第 37 卷 计 算 机 学 报 Vol.37
2014 论文在线出版号 No.91 CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS Online Publishing No.91

几何定理机器证明复系数质点法的改进及其应用

李涛[1)]，邹宇[2)]，张景中[2)]

[1)]（天津城建大学理学院 天津 300384）；

[2)]（广州大学计算机科学与教育软件学院 广州 510006）

摘 要 复系数质点法是以几何点的运算为基础而建立起来的一种新的几何定理机器证明方法．它能高效地证明大部分构造型几何命题，但现有的复系数质点法仍不能有效地处理一些非线性构造型几何命题．为此，本文在原有工作的基础上，对原复系数质点法机器证明算法进行了较大的改进，新添加了一些重要的构图方式，并选用 Mathematica 重新实现了改进的算法，创建了新的证明器 CMPP（Complex Mass Point method Prover）．对上百个几何定理的运行结果显示，证明器 CMPP 能有效地处理非线性构造型几何命题以及许多非构造型几何命题，在解题能力及运行效率上均有所提高．特别地，CMPP 能在短时间内实现五圆定理、莫莱定理等一些难度较大的几何定理的可读机器证明．

关键词 几何自动推理；可读机器证明；构造型几何命题；复系数质点法；CMPP

中图法分类号 TP181

论文引用格式

李涛，邹宇，张景中，几何定理机器证明复系数质点法的改进及其应用，计算机学报，2014，Vol.37：在线出版号 No.91

LI Tao , ZOU Yu , ZHANG Jing-zhong，Improvement of the Complex Mass Point Method and its Application in Automated Geometry Theorem Proving，Chinese Journal of Computers,2014, Vol.37: Online Publishing No.91

Improvement of the Complex Mass Point Method and its Application in Automated Geometry Theorem Proving

LI Tao[1)], ZOU Yu[2)], ZHANG Jing-zhong[2)]

[1)]（Faculty of Science，Tianjin chengjian university, Tianjin 300384）

[2)]（College of Computer Science and Educational Software, Guang zhou University, Guangzhou 510006）

Abstract The complex mass point method is a new method for automated geometry theorem proving which is based on operations among geometric points. The complex mass point method can be used to prove most constructive geometry theorems efficiently, but so far it couldn't deal with nonlinear constructive geometry theorems. On the basis of our original work, we made improvements to the original algorithm of the complex mass point method. We added some new important constructions, implemented the improved algorithm again in software *Mathematica* to be a new prover CMPP (Complex Mass Point method Prover). The results of more than one hundred geometry statements show that CMPP can effectively deal with nonlinear constructive geometry theorems and many non-constructive geometry theorems in addition to linear constructive geometry theorems; moreover, CMPP runs more efficiently. Especially, CMPP can prove many difficult geometry theorems (such as

———————————————

本课题得到国家自然科学基金(No. 11001228，No. 11326212)、国家“973”计划项目（批准号：2011CB302412）、国家自然科学基金-广东省联合基金项目（No. U1201252）、广州市属高校科研计划（No. 2012A019）资助．李涛，男，1985年生，博士，讲师，是计算机学会（CCF）会员（会员号：E200024621M），主要研究领域为几何自动推理、竞赛数学，E-mail: litaoshuxue@126.com. 邹宇，男，1982年生，博士，讲师，主要研究领域为几何自动推理，E-mail: zouyu020@126.com. 张景中，男，1936年生，中国科学院院士，主要研究领域为自动推理、动力系统等，E-mail: zjz2271@163.com.

five circles theorem and Morley’s theorem) in a very short time and can generate human-readable machine proofs.

Key words Automated geometry theorem proving; readable machine proofs; constructive geometry theorems; the complex mass point method; CMPP

1 引言

1985年，吴文俊院士创造性地提出了“吴方法”．此后的三十余年间，几何定理机器证明研究不断发展：代数法[1]、数值法[2]能有效地判断无序几何命题的真假；面积法[3,4]、搜索法[5,6]更能对其生成“可读”的机器证明．

最近，在上述研究的基础上，笔者发展了复系数质点法[7,8]（下简称质点法）．该方法是个能对“线性构造型”几何定理生成可读证明新的算法．对上百个“线性构造型”几何命题的运行结果显示，质点法的运行效率高且多数证明的可读性令人满意．

为了能处理更多类型的几何命题，本文在已有工作的基础上，对原质点法的核心算法进行了改进，并特别添加了一些能更准确地描述“直线与圆相交、直线与圆相切、圆与圆相交、圆与圆相切”等构图情况的作图语句，使得质点法能灵活地表述并证明许多非线性构造型几何命题及非构造型几何命题．

