행렬

행렬, 열벡터, 단위행렬

행렬(matrix)

- 숫자(들),혹은 기호(들)을 직사각형 모양으로 배열해 둔 것
- 성분(원소, element) → 행렬 내 각 숫자 혹은 기호
- 행(row) → 행렬에서 같은 행 위치에 배열된 성분(들)
- 열(column) → 행렬에서 같은 열 위치에 배열된 성분(들)
- $m \times n$ 행렬 → m개 행과 n개 열로 이루어진 행렬
- 행벡터(row vector) → 1개 행으로만 이루어진 행렬
- **열벡터**(column vector) → 1개 열로만 이루어진 행렬

$$\begin{array}{ccc} \text{1번째 열} & \text{2번째 열} & \text{3번째 열} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{1번째 행} \\ \leftarrow \text{2번째 행} \\ \leftarrow \text{3번째 행} \end{array} \end{array}$$

성분

$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ ← 3x3 행렬 (정방행렬)

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← 3x2 행렬

$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ← 1x3 행렬 (행벡터)

$\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ ← 3x1 행렬 (열벡터)

- 행렬의 성분 표시 → 행렬 A에서 i번째 행, j번째 열 위치에 있는 성분을 a_{ij}로 표기
- 아래 행렬 A에서 2번째 행, 3번째 열의 원소는 $a_{23} = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- **단위행렬**(identity matrix, 항등행렬) → 정방행렬에서 모든 대각성분(행과 열이 같은 위치의 성분)이 1이고 나머지 성분은 0인 행렬

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

행렬: 덧셈, 스칼라곱

행렬 덧셈

- 두 행렬의 덧셈은 두 행렬의 대응하는 성분들을 합하여 얻어지는 행렬과 같다
- 행렬 A와 행렬 B에 대해 두 행렬의 합 $C = A + B$의 각 성분은 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$로 계산된다

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \mathbf{5} & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ \mathbf{8} & 9 \end{bmatrix}$$

$$c_{31} = a_{31} + b_{31}$$
$$= 5 + 3 = 8$$

행렬 스칼라곱

- 행렬의 스칼라곱은 행렬의 각 성분에 스칼라를 곱하여 얻어지는 행렬과 같다

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad 2A = \mathbf{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \mathbf{5} & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ \mathbf{10} & 12 \end{bmatrix}$$

$$2a_{31} = 2 \cdot 5 = 10$$

행렬 곱셈

행렬 곱셈

- $m \times p$ 행렬 A와 $p \times n$ 행렬 B에 대해 행렬 A, B의 곱 $C = AB$의 각 성분은 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$로 계산된다
- $m \times p$ 행렬 A와 $p \times n$ 행렬 B에 대해 행렬 A, B의 곱 AB는 $m \times n$ 행렬이 된다
- 두 행렬 A, B의 곱셈 AB가 성립되기 위해서는 A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 같아야 함. 즉 AB는 가능하더라도 BA는 불가할 수 있음. 또한 AB와 BA가 모두 계산 가능한 경우라 하더라도 일반적으로 $AB \neq BA$ (행렬곱셈은 교환법칙이 항상 성립하는 것이 아님)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & 2 \\ 2 & \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & \mathbf{5 \cdot 0 + 6 \cdot 1} & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 11 & 4 & 10 \\ 17 & \mathbf{6} & 16 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad IA = AI = A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad AI = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = A$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad IB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad AB \neq BA$$

역행렬

역행렬(inverse matrix)

- 정방행렬 A에 대해 $AB = BA = I_n$을 만족하는 행렬 B를 A의 역행렬이라 하며, A의 역행렬을 A^{-1}로 표기한다
- 즉 행렬 A에 대해 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} = BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B = A^{-1}$$

References

- Linear Algebra: A Modern Introduction, 4th Edition, David Poole
  - 선형대수학, 데이비드 풀 지음, 수학교재편찬위원회 옮김, 경문사