

司徒鲜生

博客园暂停更新，最新内容见CSDN主页：https://blog.csdn.net/qq_45887327

[首页](#)
[联系](#)
[管理](#)

随笔 - 36 文章 - 0 评论 - 7 阅读 - 28万

[公式推导]用最简洁的方法证明多元正态分布的条件分布

在证明高斯-马尔科夫随机过程的性质的过程中，遇到了多元正态分布的条件分布的证明，百度发现条件分布的很多证明方法写的极其麻烦，所以自己写了一个。

实际上多元随机变量的公式证明一般用矩阵的方法处理，这里就是采用这种方法，处理的结果非常好，证明过程很简洁，给大家推荐。

推导的过程中，公式有可能有输错，读者有问题的地方可以留言指出。

引理1

分块矩阵的逆矩阵（参考书 P224）

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

则它的逆矩阵为

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & \Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

其中 $\Sigma_{11 \cdot 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ 。

这里为了简便起见，又将 Σ^{-1} 记为

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{(1,1)}^{-1} & \Sigma_{(1,2)}^{-1} \\ \Sigma_{(2,1)}^{-1} & \Sigma_{(2,2)}^{-1} \end{bmatrix}$$

引理2

多元正态随机向量 $X \sim N_n(u, \Sigma)$ ，将 X, u, Σ 分块为（其中 X_1 是 X 的任意 m 维分量）

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

则根据定理 2.3.3（参考书 P19）可知 $X_1 \sim N(u_1, \Sigma_{11})$ ， $X_2 \sim N(u_2, \Sigma_{22})$ 。

其中 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-u)^T \Sigma^{-1}(x-u)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-m} (x_i - u_i)^T \Sigma_{(ij)}^{-1} (x_j - u_j)}$$

X_2 的密度函数为

$$f(x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-m}{2}} |\Sigma_{22}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x_2 - u_2)^T \Sigma_{22}^{-1}(x_2 - u_2)}$$

正式证明

公告

昵称：司徒鲜生

园龄：5年

粉丝：17

关注：2

+加关注

搜索

最新随笔

1. Cauchy-Binet公式的证明 及对《来自特征值的特征向量》的理解
2. 《将博客搬至CSDN》
3. [问题解决] win10 误删启动项 (BCD) (HP电脑亲测，无需启动盘，并非重装系统)
4. [经验分享] 用自相似的思想来理解二叉树的三种遍历方法
5. [参考] 用递归的方法获取 字符 对应的 二进制字符串 (C/C++)
6. [经验分享] SecureCRT 导出操作日志 + Notepad 自定义语言格式高亮日志文件
7. [公式推导] 一般线性秩统计量的方差函数及其 极限分布
8. [问题解决] RedHat7 更换 CentOS7 的 yum 源时踩过的坑
9. [定理证明] 正态随机过程又是马尔科夫过程的充要条件（高斯-马尔科夫过程的充要条件）
10. [公式推导] 用最简洁的方法证明多元正态分布的条件分布

我的标签

Linux(2)
Tomcat(1)
MySQL(1)
51单片机(1)
netCDF(1)
随机过程(1)
数据结构(1)
GPU计算(1)

积分与排名

积分 - 90967

排名 - 15508

则在 $X_2 = x_2$ 的条件下, X_1 的密度函数为

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2) &= \frac{f(x)}{f(x_2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\Sigma_{11.2}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \{ \Sigma_{i=1}^2 \Sigma_{j=1}^2 (x_i - u_i)^T \Sigma_{(ij)}^{-1} (x_j - u_j) - (x_2 - u_2)^T \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2) \}} \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (x_i - u_i)^T \Sigma_{(ij)}^{-1} (x_j - u_j) - (x_2 - u_2)^T \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2) \\ &= (x_1 - u_1)^T \Sigma_{(1,1)}^{-1} (x_1 - u_1) + (x_1 - u_1)^T \Sigma_{(1,2)}^{-1} (x_2 - u_2) + (x_2 - u_2)^T \Sigma_{(2,2)}^{-1} (x_1 - u_1) \\ & \quad + (x_2 - u_2)^T (\Sigma_{(2,2)}^{-1} - \Sigma_{22}^{-1}) (x_2 - u_2) \\ &= \{ (x_1 - u_1)^T \Sigma_{11.2}^{-1} (x_1 - u_1) - (x_1 - u_1)^T \Sigma_{11.2}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2) \} \\ & \quad - (x_2 - u_2)^T \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11.2}^{-1} (x_1 - u_1) + (x_2 - u_2)^T \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11.2}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2) \\ &= (x_1 - u_1)^T \Sigma_{11.2}^{-1} [(x_1 - u_1) - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2)] \\ & \quad + (x_2 - u_2)^T \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11.2}^{-1} [\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2) - (x_1 - u_1)] \\ &= [(x_1 - u_1)^T - (x_2 - u_2)^T \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}] \Sigma_{11.2}^{-1} [(x_1 - u_1) - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2)] \\ &= [(x_1 - u_1) - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2)]^T \Sigma_{11.2}^{-1} [(x_1 - u_1) - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2)] \end{aligned}$$