原质点法机器证明算法是在Maple中实现的，在深入测试该证明器的解题能力及运行效率时发现，一些涉及到大规模符号计算特别是较复杂的多元三角函数和多元无理式的综合运算的几何命题，有时并不能用质点法在合理的时间内完成机器证明．通过详细比较多款当前世界上一些具有强大符号计算功能的数学软件发现，Mathematica对多元三角函数和多元无理式等的处理有其独特的优势．因此，本文选用Mathematica对改进的质点法机器证明算法进行重新实现，创建了新的几何定理证明器CMPP（Complex Mass Point method Prover）．对上百个几何定理的运行结果表明，CMPP的解题能力与运行效率均令人满意．尤其是对于五圆定理、莫莱定理、布洛卡圆定理等一些大难度的几何定理，CMPP均能够在短时间内实现可读机器证明．

本文第二节介绍质点法的基本原理和机器证明算法；第三节介绍质点法机器证明算法的新实现和新证明器中的函数命令；第四节介绍CMPP在近世几何定理机器证明中的应用，并以布洛卡圆定理为例，详细说明质点法机器证明的运行过程；最后对全文进行总结．

2 质点法

对于平面上的点，我们用大写字母 $A, B, C\ldots$ 来表示；实数用小写字母 $a, b, c\ldots$ 表示；向量用 $\overrightarrow{AB}$（或 $B-A$）表示；ΔABC 的“有向”面积用 $S_{\Delta ABC}$ 表示．

2.1 质点法的基本原理

定义 1 对于直线 $AB(A\neq B)$ 上的任意一点 C，不妨设 $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}=u$．$D$ 是过点 C 且与 AB 垂直的直线上一点，满足 $|CD|=|AB|$，且 $A-B-D$ 呈逆时针方向（如图 1 所示）．X 是 CD 上任意一点，不妨设 $\dfrac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{CD}}=v$，则记 $X=(1-u-vi)A+(u+vi)B$．

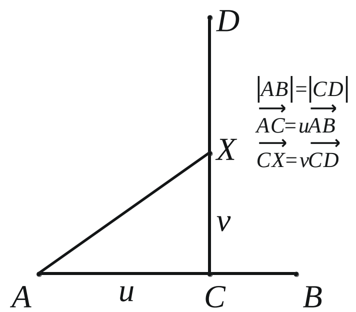

图 1 定义 1 示意图

图 1 是定义 1 中 $0<u<1, v>0$ 的情形，当 $v<0$ 时，X 应在 AB 的下方．

我们称形如 $X=(1-u-vi)A+(u+vi)B$ 的复系数和为 1 的质点关系式为**规范组合式**．

性质 1 设 $C=(1-u-vi)A+(u+vi)B$，则有

(1) 设 $CX \perp AB$，垂足为 X，则 $X=(1-u)A+uB$，且 $|CX|=|v||AB|$. 若 $v<0$，则 $A-B-C$ 成顺时针方向；若 $v>0$，则 $A-B-C$ 成逆时针方向.

(2) 设点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的任意一点，则有唯一的表示式：

$$P=(1-a-bi)A+(a+bi)B.$$

(3) 若 $v=0$，则 C、A、B 三点共线；若 $v\neq 0$，当 $u=0$ 时，$\angle CAB=90^\circ$；当 $u>0$ 时，$\angle CAB$ 是锐角；当 $u<0$ 时，$\angle CAB$ 是钝角.

定义 2 若 $\theta=\arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$ 为向量 $P-Q$、$B-A$ 所成的夹角，即 $\angle(PQ,AB)=\theta$；且 $|x+yi|$ 为两向量的模之比，即 $\frac{|PQ|}{|AB|}=|x+yi|$. 则称 $P-Q=(x+yi)(B-A)$.

性质 2 设 $P-Q=(x+yi)(M-N)$，则有

(1) 若 $y=0, x\neq 0$，则 $PQ \parallel MN$；

(2) 若 $x=0, y\neq 0$，则 $PQ\perp MN$；

(3) 若 $|x+yi|=t$，则 $|PQ|=t|MN|$. 特别地，当 $t=1$ 时 $|PQ|=|MN|$.

