Self-evident automated geometric theorem proving based on complex number identity （test case）

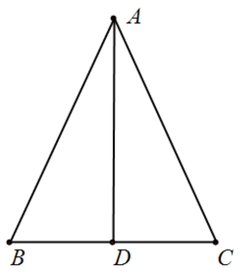
**复数恒等式几何定理机器明证（部分测试案例）**

**加法恒等式**

例1：如图1, 在△*ABC*中, *AD*是∠*BAC*的平分线, *AD*是*BC*边上的中线, 求证:△*ABC*是等腰三角形.

证明：$\dfrac{\dfrac{C-B}{C-A}}{\dfrac{B-A}{B-C}}+4\dfrac{\dfrac{A-\dfrac{B+C}{2}}{A-B}}{\dfrac{A-C}{A-\dfrac{B+C}{2}}}=4$。

例2：如图1, △*ABC*中，*D*是*BC*中点，∠*ABC*=∠*ACB*，求证：*AD*⊥*BC*。




证明：$\left(\dfrac{A-\dfrac{B+C}{2}}{B-C}\right)^2+\dfrac{\dfrac{B-A}{B-C}}{\dfrac{C-B}{C-A}}=\dfrac{1}{4}$,

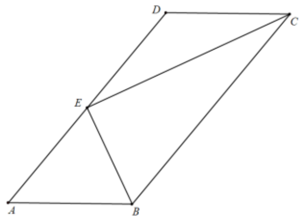
$$\left|\left(\dfrac{A-\dfrac{B+C}{2}}{B-C}\right)^2+\dfrac{\dfrac{B-A}{B-C}}{\dfrac{C-B}{C-A}}\right|=\dfrac{1}{4}\geq\left|\left(\dfrac{A-\dfrac{B+C}{2}}{B-C}\right)^2-\dfrac{\dfrac{B-A}{B-C}}{\dfrac{C-B}{C-A}}\right|\geq\left|\dfrac{\dfrac{B-A}{B-C}}{\dfrac{C-B}{C-A}}\right|-\left|\left(\dfrac{A-\dfrac{B+C}{2}}{B-C}\right)^2\right|,$$

$\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{AB\cdot AC}{BC^2}-\dfrac{AD^2}{BC^2}$，即 $BD^2+AD^2\geq AB\cdot AC$，当且仅当*AB*=*AC*时等号成立。

新命题：△*ABC*中，*D*是*BC*中点，求证：$BD^2+AD^2\geq AB\cdot AC$，当且仅当*AB*=*AC*时等号成立。

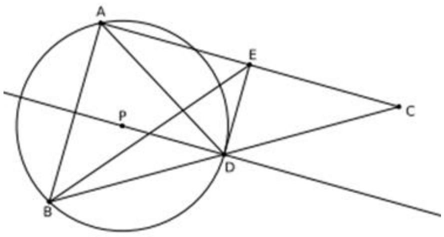
**例3：如图1,** 在△*ABC*中,*D*是*BC*上一点，求证：*AD*⊥*BC*，∠*CAD*=∠*BAD*，∠*ABC*=∠*ACB*，这三个条件中，任意知道两个，可得第三个。

$$\frac{\frac{C-B}{C-A}\frac{A-C}{A-D}}{\frac{B-A}{B-C}\frac{A-D}{A-B}}\left(\frac{A-D}{B-C}\right)^2=-1,$$




**例4：如图1,** 平行四边形*ABCD*中, *E*为*AD*的中点，若*CE*平分∠*BCD*, 则*EB*平分∠*ABC*。

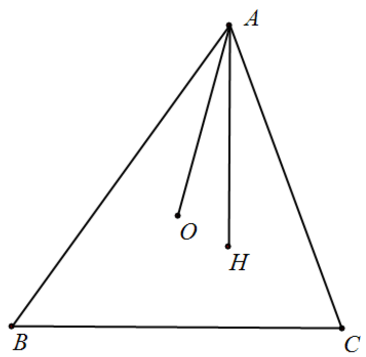
证明：$$\frac{\dfrac{B-\frac{A+C-B+A}{2}}{\frac{B-C}{B-A}}}{B-\frac{A+C-B+A}{2}}+\frac{\dfrac{C-\frac{A+C-B+A}{2}}{\frac{B-A}{C-B}}}{C-\frac{A+C-B+A}{2}}=2$$




**例5：如图1,** △*ABC*中，*D*是*BC*中点，*DE*是∠*ADC*的角平分线，同时是△*ABD*外接圆的切线，求证：∠*BAC*=90°。

证明：设$D=0$，$$\frac{\frac{A}{A-B}}{\frac{B-A}{B}}=\frac{\frac{E}{-B}}{\frac{A}{E}}\left(\frac{\frac{A}{E}}{\frac{B-A}{B-0}}\right)^2,$$

说明：∠*BAC*=90°与*DA*=*DB*等价。




**例 6：如图 10，**$\triangle ABC$ 中，$O$、$H$ 分别是外心和垂心，求证：$\angle BAO=\angle CAH$。若$\angle B<\angle C$，则 $\angle ACB=\angle ABC+\angle HAO$。

$$\left(\frac{\frac{B-A}{B-C}\frac{A-H}{A-O}}{\frac{C-B}{C-A}}\right)^2=-\left(\frac{A-H}{B-C}\right)^2\frac{\frac{B-A}{B-O}}{\frac{A-O}{A-B}}\frac{\frac{A-C}{A-O}}{\frac{C-O}{C-A}}\frac{\frac{B-O}{B-C}}{\frac{C-B}{C-O}},$$

$$\left(\frac{\frac{A-C}{A-H}}{\frac{A-O}{A-B}}\right)^2=-\left(\frac{B-C}{A-H}\right)^2\frac{\frac{B-A}{B-O}}{\frac{A-O}{A-B}}\frac{\frac{A-C}{A-O}}{\frac{C-O}{C-A}}\frac{\frac{B-O}{B-C}}{\frac{C-B}{C-O}},$$

出题，利用已知条件组合

另证：设 $O=0$，$H=A+B+C$，$\dfrac{\frac{A-0}{A-B}}{\frac{A-C}{A-(A+B+C)}}=T$，$\dfrac{\frac{A-0}{A-B}}{\frac{B-A}{B-0}}=T_1$，$\dfrac{\frac{C-B}{C-0}}{\frac{B-0}{B-C}}=T_2$，

$\dfrac{\frac{C-0}{C-A}}{\frac{A-C}{A-0}}=T_3$，则 $T=T_1+T_3-T_1T_2T_3$，线段关系 $AB^2+AC^2=BC^2+AB\cdot AC\cdot\dfrac{AH}{AO}$。

说明：如果就题解题，此题并不困难，$\angle CAH=90^\circ-\angle C=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle AOB=\angle BAO$。而在建立恒等式 $T=t_1+t_3-\dfrac{t_1t_3}{t_2}$ 之后，易得线段关系式 $AB^2+AC^2=BC^2+AB\cdot AC\cdot\dfrac{AH}{AO}$，

联系余弦定理 $AB^2+AC^2=BC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$，可得 $AH=2R\cos A$。

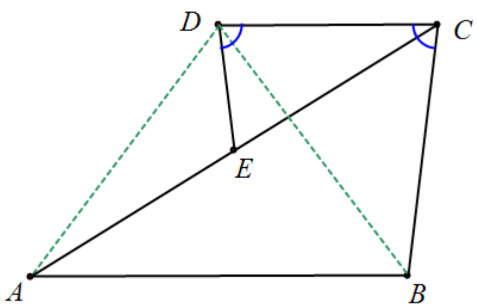
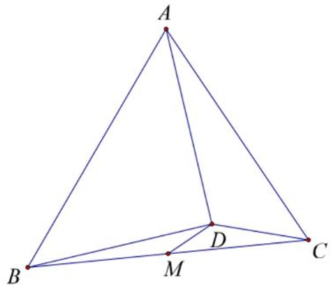


图 11

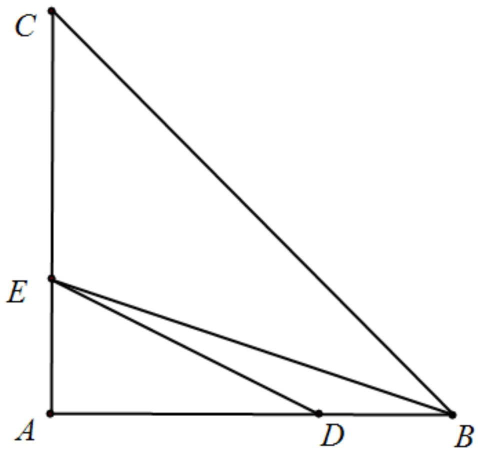
**例 7：如图 11，** 梯形 $ABCD$，$AB // DC$，$AC$ 中点为 $O$，求证：$DA = DB \Leftrightarrow \angle ODC = \angle BCD$。

证明：设 $D = t(A-B)+C$，$\dfrac{\dfrac{A-D}{A-B}}{\dfrac{B-A}{B-D}} = T$，$\dfrac{\dfrac{C-B}{C-D}}{\dfrac{D-C}{D-\frac{A+C}{2}}} = T_1$，$T = t(1-t+2tT_1)$。

**例8：如图1，** 已知$D$是$\triangle ABC$内一点，$\angle DAC=\angle BDM$, $M$是$BC$中点，$\angle ABD=\angle ACD$, 求证$\angle ADB=90°$。



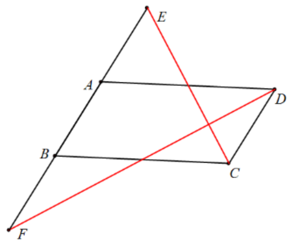

证明：设 $\left(\dfrac{D-A}{D-B}\right)^2 = T$，$\dfrac{\dfrac{D-\frac{B+C}{2}}{D-B}}{\dfrac{A-C}{A-D}} = T_1$，$\dfrac{\dfrac{B-A}{B-D}}{\dfrac{C-D}{C-A}} = T_2$，$T+T_2-2T_1T_2-1=0$，



**例 9：如图 1，**△*ABC* 中，在 *AB*、*AC* 上取 $BD=AE=\dfrac{AB}{3}$，求证：*AB*=*AC*、*AB*⊥*AC*、∠*ADE*=∠*EBC*，这三个条件中，任意知道两个成立，可得第三个也成立。

证明：设 $\dfrac{\dfrac{B-\dfrac{2A+C}{3}}{B-C}}{\dfrac{B-A}{\dfrac{A+2B}{3}-\dfrac{2A+C}{3}}}=t_1$，$\dfrac{\dfrac{C-B}{C-A}}{\dfrac{B-A}{B-C}}=t_2$，$\left(\dfrac{A-C}{A-B}\right)^2=t_3$，$1-6t_2+9t_1t_2-t_3=0$。

**例 10：如图 1，**在平行四边形 *ABCD* 中，两向延长 *AB* 到 *E*、*F*，使得 *AE*=*AB*=*BF*，连 *CE* 和 *DF*，求证：*AD*=2*AB*⇔*EC*⊥*FD*.




图

**证明** 设 $A=0$，$4\dfrac{\dfrac{F-0}{F-D}}{\dfrac{D-F}{D-0}}+\left[\dfrac{-\dfrac{F}{2}-\left(\dfrac{F}{2}+D\right)}{D-F}\right]^2=1$，$\dfrac{-4DF}{(D-F)^2}+\dfrac{(D+F)^2}{(D-F)^2}=1$，

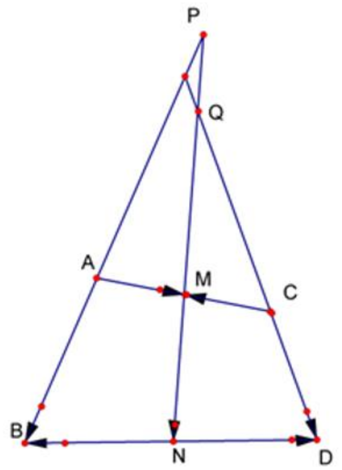
$(D-F)^2+4DF=(D+F)^2$。

**证明** 设 $A=0$，$(-B-(B+D))(2B-D)+(4B^2-D^2)=0$.

转换成通用向量的写法：$(-\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}))\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=-(4\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2)$.

