 0 - 0 \\ y_K - (1-\mu) = \lambda - 1 \end{cases} \qquad K\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mu & \nu \\ \lambda & 1-\mu & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \cdot \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ 1-\mu & 0 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\nu(1-\mu) + \lambda(\nu - \mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\nu + \mu\nu + \lambda\nu - \lambda\mu = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I,\ J \text{ et } K \text{ sont alignés} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \nu & \nu+\mu-1 & \mu \\ \lambda & 1-\mu & \lambda-\mu \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu & \mu-1 & \mu-\nu \\ \lambda & 1-\mu-\lambda & -\mu \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \mu-1 & \mu-\nu \\ 1-\mu-\lambda & -\mu \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\mu-1)(-\mu) - (\mu-\nu)(1-\mu-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\cancel{\mu^2} + \mu - \mu + \cancel{\mu^2} + \mu\lambda + \nu - \mu\nu - \lambda\nu = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mu\lambda + \nu - \mu\nu - \lambda\nu = 0
\end{aligned}
$$

Donc : $\qquad P$, Q et R sont alignés ssi I, J et K sont alignés.



Exercice n° 26.

Soit A, B et C trois points du plan non alignés.

On note A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

On considère un point M distinct de tous les points précédents.

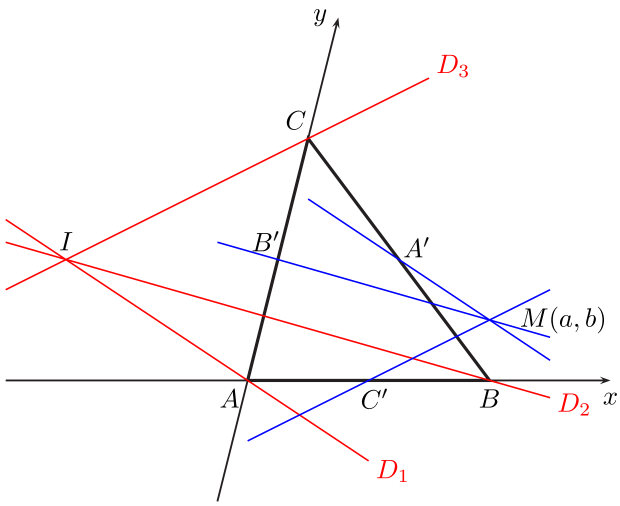
On note D_1 la droite parallèle à (MA') menée par A
D_2 la droite parallèle à (MB') menée par B
D_3 la droite parallèle à (MC') menée par C

On veut montrer que D_1, D_2 et D_3 sont concourantes.

a) *Première méthode*
On note G le centre de gravité du triangle (ABC) et h l'homothétie de centre G et de rapport -2. En utilisant h, montrer que les trois droites sont concourantes.

b) *Deuxième méthode*
On considère le repère $\mathcal{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et on note $M(a, b)$
Déterminer les équations des trois droites considérées dans le repère $\mathcal{R}$ et montrer qu'elles sont concourantes.

Correction



a) On considère l'homothétie h de centre G et de rapport -2

$G = \text{Bar}\left\{(A,1),(B,1),(C,1)\right\}$ donc $G = \text{Bar}\left\{(A,1),(A',2)\right\}$

et donc $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ donc $A = h(A')$

On montre de même que $B = h(B')$ et que $C = h(C')$

L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à la première.

L'image de la droite (MA') par l'homothétie h est donc la droite parallèle à (MA') passant par $h(A') = A$, c'est-à-dire la droite D_1

Les droites (MA'), (MB') et (MC') sont concourantes en M, donc leurs images par h sont concourantes en $h(M)$

Les droites D_1, D_2 et D_3 sont donc concourantes en $h(M)$

b) On détermine les équations des droites D_1, D_2 et D_3 :

			vraie équation
Équation de D_1	$y = \frac{b-1/2}{a-1/2}x$	$y = \frac{2b-1}{2a-1}x$	$(2b-1)x + (1-2a)y = 0$
Équation de D_2	$y = \frac{b-1/2}{a}(x-1)$	$y = \frac{2b-1}{2a}(x-1)$	$(2b-1)x - 2ay + (1-2b) = 0$
Équation de D_3	$y = \frac{b}{a-1/2}x + 1$	$y = \frac{2b}{2a-1}x + 1$	$2bx + (1-2a)y + (2a-1) = 0$

- *Première méthode*
  Soit $I(x,y)$ le point d'intersection de D_1 et D_2
  On détermine x et y en utilisant les deux premières équations :
  En égalant y dans les deux premières équations : $\frac{2b-1}{2a-1}x = \frac{2b-1}{2a}(x-1)$ $\quad \frac{1}{2a-1}x = \frac{1}{2a}(x-1)$
  D'où (produit en croix) $2ax = (2a-1)(x-1)$ d'où $x = 1-2a$ et $y = 1-2a$
  Donc $I\begin{pmatrix}1-2a\\1-2b\end{pmatrix}$ on vérifie que $I \in D_3$
  Les trois droites D_1, D_2 et D_3 sont donc concourantes au point I

- *Deuxième méthode* : Si on connaît le résultat suivant de géométrie analytique :
  Trois droites d'équations d'équations $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$ sont concourantes ou parallèles
  si et seulement si : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$
  On calcule donc le déterminant correspondant :

$$\begin{vmatrix} 2b-1 & 1-2a & 0 \\ 2b-1 & -2a & 1-2b \\ 2b & 1-2a & 2a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2b-1 & 1-2a & 0 \\ 0 & -1 & 1-2b \\ 1 & 0 & 2a-1 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$= (2b-1)(-1)(2a-1) + (1-2a)(1-2b) = 0$$

Ici, les trois droites D_1, D_2 et D_3 ne peuvent pas être parallèles (même confondues).

Exercice n° 27. *« Équation tangentielle du cercle »*
On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $\quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \gamma^2 = 0$
et la droite Δ d'équation $\quad ux + vy + w = 0 \qquad (u, v) \neq (0, 0)$
Montrer que la droite Δ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ $\quad$ ssi $\quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(u^2 + v^2) = (u\alpha + v\beta + w)^2$

Correction

Le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $O(\alpha, \beta)$ et de rayon $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$

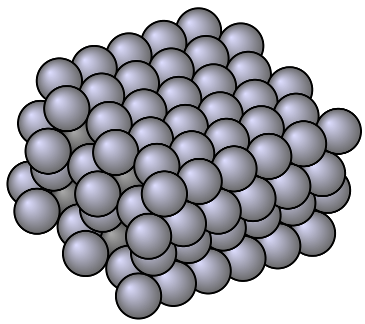
$$\begin{aligned} \Delta \text{ est tangente à } \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad d(O, \Delta) = r \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{|u\alpha + v\beta + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = r \\ &\Leftrightarrow \quad |u\alpha + v\beta + w| = r\sqrt{u^2 + v^2} \\ &\Leftrightarrow \quad (u\alpha + v\beta + w)^2 = r^2(u^2 + v^2) \\ &\Leftrightarrow \quad (u\alpha + v\beta + w)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

on utilise la formule de la distance d'un point à une droite

on élève au carré
(les nombres sont positifs)

on a vu que $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$

Exercice n° 28.
On considère un empilement de sphères identiques de rayon R comme sur la figure ci-contre.
Un tel empilement est appelé « hcp » (« hexagonal close-packed » en anglais).
L'empilement de cette figure correspond à quatre couches identiques de sphères. Ces quatre couches sont décalées les unes par rapport aux autres.
On considère alors une boîte cubique dont le côté L est très grand par rapport au rayon R des sphères. On remplit cette boîte cubique avec des sphères en respectant le style d'empilement ci-contre. Quelle est alors la compacité de l'empilement, c'est-à-dire le rapport du volume total des sphères sur le volume de la boîte ?