性质 3 若 $P=(1-m-ni)A+(m+ni)B$，$Q=(1-a-bi)A+(a+bi)B$，$PX\perp AB$，$QY\perp AB$，垂足分别为 X、Y，则

(1) $\overrightarrow{PX}:\overrightarrow{QY}=n:b$；

(2) 若 $n\neq b$，则 PQ 与 AB 必交于一点；设 $O=PQ\cap AB$，则 $(n-b)O=nQ-bP$.

性质 4 设 $C=(1-a-bi)A+(a+bi)B$，$P=(1-x-yi)Q+(x+yi)R$，则有

(1) 若 $a=x=0$，则 $\angle CAB=\angle PQR$ 为直角；

(2) 设 $a\neq 0, x\neq 0$. 若 $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{y}{x}\right|$，当 $\frac{a}{x}=\left|\frac{b}{y}\right|$ 时，$\angle CAB=\angle PQR$；当 $-\frac{a}{x}=\left|\frac{b}{y}\right|$ 时，$\angle CAB+\angle PQR=180^\circ$；

(3) 若 $a=x, b=\pm y$，则 $\triangle CAB$ 与 $\triangle PQR$ 相似.

定义 3 设 ΔCAB 与 $\triangle PQR$ 相似. 若 $A-B-C$ 与 $P-Q-R$ 同为顺时针或逆时针方向，则称 $\triangle CAB$ 与 $\triangle PQR$ 正相似；否则，称 $\triangle CAB$ 与 $\triangle PQR$ 逆相似.

性质 5 设 $\triangle PQR$ 与 $\triangle CAB$ 相似，$C=(1-a-bi)A+(a+bi)B$.

(1) 若 $\triangle CAB$ 与 $\triangle PQR$ 正相似，则 $P=(1-a-bi)Q+(a+bi)R$；

(2) 若 $\triangle CAB$ 与 $\triangle PQR$ 逆相似，则 $P=(1-a+bi)Q+(a-bi)R$.

性质 6 设 $P=(1-a-bi)S+(a+bi)R$，$P=(1-x-yi)Q+(x+yi)R$. 若 $a=x=0$ 或 $\frac{b}{a}=\frac{y}{x}$（$a\neq 0$ 且 $x\neq 0$），则 P、Q、R、S 四点共圆.

质点关系式不仅能表示几何点之间的关系，还

可直接表示一些具有特殊性质的直线和圆.

性质 7 设u,v是两个单位复数，对于平面上A,B,C三点，满足$uA+vB=(u+v)C$，则当A,B,v固定，u在单位圆上变化时，点C的轨迹为AB的中垂线.

性质 8 设x,v是两个单位复数，对于平面上A,B,C三点，满足$(v+x)C-vA=xB$，则当A,C,v固定，x在单位圆上变化时，点B的轨迹为以C为圆心，CA为半径的圆.

性质 9 设两条直线为：

$$\begin{cases} uA+v_1P_1=(u+v_1)X(AP_1\text{的中垂线}) \\ uA+v_2P_2=(u+v_2)X(AP_2\text{的中垂线}) \end{cases},$$

则其交点可表示为$X=\dfrac{v_1P_1-v_2P_2}{v_1-v_2}$.

性质 10 设三条直线为：

$$\begin{cases} l_1\text{：}uA+v_1P_1=(u+v_1)X(AP_1\text{的中垂线}) \\ l_2\text{：}uA+v_2P_2=(u+v_2)X(AP_2\text{的中垂线}), \\ l_3\text{：}uA+v_3P_3=(u+v_3)X(AP_3\text{的中垂线}) \end{cases}$$

则直线l_1、l_2、l_3所围成三角形的外心为

$$O=\sum_{i=1}^{3}\frac{P_i\cdot v_i^2}{(v_i-v_{i+1})(v_i-v_{i+2})}.$$

注：为保证与性质 7 统一，性质 9、性质 10 中的u,v_1,v_2,v_3为单位复数．且为计算方便不妨取$v_i=\dfrac{\overline{P_i}}{P_i}(i=1,2,3)$，其中$A$为作图过程中引入的第一个点.

上述性质 7~性质 10 使得改进后的质点法能以更高的效率处理关联多个圆的构造型几何命题.

2.2 质点法机器证明算法

一般来说，用质点法解题需要以下三个步骤：

（1）构图：用构造性的方式描述几何定理，它的构图通常由多个构图语句组成；

（2）转化：根据节 2.1 中的基本原理，将上述构图语句转化为特定的质点关系表达式；再按照构图顺序依次进行质点关系式间的运算，从而逐步得到新的质点关系表达式，一直到题目所需的所有构图语句被成功地表达出来；

（3）验证：输入验证语句或检验函数（详见本文节 3.2），检查题目所要证明（或求解）的结论是否已包含在刚刚得到的质点关系式中．若在，输出结果；否则，由已得到的关系式继续进行推导，直至搜索到所需结果.