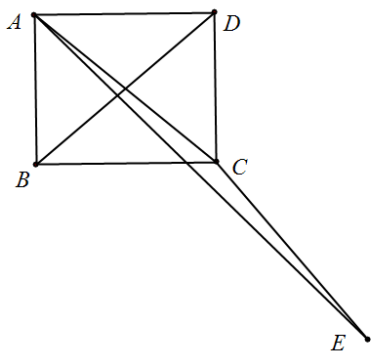
$4\dfrac{\dfrac{2B-0}{2B-D}}{\dfrac{D-2B}{D-0}}+\left(\dfrac{B+D+B}{2B-D}\right)^2=1$，$\dfrac{-8BD}{(2B-D)^2}+\dfrac{(2B+D)^2}{(2B-D)^2}=1$，

**例11：如图1，**线段*AB*=*CD*, *M*和*N*分别是线段*AC*和*BD*的中点。直线*MN*分别交*AB*于*P*, *CD*于*Q*。求证: ∠*APM*=∠*COM*



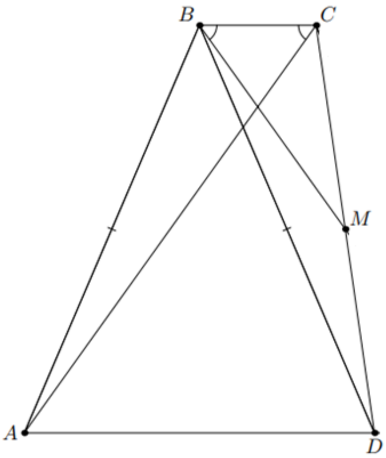

$$\frac{\dfrac{(A+D-C)-B}{(A+D-C)-A}}{\dfrac{B-A}{B-(A+D-C)}}+4\frac{\dfrac{\dfrac{A+C}{2}-\dfrac{B+D}{2}}{C-D}}{\dfrac{A-B}{\dfrac{A+C}{2}-\dfrac{B+D}{2}}}=4,$$

**例 12：如图 1，**四边形 $ABCD$ 是矩形, $CE\perp BD$，$AE$ 是$\angle BAD$ 的平分线, 求证:$CE=BD$.




证明：设 $\frac{\dfrac{A-C}{A-E}}{\dfrac{E-A}{E-C}}=T$，$\frac{\dfrac{B-C}{A-E}}{\dfrac{A-E}{A-B}}=t_1$，$\frac{A+C-B-B}{C-E}=t_2$，$\frac{B-C}{A-B}=t_3$，$T=\frac{t_1\left(1-t_3^{\ 2}\right)}{t_2t_3}$。

$$\frac{\dfrac{A-C}{A-E}}{\dfrac{E-A}{E-C}}=\frac{\dfrac{B-C}{A-E}}{\dfrac{A-E}{A-B}}\frac{\dfrac{A-C}{A-B}}{\dfrac{B-A}{B-(A+C-B)}}\frac{E-C}{A+C-B-B}\frac{B-A}{B-C}。$$

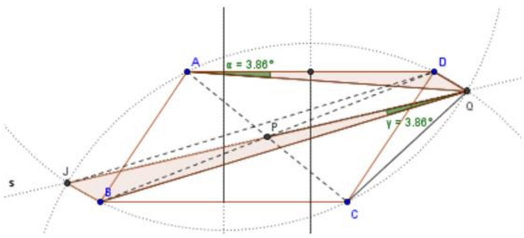


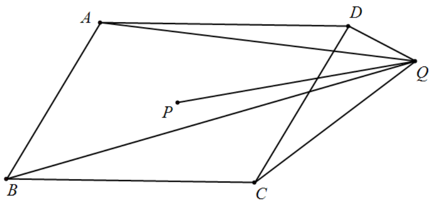

**例 13：如图 1，**四边形 *ABCD*，*BC*∥*AD*，*BA*=*BD*，*M* 是 *CD* 中点，求证∠*CBM*=∠*BCA*。

$\frac{\frac{C-A}{C-B}}{\frac{B-C}{B-\frac{C+D}{2}}}=T$，$\frac{A-D}{B-C}=T_1$，$\frac{\frac{A-B}{A-D}}{\frac{D-A}{D-B}}=T_2$，$2T-T_1-T_1^2T_2-1=0$。

说明：四边形 *ABCD*，*BC*∥*AD*，*M* 是 *CD* 中点，求证 *BA*=*BD* ⇔ ∠*CBM*=∠*BCA*。

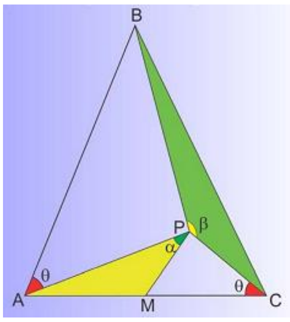
> April wrote:
>
> The diagonals of a trapezoid $ABCD$ intersect at point $P$. Point $Q$ lies between the parallel lines $BC$ and $AD$ such that $\angle AQD = \angle CQB$, and line $CD$ separates points $P$ and $Q$. Prove that $\angle BQP = \angle DAQ$.
>
> Author: unknown author, Ukraine




**例 14：如图 1，梯形** *ABCD* 对角线交于点 *P*，*AD*∥*BC*，点 *Q* 位于 *BC* 和 *AD* 之间，满足∠*AQD*=∠*CQB*，求证：∠*BQP*=∠*DAQ*。

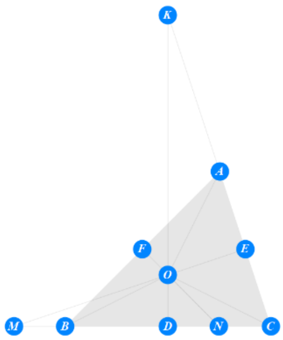
证明：设 $P=0$，$A=tC$，$D=tB$，$\frac{\frac{D-A}{Q-A}}{\frac{Q-B}{Q-P}}=T$，$\frac{\frac{Q-A}{Q-D}}{\frac{Q-C}{Q-B}}=t_1$，$T=\frac{t(1-t_1)}{(1-t)t_1}$。




例 15：如图 1，△*BAC* 中，*BA*=*BC*，*M* 是 *AC* 中点，若点 *P* 满足∠*BAP*=∠*ACP*，则∠*APM* 与∠*BPC* 互补。

证明：设 $M=0$，$\frac{P-0}{P-A}\frac{P-B}{P+A}=T$，$\frac{\frac{A-B}{A-P}}{\frac{-A-0}{-A-P}}=t_1$，$\frac{\frac{B}{-A}}{\frac{A}{B}}=t_2$，$T=-\frac{\left(1-t_1\right)^2+t_2}{4t_1}$。

例 16：如图 1，△*ABC* 平面上有点 *O*，*D*、*E*、*F* 分别是 *BC*、*CA*、*AB* 中点，*EO*、*FO* 交直线 *BC* 于 *M*、*N*，*OD* 交直线 *CA* 于 *K*，若 $\angle OBA=\angle OMB$，$\angle OCA=\angle ONB$，求证 $\angle OKA=\angle OAB$，$\angle ODE=\angle OFE$。




$$\frac{\frac{C}{A-C}}{\frac{B-C}{\frac{A+B}{2}}}+\frac{\frac{A}{B-A}}{\frac{C-A}{\frac{B+C}{2}}}+\frac{\frac{B}{A-B}}{\frac{C-B}{\frac{C+A}{2}}}=-\frac{1}{2}。\quad \frac{\frac{\frac{B+C}{2}-0}{\frac{B+C}{2}-\frac{C+A}{2}}}{\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{C+A}{2}}{\frac{A+B}{2}-0}}-4\frac{\frac{B}{C-B}}{\frac{A-B}{\frac{C+A}{2}}}=1。$$

$$\frac{\frac{OA}{AB}}{\frac{AC}{OD}}+\frac{\frac{OB}{AB}}{\frac{BC}{OE}}+\frac{\frac{OC}{AC}}{\frac{BC}{OF}}=\frac{1}{2}。$$

**Problem 23** (ISL 1998). Let $ABC$ be a triangle such that $\angle ACB=2\angle ABC$. Let $D$ be the point of the segment $BC$ such that $CD=2BD$. The segment $AD$ is extended over the point $D$ to the point $E$ for which $AD=DE$. Prove that $\angle ECD+180°=2\angle EBC$.

