The Implied Volatility Surface

Autor
Noé Camacho

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
Máster en ciencias e ingeniería estadística

9 de noviembre de 2025

Contenido

Heston Model Basics

SDEs y propiedades básicas

Dinámica en log-precio y varianza:

$$
\begin{aligned}
d\ln X_t &= -\tfrac{1}{2}V_t\,dt + \sqrt{V_t}\,dW_t^X, \\
dV_t &= \kappa(\theta - V_t)\,dt + \varepsilon\sqrt{V_t}\,dW_t^V, \qquad \langle dW_t^X, dW_t^V\rangle = \rho\,dt.
\end{aligned}
$$

Simulación Numérica

Path Simulation

Dada una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ con paso $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, la simulación por pasos consiste en generar $(X_{t_{i+1}}, V_{t_{i+1}})$ condicional en (X_{t_i}, V_{t_i}).

Simulación Numérica

Monte Carlo

Estimador Monte Carlo

Lema. Sean $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{L}(X)$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel. Entonces $h(X_1), \dots, h(X_n)$ son i.i.d.

$$\mu := \mathbb{E}[h(X)], \qquad \widehat{\mu}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(X_i)$$

$$\mathbb{E}[\widehat{\mu}_n] = \mu \quad \text{y} \quad \widehat{\mu}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$$

Ejemplo (precio call):

$$C = e^{-rT}\, \mathbb{E}[(S_T - K)^+] \;\approx\; \widehat{C}_n = e^{-rT}\, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_T^{(i)} - K)^+.$$

IC

Sea $\sigma^2 := \mathrm{Var}(h(X))$.

$$\sqrt{n}\,\frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \qquad \mathrm{SE}(\widehat{\mu}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$\mu \in \left(\widehat{\mu}_n - z_{\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\ ,\ \widehat{\mu}_n + z_{\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$$

error $= O(n^{-1/2})$. Mejorar vía σ^2:

$$\text{Antitéticos: } (Z, -Z)$$

Reducción de varianza: variables antitéticas

Sean dos muestras i.i.d. y correlacionadas Y^1, Y^2 con $\operatorname{cov}(Y_i^1, Y_j^2) = \delta_{ij} \operatorname{cov}(Y_i^1, Y_i^2)$.

$$\hat{\theta}_{\mathrm{AV}} = \frac{\overline{Y}^1 + \overline{Y}^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}[\hat{\theta}_{\mathrm{AV}}] = \theta$$

$$\operatorname{var}(\hat{\theta}_{\mathrm{AV}}) = \tfrac{1}{4} \operatorname{var}(\overline{Y}^1) + \tfrac{1}{4} \operatorname{var}(\overline{Y}^2) + \tfrac{1}{2} \operatorname{cov}(\overline{Y}^1, \overline{Y}^2)$$

$$\Downarrow \quad \text{mejora si } \rho = \operatorname{corr}(\overline{Y}^1, \overline{Y}^2) < 0$$

Construcción típica: si $Y^1 = g(U)$ con $U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$,

$$Y^2 = g(1-U) \quad \Rightarrow \quad \rho < 0 \text{ (suele reducir varianza).}$$

Simulación Numérica

Esquema de Euler

Aproximación de Euler–Maruyama

Sea el EDE de Itô

$$dX_t = a(t, X_t)\,dt + b(t, X_t)\,dW_t, \qquad t \in [t_0, T], \quad X_{t_0} = x_0,$$

con malla uniforme $t_n = t_0 + n\Delta t$ $(n = 0, \ldots, N,\ \Delta t = \dfrac{T - t_0}{N})$ y incrementos brownianos $\Delta W_n := W_{t_{n+1}} - W_{t_n} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ i.i.d.

El proceso aproximante $Y_n \approx X_{t_n}$ se define por

$$\boxed{Y_{n+1} \ = \ Y_n \ + \ a(t_n, Y_n)\,\Delta t \ + \ b(t_n, Y_n)\,\Delta W_n, \qquad Y_0 = x_0.}$$

Heston: Euler–Maruyama

Sea:

$$\ln \widehat{X}_{t+\Delta} = \ln \widehat{X}_t \;+\; \big(r - \tfrac{1}{2}\widehat{V}_t^{+}\big)\Delta \;+\; \sqrt{\widehat{V}_t^{+}}\,\Delta W_X,$$

$$\widehat{V}_{t+\Delta} = \widehat{V}_t \;+\; \kappa(\theta - \widehat{V}_t^{+})\,\Delta \;+\; \varepsilon\sqrt{\widehat{V}_t^{+}}\,\Delta W_V,$$

$$\widehat{V}_t^{+} = \text{máx}(\widehat{V}_t, 0), \qquad \text{corr}(\Delta W_X, \Delta W_V) = \rho,$$

con incrementos brownianos $\Delta W_\bullet = \sqrt{\Delta}\, Z_\bullet$.