通常情况下，用质点法进行证明时，初始的作图语句都会先引入两个基点（设为A、B）．由节 2.1 的性质 1 知，每一条构图语句所引入的新的点X都可以表示为基点A、B的“规范组合”．不妨设$X=(1-a-bi)A+(a+bi)B$，由“规范组合”表示的唯一性知，X可与二维数组$(1-a-bi,a+bi)$一一对应．又由于A、B两点所对应的数组可分别记作$(1,0)$、$(0,1)$．因此，一个几何命题所涉及到的全部的点都能找到与之相应的数组.

在质点法机器证明算法中，通常用三个全局变量$pnts$、$varlist$和$coordlist$（分别代表“点的个数”、“点表”和“数组表”）来记录上述机器证明过程中的每一步结果.

算法 1 质点法机器证明算法

输入：能完整描述一个几何命题的所有构图语句及检验函数.

输出：构图语句产生的质点关系式及所求结论是否成立的检验结果.

Step1. 置$pnts=0$，$varlist$为空表，$coordlist$为空表；

Step2. 初始构图语句引入两个自由点，不妨设为P_1,P_2，则$pnts=2$，$varlist=\{P_1,P_2\}$，$coordlist=\{(1,0),(0,1)\}$；

Step3. 此后，每引入一个新点，$pnts\to pnts+1$；

并把新的点和它所对应的数组分别储存到表 $varlist$ 和 $coordlist$ 的第 $pnts+1$ 的位置上；同时输出相关的质点表达式或几何关系信息．

Step4. 考虑结论中所涉及到的质点，搜索它们在点表 $varlist$ 中的位置，将其记录下来．再调用数组表 $coordlist$ 中相应位置的数组，进行相关的计算，验证结论是否成立并输出相应的结果．

下面以验证三点 P,Q,R 是否共线的检验函数为例，详细说明证明器 CMPP 如何在 Step4 中检验结论是否成立．

通过 Step1~Step3，证明器应已求出并记录了三点 P,Q,R 的质点表达式中的相关信息．Step4 在验证 P,Q,R 三点是否共线时将进行如下操作：

（1）分别搜索 P,Q,R 在 $varlist$ 中的相应位置，设位置序号分别为 ai,bi,ci；

（2）在 $coorc$ 中找到对应的数组 $coordlist[ai]$、$coordlist[bi]$ 和 $coordlist[ci]$，不妨设为分别为 t_1,t_2,t_3；

（3）比较 t_1-t_2 和 t_2-t_3，若存在实数 a，使得 $t_2-t_3=a\left(t_1-t_2\right)$，则输出“$P,Q,R$ are collinear!”及对应的质点关系式；否则输出“P,Q,R are not collinear!”．

3 质点法机器证明算法的新实现及相关的函数命令

3.1 质点法机器证明算法的新实现

质点法机器证明过程往往涉及到较复杂的符号计算和列表处理，要快速地实现算法就需要选择合适的工具．原质点法证明器是在 Maple 中实现，在深入测试其解题能力及运行效率时发现，该证明器在处理一些涉及大规模符号计算的几何命题（特别是涉及圆上多个点或多个圆的较复杂的命题以及一些与度量性质相关的几何问题）时，有时并不能在合理的时间内完成机器证明．其主要原因是这些命题往往涉及多元无理式和多元三角函数等复杂代数式的综合处理．

通过详细比较多款当前世界上一些具有强大符号计算能力的数学软件发现，Mathematica 不仅具有相比其他同类软件更胜一筹的符号计算能力，其对多元三角函数和多元无理式等的处理有其独特的优势．例如，直接调用 Mathematica 中的 Simplify 函数，就能将表达式 $\sqrt{1-\sin^2(a-b)}$ 轻松地化简为 $|\cos(a-b)|$，而类似的运算在 Maple 中却不易实现．

因此，本文选用 Mathematica 对改进后的算法进行重新实现，创建了新的几何定理证明器 CMPP（Complex Mass Point method Prover）．经测试后发现，新证明器 CMPP 证明几何定理的运行效率有明显的提高．

由于在新质点法中添加了一些能更准确地描述“直线与圆相交、直线与圆相切、圆与圆相交、圆与圆相切”等构图情况的作图函数，CMPP 还能证明许多非线性构造型几何命题，因而解题能力得到了明显增强．