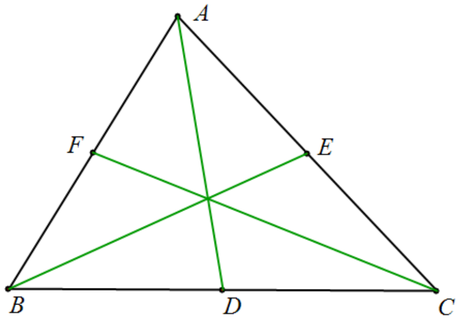
例 17：如图 1，△*ABC* 中，*D* 是 *BC* 边的三等分点，2*BD*=*DC*，延长 *AD* 至 *E*，使得 *AD*=*DE*，

$\angle ACB$=2$\angle ABC$，求证：$\angle ECD+180^\circ=2\angle EBC$。（$ISL$1998）

证明：设 $B=0$，$D=\dfrac{2B+C}{3}$，$E=2D-A$，$\dfrac{\dfrac{C-E}{C-B}}{\left(\dfrac{B-C}{B-E}\right)^2}+\dfrac{\left(\dfrac{B-A}{B-C}\right)^2}{\dfrac{C-B}{C-A}}=\dfrac{4}{27}$。

说明：由恒等式可得 $\angle ECD+180^\circ=2\angle EBC \Leftrightarrow \angle ACB=2\angle ABC$，以及线段关系式 $-CE\cdot BE^2+CA\cdot BA^2=\dfrac{4}{27}BC^3$，注意$180^\circ=2\angle EBC-\angle ECD$，因此$CE\cdot BE^2$前的系数为负。

**例 18：如图 1，**$\triangle ABC$ 中，$D$、$E$、$F$ 分别是 $BC$、$CA$、$AB$ 的中点，求证：$\angle DAC=\angle ABE \Leftrightarrow \angle AFC=\angle ADB$。（1995 年英国数学竞赛第二轮）




$$\frac{\dfrac{B-A}{B-\dfrac{A+C}{2}}}{\dfrac{A-C}{A-\dfrac{B+C}{2}}}\left(\frac{\dfrac{B+C}{2}-B}{\dfrac{B+C}{2}-A}\Big/\frac{\dfrac{A+B}{2}-A}{\dfrac{A+B}{2}-C}+1\right)=2$$

或 $$2\frac{\dfrac{A-C}{A-\dfrac{B+C}{2}}}{\dfrac{B-A}{B-\dfrac{A+C}{2}}}-\frac{\dfrac{C-B}{\dfrac{B+C}{2}-A}}{\dfrac{B-A}{\dfrac{A+B}{2}-C}}=1$$

说明：要建立恒等式，可设 $A$=0 简化式子，$\dfrac{\dfrac{B-A}{B-\dfrac{A+C}{2}}}{\dfrac{A-C}{A-\dfrac{B+C}{2}}}=\dfrac{B(B+C)}{(2B-C)C}$，

$\dfrac{\dfrac{B+C}{2}-B}{\dfrac{B+C}{2}-A}/\dfrac{\dfrac{A+B}{2}-A}{\dfrac{A+B}{2}-C}=-\dfrac{(B-2C)(B-C)}{B(B+C)}$，再利用观察和尝试去发现恒等式。

**例 19：如图 1，**设圆内接凸六边形 $ABCDEF$，$AB=a$，$BC=b'$，$CD=c$，$DE=a'$，$EF=b$，$FA=c'$，$AD=f'$，$BE=g$，$CF=e$，则

$efg=aa'e+bb'f+cc'g+abc+a'b'c'$。

$$(A-B)(C-D)(E-F)+(B-C)(D-E)(A-F)+(A-B)(F-C)(E-D)$$
$$+(B-C)(A-D)(E-F)+(C-D)(B-E)(A-F)=(A-D)(B-E)(C-F)$$

$$\frac{A-B}{A-D}\frac{C-D}{C-F}\frac{E-F}{B-E}+\frac{B-C}{B-E}\frac{D-E}{A-D}\frac{A-F}{C-F}-\frac{A-B}{B-E}\frac{E-D}{A-D}+\frac{B-C}{B-E}\frac{E-F}{C-F}+\frac{C-D}{A-D}\frac{A-F}{C-F}=1$$

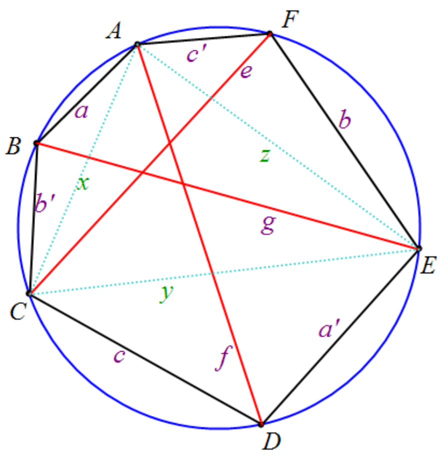



图 2

通常的证法：设 $AC=x$，$CE=y$，$EA=z$，则 $ac+b'f=xBD$，

$a'b'+cg=yBD$，那么 $b(ac+b'f)+c'(a'b'+cg)$

$=bxBD+c'yBD=zeBD=e(fg-aa')$，

于是$efg=aa'e+bb'f+cc'g+abc+a'b'c'$。

观察这个结论，为什么形式上如此优美？原因是最早的发现者取的字母特别巧，譬如设$BC=b'$，而不是设$BC=b$。从这个结论我们还能联想到什么呢？三阶行列式！六项，每一项都是三个数相乘。于是可以这样做：

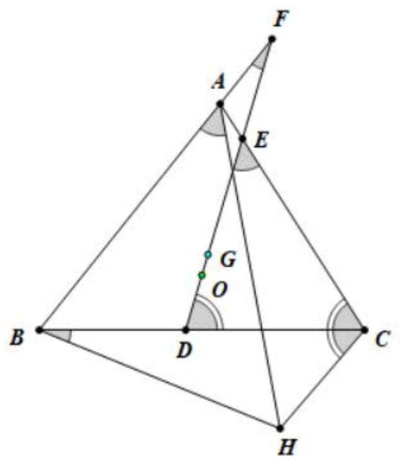
证明：$bx+c'y=ez$，$a'x+cz=fy$，$ay+b'z=gx$，于是$\begin{cases}bx+c'y-ez=0\\a'x-fy+cz=0\\-gx+ay+b'z=0\end{cases}$，

要使方程组有非零解，则$\begin{vmatrix}b & c' & -e\\a' & -f & c\\-g & a & b'\end{vmatrix}=0$，即

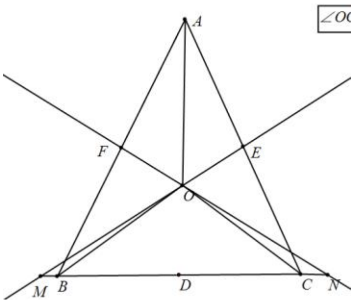
$efg=aa'e+bb'f+cc'g+abc+a'b'c'$。

相对而言，使用行列式证明，所列的三个式子对称性更强，联立成方程组之后，结论显然易见。而原证法先给出两式，再逐步合并，思维过程则显得繁杂些。托勒密定理一般是针对四边形而言，本题性质可看作是托勒密定理的推广。

**例 20：如图 1，**四边形 *ABHC* 中，*O* 是任意点，*G* 是△*ABC* 的重心，*OG* 分别交 *BC*、*CA*、*AB* 三边于 *D*、*E*、*F*，若∠*CBH*=∠*OFB*，∠*BAH*=∠*DEC*，求证：∠*ODC* 与∠*HCA* 互补。

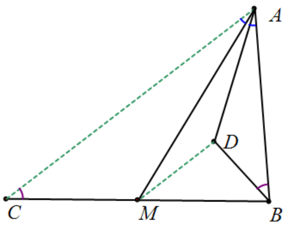



$$\frac{(A-H)\frac{A+B+C}{3}}{(A-B)(C-A)}+\frac{(B-H)\frac{A+B+C}{3}}{(B-C)(A-B)}+\frac{(C-H)\frac{A+B+C}{3}}{(C-A)(B-C)}=0,$$




**例 21：如图 1，**△*ABC* 平面上有点 *O*，*D*、*E*、*F* 分别是 *BC*、*CA*、*AB* 中点，*EO*、*FO* 交 *BC* 于 *M*、*N*，若 $\angle OCA=\angle BNO$， $\angle OBA=\angle CMO$，求证 $\angle BAO=\angle DAC$。

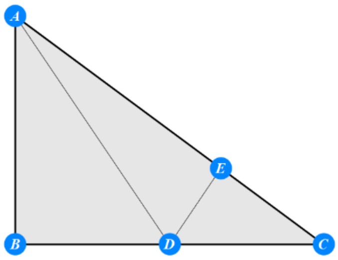
$$\frac{c(\frac{a+b}{2})}{(a-c)(b-c)}+\frac{a(\frac{b+c}{2})}{(b-a)(c-a)}+\frac{b(\frac{c+a}{2})}{(c-b)(a-b)}=-\frac{1}{2}$$




**例 22：如图 1，**△*ABC* 中有点 *D*，*M* 是 *BC* 中点，∠*CAM*=∠*DAB*，∠*ACB*=∠*DBA*，求证：*DM*//*AC*。

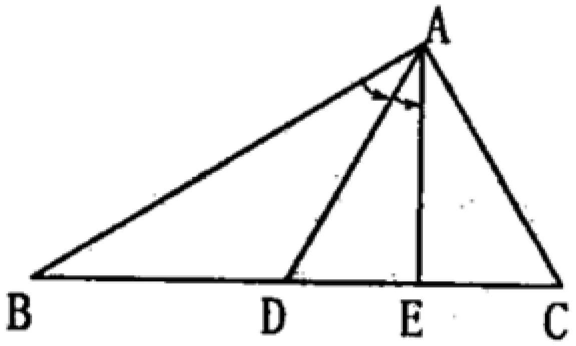
证明：$2\frac{\frac{B+C}{2}-D}{C-A}+\frac{\frac{B-D}{B-A}}{\frac{C-A}{C-B}}+2\frac{\frac{A-\frac{B+C}{2}}{A-C}}{\frac{A-B}{A-D}}=2$。

**例 23：如图 1，**△*ABC* 中，*D* 是 *BC* 中点，*E* 是 *AC* 三等分点，∠*B*=90°，求证：∠*BDA*=∠*EDC*。

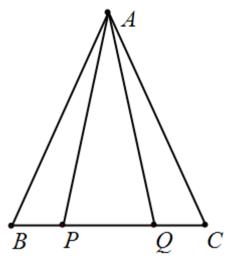


证明：设 $B=0$，$3\frac{\frac{\frac{C}{2}-\frac{2C+A}{3}}{\frac{C}{2}-C}}{\frac{\frac{C}{2}-0}{\frac{C}{2}-A}}+4\frac{A^2}{C^2}=1$。

**例 24:如图 1,**△$ABC$ 中,$BC$=2$AC$,$D$ 为 $BC$ 的中点,$E$ 是 $DC$ 的中点,求证: $\angle BAD=\angle DAE$ .

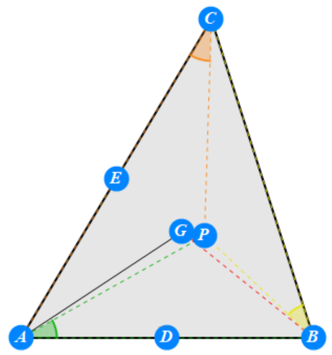



证明：设 $A$=0，$\frac{1}{2}\frac{\frac{C}{\frac{B+C}{2}}}{\frac{\frac{B+C}{2}}{\frac{B+C}{2}-C}}-\frac{\frac{\frac{B+3C}{4}}{\frac{B+C}{2}}}{\frac{\frac{B+C}{2}}{B}}+1=0$。