Normales correlacionadas:

$$Z_V = \Phi^{-1}(U_1), \qquad Z_X = \rho\, Z_V + \sqrt{1-\rho^2}\,\Phi^{-1}(U_2),$$

$U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ independientes; Φ^{-1} es la inversa de la CDF normal estándar.

Heston: Euler–Maruyama

Truncación de Itô–Taylor (lo que se ignora): este esquema es el *orden 1* (débil) de Itô–Taylor, se descartan los términos grises.

$$Y_{t+\Delta} = Y_t + a\,\Delta + b\,\Delta W + \tfrac{1}{2}\,b\,\partial_y b\left((\Delta W)^2 - \Delta\right) + \sum_{i\neq j} L_i b_j\, J_{ij} + O(\Delta^{3/2}),$$

Para Heston $dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \varepsilon\sqrt{V_t}\,dW_t^V$,

$$\text{corrección de Milstein:} \quad \frac{\varepsilon^2}{4}\left((\Delta W_V)^2 - \Delta\right),$$

así como los términos cruzados J_{XV} (áreas de Lévy). *Orden fuerte* $O(\Delta^{1/2})$, *orden débil* $O(\Delta)$.

Euler–Maruyama para Heston (simulate_heston_euler)

Entradas: $S_0,\ V_0^*,\ r,\ \kappa,\ \theta,\ \sigma,\ \rho,\ T,\ N.$ Sea $h = \frac{T}{N}$, $X_0 = \log S_0$, $V_0 = V_0^*$.

Genera para cada paso un ruido gaussiano bidimensional

$$Z_i = \begin{bmatrix} Z_i^1 \\ Z_i^2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Para $i = 0, 1, \dots, N-1$ **hacer**

$$V_i^+ = \max(V_i, 0),$$

$$X_{i+1} = X_i + \left(r - \tfrac{1}{2} V_i^+\right) h + \sqrt{V_i^+}\,\sqrt{h}\, Z_i^1,$$

$$V_{i+1} = V_i + \kappa(\theta - V_i^+) h + \sigma \sqrt{V_i^+}\,\sqrt{h}\,\left(\rho\, Z_i^1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_i^2\right).$$

Salida: $S_N = \exp(X_N)$.

Heston: Kahl–Jäckel (IM–IJK)

$$\ln \widehat{X}_{t+\Delta} = \ln \widehat{X}_t - \frac{\Delta}{4}\left(\widehat{V}_{t+\Delta} + \widehat{V}_t\right) + \rho\sqrt{\widehat{V}_t}\, Z_V \sqrt{\Delta}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\sqrt{\widehat{V}_{t+\Delta}} + \sqrt{\widehat{V}_t}\right)\left(Z_X\sqrt{\Delta} - \rho Z_V\sqrt{\Delta}\right) + \frac{1}{4}\,\varepsilon\rho\,\Delta\,(Z_V^2 - 1),$$

$$\widehat{V}_{t+\Delta} = \frac{\widehat{V}_t + \kappa\theta\,\Delta + \varepsilon\sqrt{\widehat{V}_t}\, Z_V\sqrt{\Delta} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\Delta\,(Z_V^2 - 1)}{1 + \kappa\Delta}.$$

Algoritmo de simulación

1. Dado $\widehat{X}_t, \widehat{V}_t, \Delta$, genera $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ y construye $Z_V = \Phi^{-1}(U_1)$, $Z_X = \rho Z_V + \sqrt{1-\rho^2}\,\Phi^{-1}(U_2)$. ($Z$ correlacionados).
2. Actualiza la varianza con el *Milstein implícito*):
$$\widehat{V}_{t+\Delta} = \frac{\widehat{V}_t + \kappa\theta\,\Delta + \varepsilon\sqrt{\widehat{V}_t}\,Z_V\sqrt{\Delta} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\Delta\,(Z_V^2 - 1)}{1+\kappa\Delta}.$$
3. (Si $4\kappa\theta \le \varepsilon^2$) **Truncación**: si $\widehat{V}_{t+\Delta} < 0$, reemplaza por el arreglo tipo (6)–(7): usa $V^+ = \max(\widehat{V}_{t+\Delta}, 0)$ y, en el término de drift, procede como en "full truncation".
4. Actualiza el log-precio con IJK (ec. (8)):
$$\begin{aligned}\ln\widehat{X}_{t+\Delta} &= \ln\widehat{X}_t - \frac{\Delta}{4}\left(\widehat{V}_{t+\Delta} + \widehat{V}_t\right) + \rho\sqrt{\widehat{V}_t}\,Z_V\sqrt{\Delta}\\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\widehat{V}_{t+\Delta}} + \sqrt{\widehat{V}_t}\right)\left(Z_X\sqrt{\Delta} - \rho Z_V\sqrt{\Delta}\right) + \frac{1}{4}\,\varepsilon\rho\,\Delta\,(Z_V^2 - 1).\end{aligned}$$
5. Repite para el siguiente nodo temporal.