3.2 新质点法证明器中的函数命令

质点法证明器中的函数命令主要分两种类型——构图语句 C^* 和检验函数 E^*．当这些编译好的函数命令被加载后，只需在 Mathematica 中直接输入一个几何命题的构图语句及检验函数并运行，就能得到该命题的质点法证明．

在 CMPP 中，常用的构图语句有：

C1 $Points(A,B)$：在平面上任取两点 A,B．

C2 $Point1(X,A,B,a,b)$：已经选取了 A,B，作一点 X 满足 $X=(1-a-bi)A+(a+b)i$，这里的 a,b 可以是特定的数、独立的变量或有理表达式．

C3 $Midpoint(X,A,B)$：作 AB 的中点 X．

C4 $Foot(X,C,A,B)$：过 C 作 AB 的垂足 X．

C5 $Inter(X,U,V,A,B)$：作直线 UV 与直线 AB 的交点 X .

C6 $Parallel(X,A,B,C)$：作点 X ，使得四边形 $ABCX$ 为平行四边形.

C7 $Centroid(X,A,B,C)$：作△ABC 的重心 X .

C8 $Circumcenter(X,A,B,C)$：作△ABC 的外心 X .

C9 $Orthocenter(X,A,B,C)$：作△ABC 的垂心 X .

C10 $Incenter(X,B,C,I)$：已知△XBC 的内心 I 和顶点 B、C ，作第三个顶点 X .

C11 $CCinter(X,P,O_1,O_2)$：作过点 P 且分别以 O_1、O_2 为圆心的两圆的另一个交点 X .

C12 $Similartrianglepoint1(X,P,Q,A,B,C)$：作点 X ，使得△XPQ 与△ABC 逆相似.

C13 $LLinter(X,P_i,P_j)$：作 AP_i 的中垂线与 AP_j 的中垂线的交点 X ，其中 A 为初始构图语句引入的第一个点.

C14 $Cir(X,P_i,P_j,P_k)$：作以 AP_i 的中垂线、AP_j 的中垂线及 AP_k 的中垂线所围成的三角形的外心 X ，其中 A 为初始构图语句引入的第一个点.

C15 $Tangentpoint(X,T,O,A)$：过 T 作⊙O 的切线与⊙O 的一个切点 X ，其中⊙O 是以 O 为圆心过点 A 的圆，T 是⊙O 外一点.

C16 $LCinter(X,P,Q,O,A)$：作直线 PQ 与⊙(O,A) 的一个交点 X .

C17 $CCinter2(X,O_1,P_1,O_2,P_2)$：作⊙$(O_1, P_1)$ 与⊙(O_2, P_2) 的一个交点 X .

C18 $ASApoint(X,A,B,\alpha,\beta)$：作点 X ，满足 $\angle XAB=\alpha, \angle XBA=\beta$.

C19 $Brocardpoint(X,A,B,C)$：作△ABC 的正布洛卡点 X .

C20 $Conjugatepoint(X,A,B,C,P)$：作 P 关于△ABC 的等角共轭点 X .

改进后的质点法机器证明算法中特别新增了上述构图语句中 **C13~C20**，而 **C19**、**C20** 是专为证明近世几何中的一些定理准备的，其中：

（1）构图语句 **C19** 用于构造 ΔABC 的正布洛卡点，其相当于以下九个构图语句相继作用的结果：

$Point1(P,B,C,0,1)$、

$Point1\left(Q,B,A,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$、

$Midpoint(F,A,B)$、

$Inter(O_1,B,P,F,Q)$、

$Point1(R,A,B,0,1)$、

$Point1\left(S,A,C,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$、

$Midpoint(E,A,C)$、

$Inter(O_2,A,R,E,S)$、

$CCinter(X,A,O_1,O_2)$.

但按这种方式，构图过程需要多引入八个点 P,Q,R,S,E,F,O_1,O_2；

（2）构图语句 **C20** 用于构造点 P 关于△ABC

的等角共轭点 X，其相当于以下三个构图语句相继作用的结果：

$Similartrianglepoint1(M,A,C,P,A,B)$、

$Similartrianglepoint1(N,B,C,P,B,A)$、

$Inter(X,A,M,B,N)$.

但按这种方式，构图过程需要多引入两个点 M、N.

在 CMPP 中，常用的检验函数有：

E1　$Ifequal(P,Q)$：检验点 P 与点 Q 是否重合.