**例 25：如图 1，**设 $P$、$Q$ 为线段 $BC$ 上的两定点，且 $BP$=$CQ$, $A$ 为 $BC$ 外一动点, 当点 $A$ 运动到使∠$BAP$=∠$CAQ$ 时, 判定△$ABC$ 的形状, 并证明你的结论。

证明：设 $A=0$，$P=tB+(1-t)C$，$Q=B+C-P$，$(1-t)t\frac{\frac{C-B}{C}}{\frac{B}{B-C}}+\frac{\frac{P}{B}}{\frac{C}{Q}}=1$。




**例 26：如图 1，**$\triangle ABC$ 中，$G$ 是重心，点 $P$ 满足 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$，若 $A$、$B$、$P$、$G$ 四点共圆，求证：$C$、$E$、$G$、$P$ 四点共圆，$A$、$D$、$G$、$E$ 四点共圆。

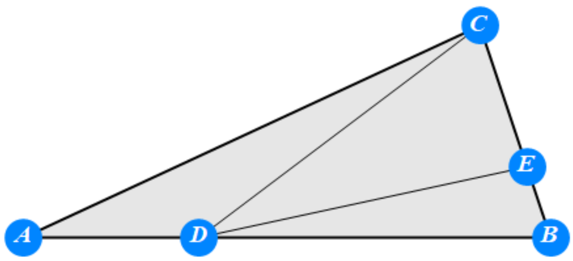
证明：$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A+C}{2}-P}{\dfrac{A+C}{2}-\dfrac{A+B+C}{3}}}{\dfrac{C-P}{C-\dfrac{A+B+C}{3}}}=\dfrac{\dfrac{\dfrac{A+B+C}{3}-P}{\dfrac{A+B+C}{3}-B}}{\dfrac{C-P}{C-A}}+1$，说明

$\angle PEG=\angle PCG \Leftrightarrow \angle PGB=\angle PAB$，

$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A+B+C}{3}-\dfrac{A+B}{2}}{\dfrac{A+B+C}{3}-A}}{\dfrac{\dfrac{A+C}{2}-\dfrac{A+B}{2}}{\dfrac{A+C}{2}-A}}+\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\dfrac{A-P}{A-B}}{\dfrac{B-P}{B-C}}-\dfrac{\dfrac{\dfrac{A+B+C}{3}-P}{\dfrac{A+B+C}{3}-B}}{\dfrac{B-P}{B-C}}}=1$，说明

$\angle AED=\angle AGD \Leftrightarrow \angle PGB=\angle PBC$。

**例 27：如图 1，**$\triangle ABC$ 中，$D$、$E$ 分别是 $AB$、$BC$ 的三等分点，且 $2AD=DB$，$2BE=EC$，若 $\angle CDE=\angle CAB$，求证：$\angle EDB=\angle DCA$；$\angle DEC=\angle BCA$；$\angle BCD=\angle ABC$；$2\angle DFA=\angle CDF$，其中 $F$ 是 $BC$ 中点。



证明：根据恒等式 $\dfrac{3}{2}\dfrac{\dfrac{C-\dfrac{2A+B}{3}}{C-A}}{\dfrac{\dfrac{2A+B}{3}-\dfrac{C+2B}{3}}{\dfrac{2A+B}{3}-B}}=\dfrac{\dfrac{\dfrac{2A+B}{3}-C}{\dfrac{2A+B}{3}-\dfrac{C+2B}{3}}}{\dfrac{A-C}{A-B}}$ 可得 $\angle EDB=\angle DCA\Leftrightarrow\angle CDE=\angle CAB$。

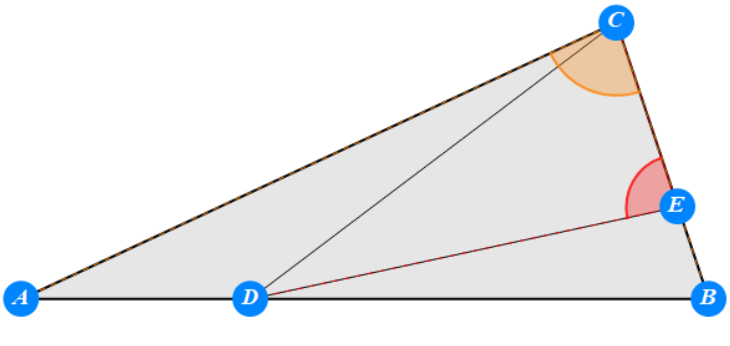
根据恒等式 $\dfrac{\dfrac{C-B}{C-A}}{\dfrac{\dfrac{C+2B}{3}-\dfrac{2A+B}{3}}{\dfrac{C+2B}{3}-C}}=2\left(\dfrac{\dfrac{\dfrac{2A+B}{3}-C}{\dfrac{2A+B}{3}-\dfrac{C+2B}{3}}}{\dfrac{A-C}{A-B}}-1\right)$ 可得 $\angle DEC=\angle BCA\Leftrightarrow\angle CDE=\angle CAB$。

根据恒等式 $\dfrac{\dfrac{C-B}{C-\dfrac{2A+B}{3}}}{\dfrac{B-A}{B-C}}=3\left(1-\dfrac{\dfrac{A-C}{A-B}}{\dfrac{\dfrac{2A+B}{3}-C}{\dfrac{2A+B}{3}-\dfrac{C+2B}{3}}}\right)$ 可得 $\angle BCD=\angle ABC\Leftrightarrow\angle CDE=\angle CAB$。

根据恒等式 $18\dfrac{\left(\dfrac{\dfrac{B+C}{2}-\dfrac{2A+B}{3}}{\dfrac{B+C}{2}-A}\right)^2}{\dfrac{A-C}{A-\dfrac{B+C}{2}}}=9-\dfrac{\dfrac{\dfrac{2A+B}{3}-C}{\dfrac{2A+B}{3}-\dfrac{C+2B}{3}}}{\dfrac{A-C}{A-B}}$ 可得 $2\angle DFA=\angle CDF\Leftrightarrow\angle CDE=\angle CAB$。

说明：根据上述论述可知，五个条件 $\angle CDE=\angle CAB$，$\angle EDB=\angle DCA$，$\angle DEC=\angle BCA$，$\angle BCD=\angle ABC$，$2\angle DFA=\angle CDF$（其中 $F$ 是 $BC$ 中点），任意知道一个成立，可推得其余四个成立。

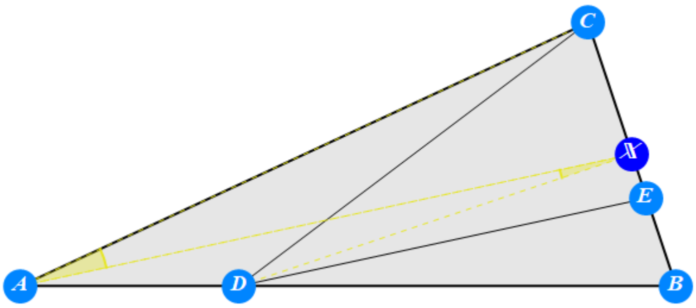
$\angle DEC = \angle BCA = 83.6359°$




$$\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{\frac{C+2B}{3}-\frac{2A+B}{3}}{\frac{C+2B}{3}-C}} = 2\left(\frac{\frac{\frac{2A+B}{3}-C}{\frac{2A+B}{3}-\frac{C+2B}{3}}}{\frac{A-C}{A-B}}-1\right),$$

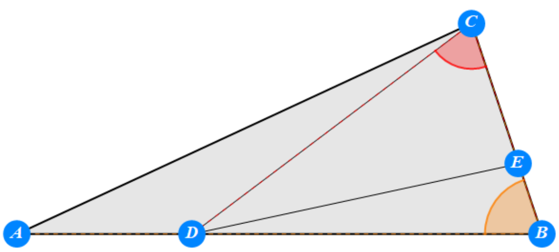
$$\frac{\angle XDB}{\angle CDB} = \frac{\angle ABC}{\angle ADC} = \frac{\angle DXA}{\angle CAX} = \frac{1}{2}$$

X是BC中点

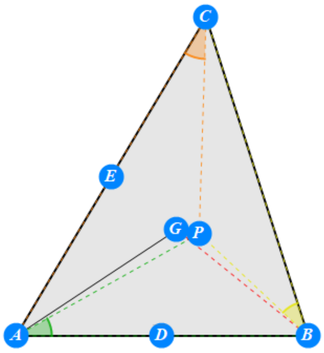



$$18\frac{\left(\frac{\frac{B+C}{2}-\frac{2A+B}{3}}{\frac{B+C}{2}-A}\right)^2}{\frac{A-C}{A-\frac{B+C}{2}}} = 9-\frac{\frac{\frac{2A+B}{3}-C}{\frac{2A+B}{3}-\frac{C+2B}{3}}}{\frac{A-C}{A-B}}$$ ,

$\angle BCD = \angle ABC = 71.4996°$



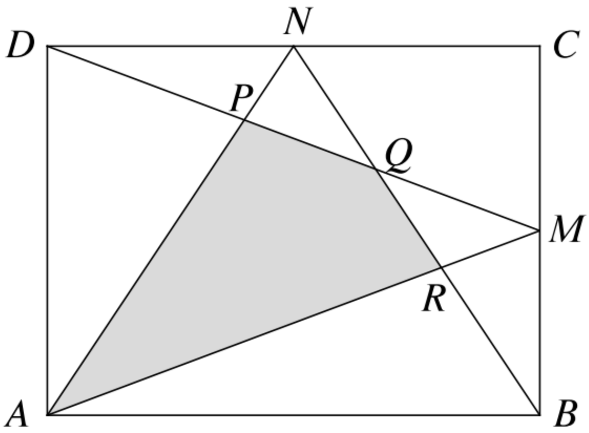
$$\frac{\frac{C-B}{C-\frac{2A+B}{3}}}{\frac{B-A}{B-C}}=3\left(1-\frac{\frac{A-C}{A-B}}{\frac{\frac{2A+B}{3}-C}{\frac{2A+B}{3}-\frac{C+2B}{3}}}\right),$$




**例 28：如图 9，**$\triangle ABC$ 中，$G$ 是重心，点 $P$ 满足 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$，若 $A$、$B$、$P$、$G$ 四点共圆，求证：$C$、$E$、$G$、$P$ 四点共圆，$A$、$D$、$G$、$E$ 四点共圆。