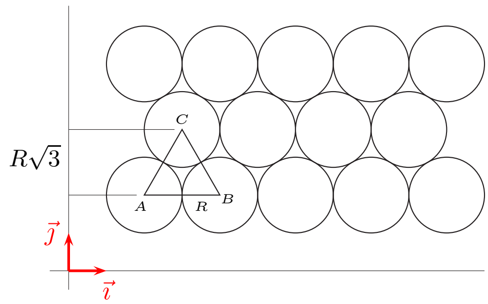


On peut modéliser la structure microscopique du titane par l'empilement ci-dessus : chaque sphère représente un atome de titane de « rayon » $R = 147$ pm. Le numéro atomique du titane est 22 et sa masse molaire : $48 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Calculer la masse volumique du titane.

Correction

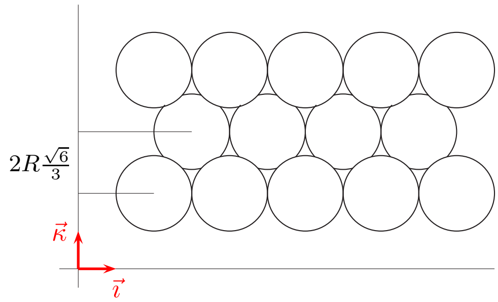
- On calcule le nombre de sphères dans une des couches de l'empilement.

La vue ci-contre est une vue de dessus de l'empilement.
Le nombre de sphères dans une ligne est $\frac{L}{2R}$.
La distance entre deux lignes est $2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$
Le nombre de lignes est donc $\frac{L}{R\sqrt{3}}$
Le nombre de sphères dans une couche est donc $\quad \frac{L}{2R} \cdot \frac{L}{R\sqrt{3}}$



- On calcule le nombre de couches de l'empilement.

La vue ci-contre est une vue de côté de l'empilement.
La distance entre deux couches est égale à la hauteur d'un tétraèdre régulier de côté $2R$, c'est-à-dire $(2R)\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$
Le nombre de couches de l'empilement est donc $\frac{L}{2R\frac{\sqrt{6}}{3}}$



- Le nombre de sphères dans la boîte est donc $\frac{L}{2R}\cdot\frac{L}{R\sqrt{3}}\cdot\frac{L}{2R\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{L^3}{R^3}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}$

Le volume total occupé par ces sphères est donc $\frac{L^3}{R^3}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{L^3\pi}{3\sqrt{2}}$

Le rapport du volume des sphères sur le volume de la boîte est donc $\frac{\frac{L^3\pi}{3\sqrt{2}}}{L^3}=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$

La compacité de l'empilement est donc $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$ *valeur numérique approchée :* 0.74

On note m la masse d'un atome de titane : $m=48\cdot10^{-3}/(6.023\cdot10^{23})$ kg
Le nombre total d'atomes de titane dans la boîte est : $\frac{L^3}{R^3}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}$ de masse totale $\frac{L^3}{R^3}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot m$.
La masse volumique du titane est donc $\frac{1}{R^3}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot m$
Application numérique : densité de 4.45

Exercice n° 29.
On considère un satellite qui émet des programmes de télévision à destination des habitants d'un pays. Comme on le sait, ce satellite occupe une position de l'orbite géostationnaire terrestre, de manière à paraître fixe quand on le regarde depuis un point de la surface terrestre.

a) On note R le rayon de l'orbite géostationnaire terrestre.
Exprimer R en fonction de la masse M de la Terre et de la constante G de la gravitation.
(dans les calculs qui suivent, on gardera néanmoins la lettre R jusqu'à l'application numérique)

Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}=\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa}\right)$ lié à la Terre (et qui est sous-jacent à la longitude et à la latitude géographiques), le satellite occupe un point S fixe (car il est sur l'orbite géostationnaire).
On note A la longitude de S (appelée *longitude de stationnement* du satellite).

Par ailleurs, on considère une ville V située à une longitude a et à une latitude b et on notera r le rayon terrestre.

On installe dans cette ville une antenne parabolique pour capter les émissions du satellite. L'axe de cette antenne doit évidemment pointer en direction du satellite.

Deux angles repèrent la direction de l'axe de l'antenne (qui est donc celle du satellite) :
- l'*élévation* du satellite : angle que fait l'axe de l'antenne avec le plan horizontal (de la ville) ;
- l'*azimut* du satellite : angle que fait la projection de l'axe de l'antenne sur le plan horizontal avec la direction du sud (ou du nord suivant la convention choisie).

Dans cet exercice, on calculera seulement l'élévation du satellite.

b) Calculer les coordonnées cartésiennes des points V et S.

c) Calculer l'angle α entre les vecteurs $\overrightarrow{OV}$ et $\overrightarrow{VS}$. (O désigne le centre la Terre)
On pourra utiliser la fonction arccos définie par :
pour tout $x\in[-1,1]$, on note $\arccos x$ l'unique réel de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x

d) En déduire l'élévation β du satellite au dessus de l'horizon.

e) Calculer numériquement l'élévation β du satellite avec les données suivantes :
- pour le satellite Astra 1L : $A=19.6°$ (vers l'est) ;
- pour la ville de Pau : chercher sur la Toile ;
- rayon terrestre : $r=6\,400$ km ;

- masse de la Terre : $M = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg ;
- constante universelle de la gravitation : $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ (unités SI).

Indication de vérification : on trouvera un résultat de la forme suivante :

$$\beta = ? - \arccos\left(\frac{\cos b \cos a(\,\ldots\ldots\ldots\,) + \cos b \sin a(\,\ldots\ldots\ldots\,) - \sin^2 b}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\cos A - \cos b \cos a\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\sin A - \cos b \sin a\right)^2 + \sin^2 b}}\right)$$

Correction

a) On considère un satellite de masse m animé d'un mouvement circulaire de rayon R autour de la Terre avec une vitesse angulaire ω stationnaire (c.-à-d. : constante au cours du temps).

L'accélération du satellite est purement radiale et vaut : $\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r$

Par ailleurs, la force d'attraction exercée par la Terre sur le satellite vaut $\vec{F} = -\frac{GMm}{R^2}\vec{u}_r$

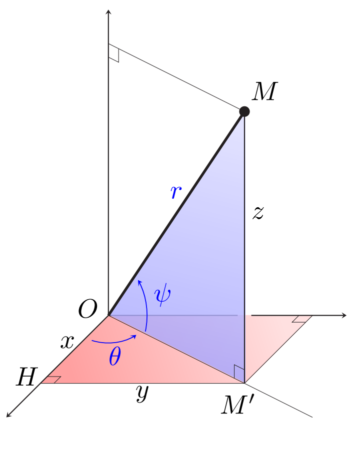
Comme on a : $m\vec{a} = \vec{F}$, on en déduit : $m(-R\omega^2)\vec{u}_r = -\frac{GMm}{R^2}\vec{u}_r$ donc $R\omega^2 = \frac{GM}{R^2}$

donc $R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{GM}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Application numérique : $R = 42\,250$ km

Remarque : Comme le rayon terrestre est de 6 400 km, on peut dire que les satellites géostationnaires sont à une altitude de 36 000 km environ ; néanmoins, parler d'altitude à une échelle où on ne peut pas s'abstraire de la rotondité de la Terre n'est sans doute pas très pertinent.

b) Le point de « coordonnées sphériques » r, a et b, a pour coordonnées cartésiennes $\begin{cases} x = r\cos b \cos a \\ y = r \cos b \sin a \\ z = r \sin b \end{cases}$



On a donc $V\begin{pmatrix} r\cos b\cos a \\ r\cos b \sin a \\ r\sin b\end{pmatrix}$ $S\begin{pmatrix} R\cos A \\ R\sin A \\ 0\end{pmatrix}$

En effet, la latitude du satellite vaut 0 car l'orbite géostationnaire est évidemment située dans le plan de l'Équateur.

