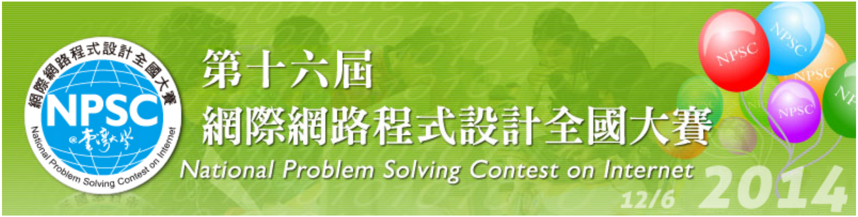

高中組決賽

December 6, 2013

題目 A. 曉涵的禮物

題目

- 給定 N 個積木塊 (連通塊)，要想辦法讓它們不互相衝突地放進 $R \times C$ 的盒子裡。
- 每塊積木可以旋轉 90 度、180 度、270 度。
- $1 \leq N \leq 5$
- $1 \leq R, C \leq 6$
- 每個連通塊最大 4×4。

題目 A. 曉涵的禮物 (cont.)

題目

- 輸出最小字典順序的方案，如下圖。

題目 A. 曉涵的禮物 (cont.)

A	A	A	A	
A	A	B	B	B
A	A	B	D	B
C	C	B	D	B
C		B	B	B

Figure: 第一筆範例輸入的最小字典順序可行放置方案。

(此方案對應到字串 AAAAZAABBBAABDBCCBDBCZBBB)

題目 A. 曉涵的禮物 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): None。
- 通過隊數: 0。

題目 A. 曉涵的禮物 (cont.)

解題說明

- 由於範圍不大：
  - $1 \leq N \leq 5$
  - $1 \leq R, C \leq 6$
  - 每個連通塊最大 4×4。
- 故可使用暴力搜索 (search) $+$ 剪枝 (pruning)。

題目 A. 曉涵的禮物 (cont.)

解題說明

- 「旋轉」可以一開始就處理好。
  - 將每種積木塊的四種旋轉結果都先預處理之。
- 直接 DFS 逐行逐格照順序搜索下去，把所有可行的方案都考慮過，選出字典順序最小的方案。
  - No - Time Limit Exceeded

題目 A. 曉涵的禮物 (cont.)

解題說明

- (加速 1.) 排除旋轉後重複的形狀，再硬搜。
- (加速 2.) **剪枝**：若目前的盤面 (即最終解答字串的前綴) 已經比手邊的答案小，則直接放棄。
- (加速 3.) ID-DFS：先考慮 $R' < R$ 是否有解，再逐步增加 R'。
- 以上三項加速只要實作其中一項：
  - Yes

題目 B. 胖胖天喝大可

題目

- 試問有多少數列滿足下列性質：

1. $1 \leq A_i \leq N$
2. $\sum_{j=i+1}^{M} A_j \leq A_i$，即 $(A_{i+1} + A_{i+2} + \ldots + A_M) \leq A_i$

題目 B. 胖胖天喝大可 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): team15-高雄中學 02，35 分鐘。
- 通過隊數: 16。

題目 B. 胖胖天喝大可 (cont.)

解題說明

- 仔細觀察可以發現數列長度不長，$A_i \geq \sum_{j=i+1}^{M} A_j$ 使得每次至少倍增，故長度只有 $O(log_2 N)$
- 考慮當前的限制，第 i 個數字只能放 $0 \ldots j$，若我們放 k，則 $i+1$ 的限制為 $0 \ldots min(k, j-k) \rightarrow$ DP！
  Note: 在此放 0 表示此格不放任何數字

題目 B. 胖胖天喝大可 (cont.)

解題說明

- $dp(i,j) = \sum_{k=0}^{j} dp(i+1, min(k, j-k))$
- 狀態 $O(NlogN)$，轉移 $O(N)$，得到一個 $O(N^2logN)$ 的做法！
- 但其實轉移可以 $O(1)$，$k = l$ 與 $k = j - l$ 時是一樣的，定義 $S_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} dp(i,j)$，我們可以利用 $S_{i,j}$ 來幫助我們計數！故得到一個 $O(NlogN)$ 的做法 $\Longrightarrow$ Yes

題目 B. 胖胖天喝大可 (cont.)