结论

所以 $f(x_1|x_2)$ 依旧为正态分布, 其均值和方差分别为

$$\begin{aligned} E(X_1|X_2 = x_2) &= u_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - u_2) \\ D(X_1|X_2 = x_2) &= \Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \end{aligned}$$

由于

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & D(X_2) \end{bmatrix}$$

所以 $E(X_1|X_2 = x_2)$, $D(X_1|X_2 = x_2)$ 又可以写成:

$$\begin{aligned} E(X_1|X_2 = x_2) &= E(X_1) + Cov(X_1, X_2) D^{-1}(X_2) (x_2 - E(X_2)) \\ D(X_1|X_2 = x_2) &= D(X_1) - Cov(X_1, X_2) D^{-1}(X_2) Cov(X_2, X_1) \end{aligned}$$

这个公式也可以在《随机数字信号处理》-王宏禹-P49得到验证。

参考书

《线性统计模型-线性回归与方差分析》(王松桂)

如果你觉得文章写得还不错, 欢迎打赏、关注、收藏本站。

对于文章内容, 博主尽量做到真实可靠, 并对所引用的内容附上原始链接。但也会出错, 如有问题, 欢迎留言交流~

若标题前没有“[转]”标记, 则代表该文章为本人(司徒鲜生)所著, 转载及引用请注明出处, 谢谢合作!

本站首页: <http://www.cnblogs.com/stxs/>

最新博客见CSDN: https://blog.csdn.net/gq_45887327

随笔分类 (31)

C/C++(5)
Matlab(3)
Matlab地图绘制(1)
Matlab绘图基础(14)
工具(8)

阅读排行榜

1. Matlab绘图基础——axis设置坐标轴取值范围(49219)
2. [参考]ASCII对照表 及 字符与二进制、十进制、16进制之间的转化 (C/C++) (36655)
3. Matlab绘图基础——利用axes (坐标系图形对象) 绘制重叠图像 及 一图多轴 (一幅图绘制多个坐标轴) (21253)
4. Matlab绘图基础——用print函数批量保存图片到文件(Print figure or save to file)(18820)
5. Matlab绘图基础——给图像配文字说明 (text对象) (18029)
6. [转][修]利用matlab绘制地图上的点、线、面(14621)
7. (Matlab)GPU计算简介, 及其与CPU计算性能的比较(11799)
8. Matlab绘图基础——绘制等高线图(9851)
9. [问题解决]RedHat7更换CentOS7的yum源时踩过的坑(9509)
10. Matlab绘图基础——绘制向量图, 二维三维 (绘制参数曲线图) (8620)

推荐排行榜

1. [学习笔记]15个QA让你快速入门51单片机开发(8)
2. [问题解决]win10误删启动项 (BCD) (H P电脑亲测, 无需启动盘, 并非重装系统) (2)
3. [公式推导]用最简洁的方法证明多元正态分布的条件分布(2)
4. [参考]ASCII对照表 及 字符与二进制、十进制、16进制之间的转化 (C/C++) (2)
5. [问题解决]RedHat7更换CentOS7的yum源时踩过的坑(1)

最新评论

1. Re:[问题解决]RedHat7更换CentOS7的yum源时踩过的坑
您好, 我在linux虚拟机上安装samba服务时, 也遇到了和您类似的问题: 输入: yum install samba命令后, 同样显示有以下报错: gnome-packagekit-3.8.2-10.e...
—xiaohongchen666
2. Re:[问题解决]RedHat7更换CentOS7的yum源时踩过的坑
如果有原ISO镜像文件,解压这个, 里面都有
—grj001
3. Re:Matlab绘图基础——利用axes (坐标系图形对象) 绘制重叠图像 及 一图多轴 (一幅图绘制多个坐标轴)
谢谢, 学习了!
—dan-chan
4. Re:[转][修]利用matlab绘制地图上的点、线、面
厉害!
—猪冰龙

好文要顶

关注我

收藏该文