c) $\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} r\cos b\cos a \\ r\cos b \sin a \\ r\sin b\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{VS} = \begin{pmatrix} R\cos A - r\cos b\cos a \\ R\sin A - r\cos b \sin a \\ -r\sin b\end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OV}\cdot\overrightarrow{VS}}{\|\overrightarrow{OV}\|\,\|\overrightarrow{VS}\|} = \frac{\overrightarrow{OV}\cdot\overrightarrow{VS}}{r\,\|\overrightarrow{VS}\|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\big(r\cos b\cos a\big)\big(R\cos A - r\cos b\cos a\big) + \big(r\cos b\sin a\big)\big(R\sin A - r\cos b\sin a\big) - r^2\sin^2 b}{\sqrt{\big(R\cos A - r\cos b\cos a\big)^2 + \big(R\sin A - r\cos b\sin a\big)^2 + r^2\sin^2 b}}$$

On divise* le numérateur et le dénominateur de la fraction par r :

$$\cos\alpha = \frac{\big(\cos b\cos a\big)\big(\frac{R}{r}\cos A - \cos b\cos a\big) + \big(\cos b\sin a\big)\big(\frac{R}{r}\sin A - \cos b\sin a\big) - \sin^2 b}{\sqrt{\big(\frac{R}{r}\cos A - \cos b\cos a\big)^2 + \big(\frac{R}{r}\sin A - \cos b\sin a\big)^2 + \sin^2 b}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\big(\cos b\cos a\big)\big(\frac{R}{r}\cos A - \cos b\cos a\big) + \big(\cos b\sin a\big)\big(\frac{R}{r}\sin A - \cos b\sin a\big) - \sin^2 b}{\sqrt{\big(\frac{R}{r}\cos A - \cos b\cos a\big)^2 + \big(\frac{R}{r}\sin A - \cos b\sin a\big)^2 + \sin^2 b}}\right)$$

d) L'élévation β du satellite est le complémentaire de l'angle α (puisque $\overrightarrow{OV}$ est dirigé suivant la verticale en V) :

$$\boxed{\beta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\cos b\cos a\big(\frac{R}{r}\cos A - \cos b\cos a\big) + \cos b\sin a\big(\frac{R}{r}\sin A - \cos b\sin a\big) - \sin^2 b}{\sqrt{\big(\frac{R}{r}\cos A - \cos b\cos a\big)^2 + \big(\frac{R}{r}\sin A - \cos b\sin a\big)^2 + \sin^2 b}}\right)}$$

Application numérique avec Maple
Pour la facilité de saisie, on rentre d'abord le numérateur et le dénominateur de la fraction :

```
n:= cos(b)*cos(a)*(R/r*cos(A)-cos(b)*cos(a))
   +cos(b)*sin(a)*(R/r*sin(A)-cos(b)*sin(a))
   -sin(b)^2 ;
d:=sqrt(  (R/r*cos(A)-cos(b)*cos(a))^2
         +(R/r*sin(A)-cos(b)*sin(a))^2
         + sin(b)^2 ) ;
beta:=Pi/2-arccos(n/d) ;
```

Comme on le constate, on a intérêt, avec Maple, à rentrer d'abord les expressions littérales (c'est-à-dire avec des « lettres ») et ensuite les valeurs numériques dans les variables correspondantes :

```
r:=6378 ; R:=42250 ;
A:=19.6/180*evalf(Pi) ;
a:=-0.6/180*evalf(Pi) ;
b:=43.2/180*evalf(Pi) ;
evalf(beta/Pi*180) ;
```

On obtient $\beta \simeq 36.3°$

Remarque : On trouve sur le web de nombreux utilitaires qui proposent de calculer cette élevation. Le mieux est sans doute d'utiliser le site WolframAlpha en tapant : `Hot Bird 8` ou `Astra 1L`

*. En effet, l'angle cherché restant invariant par homothétie (de centre O), il ne peut dépendre que du *rapport* des deux longueurs R et r, et on peut donc être certain de simplifier (un peu) l'expression en l'exprimant en fonction du rapport uniquement.

Exercice n° 30. *Une application du théorème de Desargues (1591-1661)*
On se donne quatre points A, B, C et C' du plan (projectif) tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés. Montrer qu'il existe un unique choix de points A' et B' sur (BC') et (AC') tels que :

$$\begin{cases} A',\ B' \text{ et } C \text{ alignés} \\ (AA'),\ (BB') \text{ et } (CC') \text{ concourantes} \end{cases}$$

Correction

On appellera N le point d'intersection de (BC) et de (AC') et P celui de (AC) et de (BC')
On appellera K le point d'intersection de (AB) et de (NP)

- *Existence*
  Soit B' le point d'intersection de (KC) et de (BC') et A' le point d'intersection de (KC) et de (AC')

  Les points A', B' et C sont bien alignés par construction (et alignés avec K)
  Il reste à montrer que les droites (CC'), (AA') et (BB') sont concourantes :

  Notons I le point d'intersection de (AA') et (BB')

  On va appliquer le théorème de Desargues :
  (BA), (NP) et $(B'A')$ sont concourantes en K
  B, N, B' appartiennent respectivement à ces droites ; A, P, A' également
  Alors, d'après le théorème de Desargues, les points d'intersection de (BN) et (AP) d'une part, (NB') et (PA'), d'autre part, (BB') et (AV) enfin, sont trois points alignés.
  Or, ces trois points d'intersection sont respectivement C, C' et I. Donc, C, C' et I sont alignés.

  I étant, par définition, le point d'intersection de (AA') et (BB'), on en déduit que les droites (BB'), (AA') et (CC') sont concourantes.

- *Unicité*
  On suppose trouvé un couple de points $(A'B')$ qui vérifie les conditions posées.
  On appelle L le point d'intersection de $(A'B')$ et de (NP)

  On va appliquer le théorème de Desargues :
  (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes (en un point que l'on n'a pas besoin de nommer).
  A, B et C appartiennent respectivement à ces droites ; A' B' et C' également
  Alors, d'après le théorème de Desargues, les points d'intersection de (AB) et $(A'B')$ d'une part, de (AC) et $(A'C')$ d'autre part, et (BC) et $(B'C')$ enfin, sont trois points alignés.
  Or, ces trois points d'intersection sont respectivement L, P et N. Donc, L, P et N sont alignés.
  Donc, les trois droites $(A'B')$, (AB) et (NP) sont (nécessairement) concourantes.
  B' et C' sont donc bien les points d'intersection de la droite (KC) avec (AC') et (BC')

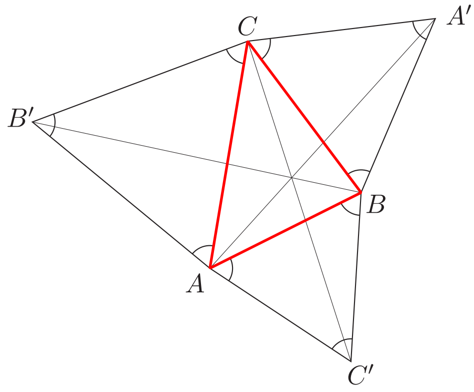
Ce résultat permet, connaissant trois points d'une conique et les tangentes en deux de ces points, de construire la tangente en le troisième point. En effet, un résultat, facile à démontrer en géométrie analytique dit que si une conique est inscrite dans un triangle $A'B'C'$ avec A, B et C comme points de contact, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice n° 31. *Théorème de Pappus*
On considère six points A, B, C, D, E et F deux à deux distincts.
On suppose que A, B et C appartiennent à une même droite et que D, E et F appartiennent à une autre droite, différente de la première.
On suppose que (AE) et (BD) sont sécantes et on note G leur point d'intersection.
On suppose que (AF) et (CD) sont sécantes et on note I leur point d'intersection.
On suppose que (BF) et (CE) sont sécantes et on note H leur point d'intersection.
Montrer que les trois points G, I et H sont alignés.

