



Rapport du projet EDP

CHELLAF EL HAMMOUD Chaimae

Département Sciences du Numérique - HPC et Big Data
2021-2022

Contents

1	Partie Théorique	3
1.1	Formulation variationnelle du problème	3
1.2	Unicité de la solution	3
1.3	Aboutissement au système linéaire $Ax=b$	4
2	Mise en oeuvre pratique : cas du Quadrilatère	5
2.1	Matrice de raideur associée à un élément quadrangle	5
3	Compléments d'analyse du système issu de la discrétisation	6
3.1	Analyse de l'ordre du schéma de discrétisation dans le cas d'éléments Triangle . . .	6
3.2	Résolution du système linéaire par une méthode directe	6
4	Figures des solutions dans les deux cas trigulaire et mixte	7
4.1	Le cas triangulaire : maillage sur $n = 10$	7
4.2	Le cas mixte : paramètres fournis en partie 2 du notebook	8

1 Partie Théorique

1.1 Formulation variationnelle du problème

Supposons $u \in H^2(\Omega)$. Et soit $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$. Donc : $\forall w \in L^2(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} -\Delta u \times w \, dx = \int_{\Omega} f \times w \, dx$$

Et on a $u \in H^2(\Omega)$ donc $\nabla u \in H^1(\Omega)$. Donc $\forall w \in H^1(\Omega)$, d'après la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \Delta u \times w \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w \, dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(\nabla u) \times \gamma_0(w) \times n_i \, dx.$$

En remplaçant par la première relation, et puisque $\gamma_0(\nabla u) \times n_i = \gamma_1(u)$ et que $\gamma_0(\nabla u) \times n_i = g$ sur $\partial\Omega_n$, on obtient : Pour $u \in H^1(\Omega)$ et $\forall w \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} -f \times w \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w \, dx = \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u) \times \gamma_0(w) \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \times \gamma_0(w) \, dx$$

Donc, pour $u \in H^1(\Omega)$ et $\forall w \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} -f \times w \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w \, dx = \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u) \times \gamma_0(w) \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \times \gamma_0(w) \, dx$$

Or, $\gamma_0(w) = 0$ car $w \in H_0^1(\Omega)$, d'où :

$$\int_{\Omega} -f \times w \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w \, dx = \int_{\partial\Omega_n} g \times \gamma_0(w) \, dx$$

Et puisque $u = v + u_d$ on a :

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f \times w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \times \gamma_0(w) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w \, dx$$

1.2 Unicité de la solution

Le problème ci-dessus peut s'écrire sous la forme $a(v, w) = l(w)$ tel que :

$\forall (v, w) \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx \\ l(w) = l_1(w) + l_2(w) + l_3(w) \end{cases}$$

Avec : $l_1(w) = \int_{\Omega} f \times w \, dx$, $l_2(w) = \int_{\partial\Omega_n} g \times \gamma_0(w) \, dx$, $l_3(w) = - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w \, dx$.

• a est symétrique, linéaire par rapport à u , car la dérivation et l'intégration sont linéaires, d'où a est bilinéaire.

→ De plus, a est continue :

On a $\forall (v, w) \in H_0^1(\Omega)$: $|a(v, w)| = |\int_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx|$

Donc en appliquant Cauchy Schwarz : $|a(v, w)| \leq |v|_{0,1} \times |w|_{0,1}$

→ a est coercive :

$\forall v \in H_0^1$, $|a(v, v)| = |v|_{0,1}^2 \geq |v|_{0,1}^2$.

→ a est donc bilinéaire continue coercive.

• l est linéaire comme somme d'applications linéaires (par linéarité de la dérivation et intégration, et car l'application trace γ_0 est linéaire).

→ De plus, l est continue car l_1 , l_2 , et l_3 sont continues :

Ω est borné, donc d'après l'inégalité de Poincaré on a :

$\forall v \in H_0^1$, $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \times |v|_{0,1}$

Par conséquent, $\forall v \in H_0^1$, $\|v\|_{H^1} \leq (\sqrt{1 + C(\Omega)^2}) \times |v|_{0,1}$.
Avec $C(\Omega)$ la constante du lemme du Poincaré.