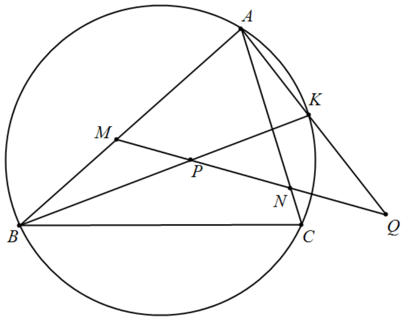
证明：
$$\frac{\frac{\frac{A+C}{2}-P}{\frac{A+C}{2}-\frac{A+B+C}{3}}}{\frac{C-P}{C-\frac{A+B+C}{3}}}=\frac{\frac{\frac{A+B+C}{3}-P}{\frac{A+B+C}{3}-B}}{\frac{C-P}{C-A}}+1$$
，说明 $\angle PEG=\angle PCG \Leftrightarrow \angle PGB=\angle PAB$，

$$\frac{\frac{\frac{A+B+C}{3}-\frac{A+B}{2}}{\frac{A+B+C}{3}-A}}{\frac{\frac{A+C}{2}-\frac{A+B}{2}}{\frac{A+C}{2}-A}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{A-P}{A-B}}{\frac{B-P}{B-C}}-\frac{\frac{\frac{A+B+C}{3}-P}{\frac{A+B+C}{3}-B}}{\frac{B-P}{B-C}}}=1$$
，说明 $\angle AED=\angle AGD \Leftrightarrow \angle PGB=\angle PBC$。




**例 29：如图 1，**平行四边形 $ABCD$，$M$、$N$ 分别是 $BC$、$CD$ 中点，$AM$ 交 $BN$ 于 $R$，$DM$ 交 $BN$ 于 $Q$，$AN$ 交 $DM$ 于 $P$，求证：$A$、$R$、$Q$、$R$ 四点共圆的充要条件是 $BA\perp BC$。

证明：设 $\dfrac{\dfrac{A-\dfrac{A+C-B+C}{2}}{A-\dfrac{B+C}{2}}}{\dfrac{A+C-B-\dfrac{B+C}{2}}{\dfrac{A+C-B+C}{2}-B}}=t$，$\left(\dfrac{B-C}{B-A}\right)^2=s$，$1-4t-4s+ts=0$，



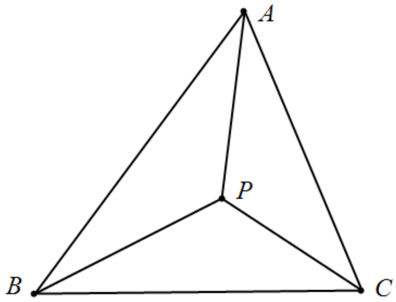

**例 30：如图 4，**$\triangle ABC$ 中，$\angle B$、$\angle C$ 的角平分线交于点 $P$，求证 $AP$ 平分 $\angle A$。（内心定理）

证明：$\dfrac{\dfrac{P-A}{B-A}}{\dfrac{C-A}{P-A}}+\dfrac{\dfrac{P-B}{C-B}}{\dfrac{A-B}{P-B}}+\dfrac{\dfrac{P-C}{A-C}}{\dfrac{B-C}{P-C}}=1$。

说明：上式等价于 $\dfrac{(P-A)^2}{(B-A)(C-A)}+\dfrac{(P-B)^2}{(C-B)(A-B)}+\dfrac{(P-C)^2}{(A-C)(B-C)}=1$。若改写成 $\dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{(x-b)^2}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{(x-c)^2}{(a-c)(b-c)}=1$，则是一个非常经典的代数恒等式。其经典证明是，将该式左边看成是关于 $x$ 的二次函数，容易验证当 $x=a$、$b$、$c$ 时，左边都等于 1，于是该式恒成立。很难想象，这么一个大家熟悉的代数恒等式，其复数几何意义竟是内心定理。需要强调的是，恒等式在证明角度关系的同时，还证明了边长关系，根据

$$\left|\frac{\frac{P-A}{B-A}}{\frac{C-A}{P-A}}\right|+\left|\frac{\frac{P-B}{C-B}}{\frac{A-B}{P-B}}\right|+\left|\frac{\frac{P-C}{A-C}}{\frac{B-C}{P-C}}\right|\geq\left|\frac{\frac{P-A}{B-A}}{\frac{C-A}{P-A}}+\frac{\frac{P-B}{C-B}}{\frac{A-B}{P-B}}+\frac{\frac{P-C}{A-C}}{\frac{B-C}{P-C}}\right|=1$$ ，可得

$\frac{PA^2}{BA\cdot CA}+\frac{PB^2}{CB\cdot AB}+\frac{PC^2}{AC\cdot BC}\geq 1$，当且仅当 $P$ 为△内心时等号成立。



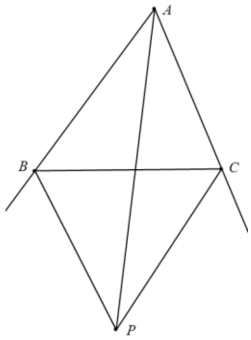




图 4　　　　　　　　　　　　图 5

**例 31**：如图 5，△$ABC$ 中，∠$B$、∠$C$ 的外角平分线交于点 $P$，求证 $AP$ 平分∠$A$。（旁心定理）

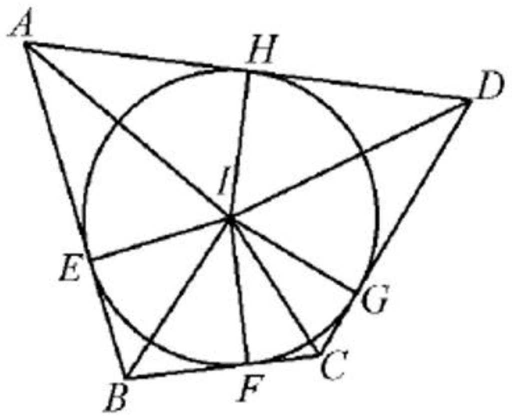
证明：$\frac{\frac{P-A}{B-A}}{\frac{C-A}{P-A}}-\frac{\frac{P-B}{B-A}}{\frac{C-B}{P-B}}-\frac{\frac{P-C}{B-C}}{\frac{C-A}{P-C}}=1$。

说明：不难发现，证明内心定理和旁心定理，是同一个恒等式，只是为了方便理解，作了一点点变形而已。这意味着两个定理在某种程度上等价。而反映到边长关系上，则不一样，上述恒等式意味着 $\frac{PA^2}{BA\cdot CA}-\frac{PB^2}{CB\cdot AB}-\frac{PC^2}{AC\cdot BC}=1$ 成立。

**例 32**：在探索得到三角形内心相关性质后，尝试将三角形推广到四边形。

如图，已知四边形 ABCD 是圆 I 的外切的四边形，则 $\frac{AI^2}{DA\cdot BA}+\frac{BI^2}{AB\cdot CB}+\frac{CI^2}{BC\cdot DC}+\frac{DI^2}{CD\cdot AD}=2$。

我们希望 $\frac{AI^2}{DA\cdot BA}+\frac{BI^2}{AB\cdot CB}+\frac{CI^2}{BC\cdot DC}+\frac{DI^2}{CD\cdot AD}$ 为定值。假设为定值，那么当四边形 ABCD 为正方形时，容易猜出定值为 2.




仿照三角形的做法，我们希望代数式 $\frac{(x-a)^2}{(d-a)(b-a)}+\frac{(x-b)^2}{(a-b)(c-b)}+\frac{(x-c)^2}{(b-c)(d-c)}+\frac{(x-d)^2}{(c-d)(a-d)}=2$ 成立。

事实上，却并不成立。借助计算机容易发现新的恒等式，

$$\frac{(x-a)^2}{(d-a)(b-a)}+\frac{(x-b)^2}{(a-b)(c-b)}+\frac{(x-c)^2}{(b-c)(d-c)}+\frac{(x-d)^2}{(c-d)(a-d)}-2$$

$$=-\frac{(a-b+c-d)\left(-abc+abd-acd+bcd+2acx-2bdx-ax^2+bx^2-cx^2+dx^2\right)}{(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)}。$$

这说明 $\frac{(x-a)^2}{(d-a)(b-a)}+\frac{(x-b)^2}{(a-b)(c-b)}+\frac{(x-c)^2}{(b-c)(d-c)}+\frac{(x-d)^2}{(c-d)(a-d)}=2$ 成立是有条件的。事实上，与三角形不同，任意三角形都存在内切圆，而四边形存在内切圆却需要条件。

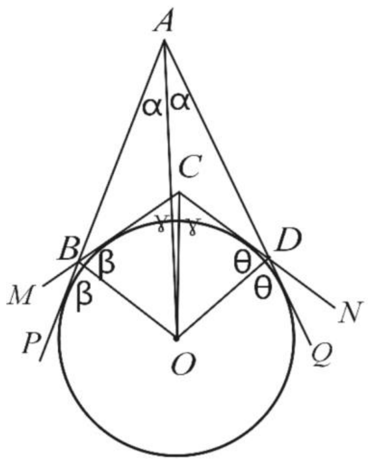
我们假设四边形 ABCD 存在内切圆，且设该圆为单位圆，四个切点的复数形式为 $\frac{1}{z_1}$，$\frac{1}{z_2}$，$\frac{1}{z_3}$，$\frac{1}{z_4}$，则 $a=\frac{2}{z_4+z_1}$，$b=\frac{2}{z_1+z_2}$，$c=\frac{2}{z_2+z_3}$，$d=\frac{2}{z_3+z_4}$，$x=0$，此时可验证

$$\frac{(x-a)^2}{(d-a)(b-a)}+\frac{(x-b)^2}{(a-b)(c-b)}+\frac{(x-c)^2}{(b-c)(d-c)}+\frac{(x-d)^2}{(c-d)(a-d)}=2 \text{ 恒成立。}$$

容易验证 $\frac{(x-a)^2}{(d-a)(b-a)}=\frac{(x-c)^2}{(b-c)(d-c)}$，即 $\frac{AI^2}{DA\cdot BA}=\frac{CI^2}{BC\cdot DC}$。同理 $\frac{BI^2}{AB\cdot CB}=\frac{DI^2}{CD\cdot AD}$。

容易验证 $\frac{(x-a)^2}{(d-a)(b-a)}+\frac{(x-b)^2}{(a-b)(c-b)}=1$，即 $\frac{AI^2}{DA\cdot BA}+\frac{BI^2}{AB\cdot CB}=1$。同理

$$\frac{BI^2}{AB\cdot CB}+\frac{CI^2}{BC\cdot DC}=\frac{CI^2}{BC\cdot DC}+\frac{DI^2}{CD\cdot AD}=\frac{DI^2}{CD\cdot AD}+\frac{AI^2}{DA\cdot BA}=1。$$