Exercice n° 32.
On considère un triangle ABC (direct).
On construit trois triangles équilatéraux sur les trois côtés du triangle *vers l'extérieur*.
On note A', B' et C' les sommets correspondants.

a) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point Ω (appelé *point de Torricelli* ou *point de Fermat*).

b) Montrer que $\widehat{A\Omega B} = \widehat{B\Omega C} = \widehat{C\Omega A} = \frac{2\pi}{3}$



Correction

a) On choisit comme unité de longueur la longueur AB

On travaillera dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tel que $O = A$ et $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$

On note $C\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- *Calcul des coordonnées de A', B' et C'*

  $C'\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

  Le point B' est l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

  On a donc $B'\begin{pmatrix} \frac{a-b\sqrt{3}}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}+b}{2} \end{pmatrix}$

  Le vecteur $\overrightarrow{BA'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{BC}$ par la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{3}$

  Les coordonnées de $\overrightarrow{BA'}$ sont donc $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-1+b\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-a\sqrt{3}+\sqrt{3}+b}{2} \end{pmatrix}$

  On en déduit les coordonnées du point A' : $A'\begin{pmatrix} \frac{a+1+b\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-a\sqrt{3}+\sqrt{3}+b}{2} \end{pmatrix}$

- *Détermination d'une équation de (BB'), de (CC') et de (AA')*

$$\begin{aligned}
M \in (BB') \quad &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BB'}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & \frac{a-b\sqrt{3}}{2} - 1 \\ y & \frac{a\sqrt{3}+b}{2} \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{a\sqrt{3}+b}{2}x + \tfrac{-a+2+b\sqrt{3}}{2}y = \tfrac{a\sqrt{3}+b}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad (a\sqrt{3}+b)x + (-a+2+b\sqrt{3})y = a\sqrt{3}+b \\
M \in (CC') \quad &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC'}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & a-\frac{1}{2} \\ y+\frac{\sqrt{3}}{2} & b+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (b+\tfrac{\sqrt{3}}{2})x + (\tfrac{1}{2}-a)y = \tfrac{b-a\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad (2b+\sqrt{3})x + (1-2a)y = b-a\sqrt{3} \\
M \in (AA') \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{a+1+b\sqrt{3}}{2}\right)x - \left(\tfrac{-a\sqrt{3}+\sqrt{3}+b}{2}\right)y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -(-a\sqrt{3}+\sqrt{3}+b)x + (a+1+b\sqrt{3})y = 0
\end{aligned}$$

- Pour montrer que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, on doit montrer que le déterminant Δ suivant est nul :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a\sqrt{3}+b & -a+2+b\sqrt{3} & a\sqrt{3}+b\\ 2b+\sqrt{3} & 1-2a & b+a\sqrt{3}\\ a\sqrt{3}-\sqrt{3}-b & a+1+b\sqrt{3} & 0\end{vmatrix}$$

On retranche la première ligne à la deuxième :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a\sqrt{3}+b & -a+2+b\sqrt{3} & a\sqrt{3}+b\\ -a\sqrt{3}+b+\sqrt{3} & -a-1-b\sqrt{3} & 0\\ a\sqrt{3}-\sqrt{3}-b & a+1+b\sqrt{3} & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -a\sqrt{3}+b+\sqrt{3} & -a-1-b\sqrt{3}\\ a\sqrt{3}-\sqrt{3}-b & a+1+b\sqrt{3}\end{vmatrix}$$

$\Delta=0$

b) D'une manière qui peut peut-être paraître étonnante, il est nettement plus facile de montrer que les droites font entre elles des angles de 120° que de montrer qu'elles sont concourantes.

On considère la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$
$r(A')=C \quad \text{et} \quad r(A)=C'$: la droite (AA') a donc pour image la droite (CC')
les droites (AA') et (CC') font donc entre elles un angle égal à l'angle de la rotation, à savoir $\frac{\pi}{3}$
$\widehat{A\Omega B}=\widehat{B\Omega C}=\widehat{C\Omega A}=\frac{2\pi}{3}$

Exercice n° 33. *Droite de Simson*
On considère un triangle ABC non aplati.
On considère un point D du cercle circonscrit au triangle ABC

a) Montrer que les projetés orthogonaux du point D sur les trois côtés du triangle ABC sont alignés (sur une droite, appelée la *droite de Simson* associée au point D).
b) Montrer que le milieu du segment joignant le point D à l'orthocentre du triangle ABC se trouve également sur la droite de Simson.

Correction

a) On note P (resp. Q, R) le projeté orthogonal de D sur (AB) (resp. (AC), (BC)).
Les égalités d'angles que l'on donne maintenant sont toutes à π près.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QD}) &= (\overrightarrow{CR},\overrightarrow{CD}) && \text{car } Q,\ R,\ C \text{ et } D \text{ sont cocycliques}\\ &= (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}) && \text{car } C,\ B \text{ et } R \text{ sont alignés}\\ &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) && \text{car } A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont cocycliques}\\ &= (\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AD}) && \text{car } P,\ P \text{ et } B \text{ sont alignés}\\ &= (\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QD}) && \text{car } Q,\ P,\ A \text{ et } D \text{ sont cocycliques}\end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})=0$ et donc P, Q et R sont alignés.

Exercice n° 34.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa}\right)$

On considère les points $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\-b\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$ avec a, b et $c\in\mathbb{R}^{+*}$

On note $\alpha=\widehat{B\Omega C}$ $\beta=\widehat{A\Omega C}$ $\gamma=\widehat{A\Omega B}$
On note aussi $\theta=\widehat{O\Omega C}$
On demande de calculer l'angle $\cos\theta$ en fonction uniquement des trois angles α, β et γ

Correction

Calculons d'abord les coordonnées des trois vecteurs qui interviennent dans les angles :
$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-1\\a\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}-1\\-b\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix}-1\\0\\c\end{pmatrix}$

On calcule alors les cosinus des trois angles α, β et γ grâce à la relation d'Al-Kashi :

$$\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega C}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}} \qquad \text{donc} \quad \cos^2\alpha=\frac{1}{(1+b^2)(1+c^2)} \quad (1)$$

$$\cos\beta = \cos\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+c^2}} \qquad \text{donc} \quad \cos^2\beta = \frac{1}{(1+a^2)(1+c^2)} \quad (2)$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \qquad \text{donc} \quad \cos^2\gamma = \frac{(1-ab)^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \quad (3)$$

On considère la relation $\frac{(1)\cdot(3)}{(2)}$: $\quad \dfrac{\cos^2\gamma\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} = \dfrac{(1-ab)^2}{(1+b^2)}$

On va en déduire a en fonction de b :
Comme on a $1-ab>0$ donc $\dfrac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{1-ab}{1+b^2}$ donc $\dfrac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta}(1+b^2) = 1-ab$

donc $\quad ab = 1 - \dfrac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta}(1+b^2)$

et donc $\quad a = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma(1+b^2)}{b\cdot\cos\beta} \qquad (\star)$

Pour avoir une autre relation liant a et b, on considère l'équation $\frac{(1)}{(2)}$: $\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} = \dfrac{1+a^2}{1+b^2}$

En reportant l'expression de b de la relation $(\star)$ dans cette dernière égalité, on obtient :

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}(1+b^2) = 1 + \left(\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma(1+b^2)}{b\cos\beta}\right)^2$$

En multipliant les deux membres par $b^2\cos^2\beta$:

$$\cos^2\alpha(1+b^2)b^2 = b^2\cos^2\beta + \left(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma(1+b^2)\right)^2$$

$$\cos^2\alpha(1+b^2)b^2 = \underbrace{b^2\cos^2\beta + \cos^2\beta}_{(1+b^2)\cos^2\beta} - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1+a^2) + \cos^2\alpha\cos^2\gamma(1+b^2)^2$$

En divisant les deux membres par $(1+b^2)$, on obtient :

$$b^2\cos^2\alpha = \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\gamma(1+b^2)$$

$$b^2\cos^2\alpha = \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\gamma + b^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma$$

On regroupe dans le membre de gauche les termes en b^2 :

$$b^2\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\gamma\right) = \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\gamma$$

$$a^2\cos^2\alpha\sin^2\gamma = \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\gamma$$

On reconnaît dans le membre de droite le développement d'un carré parfait :

$$a^2\cos^2\alpha\sin^2\gamma = \left(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma\right)^2$$

d'où $\quad b^2 = \left(\dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\gamma}\right)^2 \qquad (\star\star)$