D'où, on obtient :

$$\begin{cases} |l_1(w)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \times \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \times C(\Omega) \times |w|_{0,1} \\ |l_2(w)| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \times \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \times \|\gamma_0\| \times \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \times \|\gamma_0\| \times (\sqrt{1 + C(\Omega)^2}) \times |w|_{0,1} \end{cases}$$

→ l est donc linéaire continue.

Par application du Théorème de Lax-Milgram, et car toutes les conditions sur a et l sont bien vérifiées, on conclut donc que le problème admet une unique solution.

1.3 Aboutissement au système linéaire $Ax=b$

Posons $V = Vect((\eta_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket})$ un sous-espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$.

Soit donc $v \in V$ tel que $v = \sum_{k=1}^n x_k \eta_k \in H_0^1(\Omega)$.

On a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\eta_i \in H_0^1(\Omega)$, donc la formulation variationnelle discrète du problème devient :

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \eta_i \, dx = \int_{\Omega} f \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(\eta_i) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla \eta_i \, dx$$

Sur la frontière $\partial\Omega_n$: $\gamma_0(\eta_i) = \eta_i$, d'où :

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \eta_i \, dx = \int_{\Omega} f \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \eta_i \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla \eta_i \, dx$$

Or,

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \eta_i \, dx = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \nabla \eta_k^T \nabla \eta_i x_k \, dx$$

Donc :

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \nabla \eta_k^T \nabla \eta_i x_k \, dx = \int_{\Omega} f \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \eta_i \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla \eta_i \, dx$$

Et puisque $u_d \in H^1(\Omega)$, alors u_d peut s'écrire sous la forme : $u_d = \sum_{k=1}^n U_k \eta_k$ (car $(\eta_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base d'éléments finis de $H_0^1(\Omega)$). L'expression ci-dessus devient donc :

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \nabla \eta_k^T \nabla \eta_i x_k \, dx = \int_{\Omega} f \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \eta_i \, dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_{\Omega} \nabla \eta_k^T \nabla \eta_i \, dx$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^n A_{k,i} x_k = b_i$$

Donc, on a bien l'équation $Ax = b$ Avec :

$$\begin{cases} A_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \eta_i^T \nabla \eta_j \, dx \\ b_i = \int_{\Omega} f \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \eta_i \, dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_{\Omega} \nabla \eta_k^T \nabla \eta_i \, dx \end{cases}$$

→ Justification de l'existence et l'unicité de la solution discrète de ce système :

Montrons que A est injective :

Soit $x \in V$ ($x = \sum_{k=1}^n \eta_k x_k$) tel que $Ax = 0$.

Donc $\sum_{k=1}^n A_{k,i} x_k = \sum_{k=1}^n a(\eta_k, \eta_i) x_k = 0$.

Par linéarité de a par rapport à la première variable, on a :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a(\sum_{k=1}^n \eta_k x_k, \eta_i) = 0$.

Doù, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a(x, \eta_i) = 0$.

Puisque a est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ et V est un sous espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$, alors a définit aussi un produit scalaire sur V .

On a donc : $x \in V$ et $a(x, \eta_i) = 0 \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc x est orthogonal à tous les éléments de V et $x \in V$, d'où $x = 0$.

Par suite, A est injective.

Puisqu'on est en dimension finie et que A est injective, alors A est bijective. D'où l'existence et l'unicité de la solution discrète de ce système.

2 Mise en oeuvre pratique : cas du Quadrilatère

2.1 Matrice de raideur associée à un élément quadrangle

La fonction Φ_Q transforme le carré de côté unitaire en un parallélogramme. Avec :

$$\begin{aligned} \Phi_Q : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow Q \\ (a, b) &\mapsto ((x_2 - x_1)a + (x_4 - x_1)b + x_1, (y_2 - y_1)a + (y_4 - y_1)b + y_1) \end{aligned}$$

avec (x_i, y_i) les sommets du parallélogramme.

Et on a :

$$\begin{cases} \phi_1(u, v) = (1 - u)(1 - v) \\ \phi_2(u, v) = u(1 - v) \\ \phi_3(u, v) = uv \\ \phi_4(u, v) = (1 - u)v \end{cases}$$

Avec les ϕ_j représentant les fonctions de base sur le carré.