Heston: Broadie–Kaya

1) Ley exacta de $V_{t+\Delta}\,|\,V_t$ (CIR):

$$d=\frac{4\kappa\theta}{\varepsilon^2},\quad n(t,t+\Delta)=\frac{4\kappa e^{-\kappa\Delta}}{\varepsilon^2\left(1-e^{-\kappa\Delta}\right)}.$$

Entonces

$$V_{t+\Delta}\,|\,V_t\ \sim\ \frac{e^{-\kappa\Delta}}{n(t,t+\Delta)}\,\chi^2_{\text{no-centr.}}\big(d,\ \lambda=V_t\,n(t,t+\Delta)\big).$$

2) Identidad clave para acoplar X **y** V**:**

$$\int_t^{t+\Delta}\sqrt{V(u)}\,dW_V(u)=\varepsilon^{-1}\Big(V_{t+\Delta}-V_t-\kappa\theta\Delta\Big)+\varepsilon^{-1}\kappa\int_t^{t+\Delta}V(u)\,du.$$

3) Representación exacta de $\ln X$**:**

$$\boxed{\begin{aligned}\ln X_{t+\Delta}&=\ln X_t+\frac{\rho}{\varepsilon}\big(V_{t+\Delta}-V_t-\kappa\theta\Delta\big)\\&\quad+\left(\frac{\kappa\rho}{\varepsilon}-\tfrac{1}{2}\right)\int_t^{t+\Delta}V(u)\,du+\sqrt{1-\rho^2}\int_t^{t+\Delta}\sqrt{V(u)}\,dW(u).\end{aligned}}$$

Heston: Broadie–Kaya

4) Condicionalmente Gaussiano: dado $V_{t+\Delta}$ y $I \equiv \int_t^{t+\Delta} V(u)\,du$,

$$\ln X_{t+\Delta} \,\Big|\, V_{t+\Delta}, I \;\sim\; \mathcal{N}\big(\mu,\ \sigma^2\big)\,,$$

$$\mu = \ln X_t + \frac{\rho}{\varepsilon}(V_{t+\Delta} - V_t - \kappa\theta\Delta) + \left(\frac{\kappa\rho}{\varepsilon} - \tfrac{1}{2}\right)I, \quad \sigma^2 = (1-\rho^2)\,I.$$

5) Integrado de varianza: la distribución condicional de I no está en cerrado; BK obtienen su *función característica* y la *invierten numéricamente* (Fourier) para muestrear I.

Algoritmo de simulación

1. **Muestrea $V_{t+\Delta} \mid V_t$:** usa la ley exacta del CIR (no central χ^2 escalada).
2. **Muestrea $I = \int_t^{t+\Delta} V(u)\,du \mid V_t, V_{t+\Delta}$:** mediante *inversión numérica* (Fourier) de la CDF obtenida a partir de su función característica.
3. **Muestrea $\ln X_{t+\Delta} \mid V_{t+\Delta}, I$:** usa la normal condicional con

$$\mu = \ln X_t + \tfrac{\rho}{\varepsilon}(V_{t+\Delta} - V_t - \kappa\theta\Delta) + \left(\tfrac{\kappa\rho}{\varepsilon} - \tfrac{1}{2}\right)I, \quad \sigma^2 = (1-\rho^2)I.$$

4. **Repite** para el siguiente paso del mallado.

Comentarios prácticos: el esquema es *libre de sesgo*, pero la inversión de I implica Bessel modificadas (series infinitas) y requiere cuidado numérico; además, la aceptación–rechazo puede complicar el control de ruido en griegas bajo perturbaciones.