Por calculer $\cos^2\theta$ qui est égal à $\frac{1}{1+c^2}$, on va utiliser la relation $(\star)$:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+c^2} = \cos^2\alpha(1+b^2) = \cos^2\alpha\left(1 + \frac{(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma)^2}{\cos^2\alpha\sin^2\gamma}\right)$$

$$\cos^2\theta = \cos^2\alpha + \frac{(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma)^2}{\sin^2\gamma}$$

$$\cos^2\theta\sin^2\gamma = \cos^2\alpha\sin^2\gamma + \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha\cos\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\gamma$$

On regroupe les termes $\cos^2\alpha\sin^2\gamma$ et $\cos^2\alpha\cos^2\gamma$ dont la somme vaut $\cos^2\alpha$:

$$\boxed{\cos^2\theta\sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha\cos\gamma}$$

Exercice n° 35. *Géométrie de la sphère : calcul du cap à suivre*

On considère une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 1.
Les intersections de $\mathcal{S}$ avec les plans passant par le centre de la sphère sont appelées des *grands cercles*. Ce nom vient bien entendu du fait que les autres cercles inclus dans la sphère ont un rayon inférieur à celui des grands cercles.
Les grands cercles jouent un rôle important en géométrie de la sphère car le plus court chemin reliant deux points est un arc de grand cercle. On peut dire que les grands cercles de la sphère jouent en géométrie sphérique un rôle analogue à celui joué par les droites en géométrie plane.

La différence la plus frappante entre la géométrie du plan et celle de la sphère est que deux grands cercles distincts de la sphère ont nécessairement deux points d'intersection (alors que deux droites distinctes du plan ont au plus un point d'intersection). Si on considère deux arcs de grands cercles sur la sphère (sécants en deux points), on appellera *angle* entre ces deux arcs l'angle entre les deux plans correspondants.

Si on considère deux points A et B sur la sphère, on appellera *distance* entre ces deux points la longueur de l'arc de grand cercle qui les joint. La sphère étant de rayon 1, cet arc a une longueur égale à l'angle au centre correspondant : *sur la sphère, une distance est donc égale à un angle (non orienté).*

Soit A, B et C trois points de la sphère.
On notera $a = \overset{\frown}{BC}$, $b = \overset{\frown}{AC}$, $c = \overset{\frown}{AB}$ les longueurs des trois côtés et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les trois angles.

a) Démontrer la relation suivante, appelée *relation fondamentale de la trigonométrie sphérique* :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \widehat{C}$$

On remarquera que cette formule est l'analogue sphérique de la relation d'Al-Kashi car elle permet de calculer le cosinus d'un angle en fonction des longueurs des trois côtés.

b) On note $p = \frac{a+b+c}{2}$ appelé le *demi-périmètre* du triangle sphérique.
Montrer que $\tan \frac{\widehat{C}}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}$

c) *Application au calcul du cap à suivre*
On considère un avion qui doit effectuer la liaison entre une ville A et une ville B. On souhaite calculer la direction que doit prendre cet avion au départ de la ville A.

On choisit comme unité de longueur le rayon terrestre. La Terre est donc considérée comme une sphère de rayon 1.
Les deux points A et B seront repérés à la surface de la Terre par leur longitude et latitude.
On note ψ_1 et θ_1 la latitude et la longitude du point A
ψ_2 et θ_2 la latitude et la longitude du point B

On va ramener le calcul de l'angle cherché au calcul d'un angle dans un triangle sphérique. Pour cela, on considère le point C de même longitude que A et de même latitude que B.

On souhaite calculer l'angle $\widehat{A}$ dans le triangle sphérique ABC

α) Calculer les longueurs $a = \overset{\frown}{BC}$, $b = \overset{\frown}{AC}$, $c = \overset{\frown}{AB}$ en fonction des quantités ψ_1, ψ_2, θ_1 et θ_2.

β) Utiliser la relation fondamentale de la trigonométrie sphérique pour en déduire l'angle $\widehat{A}$ (vue la taille des expressions obtenues, on ne reportera pas dans l'expression de $\widehat{A}$ les expressions de a, b, et c).

γ) *Application numérique*
Quand on se trouve à Paris, dans quelle direction se trouve La Mecque ?
On donne ci-dessous les coordonnées de Paris et de La Mecque.
On fera les calculs avec Maple.

	longitude	latitude
Paris	2° E.	49° N.
La Mecque	40° E.	21° N.

Correction

a) On choisit un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \big(O, i, j, k\big)$ de telle sorte que $k = \overrightarrow{OC}$ et i parallèle au plan (OAC).
On considère les « coordonnées sphériques » correspondant au repère $\mathcal{R}$.
Plus précisément, on note θ la longitude et φ la colatitude.
Dans ce « système de coordonnées sphériques », C occupe le pôle Nord et les longitudes sont repérées à partir du méridien du point A.

On a trois paramètres qui caractérisent le triangle ABC, à savoir φ_A θ_B et φ_B.

On doit montrer que $\quad \cos c = \cos\varphi_A \cos\varphi_B + \sin\varphi_A \sin\varphi_B \cos\theta_B$

Un point M de la sphère de longitude θ et de colatitude φ a pour coordonnées cartésiennes : $M \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

Pour les points A et B, on a donc $\quad A\begin{pmatrix} \sin\varphi_A \\ 0 \\ \cos\varphi_A \end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix} \cos\theta_B\sin\varphi_B \\ \sin\theta_B\sin\varphi_B \\ \cos\varphi_B \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \sin\varphi_A\cos\theta_B\sin\varphi_B + \cos\varphi_A\cos\varphi_B$

or $\begin{cases} \varphi_A = b \\ \theta_B = \widehat{C} \\ \varphi_B = a \end{cases}$ donc $\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \sin b\cos\widehat{C}\sin a + \cos a\cos b$

or $\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\cos c = \cos c \qquad \boxed{\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\widehat{C}}$

b) On note $\quad t = \tan\frac{\widehat{C}}{2}$

On a alors la relation $\cos\widehat{C} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

d'où $\quad \left(1+t^2\right)\cos\widehat{C} = 1-t^2 \qquad$ donc $\quad \cos\widehat{C} + t^2\cos\widehat{C} = 1-t^2$

donc $\quad t^2\left(1+\cos\widehat{C}\right) = 1-\cos\widehat{C} \qquad$ et donc $\quad t^2 = \dfrac{1-\cos\widehat{C}}{1+\cos\widehat{C}}$

On utilise la relation de la première question qui s'écrit : $\quad \cos\widehat{C} = \dfrac{\cos c - \cos a\cos b}{\sin a\sin b}$

D'où $\quad t^2 = \dfrac{1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}}{1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}} = \dfrac{\sin b\sin c - \cos a + \cos b\cos c}{\sin b\sin c + \cos a - \cos b\cos c} = \dfrac{\cos(b-c)-\cos a}{-\cos(b+c)+\cos a}$

On utilise les relations de trigonométrie de transformation de sommes en produits :

$t^2 = \dfrac{-2\sin\frac{b-c+a}{2}\sin\frac{b-c-a}{2}}{-2\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b-c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin p\ \sin\frac{-a+b+c}{2}} = \dfrac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\ \sin(p-a)}$

or $\quad t = \tan\frac{\widehat{C}}{2} \geqslant 0 \qquad$ d'où $\quad \tan\frac{\widehat{C}}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\ \sin(p-a)}}$

c) α) La distance $c = \widehat{AB}$ se calcule avec la relation habituelle pour la distance entre deux points sur la sphère à partir de leurs coordonnées sphériques :

$$c = \arccos\bigl(\cos\psi_1\cos\psi_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \sin\psi_1\sin\psi_2\bigr)$$

Les points A et C étant sur un même méridien, la distance entre les deux est seulement la différence de leur latitude :

$b = |\psi_1 - \psi_2|$

Les points B et C sont situés sur un même parallèle mais on rappelle qu'un parallèle n'est *pas* un grand cercle de la sphère (sauf l'Équateur). Le calcul de la longueur entre B et C passe donc par la formule générale :

$a = \arccos\bigl(\cos\psi_2\cos\psi_3\cos(\theta_3-\theta_2) + \sin\psi_2\sin\psi_3\bigr)$

$\quad = \arccos\bigl(\cos\psi_2\cos\psi_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \sin\psi_2\sin\psi_2\bigr)$

$\quad = \arccos\bigl(\cos^2\psi_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \sin^2\psi_2\bigr)$

β) La relation fondamentale de la trigonométrie sphérique appliquée à l'angle A dans le triangle ABC s'écrit : $\quad \cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\widehat{A}$

d'où $\quad \cos\widehat{A} = \dfrac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$

Exercice n° 36.