A partir de ces deux fonctions, et car $\eta_i(x, y) = \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x, y))$, et avec les formules de changement de variables, on obtient la matrice de raideur :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, M_{i,j} = \int_{QU} \nabla \eta_i^T \nabla \eta_j \, dx = |J_{\Phi_Q}| \times \int_{QU} \nabla \phi_i^T (J_{\Phi_Q}^T J_{\Phi_Q})^{-1} \nabla \phi_j \, dx$$

$$\text{Donc, } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, M_{i,j} = |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 \nabla \phi_i^T(x, y) (J_{\Phi_Q}^T J_{\Phi_Q})^{-1} \nabla \phi_j(x, y) \, dx dy$$

($J_{\Phi_Q}^T J_{\Phi_Q}$) étant symétrique, son inverse l'est aussi, et donc on peut exprimer son inverse comme

$$\text{suit : } (J_{\Phi_Q}^T J_{\Phi_Q})^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut calculer tous les éléments de la matrice de raideur M .

- $M_{1,1} = |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 \nabla \phi_1^T(u, v) (J_{\Phi_Q}^T J_{\Phi_Q})^{-1} \nabla \phi_1(u, v) \, dudv$
 $= |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} v-1 & u-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v-1 \\ u-1 \end{pmatrix} \, dudv$
 $= |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 (a(v-1)^2 + 2b(u-1)b(v-1) + c(u-1)^2) \, dudv$
 $= |J_{\Phi_Q}| \times (\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3})$

- $M_{1,2} = |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 \nabla \phi_1^T(u, v) (J_{\Phi_Q}^T J_{\Phi_Q})^{-1} \nabla \phi_2(u, v) \, dudv$
 $= |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} v-1 & u-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ u \end{pmatrix} \, dudv$
 $= |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 (-a(v-1)^2 - b(2u-1)(v-1) - cu(u-1)) \, dudv$
 $= |J_{\Phi_Q}| \times (\frac{-a}{3} + \frac{b}{6})$

- $M_{3,3} = |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 \nabla \phi_3^T(u, v) (J_{\Phi_Q}^T J_{\Phi_Q})^{-1} \nabla \phi_3(u, v) \, dudv$
 $= |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \, dudv$
 $= |J_{\Phi_Q}| \times \int_0^1 \int_0^1 ((va + ub)v + (vb + uc)u) \, dudv$
 $= |J_{\Phi_Q}| \times (\frac{a}{3} + \frac{c}{3} + \frac{b}{2})$

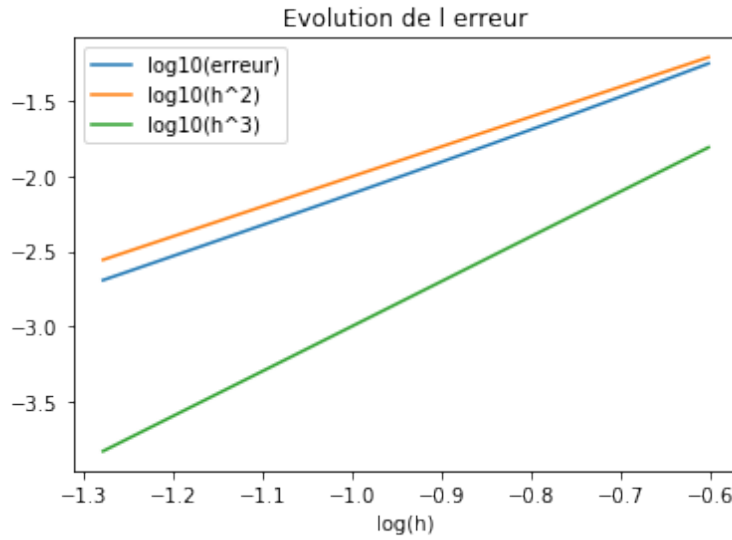
On calcule les autres termes par la même manière, et on obtient finalement la matrice M suivante :

$$M = \frac{|J_{\Phi Q}|}{6} \times \begin{pmatrix} 2a + 3b + 2c & -2a + c & -a - 3b - c & a - 2c \\ -2a + c & 2a - 3b + 2c & 3b + 2c & -a + 3b - c \\ -a - 3b - c & a - 2c & 2a + 3b + 2c & -2a + c \\ a - 2c & -a - 3b - c & -2a + c & 2a - 3b + 2c \end{pmatrix}$$