解題說明

- 仔細觀察可以發現我們並不需要長度這項狀態，轉移不變，獲得 $O(N)$ 做法！
- $\Longrightarrow$ Yes

題目 C. 北斗遺跡

題目

- $NK_1 + MK_2 = NM$ 有幾組 (N, M) 解?

題目 C. 北斗遺跡 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): team15-高雄中學 02，9 分鐘。
- 通過隊數: 18。

題目 C. 北斗遺跡 (cont.)

解題說明

- $NK_1 + MK_2 = NM$
- $NK_1 + MK_2 + K_1K_2 = NM + K_1K_2$
- $K_1K_2 = NM - NK_1 - MK_2 + K_1K_2$
- $K_1K_2 = (N - K_1)(M - K_2)$
- 目標為求 K_1K_2 的因數個數。

題目 D. 蚯蚯（扭）

題目

- 給一個字串 s，有三種操作
- 詢問區間
- 複製區間
- 反轉區間

題目 D. 蚷蚷（扭） (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): team15-高雄中學 02，161 分鐘。
- 通過隊數: 2。

題目 D. 蚯蚯（扭） (cont.)

解題說明

- 持久化 Treap

題目 E. 鋼鐵旗幟競賽

題目

- 給一個字串，其中可能出現的字元為 W、L、D
- 字串長度不超過 1024

- 每個 W 加 10 分；每個 D 加 5 分；每個 L 加一個指示物。
- 每個指示物將在之後遇到的第一個 W 換成 5 分。

題目 E. 鋼鐵旗幟競賽 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): team3-康橋高中 01，10 分鐘。
- 通過隊數: 26。全員通過！

題目 E. 鋼鐵旗幟競賽 (cont.)

解題說明

- 照著題目敘述模擬即可。
- 使用一個變數 c 記錄指示物數量。
- 每次輸的時候 $c \longleftarrow \min(c+1, 5)$。
- 每次贏的時候加 $c \times 5$ 分，並且將 c 歸零。

題目 F. 寧寧切蚯蚓

題目

- 給一個字串，問是否能切成正好三段回文

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): None。
- 通過隊數: 0。

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- 媽媽說，我們作事要一步一腳印
- 要切回文，我們必定要能判斷回文

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- The Manacher algorithm
- 建出表，代表每個中心點能往左右延伸多長的回文（記得在中間補點）
- 於是我們可以判斷任意子字串是否是回文

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- 切一個回文？簡單！
- 直接看看整個字串是否是回文

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- 切兩個回文？簡單！
- 枚舉切點，看看兩邊是否都是回文

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- 切三個回文？簡單（?
- 枚舉兩個切點，看看三段是不是回文
- 傳！

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- No - Time limit exceeded

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- 恩，這樣好像是 $O(n^2)$ 耶？
- 我們要怎麼把他變回 $O(n)$ 呢？

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- Theorem
- 一個偶字串，若可以被切成兩個偶回文
- 切最長的前綴偶回文或最長的後綴偶回文
- 其中一個一定要可以
- 證明大家可以自己畫畫看，瘋狂等於一陣！

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- 可是我們要的是一般的回文，不是偶回文？
- 嘛，那不如就把所有字元複製一次！
- "ABA" $\rightarrow$ "AABBAA"

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- 經過一陣掃過來掃過去的 $O(n)$ 預處理
- 我們就能 $O(1)$ 判斷一段字串能否切成兩個回文

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- 枚舉第一回文的切點，$O(1)$ 判斷剩下能不能切！

題目 F. 寧寧切蚯蚓 (cont.)