On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression analytique de la projection p sur le plan $P=(ABC)$ parallèlement au vecteur $u\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$

Correction

On cherche d'abord une équation du plan (ABC). Cette équation est de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2a & - & b & + & 2c & + & d & = & 0\\ -a & + & 3b & & & + & d & = & 0\\ 4a & & & - & c & + & d & = & 0\end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)_{L_1\leftrightarrow L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 12 & -1 & 5 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2\leftarrow 2L_1+L2}\\ {\scriptstyle L_3\leftarrow 4L_1+L_3}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 29 & 11 & 0\end{array}\right)_{L_3\leftarrow 12L_2-5L_3}$$

Une solution non nulle de ce système est : $a=10\quad b=13\quad c=11\quad d=-29$

$(ABC) : 10x+13y+11z=29$

On cherche maintenant l'expression analytique de la projection p sur (ABC) selon u.

On note $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad M'=p(M)\quad$ et $\quad M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

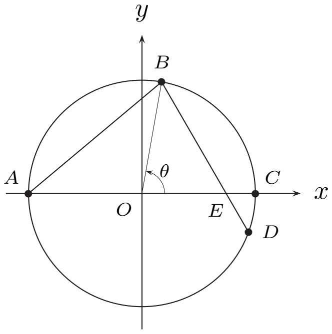
$$\begin{cases} M'\in(ABC)\\ \overrightarrow{MM'}=ku\end{cases}\qquad \begin{cases}10x'+13y'+11z'=29\\ x'-x=2k\\ y'-y=k\\ z'-z=5k\end{cases}\qquad \begin{cases}10(x+2k)+13(y+k)+11(z+5k)=29\\ x'=x+2k\\ y'=y+k\\ z'=z+5k\end{cases}$$

$$\begin{cases}88k=29-10x-13y-11z\\ x'=x+\frac{2}{88}(29-10x-13y-11z)\\ y'=y+\frac{1}{88}(29-10x-13y-11z)\\ z'=z+\frac{5}{88}(29-10x-13y-11z)\end{cases}\qquad \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \frac{1}{88}(\ 68x-26y-22z+58)\\ y' & = & \frac{1}{88}(-10x+75y-11z+29)\\ z' & = & \frac{1}{88}(-50x-65y+33z+145)\end{array}\right.$$

Exercice n° 37. *Proposé dans* le Monde magazine *n° 95 du 9 juillet 2011 : « Affaire de logique »*

Pour rester proches de leur père Oscar, Alice, Bob, Charly et Denise ont construit des maisons séparées, mais situées toutes à 120 mètres de la résidence paternelle. Les maisons d'Alice et de Charly sont reliées par un chemin rectiligne goudronné qui passe par la maison d'Oscar. Bob est à la même distance d'Alice que de Denise, qu'il peut rejoindre par des chemins de terre, eux aussi rectilignes. Quant à la dernière fille, Élisabeth, sa maison est à l'intersection du chemin goudronné et de l'un des chemins de terre. Quelle distance, au minimum, la sépare de son père ?

Correction



On choisit une unité de longueur égale à 120 mètres. On travaillera dans le repère orthonormé direct décrit sur la figure ci-dessus.
On note θ l'angle polaire du point B, avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right) = \theta + \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right) \quad [2\pi]$$

or $\quad \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \theta - \pi \quad [2\pi]$

donc $\quad \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right) = 2\theta - \pi \quad [2\pi]$

donc $\quad D\begin{pmatrix}\cos(2\theta-\pi)\\ \sin(2\theta-\pi)\end{pmatrix} \qquad D\begin{pmatrix}-\cos 2\theta\\ -\sin 2\theta\end{pmatrix}$

On cherche une équation de la droite (BD) :

$$\begin{aligned}
M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in (BD) \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BM} \,/\!/\, \overrightarrow{BD}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-\cos\theta & -\cos 2\theta-\cos\theta\\ y-\sin\theta & -\sin 2\theta-\sin\theta\end{vmatrix} = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-\cos\theta & \cos 2\theta+\cos\theta\\ y-\sin\theta & \sin 2\theta+\sin\theta\end{vmatrix} = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (x-\cos\theta)(\sin 2\theta+\sin\theta) - (y-\sin\theta)(\cos 2\theta+\cos\theta) = 0
\end{aligned}$$

Notons x_E l'abscisse du point E :

$$(x_E - \cos\theta)(\sin 2\theta + \sin\theta) + \sin\theta(\cos 2\theta + \cos\theta) = 0$$

$$x_E = \cos\theta - \frac{\sin\theta(\cos 2\theta+\cos\theta)}{\sin 2\theta+\sin\theta} = \frac{\cos\theta\sin 2\theta + \cancel{\cos\theta\sin\theta} - \sin\theta\cos 2\theta - \cancel{\sin\theta\cos\theta}}{\sin 2\theta+\sin\theta} = \frac{\sin(2\theta-\theta)}{\sin 2\theta+\sin\theta}$$

$$x_E = \frac{\sin\theta}{\sin 2\theta+\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta} = \frac{1}{2\cos\theta+1}$$

L'abscisse x_E est donc minimale lorsque $\cos\theta$ est maximal, c'est-à-dire lorsque θ tend vers 0.
Évidemment, la valeur $\theta = 0$ est ce que l'on appelle en physique un « cas limite » : pour cette valeur de θ le point E n'est plus défini puisque les droites (AC) et (BD) sont alors confondues. Néanmoins, on peut dire que la valeur minimale la distance OE est atteinte dans ce cas limite et vaut $\frac{1}{3}$

Exercice n° 38.

a) Montrer que, dans un triangle, les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés se trouvent sur le cercle circonscrit au triangle.

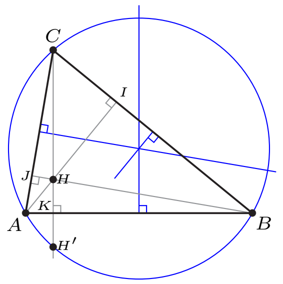
b) On considère un triangle ABC et on note A' (resp. B', C') le symétrique du centre O du cercle circonscrit par rapport à $[BC]$ (resp. $[AC]$, $[AB]$).
Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et que les cercles circonscrits aux triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même rayon.

c) *Théorème de Johnson (1916)*
Montrer que si trois cercles de même rayon ont un point en commun, alors les trois autres points d'intersection de ces cercles se trouvent sur un cercle qui a encore le même rayon.

Ce théorème est remarquable non seulement par sa simplicité, mais aussi parce qu'il ne fut découvert qu'en 1916 par le géométre américain Roger Johnson. Johnson est l'auteur d'un traité élémentaire de géométrie moderne, consacré au triangle et au cercle. Il fut diplômé de Harvard en 1913, et de 1947 à 1952, occupa la chaire de mathématiques du futur Brooklyn College (source : *le Beau Livre des maths*, Clifford A. Pickover, p. 332).

Correction

a) Soit ABC un triangle et H son orthocentre. On note I (resp. J, K) le pied de la hauteur issue de A (resp. B, C).



On note H' le symétrique de H par rapport à (AB). On va montrer que les points A, B, C et H' sont cocycliques.

