Solución analítica para el dímero:

Modelo general: $i\dfrac{d\phi_n}{dt} + V(\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) = 0$

Para el caso de dos guías tenemos:

$$i\frac{d\phi_1}{dt} + V\phi_2 = 0 \quad y \quad i\frac{d\phi_2}{dt} + V\phi_1 = 0$$

Al desacoplar estas dos ecuaciones obtenemos:

$$\frac{d^2\phi_1}{dz^2} + V^2\phi_1 = 0 \quad y \quad \frac{d^2\phi_2}{dz^2} + V^2\phi_2 = 0$$

Ecuaciones tipo oscilador $\rightarrow$ Soluciones de prueba tipo $\sim \exp(\lambda t)$. Insertando...

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + V^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + V^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -V^2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-V^2} \Rightarrow$$

$\lambda = \pm iV \Rightarrow$ Solución general es

$$\phi_1(z) = a e^{iVz} + b e^{-iVz}$$

$$\phi_2(z) = c e^{iVz} + d e^{-iVz}$$

donde a, b, c y d son constantes

de integración.

La ecuación es de segundo orden, por tanto nuestro problema de valor inicial debe tener dos condiciones:

$$x_1(t=0) = 1 \quad y \quad x_1'(t=0) = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$a + b = 1 \qquad\qquad \cancel{i}v a - \cancel{i}v b = 0$$

$$a = b \Rightarrow a + a = 1 \qquad 2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}e^{ivt} + \frac{1}{2}e^{-ivt}$$

$$x_1(t) = \cos(vt)$$

Ahora, para la segunda serie:

$$x_2(t=0) = 0 \quad y \quad x_2'(t=0) = iv$$

$$\Rightarrow \psi_2(t=0) = c\cancel{e^{i\nu t}} + d\cancel{e^{-i\nu t}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = -d$$

$$\psi_2'(t=0) = i\nu c + i\nu c = i\nu$$

$$\Rightarrow \quad 2\cancel{i\nu}c = \cancel{i\nu}$$

$$\Rightarrow \quad 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$d = -\frac{1}{2}$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2}e^{i\nu t} - \frac{1}{2}e^{-i\nu t}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}i\sin(\nu t)\right) = i\sin(\nu t)$$

Per lo tanto, la solución analítica para nuestra condición inicial es

$$\psi_1(t) = \cos(\nu t) \quad y \quad \psi_2(t) = i\sin(\nu t)$$

$$|\psi_1|^2 = \cos^2(\nu t) \quad y \quad |\psi_2|^2 = \sin^2(\nu t)$$