解題說明

- Yes - Accepted
- 一個美妙而難寫，出題者開心而解題者痛苦無比的 $O(n)$ 算法，就此誕生！

題目 G. 蚯蚓的智慧

題目

- 擲兩硬幣 x, y，兩個人 A, B 合作
- A 看到 x，但猜 y 正反面
- B 看到 y，但猜 x 正反面
- 都猜對得 a，只有一個猜對得 b，都猜錯得 c
- 玩 N 回合，問期望總分

題目 G. 蚯蚓的智慧 (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): team2-建國中學 03，31 分鐘。
- 通過隊數: 16。

題目 G. 蚯蚓的智慧 (cont.)

解題說明

- 可發現每一回合獨立
- 答案為單回合期望得分 $\times N$
- 底下只考慮單回合

題目 G. 蚯蚓的智慧 (cont.)

- 策略? 想騙我，其實策略根本沒影響吧
- 跟隨機一樣！!
- $\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}$
- No - Wrong Answer

題目 G. 蚯蚓的智慧 (cont.)

- 太天真了，合作會更好！
- A 猜跟 x 一樣，B 猜跟 y 不一樣
  $\Rightarrow$ 一定其中一個人猜對，b
- A 猜跟 x 一樣，B 猜跟 y 一樣
  $\Rightarrow$ 全對或全錯，$\frac{a+c}{2}$
- 兩種策略取最好的，Yes

題目 G. 蚯蚓的智慧 (cont.)

證明

- 這樣一定最好？混合策略呢？
- 對一個人來說，p 的機率使用一個策略，$1-p$ 使用另一個
- $\max_p p \times b + (1-p) \times \frac{a+c}{2}$

題目 G. 蚯蚓的智慧 (cont.)

- 移項一下
- $\max p\left(b-\frac{a+c}{2}\right)+\frac{a+c}{2}$
- $b-\frac{a+c}{2}>0$，則最大值位於 $p=1$。
- $b-\frac{a+c}{2}<0$，則最大值位於 $p=0$。
- 分別對應到上述兩種策略，證畢。

題目 G. 蚯蚓的智慧 (cont.)

題外話

- 事實上是兩個人? p, q? 仍是一樣。
- 隨機猜所得的分數，對應取 $p = 0.5$。
- 如果混合策略 (mixed strategy) 是純策略 (pure strategy) 的線性組合 (linear combination)
- 最優解 (穩定解, 也稱 Nash Equilibrium) 等價於使用某個純策略。

題目 H. H Game

題目

- 毫無疑問，硬幣問題 (無限背包問題)
- 給 N 種幣值 c_i, M 次詢問是否可能組出幣值 p_i。
- $N \leq 50$, $M \leq 10^5$
- 但是 $c_i \leq 10^6$, $p_i \leq 10^9$

題目 H. H Game (cont.)

概況 (封版時)

- 第一位通過 (First Blood): None。
- 通過隊數: 0。

題目 H. H Game (cont.)

解題說明

- 傳統的硬幣問題解法
- 建表後查詢，$O(N \times \max(p_i, c_i))$
- No - Time Limit Exceeded

題目 H. H Game (cont.)

觀察

- $dp(n, p)$ 表示 p 是否能被前 n 種幣值組出 p
- 如果 $dp(n, p) = \text{Y} \Rightarrow dp(n, p + c_n) = \text{Y}$
- 對任意 $dp'(n, p \bmod C) = p'$，表當 $p \geq p'$ 時是 Y
- dp' 表格只需要 C 格，$[0, C)$

題目 H. H Game (cont.)

- 新題目
- 建 dp' 等價於最短路徑模型
- 對於每個詢問 $O(1)$ 查表回答

題目 H. H Game (cont.)

做法 1

- 取 $C = \min c_i$，用 SPFA 做最短路
- No - Time Limit Exceeded
- 就算題目是特殊圖，SPFA 還是卡的掉的 OwO
- Dijkstra 安定，$O(NC\lg(NC) + M)$
- Yes

題目 H. H Game (cont.)

做法 2

- 取 $C = \max c_i$，cost 每次只會 $+0$ 或 $+1$
- deque (單調隊列)! $+0$ 塞頭，$+1$ 塞尾
- 取代 heap，$O(NC + M)$
- Yes

Thank You!