司徒鲜生

博客园暂停更新，最新内容见CSDN主页：https://blog.csdn.net/qq_45887327

[公式推导]用最简洁的方法证明多元正态分布的条件分布

在证明高斯-马尔科夫随机过程的性质的过程中，遇到了多元正态分布的条件分布的证明，百度发现条件分布的很多证明方法写的极其麻烦，所以自己写了一个。

实际上多元随机变量的公式证明一般用矩阵的方法处理，这里就是采用这种方法，处理的结果非常好，证明过程很简洁，给大家推荐。

推导的过程中，公式有可能有输错，读者有问题的地方可以留言指出。

引理1

分块矩阵的逆矩阵（参考书 P224）

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix}$$

则它的逆矩阵为

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{-1} & -\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\\ -\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{-1} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}=\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$。

这里为了简便起见，又将$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$记为

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{(1,1)}^{-1} & \boldsymbol{\Sigma}_{(1,2)}^{-1}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{(2,1)}^{-1} & \boldsymbol{\Sigma}_{(2,2)}^{-1}\end{bmatrix}$$

引理2

多元正态随机向量$\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}_n(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Sigma})$，将$\boldsymbol{X},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Sigma}$分块为（其中$\boldsymbol{X}_1$是$\boldsymbol{X}$的任意 m 维分量）

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix},\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix},\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix}$$

则根据定理 2.3.3（参考书 P19）可知$\boldsymbol{X}_1\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{\Sigma}_{11})$，$\boldsymbol{X}_2\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{\Sigma}_{22})$。

其中$\boldsymbol{X}$的密度函数为

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{u}_i)^T\boldsymbol{\Sigma}_{(i,j)}^{-1}(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{u}_j)}$$

$\boldsymbol{X}_2$的密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}_2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-m}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{u}_2)^T\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{u}_2)}$$

正式证明

则在$X_2 = x_2$的条件下，X_1的密度函数为

$$
\begin{aligned}
f(x_1|x_2) &= \frac{f(x)}{f(x_2)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|\Sigma_{11\cdot 2}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(x_i-u_i)^T\Sigma_{(i,j)}^{-1}(x_j-u_j)-(x_2-u_2)^T\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2)\right\}}
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(x_i-u_i)^T\Sigma_{(i,j)}^{-1}(x_j-u_j)-(x_2-u_2)^T\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2) \\
&= (x_1-u_1)^T\Sigma_{(1,1)}^{-1}(x_1-u_1)+(x_1-u_1)^T\Sigma_{(1,2)}^{-1}(x_2-u_2)+(x_2-u_2)^T\Sigma_{(2,2)}^{-1}(x_1-u_1) \\
&\qquad + (x_2-u_2)^T\left(\Sigma_{(2,2)}^{-1}-\Sigma_{22}^{-1}\right)(x_2-u_2) \\
&= \left\{(x_1-u_1)^T\Sigma_{11\cdot 2}^{-1}(x_1-u_1)-(x_1-u_1)^T\Sigma_{11\cdot 2}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2)\right\} \\
&- (x_2-u_2)^T\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11\cdot 2}^{-1}(x_1-u_1)+(x_2-u_2)^T\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11\cdot 2}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2) \\
&= (x_1-u_1)^T\Sigma_{11\cdot 2}^{-1}\left[(x_1-u_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2)\right] \\
&\qquad + (x_2-u_2)^T\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11\cdot 2}^{-1}\left[\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2)-(x_1-u_1)\right] \\
&= \left[(x_1-u_1)^T-(x_2-u_2)^T\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right]\Sigma_{11\cdot 2}^{-1}\left[(x_1-u_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2)\right] \\
&= \left[(x_1-u_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2)\right]^T\Sigma_{11\cdot 2}^{-1}\left[(x_1-u_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2)\right]
\end{aligned}
$$

结论

所以$f(x_1|x_2)$依旧为正态分布，其均值和方差分别为

$$
E(X_1|X_2=x_2) = u_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-u_2)
$$

$$
D(X_1|X_2=x_2) = \Sigma_{11\cdot 2}^{-1} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}
$$

由于

$$
\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_2,X_1) & D(X_2) \end{bmatrix}
$$

所以$E(X_1|X_2=x_2), D(X_1|X_2=x_2)$又可以写成:

$$
E(X_1|X_2=x_2) = E(X_1) + Cov(X_1,X_2)D^{-1}(X_2)(x_2 - E(X_2))
$$

$$
D(X_1|X_2=x_2) = D(X_1) - Cov(X_1,X_2)D^{-1}(X_2)Cov(X_2,X_1)
$$

这个公式也可以在《随机数字信号处理》-王宏禹-P49得到验证。

参考书

《线性统计模型-线性回归与方差分析》（王松桂）

随笔分类 (31)

C/C++(5)
Matlab(3)
Matlab地图绘制(1)
Matlab绘图基础(14)
工具(8)

阅读排行榜

1. Matlab绘图基础——axis设置坐标轴取值范围(49219)
2. [参考]ASCII对照表 及 字符与二进制、十进制、16进制之间的转化（C/C++）(36655)
3. Matlab绘图基础——利用axes（坐标系图形对象）绘制重叠图像 及 一图多轴（一幅图绘制多个坐标轴）(21253)
4. Matlab绘图基础——用print函数批量保存图片到文件(Print figure or save to file)(18820)
5. Matlab绘图基础——给图像配文字说明（text对象）(18029)
6. [转][修]利用matlab绘制地图上的点、线、面(14621)
7. (Matlab)GPU计算简介，及其与CPU计算性能的比较(11799)
8. Matlab绘图基础——绘制等高线图(9851)
9. [问题解决]RedHat7更换CentOS7的yum源时踩过的坑(9509)
10. Matlab绘图基础——绘制向量图，二维三维（绘制参数曲线图）(8620)

推荐排行榜

1. [学习笔记]15个QA让你快速入门51单片机开发(8)
2. [问题解决]win10误删启动项（BCD）（HP电脑亲测，无需启动盘，并非重装系统）(2)
3. [公式推导]用最简洁的方法证明多元正态分布的条件分布(2)
4. [参考]ASCII对照表 及 字符与二进制、十进制、16进制之间的转化（C/C++）(2)
5. [问题解决]RedHat7更换CentOS7的yum源时踩过的坑(1)

最新评论

1. Re:[问题解决]RedHat7更换CentOS7的yum源时踩过的坑
您好，我在linux虚拟机上安装samba服务时，也遇到了和您类似的问题：输入：yum install samba命令后，同样显示有以下报错：gnome-packagekit-3.8.2-10.e...
--xiaohongchen666
2. Re:[问题解决]RedHat7更换CentOS7的yum源时踩过的坑
如果有原ISO镜像文件,解压这个, 里面都有
--grj001
3. Re:Matlab绘图基础——利用axes（坐标系图形对象）绘制重叠图像 及 一图多轴（一幅图绘制多个坐标轴）
谢谢，学习了！
--dan-chan
4. Re:[转][修]利用matlab绘制地图上的点、线、面
厉害！
--猪冰龙