**例 33：**根据上述恒等式，对不同图形可以作出不同解读，于是可得下面结论。
如图，过点 A 作 O 的切线 AP、AQ,过点 C 作 O 的切线 CM、CN，AP 与 CM 交于点 B，AQ 与 CN 交于点 D,则有以下恒等式成立：

$$\frac{AO^2}{DA\cdot AB}=\frac{CO^2}{BC\cdot CD},\quad \frac{BO^2}{AB\cdot BC}=\frac{DO^2}{CD\cdot DA},$$

$$\frac{AO^2}{DA\cdot AB}-\frac{BO^2}{AB\cdot BC}=1,\quad \frac{BO^2}{AB\cdot BC}-\frac{CO^2}{BC\cdot CD}=-1,$$

$$\frac{CO^2}{BC\cdot CD}-\frac{DO^2}{CD\cdot DA}=1,\quad \frac{DO^2}{CD\cdot DA}-\frac{AO^2}{DA\cdot AB}=-1。$$

**例 34：**设 $I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心，$c_1,c_2,c_3$ 是 $\triangle ABC$ 的三个旁切圆，$I_a,I_b,I_c$ 分别是 $\triangle ABC$ 的三个旁切圆 $c_1,c_2,c_3$ 的圆心，则 $\frac{AB\cdot AC}{I_aA^2}+\frac{BA\cdot BC}{I_bB^2}+\frac{CA\cdot CB}{I_cC^2}=1$。

$$\frac{I_aA^2}{AB\cdot AC}-\frac{I_aB^2}{BA\cdot BC}-\frac{I_aC^2}{CA\cdot CB}=1 。$$

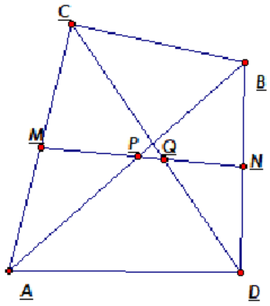
设 $A=a^2$，$B=b^2$，$C=c^2$，$I_a=ab-bc+ca$，$I_b=ab+bc-ca$，$I_c=-ab+bc+ca$，

可验证 $\frac{(c^2-a^2)(b^2-a^2)}{(a^2-I_a)^2}+\frac{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}{(b^2-I_b)^2}+\frac{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}{(c^2-I_c)^2}=1$，即

$$\frac{AB\cdot AC}{I_aA^2}+\frac{BA\cdot BC}{I_bB^2}+\frac{CA\cdot CB}{I_cC^2}=1。$$

可验证$\dfrac{\left(a^2-I\right)\left(a^2-I_a\right)}{\left(b^2-a^2\right)\left(c^2-a^2\right)}=1$，即$\dfrac{IA\cdot I_aA}{BA\cdot CA}=1$。

**7．3 线段 AB=CD,M,N 分别是 AC,DB 的中点.MN 交 AB,CD 于 P,Q. 求证:** $\angle APM=\angle CQM$**.**

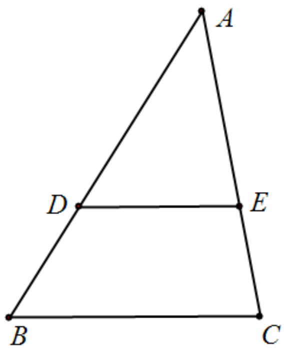


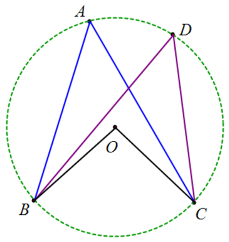

$K=D+B-C$，$4\dfrac{\dfrac{\dfrac{D+B}{2}-\dfrac{A+C}{2}}{\dfrac{D-C}{A-B}}}{\dfrac{\dfrac{A+C}{2}-\dfrac{D+B}{2}}{A-B}}=\dfrac{\dfrac{K-A}{K-B}}{\dfrac{A-B}{A-K}}$，

**简单经典案例**

**例 35：如图 3，**$\triangle ABC$ 中，$D$、$E$ 分别交 $AB$、$AC$ 上的点，求证：$DE/\!/BC$ 的充要条件是$\angle ADE=\angle ABC$。

$\dfrac{\dfrac{D-E}{D-A}}{\dfrac{B-C}{B-A}}\dfrac{B-C}{D-E}\dfrac{D-A}{B-A}=1$。

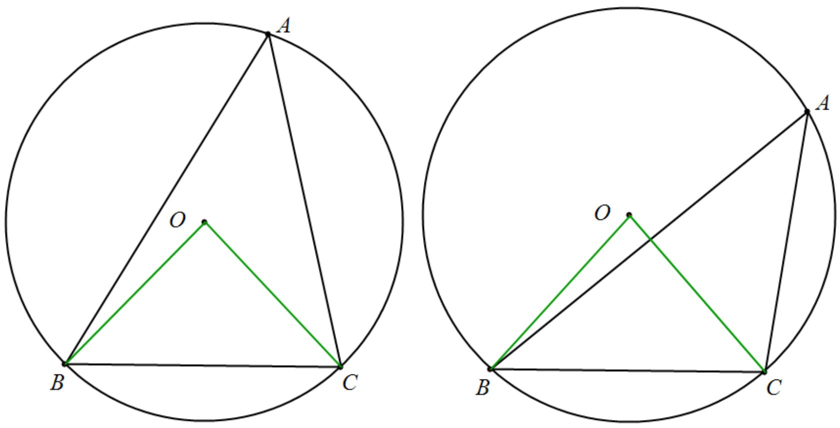





**例 36：如图 3，** 四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAC=\angle DBC \Leftrightarrow \angle ADB=\angle ACB$。

证明： $\dfrac{\dfrac{B-C}{A-C}}{\dfrac{B-D}{A-D}}=\dfrac{\dfrac{D-A}{C-A}}{\dfrac{D-B}{C-B}}$。

说明：上述恒等式显然成立，因为等式右边可看作是左边简单调整而来。看似简单代数变形，却对应着一个几何性质。恒等式中连角度符号都没出现，但却证明了角度关系，而且是原命题和逆命题一并证明。读懂这一证明的前提是理解恒等式中复数的几何意义。其详细表示是 $\angle ADB=\angle ACB \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{B-C}{A-C}}{\dfrac{B-D}{A-D}}\in R \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{D-A}{C-A}}{\dfrac{D-B}{C-B}}\in R \Leftrightarrow \angle DAC=\angle DBC$。



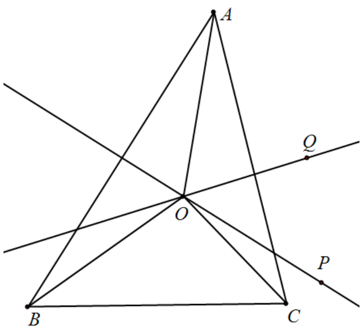

**例 37：如图 3，** $O$ 是△$ABC$ 的外心，求证： $2\angle BAC=\angle BOC$（圆心角定理）。

证明： $\dfrac{\left(\dfrac{A-C}{A-B}\right)^2}{\dfrac{O-C}{O-B}}\dfrac{\dfrac{C-O}{C-A}}{\dfrac{A-C}{A-O}}\dfrac{\dfrac{B-A}{B-O}}{\dfrac{A-O}{A-B}}=1$。

若 $O$、$B$、$C$ 三点共线，则是泰勒斯定理。

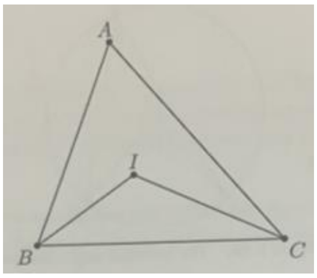
**其中已知条件：** $\angle OCA=\angle OAC \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{C-O}{C-A}}{\dfrac{A-C}{A-O}}\in R$； $\angle OBA=\angle OAB \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{B-A}{B-O}}{\dfrac{A-O}{A-B}}\in R$；求证结

论 $2\angle BAC=\angle BOC \Leftrightarrow \dfrac{\left(\dfrac{A-C}{A-B}\right)^2}{\dfrac{O-C}{O-B}}\in R$。在欧氏几何中，常常要根据点的不同位置给出相应证明。而使用复数恒等式方法，则可以统一证明。而且恒等式对认识逆命题有好处。$O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心，可得 $2\angle BAC=\angle BOC$。但反之则不行，因为 $\dfrac{\left(\dfrac{A-C}{A-B}\right)^2}{\dfrac{O-C}{O-B}}\in R$ 不能分别推出 $\dfrac{\dfrac{C-O}{C-A}}{\dfrac{A-C}{A-O}}\in R,\dfrac{\dfrac{B-A}{B-O}}{\dfrac{A-O}{A-B}}\in R$。




**例 38：如图 3，**$O$ 是 $\triangle ABC$ 内一点，直线 $OP$ 是 $\angle AOB$ 的角平分线，直线 $OQ$ 是 $\angle AOC$ 的角平分线，求证：$2\angle QOP=\angle BOC$。

证明：$\dfrac{\left(\dfrac{O-Q}{O-P}\right)^2}{\dfrac{O-C}{O-B}}\dfrac{\dfrac{P-O}{O-A}}{\dfrac{O-B}{P-O}}\dfrac{\dfrac{O-A}{O-Q}}{\dfrac{O-Q}{O-C}}=1$。



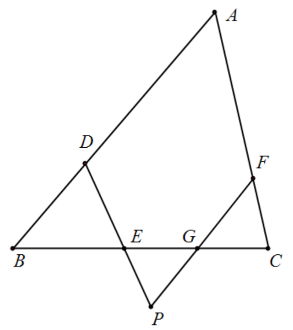

**例 39：如图 3，**$I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，求证：$\angle BIC=90^{\circ}+\dfrac{1}{2}\angle A$。

证明：$\dfrac{\left(\dfrac{I-C}{I-B}\right)^2}{\dfrac{A-C}{A-B}}\dfrac{\dfrac{B-I}{B-C}}{\dfrac{B-A}{B-I}}\dfrac{\dfrac{C-B}{C-I}}{\dfrac{C-I}{C-A}}=-1$。

**说明：**$\dfrac{\left(\dfrac{I-C}{I-B}\right)^2}{\dfrac{A-C}{A-B}}\in R$ 只能说明 $2\angle BIC=\angle A$ 或 $2\angle BIC-\angle A=180^\circ$。

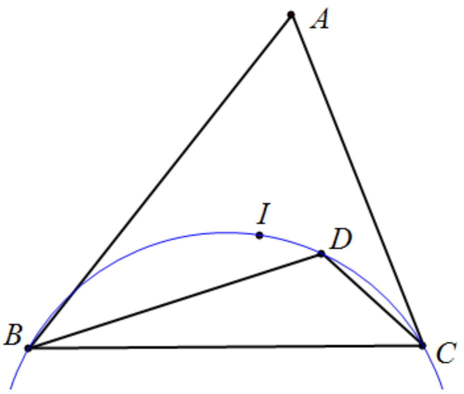
方法 1：借助图形，由于 $\angle BIC>\angle A$，因此 $2\angle BIC=\angle A$ 不可能成立。