E2　$Ifcollinear(P,Q,R)$：检验点 P,Q,R 是否共线.

E3　$Ifconcyclic(P,Q,R,S)$：检验 P,Q,R,S 是否共圆.

E4　$Ifsimilartriangle(P,Q,R,A,B,C)$：检验□$PQR$ 与□ABC 是否相似.

E5　$Ifcongruenttriangle(P,Q,R,A,B,C)$：检验□$PQR$ 与□ABC 是否全等.

E6　$Ifcctangent(O_1,P,O_2,Q)$：检验⊙（O_1，P）与⊙（O_2，Q）是否相切.

E7　$Relation3(P,Q,R)$：求 P、Q、R 三点所满足的质点关系式，即求出 a、b 并把 P 表示为 Q、R 的规范组合：$P=(1-a-bi)Q+(a+bi)R$，可以根据 a、b 的值来判断 P、Q、R 间的几何关系.

E8　$Relation4(P,Q,M,N)$：求出 P、Q、M、N 四点所满足的质点关系式，即求出 $x+yi$ 使得 $P-Q=(x+yi)(M-N)$，根据 x、y 的值判断两向量 $P-Q$ 和 $M-N$ 的几何关系并求出 $t=|x+yi|$

4 新质点法证明器的应用

近世几何又称近代欧氏几何，主要研究“三角形的五心、几何变换、等角共轭、等距共轭、布洛卡点、布洛卡圆、斯俾克圆、泰勒圆”等与圆和三角有关的内容．它包含了大量而优美的几何定理，但由于构造辅助元素的多样性和不可预见性，许多大难度的近世几何定理的优美证明往往凝聚着几代数学家辛苦研究的结晶．随着质点法研究的不断深入，笔者尝试用质点法来证明一些大难度的近世几何定理，希望从另一个角度来呈现质点法强大的解题能力.

下以布洛卡圆定理为例说明如何用质点法证明器 CMPP 证明几何定理.

例（布洛卡圆定理）设ΔABC 的正、负布洛卡点分别为 U、V，外心为 O，共轭重心为 K，证明：（1）$OU=OV$；（2）$\Delta OUK\cong\Delta OVK$；（3）$O,U,K,V$ 四点共圆，该圆称为布洛卡圆．[9]

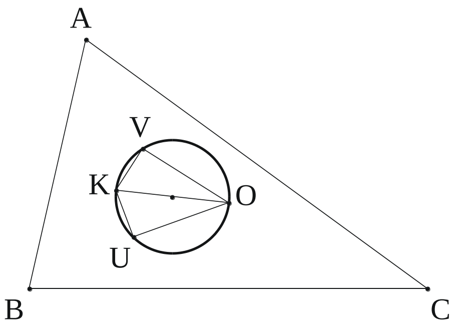

图 2 布洛卡圆定理

布洛卡圆定理涉及“等角共轭点、陪位重心、布洛卡点、布洛卡圆”等近世几何研究内容，其构图过程比较复杂，用以前的质点法或其他的代数方法来证明它往往需要大量的符号计算，一般的证明器不容易实现它的机器证明．而改进的质点法针对近世几何内容特别添加了一些新的构图函数．新证明器 CMPP 能在短时间内实现它的可读机器证明.

在加载了新证明器程序的 Mathematica 环境中，直接输入如下函数命令并运行，即可得到相应的质点法机器证明过程：

$Points[A,B]$;

$Point1[C,A,B,u,v]$；

$Centroid[G,A,B,C]$；

$Circumcenter[O,A,B,C]$

$Brocardpoint[U,A,B,C]$；

$Conjugatepoint[K,G,A,B,C]$

$Conjugatepoint[V,U,A,B,C]$；

$Relation4[O,U,O,V]$；

$Ifcongruenttriangle[O,U,K,O,V,K]$；

$Ifconcyclic[K,U,O,V]$.

在输入函数命令之前，证明器中的三个全局变量处于初始状态，即 $pnts=0$，$varlist$ 为空表，$coordlist$ 为空表．初始构图语句引入两个自由点 A,B 之后，三个全局变量相应地变为 $pnts=2$，$varlist=\{A,B\}$，$coordlist=\{(1,0),(0,1)\}$；然后用构图语句 **C2** 构造另一个自由点 C，再用构图语句 **C7**、**C8** 和 **C19** 分别构造 ΔABC 的重心 G、外心 O 和正布洛卡点 U；最后用构图语句 **C20** 构造 ΔABC 的共轭重心 K 和负布洛卡点 V．上述过程中，每引入一个新点，证明器将 $pnts$ 变为 $pnts+1$，同时把这个新的点及该点所对应的数组分别存储到点表 $varlist$ 和数组表 $coordlist$ 的第 $pnts+1$ 的位置上，并输出相关的质点关系表达式．