Heston: TG (Truncated Gaussian) para V

$$\widehat{V}_{t+\Delta} = (\mu + \sigma Z_V)^+, \qquad Z_V \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Objetivo (moment matching): $\mathbb{E}[\widehat{V}_{t+\Delta} \mid V_t] = m,\ \mathrm{Var}[\widehat{V}_{t+\Delta} \mid V_t] = s^2$, donde los momentos exactos del CIR son

$$m = \theta + (V_t - \theta)\, e^{-\kappa\Delta}, \quad s^2 = V_t\, \frac{\varepsilon^2}{\kappa}\left(e^{-\kappa\Delta} - e^{-2\kappa\Delta}\right) + \theta\, \frac{\varepsilon^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-\kappa\Delta}\right)^2.$$

Momentos de la Gaussiana truncada (paper):

$$\mathbb{E}[(\mu+\sigma Z)^+] = \mu\, \Phi(\tfrac{\mu}{\sigma}) + \sigma\, \phi(\tfrac{\mu}{\sigma}), \quad \mathbb{E}[((\mu+\sigma Z)^+)^2] = \mathbb{E}[(\mu+\sigma Z)^+]\mu + \sigma^2 \Phi(\tfrac{\mu}{\sigma}),$$

y con $\psi = s^2/m^2$ el paper da una parametrización eficiente:

$$\mu = \frac{m}{\dfrac{\phi(r(\psi))}{r(\psi)} + \Phi(r(\psi))}, \qquad \sigma = \frac{m}{\phi(r(\psi)) + r(\psi)\, \Phi(r(\psi))}.$$

Algoritmo de simulación (un paso) — TG

1. **Momentos exactos del CIR:** dados V_t y Δ, calcula

$$m = \theta + (V_t - \theta)e^{-\kappa\Delta}, \quad s^2 = V_t \frac{\varepsilon^2}{\kappa}\left(e^{-\kappa\Delta} - e^{-2\kappa\Delta}\right) + \theta \frac{\varepsilon^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-\kappa\Delta}\right)^2.$$

2. **Define** $\psi = s^2/m^2$ y computa $r(\psi)$ (definición del paper).

$$r(\psi) \text{ tal que } \frac{r\,\phi(r) + \Phi(r)}{\left[\phi(r) + r\,\Phi(r)\right]^2} = \frac{1+\psi}{2(1+r)}.$$

3. **Obtén** μ, σ con (14):

$$\mu = \frac{m}{\dfrac{\phi(r)}{r} + \Phi(r)}, \qquad \sigma = \frac{m}{\phi(r) + r\,\Phi(r)}.$$

4. **Genera** $Z_V \sim \mathcal{N}(0,1)$ y fija $\widehat{V}_{t+\Delta} = (\mu + \sigma Z_V)^+$.

5. **(Para X)** usa el esquema de $\ln X$ basado en (11) con la regla de integral $\Delta(\gamma_1 V_t + \gamma_2 V_{t+\Delta})$ para mantener la correlación correcta.

Algoritmo de simulación (un paso) — QE

Entrada: V_t, Δ, parámetros $\kappa, \theta, \varepsilon$, umbral $\psi_c \in [1, 2]$.

1. Momentos exactos del CIR (en $[t, t+\Delta]$):

$$m = \theta + (V_t - \theta)e^{-\kappa\Delta}, \quad s^2 = V_t \frac{\varepsilon^2}{\kappa}\left(e^{-\kappa\Delta} - e^{-2\kappa\Delta}\right) + \theta \frac{\varepsilon^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-\kappa\Delta}\right)^2.$$

2. Calcula $\psi = s^2/m^2$.

3. Genera $U_V \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

4. Si $\psi \le \psi_c$ **(régimen cuadrático):**

$$\text{calcula } b^2 = 2\psi^{-1} - 1 + \sqrt{(2\psi^{-1})\left(2\psi^{-1} - 1\right)}, \quad a = \frac{m}{1 + b^2};$$

toma $Z_V = \Phi^{-1}(U_V)$ y $\boxed{V_{t+\Delta} = a\,(b + Z_V)^2}$.

Heston: QE (Quadratic–Exponential) para V

Sea $\psi = s^2/m^2$.

- **Régimen cuadrático** ($\psi \leq \psi_c$): $\widehat{V}_{t+\Delta} = a\,(b + Z_V)^2,\ Z_V \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- **Régimen exponencial** ($\psi > \psi_c$): ley mixta con masa en 0 y cola exponencial $\Rightarrow$

$$\widehat{V}_{t+\Delta} = \Psi^{-1}(U;\, p, \beta), \quad \Psi^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq p, \\ \beta^{-1} \ln \frac{1-p}{1-u}, & p < u \leq 1. \end{cases}$$

5. Si $\psi > \psi_c$ **(régimen exponencial):** calcula p,β por moment matching y usa

$$\Psi^{-1}(u;p,\beta) = \begin{cases} 0, & 0 \le u \le p, \\ \beta^{-1} \ln \frac{1-p}{1-u}, & p < u \le 1, \end{cases}$$

luego $\boxed{V_{t+\Delta} = \Psi^{-1}(U_V;p,\beta)}$.

6. (Para X**)** actualiza $\ln X$ con el esquema (33) condicionando en $V_t, V_{t+\Delta}$ y usando central ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$).

Gracias