方法 2：进一步明确每一项的正负，而不仅仅判断是否是实数。**其中已知条件：$\angle IBC=\angle ABI \Leftrightarrow$** $\dfrac{\dfrac{B-I}{B-C}}{\dfrac{B-A}{B-I}}\in R^+$；**$\angle BCI=\angle ICA \Leftrightarrow$** $\dfrac{\dfrac{C-B}{C-I}}{\dfrac{C-I}{C-A}}\in R^+$；于是 $\dfrac{\left(\dfrac{I-C}{I-B}\right)^2}{\dfrac{A-C}{A-B}}\in R^-$，说明 $2\angle BIC-\angle A=180^\circ$。



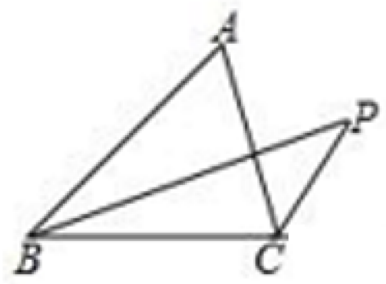

**例 40：如图 1，**$\triangle ABC$ 中，$BA$、$BC$ 上有点 $D$、$E$，且 $BD=BE$，$CA$、$CB$ 上有点 $F$、$G$，且 $CF=CG$，$DE$ 交 $FG$ 于 $P$，则 $\angle DPF+\dfrac{1}{2}\angle A=90^\circ$。

$$\dfrac{\left(\dfrac{G-F}{D-E}\right)^2}{\dfrac{A-C}{A-B}}\dfrac{\dfrac{D-E}{A-B}}{\dfrac{C-B}{E-D}}\dfrac{\dfrac{A-C}{F-G}}{\dfrac{G-F}{B-C}}=-1,$$



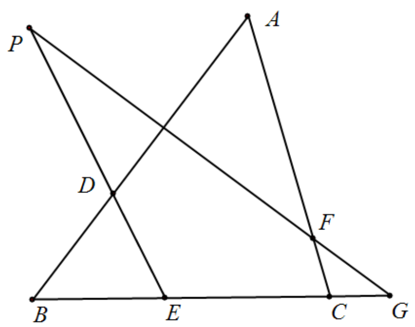

例 41：如图 1，$\triangle ABC$ 中，$I$ 是内心，点 $D$ 满足$\angle ABD=\angle BCD$，$\angle DBC=\angle DCA$，求证：$B$、$C$、$D$、$I$ 四点共圆。

$$\frac{\frac{B-I}{B-C}\frac{C-B}{C-I}\frac{B-A}{B-D}\frac{C-D}{C-A}}{\frac{B-A}{B-I}\frac{C-I}{C-A}\frac{C-B}{C-D}\frac{B-D}{B-C}}=\left(\frac{\frac{D-C}{D-B}}{\frac{I-C}{I-B}}\right)^2$$



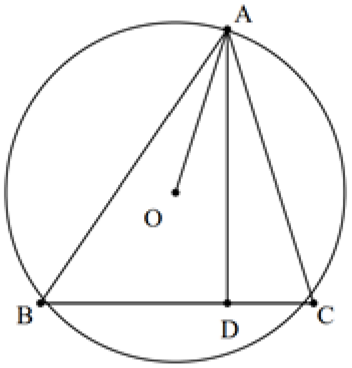

例 42：如图 1，若点 $P$ 是$\angle ABC$ 和$\angle ACB$ 的外角角平分线的交点，则$\angle BPC=\frac{1}{2}\angle A$。

$$\frac{\left(\frac{P-C}{P-B}\right)^2}{\frac{A-C}{A-B}}=\frac{\frac{B-A}{B-P}\frac{C-P}{B-C}}{\frac{B-P}{B-C}\frac{C-A}{C-P}},$$



**例 43：如图 1，**△*ABC* 中，*BA*、*BC* 上分别有点 *D*、*E*，且 *BD*=*BE*，*CA* 上、*CB* 延长线上分别有点 *F*、*G*，且 *CF*=*CG*，*DE* 交 *FG* 于 *P*，则 $\angle DPF=\dfrac{1}{2}\angle A$。

$$\frac{\left(\dfrac{P-F}{P-D}\right)^2}{\dfrac{A-C}{A-B}}=\frac{\dfrac{B-A}{D-P}\dfrac{F-P}{B-C}}{\dfrac{D-P}{B-C}\dfrac{C-A}{F-P}}$$

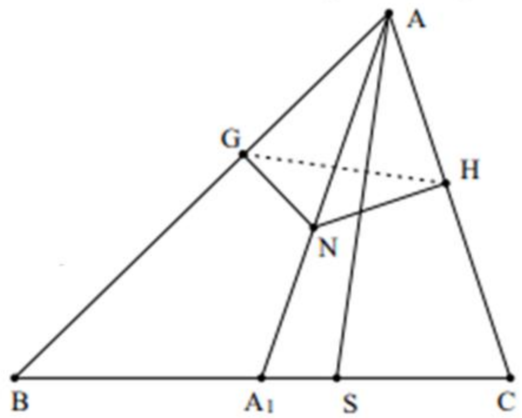



**例 44：如图 3，**△*ABC* 中，*O* 是外心，*AD* 是高，*AB*>*AC*, 求证：$\angle C=\angle B+\angle DAO$.

证明：$$\frac{\dfrac{A-D}{A-O}\dfrac{B-A}{B-C}}{\dfrac{C-B}{C-A}}=\frac{A-D}{B-C}\left(\frac{B-A}{B-C}\frac{A-C}{A-O}\right).$$

说明 $\dfrac{B-A}{B-C}\dfrac{A-C}{A-O}$ 用到∠*B*+∠*CAO*=90° 。见周高张 *p*149

**例 45：如图 3，**△*ABC* 中，*D*、*S* 在 *BC* 上，*N* 是 *AD* 上一点，*N* 在 *AB*、*AC* 上的垂足分别是 *G*、*H*，∠*BAD*=∠*CAS*，求证：*AS*⊥*GH*。



分析：（1）**从题目条件出发，推出若干新的几何信息，并将用复数形式表示，即：**

1) $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{H}$ 三点共线 $\Leftrightarrow \dfrac{H-A}{A-C}\in R$；

2) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{N}$ 三点共线 $\Leftrightarrow \dfrac{A-D}{A-N}\in R$；

3) $\angle BAD=\angle CAS \Leftrightarrow \dfrac{A-B}{A-D}/\dfrac{A-S}{A-C}\in R$；

4) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{H}$ 四点共圆 $\Leftrightarrow \dfrac{H-G}{H-A}/\dfrac{N-G}{N-A}\in R$；

5) $\boldsymbol{NG}\perp\boldsymbol{AB} \Leftrightarrow \dfrac{D-G}{A-B}\mathrm{i}\in R$；

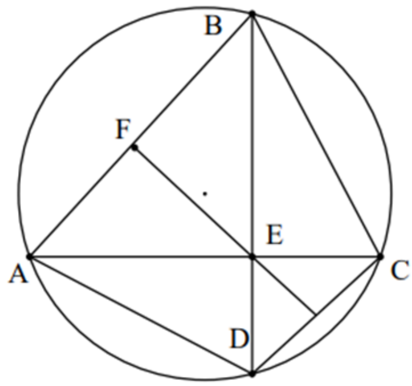
（2）**求证结论** $AS\perp GH \Leftrightarrow \dfrac{H-G}{S-A}\mathrm{i}\in R$。将结论 $\dfrac{H-G}{S-A}$ 按照分式拆分成 $\{H-G,S-A\}$ 出发，从 $\{\dfrac{A-B}{A-D}/\dfrac{A-S}{A-C},\dfrac{H-G}{H-A}/\dfrac{N-G}{N-A},\dfrac{H-A}{A-C},\dfrac{A-D}{A-N},\dfrac{N-G}{A-B}\}$ 中搜索到 $\{\dfrac{H-G}{H-A}/\dfrac{N-G}{N-A},\dfrac{H-A}{A-C}\}$ 中含有 $\{H-G,S-A\}$，为了消去新引进的 $\{H-A,N-A,A-C\cdots\}$，尝试引进 $\{\dfrac{A-B}{A-D}/\dfrac{A-S}{A-C},\dfrac{A-D}{A-N},\dfrac{N-G}{A-B}\}$，此时生成恒等式

$$\frac{H-G}{S-A}=\left(\frac{A-B}{A-D}/\frac{A-S}{A-C}\right)\left(\frac{H-G}{H-A}/\frac{N-G}{N-A}\right)\frac{H-A}{A-C}\frac{A-D}{A-N}\frac{N-G}{A-B}。$$

（3）根据恒等式，容易得到若干相关命题。

证明：$\dfrac{H-G}{S-A}=\left(\dfrac{A-B}{A-D}/\dfrac{A-S}{A-C}\right)\left(\dfrac{H-G}{H-A}/\dfrac{N-G}{N-A}\right)\dfrac{H-A}{A-C}\dfrac{A-D}{A-N}\dfrac{N-G}{A-B}$。

推广：如图，△*ABC* 中，*D*、*S* 在 *BC* 上，*N* 在 *AB*、*AC* 上的垂足分别是 *G*、*H*，求证：三个条件“*N* 是 *AD* 上一点”“∠*BAD*=∠*CAS*”“*AS*⊥*GH*”，任意两个成立，则第三个也成立。




$$\frac{C-D}{F-E}=\frac{B-D}{A-E}\left(\frac{C-D}{C-A}/\frac{B-D}{B-A}\right)\left(\frac{E-A}{E-F}/\frac{A-B}{A-C}\right)$$

**例 46：如图 1，**如图，圆内接四边形 *ABCD*，*AC*⊥*BD*，对角线交于点 *E*，*F* 是 *AB* 中点，求证：*CD*⊥*FE*。

分析：（1）**从题目条件出发，推出若干新的几何信息，并将用复数形式表示，即：**

1) ∠*BAC*=∠*FEA* $\Leftrightarrow \frac{E-A}{E-F}/\frac{A-B}{A-C}\in R$；

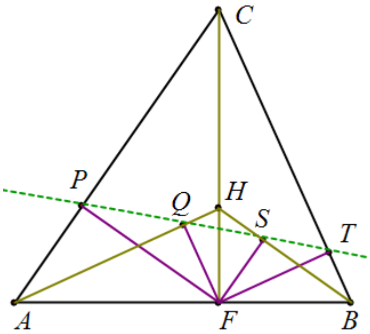
2) ***A*、*B*、*C*、*D* 四点共圆** $\Leftrightarrow \frac{C-D}{C-A}/\frac{B-D}{B-A}\in R$；