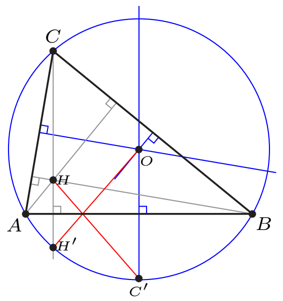
$$\left.\begin{array}{l} AIB \text{ est rectangle en } I \text{ et donc } \widehat{BAI} \text{ est le complémentaire de } \widehat{ABC} \\ CKB \text{ est rectangle en } K \text{ et donc } \widehat{KCB} \text{ est le complémentaire de } \widehat{ABC} \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad \widehat{BAI} = \widehat{KCB}$$

or $\widehat{BAI} = \widehat{BAH'}$ (car H' est le symétrique de H par rapport à (AB))

et d'autre part, $\widehat{KCB} = \widehat{H'CB}$

on a donc $\widehat{BAH'} = \widehat{H'CB}$ et donc les quatre points A, B, C et H' sont cocycliques.

b) On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

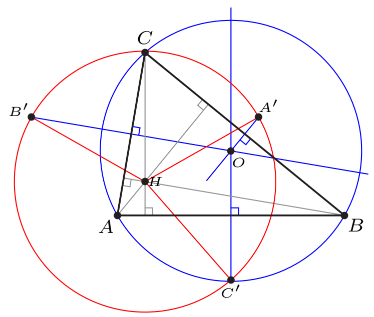


On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB).

$s(H) = H'$ et $s(O) = C'$ donc $OH' = C'H$

comme $OH' = R$, on en déduit que $HC' = R$

On montre de même que $HA' = R$ et que $HB' = R$: H est donc équidistant de A', B' et C' : c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. De plus, le rayon de ce cercle circonscrit vaut R. Le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ a donc le même rayon que le cercle circonscrit au triangle ABC



Remarque : On peut montrer si on veut, sans utiliser la question précédente (et sans utiliser d'angles), que H est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$:

Montrons d'abord que $BCB'C'$ est un parallèlogramme :

On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.

$$\left.\begin{array}{l} I \text{ et } J \text{ sont les milieux de deux côtés du triangle } ABC \text{ , donc } \quad \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \\ I \text{ et } J \text{ sont les milieux de deux côtés du triangle } B'OC'\text{, donc } \quad \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{C'B'} \end{array}\right\}$$

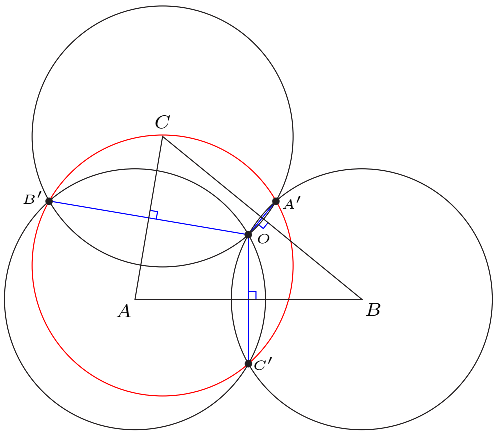
donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$ et donc $BCB'C'$ est un parallélogramme

En particulier, on en déduit que $(BC) \parallel (B'C')$
Donc (AH), qui est orthogonale à (BC) est orthogonale à $(B'C')$
Comme, par ailleurs, A est équidistant de B' et C' (car $AB' = AC' = R$ où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC), on en déduit :
(AH) est la médiatrice du segment $[B'C']$
Les hauteurs du triangle ABC sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$: l'orthocentre H du triangle ABC est donc le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

Cette démonstration montre aussi que $AC'HB'$ est un losange et donc que le symétrique de H par rapport à $(B'C')$ n'est autre que A. De même pour les symétriques de H par rapport aux deux autres côtés du triangle $A'B'C'$. Cela montre que si, à partir du nouveau triangle $A'B'C'$, on prend les symétriques de centre du cercle circonscrit par rapport aux trois côtés (ce qui est la démarche que l'on a suivie pour construire $A'B'C'$ à partir de ABC), on retrouve le triangle ABC de départ.

On a donc deux traingles ABC et $A'B'C'$ dont les hauteurs de l'un sont les médiatrices de l'autre (et dont le centre du cercle circonscrit de l'un est donc l'orthocentre de l'autre).

c) On note A, B et C les centres des trois cercles de même rayon R. On note $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ les trois cercles correspondants.
On note O leur point en commun.
O étant équidistant de A, B et C, c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On note A' l'autre point commun de $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_c$ et de même pour B' et C'.
$COBA'$ étant un losange, le point A' est le symétrique du point O par rapport à (BC) (de même pour B' et C').
D'après la question précédente, on en déduit que les points A', B' et C' sont situés sur le cercle de centre H (orthocentre de ABC) et de rayon R.



Exercice n° 39.
On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la longueur des arêtes est égale à 1.

On travaillera dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

a) Déterminer une équation du plan (BDE)
b) Calculer la distance du point G au plan (BDE)
c) Montrer que le tétraèdre $BDGE$ est un tétraèdre régulier.
d) Calculer le volume V du tétraèdre $BDGE$.
e) Donner une formule permettant de calculer le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre régulier en fonction de la longueur a de ses arêtes.

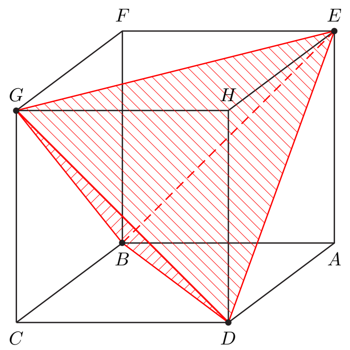
Correction

a) (BDE) a une équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} B \in (BDE) \\ D \in (BDE) \\ E \in (BDE) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

Ce système admet (évidemment) une infinité de solutions. On veut seulement *une solution non nulle*. Une telle solution est donnée par : $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = -1$.

Donc $\quad (BDE) : x + y + z - 1 = 0$



b) La distance d'un point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ à un plan $P : ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la relation :

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

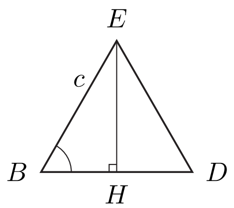
Ici : $\quad G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad$ donc $\quad d\big(G, (BDE)\big) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

c) Le tétraèdre $BDGE$ est régulier puisque toutes ses arêtes ont pour longueur $\sqrt{2}$ (la longueur de la diagonale d'une face du cube).

d) Le volume d'une pyramide de base $\mathcal{B}$ et de hauteur h vaut $V = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{B} \cdot h$

On doit calculer l'aire $\mathcal{B}$ du triangle équilatéral (BDE) de côté $\sqrt{2}$.

On peut, plus généralement, donner facilement l'aire d'un triangle équilatéral de côté c :



$$\mathcal{A}_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BE \cdot \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

Ici, $c = \sqrt{2}$ et donc $\mathcal{A}_{BDE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Le volume du tétraèdre $BDEG$ est donc : $\quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}$

e) Le volume d'un tétraèdre régulier est évidemment proportionnel au cube de longueur de ses arêtes. Pour passer du volume du tétraèdre d'arête $\sqrt{2}$ à celui d'arête a, on divise donc par $(\sqrt{2})^3$ et on multiplie par a^3 :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{(\sqrt{2})^3} \qquad \boxed{\mathcal{V} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3}$$

Exercice n° 40.

a) Montrer que si, A, B, C et M sont quatre points du plan, on a : $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

b) En déduire que, dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes (en un point qui est, comme on le sait, appelé l'*orthocentre* du triangle).

Correction

a) On utilise la relation de Chasles pour introduire le point M dans chacun des termes de la somme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \big(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\big) \cdot \overrightarrow{CM} + \big(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}\big) \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \big(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}\big) \\ &= \cancel{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}} + \cancel{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CM}} + \cancel{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}} + \cancel{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB}} + \cancel{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}} + \cancel{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Soit ABC un triangle et M le point d'intersection des hauteurs issues de C et D.