对于同一题设下有多个结论的几何命题，在质点法证明器CMPP中能直接调用多个检验函数一起验证．上述检验函数中，用 $Relation4[O,U,O,V]$ 求出 O、U、O、V 所满足的质点关系式并判断题目要证的第一个结论 $OU=OV$ 是否成立；用函数 $Ifcongruenttriangle[O,U,K,O,V]$ 来判定两三角形是否全等；用 $Ifconcyclic[K,U,O,V]$ 来验证四点 O,U,K,V 是否共圆．在验证过程中，CMPP 先搜索每一个检验函数中所涉及到的全部的点在表 $varlist$ 中的位置，后调用表 $coordlist$ 中相应的数组进行质点关系运算，最后判断结论是否成立并输出结果．

对于输出的结果，我们既可让证明器产生非常简短的证明过程，也可以根据需要得到证明过程中所有推导的详细过程．限于篇幅，下面给出证明器自动生成的一个简化的证明过程：

The two basic points are：A,B.

$C==(1-u-iv)*A+(u+iv)*B$

G is the centriod of triangle ABC.

$3*G==A+B+C$

O is the circumcenter of triangle ABC.

$$O==\frac{(1-u-iv)(iu+v)}{2v}*A+\frac{(1-u+iv)(-iu+v)}{2v}*B$$

U is the brocardpoint of triangle ABC.

K,G are conjugatepoints about triangle ABC.

V,U are conjugatepoints about triangle ABC.

$$O-V==\frac{(O-U)(1-u+u^2-iv+v^2)}{1-u+u^2+iv+v^2}$$

$OV==1*OU$

$\Delta OVK\cong\Delta OUK$

$$K==\frac{1-u+u^2+iv+v^2}{2(1-u+u^2+v^2)}*V+\frac{1-u+u^2-iv+v^2}{2(1-u+u^2+v^2)}*U$$

$$K==\frac{iv}{1-u+u^2+v^2}*O+\frac{1-u+u^2-iv+v^2}{1-u+u^2+v^2}*U$$

$\angle KVU==\angle KOU, K,U,O,V$ *are concyclic*!

此外，我们还用证明器CMPP分别对开世定理、五圆定理、莫莱定理、莱莫恩圆定理等一些大难度几何定理进行了验证，并将在 ***Lenovo G450***（*Intel 酷睿 2 双核 P7450，2GB*）计算机上运行这五个定理的时间统计如下：

表 1 CMPP 证明五个大难度几何定理的运行时间

定理	开世定理	五圆定理	莫莱定理	布洛卡圆	莱莫恩圆
时间（秒）	0.141	337.063	0.016	0.157	0.156

值得一提的是，原质点法证明器在证明“五圆定理”时，只能证明蕴含结果的中间结论，而无法

在合理的时间内直接验证结论是否成立（即五点是否共圆）．用不变量方法（如面积法）或代数方法（如吴法等）来证明五圆定理理论上是可行的，但由于机器能力的限制，目前尚未见到在机器上实现的报道．而新改进的质点法证明器可在合理时间内实现五圆定理的可读机器证明，这表明了 CMPP 在处理与圆有关的几何命题时有其独特的优势．

5 结语

本文改进了原有的质点法机器证明算法，并利用 Mathematica 创建了新的证明器 CMPP，拓展了质点法的解题能力．CMPP 能轻松地处理近世几何中涉及逆平行线、等角共轭、反演、陪位重心、布洛卡点、布洛卡圆、泰勒圆等内容的几何命题．对一些大难度的近世几何定理如开世定理、莫莱定理、布洛卡圆定理、莱莫恩圆定理等的运行结果表明，新证明器 CMPP 的解题能力与运行效率均令人满意．

质点法是以几何点（而非坐标点或不变量）的计算为基础而建立起来的一种几何定理机器证明方法．由于质点法研究的是更基本的几何对象——几何点之间的相互关系，一些蕴含在向量、有向面积等几何量以及隐藏在三角形、四边形或完全四边形等基本几何图形中的特殊性质有机会被更深层次地揭示出来，这些特殊的性质有可能为几何定理可读机器证明的研究增添新的色彩．特别地，结合质点的性质能表现向量、有向面积等几何量的性质，且质点间数量关系还可用几何意义明确的复数形式或三角形式灵活表示，这为发展、扩展或融合其他已有的可读证明方法提供了一个新的工具．这将是我们下一步的工作．