3 Compléments d'analyse du système issu de la discrétisation

3.1 Analyse de l'ordre du schéma de discrétisation dans le cas d'éléments Triangle

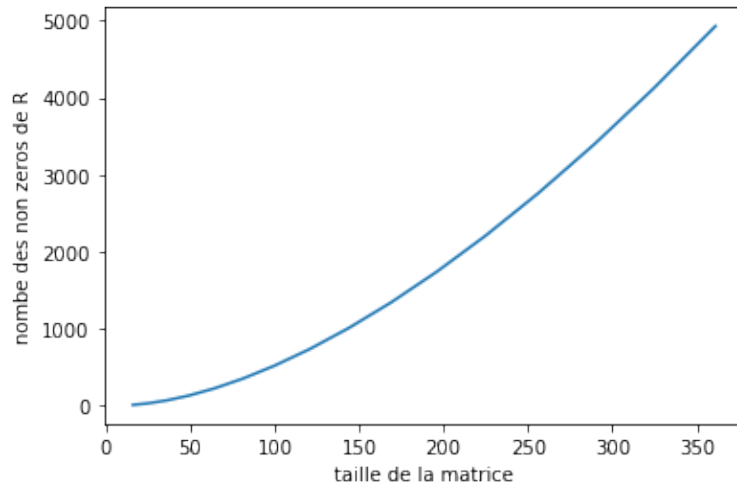
Dans cette partie, on a utilisé le second membre $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ et $u_d = 0$. En calculant le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme de h , et en insérant les courbes du $\log_{10}(h^2)$ et $\log_{10}(h^3)$, on obtient la figure ci-dessous :



Donc, on voit bien que la courbe de $\log_{10}(h^2)$ est très proche de la courbe du $\log_{10}(erreur)$ tout en étant parallèle, on conclut donc de l'ordre de discrétisation est égal à 2.

3.2 Résolution du système linéaire par une méthode directe

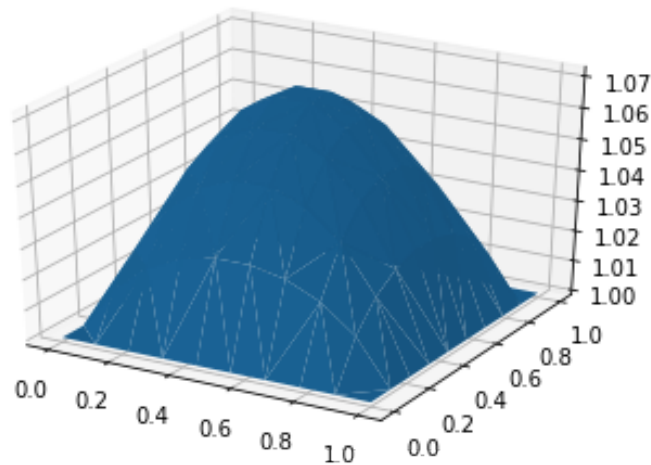
Après avoir appliqué la factorisation de Cholesky pour trouver la solution discrète, on trace l'évolution du nombre d'éléments non nuls de R en fonction de la taille de la matrice, et on obtient donc la figure suivante :



- On remarque que le nombre des non zéros de la matrice R augmente avec la taille de la matrice.
- Cela signifie aussi que le nombre des éléments nuls de R augmente et devient important, on peut donc considérer la matrice A comme une matrice creuse.
- Pour réduire le coût mémoire de cette factorisation, on pourra appliquer les différents algorithmes vu en algèbre linéaire creuse pour réduire le stockage dans une matrice creuse, comme l'application d'un ordonnancement de la matrice A (permutation des lignes et des colonnes pour minimiser le remplissage de façon à ce que la factorisation de Cholesky soit la moins coûteuse possible). Dans ce sens, on peut par exemple utiliser l'algorithme du degré minimum optimisant le stockage de la matrice A .

4 Figures des solutions dans les deux cas triangulaire et mixte

4.1 Le cas triangulaire : maillage sur $n = 10$



4.2 Le cas mixte : paramètres fournis en partie 2 du notebook