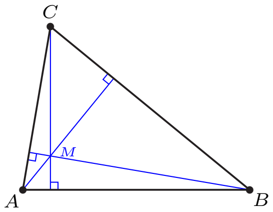
On a $\begin{cases} (CM) \perp (AB) \\ (BM) \perp (AC) \end{cases}$ donc $\begin{cases} \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

or, on vient de montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Le point M se trouve donc sur la hauteur issue de A

Les trois hauteurs du triangle ABC sont donc concourantes.

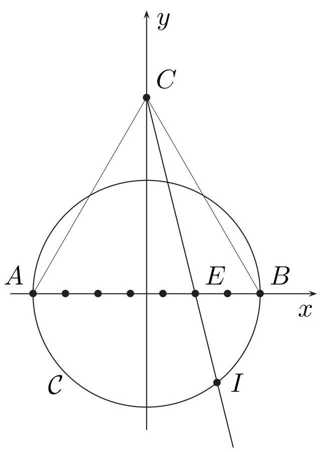
Remarque : Si on a quatre points dont l'un est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres, alors, chacun des trois points est l'orthocentre du triangle formé par les autres. C'est pourquoi on dit parfois que ces quatre points (indépendamment de leur ordre) forment un *système orthocentrique*.



Les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point M qui est appelé, comme chacun sait, l'*orthocentre* du triangle ABC.

Exercice n° 41.

On trouvait autrefois dans les livres de géométrie* la construction suivante permettant d'obtenir un heptagone régulier de manière approchée (sans utiliser de rapporteur).



On construit le cercle de centre $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1.

On note $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

On partage le segment $[AB]$ en sept segments de même longueur. On note E le cinquième point obtenu (voir figure ci-contre).

On construit ensuite un point C tel que le triangle ABC soit équilatéral direct.

On construit alors le point I à l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite (CE) et avec une ordonnée négative.

L'angle $\widehat{BOI}$ vaut alors approximativement $\frac{2\pi}{7}$.

On demande de déterminer l'abscisse du point I et de comparer avec la valeur théorique si l'angle $\widehat{BOI}$ valait $\frac{2\pi}{7}$.

Correction

$E\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ on en déduit une équation de (CE) : $\frac{x}{\frac{3}{7}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$

On note $I\begin{pmatrix}x_I\\y_I\end{pmatrix}$ $\begin{cases} I \in (CE) \\ I \in \mathcal{C} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \frac{7}{3}x_I + \frac{1}{\sqrt{3}}y_I = 1 \\ x_I^2 + y_I^2 = 1 \end{cases}$

On tire y_I de la première pour le reporter dans la deuxième de manière à obtenir une équation du second degré portant sur y_I.

$y_I = \sqrt{3}\left(1 - \frac{7}{3}x_I\right)$ $x_I^2 + 3\left(1 - \frac{7}{3}x_I\right)^2 = 1$ $\frac{52}{3}x_I^2 - 14x_I + 2 = 0$

Les deux solutions de cette équation du second degré sont $\frac{21}{52} + \frac{1}{52}\sqrt{129}$ et $\frac{21}{52} - \frac{1}{52}\sqrt{129}$

Donc $x_I = \frac{21}{52} + \frac{1}{52}\sqrt{129} \simeq 0.62226$ (alors que $\cos\frac{2\pi}{7} \simeq 0.62348$)

*. Voir par exemple *Traité élémentaire de tous les traits servant aux Arts et Métiers et à la construction des bâtiments*, Zacharie, 1833.

Exercice n° 42. *Théorème d'Apollonius, aussi appelé : « théorème de la médiane »*
On considère un triangle ABC et on note I le milieu du côté $[BC]$.
Montrer que $\quad AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$

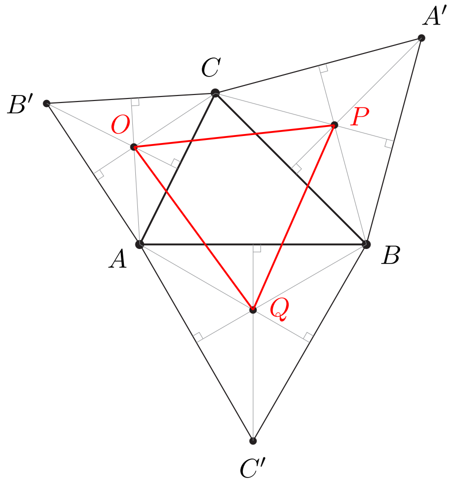
Correction

$$
\begin{aligned}
AB^2 + AC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 \\
&= AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 + AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2 \\
&= 2AI^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \left(\cancel{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}\right) \\
&= 2AI^2 + \left(\tfrac{1}{2}BC\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}BC\right)^2 \\
&= 2AI^2 + \tfrac{1}{2}BC^2
\end{aligned}
$$

on développe les carrés scalaires

Exercice n° 43. *Théorème de Napoléon*[*]
On considère un triangle ABC non aplati.
On construit trois triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC' « à l'extérieur » du triangle ABC comme décrit sur la figure ci-dessous.
On note O le centre du triangle équilatéral ACB' ;
P le centre du triangle équilatéral BCA' ;
Q le centre du triangle équilatéral ABC'.

Montrer que le triangle OPQ est un triangle équilatéral.



Correction

On prend les notations traditionnelles pour les longueurs des 3 côtés du triangle : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
On note également $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

Pour montrer que le triangle OPQ est équilatéral, on va montrer que ses trois côtés ont la même longueur.

On va d'abord la longueur du côté OQ en fonction des trois côtés a, b et c et de l'aire $\mathcal{A}$ du triangle.

D'après la relation d'Al-Kashi appliquée dans le triangle AOQ, on a :

$$OQ^2 = AO^2 + AQ^2 - 2 \cdot AO \cdot AQ \cdot \cos\left(\widehat{OAQ}\right) \qquad (1)$$

*. En dépit de son nom, il n'est pas sûr du tout que ce théorème ait été découvert par Napoléon. La légende dit que le général Bonaparte, de retour de la campagne d'Italie aurait présenté ce théorème à l'Académie des sciences et que Lagrange lui aurait alors répondu : « Mon général, nous nous attendions à tout de votre part, sauf à une leçon de géométrie ! ».

or $\quad \widehat{OAQ} = \widehat{OAC} + \widehat{BAC} + \widehat{QAB} = \frac{\pi}{6} + \widehat{A} + \frac{\pi}{6} = \widehat{A} + \frac{\pi}{3}$

par ailleurs, $\quad AQ = \frac{\sqrt{3}}{3}c \quad$ et $\quad AO = \frac{\sqrt{3}}{3}b$

En reportant dans la relation (1), on obtient :

$$\begin{aligned}
OQ^2 &= \tfrac{1}{3}c^2 + \tfrac{1}{3}b^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot bc \cdot \cos(\widehat{A} + \tfrac{\pi}{3}) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - 2bc\big(\cos\widehat{A}\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\widehat{A}\sin\tfrac{\pi}{3}\big)\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - 2bc\big(\tfrac{1}{2}\cos\widehat{A} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\widehat{A}\big)\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - bc\big(\cos\widehat{A} - \sqrt{3}\sin\widehat{A}\big)\right)
\end{aligned}$$

Or, d'après la relation d'Al-Kashi dans le triangle ABC, on a $\cos\widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et donc :

$$\begin{aligned}
OQ^2 &= \tfrac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - bc\big(\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \sqrt{3}\sin\widehat{A}\big)\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - \tfrac{b^2+c^2-a^2}{2} + \sqrt{3}\,bc\sin\widehat{A}\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{a^2}{2} + \tfrac{b^2}{2} + \tfrac{c^2}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{A}\right) \qquad \text{car } \mathcal{A} = \tfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}
\end{aligned}$$

On obtient les expressions pour OP^2 et PQ^2 par permutation circulaire des lettres a, b et c.
On obtient donc évidemment la même expression pour OP^2 et pour PQ^2.
Les trois côtés du triangle OPQ ont la même longueur et donc il s'agit d'un triangle équilatéral.