参 考 文 献

[1] Chou S C. Automated reasoning in geometries using the characteristic set method and Gröbner basis method. In: Proc. of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '90). ACM, New York, NY, USA, 1990:255-260

[2] Yang L, Zhang J Z, Li C Z. A prover for parallel numerical verification of a class of constructive geometry theorems. In: Proc. of International Workshop on Mathematics Mechanization. Inter. Academic Publishers, Beijing, 1992: 244-255

[3] Chou S C, Gao X S, Zhang J Z. Automated production of traditional proofs for constructive geometry theorems. In: Proc. of 8th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, IEEE Computer Society Press, Montreal, Canada, 1993: 48-56

[4] Pedro Quaresma. Thousands of geometric problems for geometric theorem provers (TGTP). In: Proc. of the 8th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG 2010). LNAI 6877, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 2011:169-181

[5] Zhang J Z, Gao X S, Chou S C. The geometry information search system by forward reasoning．Chinese journal of computers，1996, 19(10): 721-727（in Chinese）
（张景中，高小山，周咸青．基于前推法的几何信息搜索系统．计算机学报, 1996, 19(10):721-727）

[6] Chou S C, Gao X S, Zhang J Z. A deductive database approach to automated geometry theorem proving and discovering. J. Automated Reasoning. 2000, 25(3), 219-246

[7] Zou Y, Zhang J Z. Automated generation of readable proofs for constructive geometry statements with the mass point method. In: Proc. of the 8th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG 2010). LNAI 6877, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 2011：221-258

[8] Zou Y. The basis of geometric algebra and readable machine proof for mass point geometry. PhD thesis, Guangzhou, Guangzhou university, 2010 （in Chinese）
（邹宇．几何代数基础与质点几何的可读机器证明．博士学位论文，广州：广州大学，2010）

[9] Roger A. Johnson. Advanced Euclidean Geometry. New York: Dover Publication, 1960

LI Tao, born in 1985, Ph.D, lecturer. His main research interests include automated reasoning in geometry, competitive mathematics.

ZOU Yu, born in 1982, Ph.D, lecturer. He mainly reseaches on automated reasoning in geometry.

ZHANG Jing-zhong, born in 1936, Chinese academy of sciences. He mainly researches on automated reasoning, power system and so on.

Background

The subject of this paper belongs to the research of *Automated Theorem Proving in Geometry*. In the past over thirty years，the research and practice for automated theorem proving in geometry has been considerably developed. For statements in unordered geometry, the algebraic methods (such as the characteristic set method, also known as Wu's method, the elimination method, the Gröbner basis method, the Clifford algebra approach and the numerical methods) can effectively judge “True or False”, while the area method and the search methods can moreover generate readable proofs. After the area method, some other methods to produce readable machine proofs have been proposed, such as the vector method, the full-angle method, the deductive database method, the geometric algebra method and the advanced invariants method. There are a few implementations for these methods, and researches in these directions are going on in depth. The existing readable machine proving methods deal with geometry problems using some geometric quantities. Recently, Zou and Zhang proposed a new readable machine proving method—the mass point method which directly deals with the *geometric points* rather than the geometric quantities. The main idea of the mass point method is to express the hypotheses of a theorem using two or three starting points and a set of constructions each of them introducing a new point (similar to the area method), and to check whether or not the geometric points (rather than the geometric quantities) appearing in the conclusion satisfy a certain relationship (different from the area method). Based on the mass point method, the complex mass point method was also developed. Since the mass point method mainly discusses the relationship of *geometric points*, some particular characteristics which implied in some geometry qualities (such as vectors or directed area of triangles) or some basic geometry figures (such as complete quadrilaterals) might be also revealed, which can help us to develop new methods, in order to improve or to combine the existing readable machine proving methods. The complex mass point method can prove most constructive geometry theorems efficiently, but so far it couldn’t deal with nonlinear constructive geometry theorems. In this paper we make improvements to the original algorithm of the complex mass point method, and implement the improved algorithm again in software *Mathematica* to be a new prover CMPP (Complex Mass Point method Prover). CMPP can effectively deal with nonlinear constructive geometry theorems and many non-constructive geometry theorems;

moreover, CMPP runs more efficiently. The work of this paper is the beginning part of our new project *"Researches on new algorithms for readable machine proving in geometry based on the mass point method"*.