3) ***BD*⊥*AE*** $\Leftrightarrow \frac{B-D}{A-E}\mathrm{i}\in R$；

（2）**求证结论 *CD*⊥*FE*** $\Leftrightarrow \frac{C-D}{F-E}\mathrm{i}\in R$。将结论 $\frac{C-D}{F-E}$ 按照分式拆分成 $\{C-D,F-E\}$ 出发，从 $\{\frac{B-D}{A-E},\frac{C-D}{C-A}/\frac{B-D}{B-A},\frac{E-A}{E-F}/\frac{A-B}{A-C}\}$ 中搜索到

$\{\frac{C-D}{C-A}/\frac{B-D}{B-A},\frac{E-A}{E-F}/\frac{A-B}{A-C}\}$中含有$\{C-D,F-E\}$，为了消去新引进的$\{A-E\cdots\}$，尝试引进$\{\frac{B-D}{A-E}\}$，此时生成恒等式$\frac{C-D}{F-E}=\frac{B-D}{A-E}\left(\frac{C-D}{C-A}/\frac{B-D}{B-A}\right)\left(\frac{E-A}{E-F}/\frac{A-B}{A-C}\right)$。

（3）根据恒等式，容易得到若干相关命题。




**例 47：如图 3，**$\triangle ABC$ 中，$H$ 是垂心，$CF$ 是高，$F$ 在 $AC$、$AH$、$BC$ 上的垂足分别是 $P$、$Q$、$T$，求证：$P$、$Q$、$T$ 三点共线。

$$\frac{P-Q}{P-T}=\frac{\frac{F-P}{F-C}\frac{Q-P}{Q-A}}{\frac{T-P}{T-C}\frac{F-P}{F-A}}\left(\frac{Q-A}{T-C}\frac{F-C}{F-A}\right),$$

分析：（1）**从题目条件出发，推出若干新的几何信息，并将用复数形式表示，即：**

1) **B、C、T 三点共线** $\Leftrightarrow \frac{B-C}{C-T}\in R$；

2) **A、Q、H 三点共线** $\Leftrightarrow \frac{A-Q}{A-H}\in R$；

3) **T、F、P、C 四点共圆** $\Leftrightarrow \frac{T-C}{T-P}\frac{F-P}{F-C}\in R$；

4) **A、F、P、Q 四点共圆** $\Leftrightarrow \frac{Q-P}{Q-A}\frac{F-A}{F-P}\in R$；

5) $\boldsymbol{AH\perp BC, FC\perp FA}\Leftrightarrow\dfrac{A-H}{B-C}\dfrac{F-C}{F-A}\in R$；

（2）**求证结论** $P$、$Q$、$T$ 三点共线 $\Leftrightarrow\dfrac{P-Q}{P-T}\in R$。将结论 $\dfrac{P-Q}{P-T}$ 按照分式拆分成

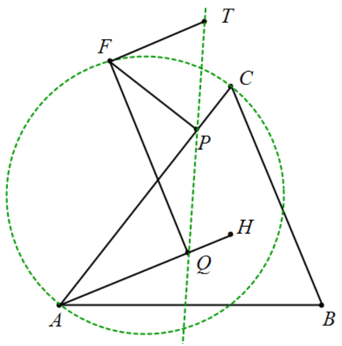
$\{P-Q,P-T\}$ 出发，从 $\{\dfrac{B-C}{C-T},\dfrac{A-Q}{A-H},\dfrac{T-C}{T-P}\dfrac{F-P}{F-C},\dfrac{Q-P}{Q-A}\dfrac{F-A}{F-P},\dfrac{A-H}{B-C}\dfrac{F-C}{F-A}\}$ 中搜

索到 $\{\dfrac{T-C}{T-P}\dfrac{F-P}{F-C},\dfrac{Q-P}{Q-A}\dfrac{F-A}{F-P}\}$ 中含有 $\{P-Q,P-T\}$，为了消去新引进的

$\{T-C,Q-A,F-A\cdots\}$，尝试引进 $\{\dfrac{B-C}{C-T},\dfrac{A-Q}{A-H},\dfrac{A-H}{B-C}\dfrac{F-C}{F-A}\}$，此时生成恒等式

$$\frac{P-Q}{P-T}=\frac{B-C}{C-T}\frac{A-Q}{A-H}\left(\frac{T-C}{T-P}\frac{F-P}{F-C}\right)\left(\frac{Q-P}{Q-A}\frac{F-A}{F-P}\right)\left(\frac{A-H}{B-C}\frac{F-C}{F-A}\right)。$$

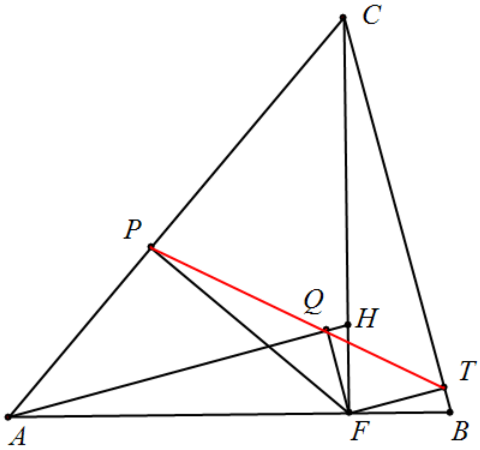
（3）根据恒等式，容易得到若干相关命题。

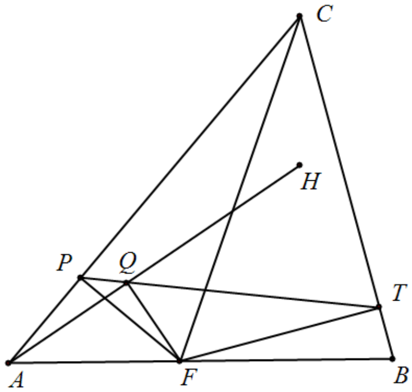


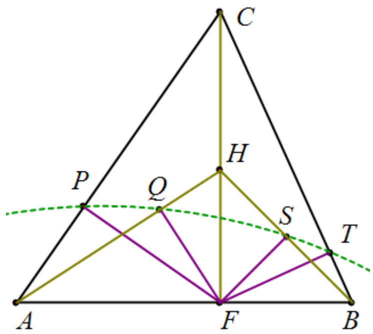

从恒等式可知，$P$、$Q$、$T$ 三点共线 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{FC\perp FA}$。$\boldsymbol{FC\perp FA}$ **并不要求** $\boldsymbol{F}$ **在** $\boldsymbol{AB}$ **上，只需让** $F$ 在以 $AC$ 为直径的圆上即可。

从恒等式可知，$P$、$Q$、$T$ 三点共线 $\Leftrightarrow$ 直线 $CB$、$HA$ 夹角与直线 $AB$、$FC$ 夹角相等。**因此可得新命题：**

**例 48：**如图，$\triangle ABC$ 平面上有 $F$、$H$ 两点，满足直线 $CB$、$HA$ 夹角与直线 $AB$、$FC$ 夹角相等。$F$ 在 $AC$、$AH$、$BC$ 上的垂足分别是 $P$、$Q$、$T$，求证：$P$、$Q$、$T$ 三点共线。

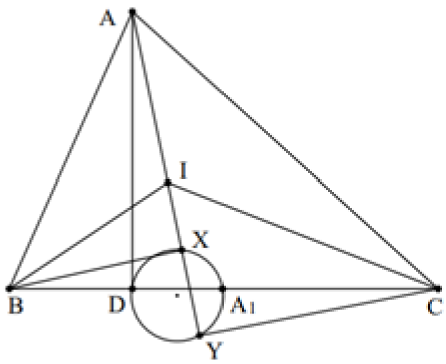



**例 49：如图 3，**△*ABC* 中，*H* 是高 *CF* 上一点，*F* 在 *AC*、*AH*、*BH*、*BC* 上的垂足分别是 *P*、*Q*、*S*、*T*，求证：*P*、*Q*、*S*、*T* 四点共圆。

$$\frac{\frac{P-Q}{P-T}\frac{A-Q}{A-F}\frac{T-P}{T-C}\frac{F-T}{F-B}\frac{S-Q}{B-S}}{\frac{Q-S}{S-T}\frac{P-Q}{P-F}\frac{F-P}{F-C}\frac{S-T}{S-B}\frac{F-Q}{F-H}}\frac{F-A}{F-C}\frac{F-B}{F-H}\frac{T-C}{T-F}\frac{Q-F}{Q-A}=1。$$



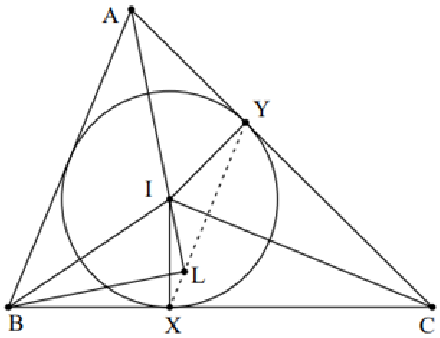

**例 50：如图 3，**△*ABC* 中，*I* 是垂心，*AD* 是高，$A_1$ 是 *BC* 中点，*B*、*C* 在 *AI* 的垂足分别为 *X*、*Y*，求证 *Y*、$A_1$、*X*、*D* 四点共圆。

证明：$\dfrac{Y-D}{Y-X}\dfrac{A_1-X}{A_1-D}=\dfrac{Y-A}{Y-X}\dfrac{D-C}{D-A_1}\dfrac{A_1-X}{C-A}\left(\dfrac{D-Y}{D-C}\dfrac{A-C}{A-Y}\right)$

需要指出的是，有时一些隐藏的条件信息并不是容易被发现的，此时充分利用结论就很有必要了。已知条件：$A$、X、Y 三点共线$\Leftrightarrow\dfrac{Y-A}{Y-X}\in R$；D、C、$A_1$三点共线$\Leftrightarrow\dfrac{D-C}{D-A_1}\in R$；A、D、Y、C 四点共圆$\Leftrightarrow\dfrac{D-Y}{D-C}\dfrac{A-C}{A-Y}\in R$；求证结论：$Y$、$A_1$、$X$、$D$ $\Leftrightarrow\dfrac{Y-D}{Y-X}\dfrac{A_1-X}{A_1-D}\in R$；要想相互消去生成恒等式，每一项都必须成对出现，比对发现$\{A_1-X,C-A\}$只出现了一次。尝试发现，补充$\dfrac{A_1-X}{C-A}$之后，可以生成恒等式

$\dfrac{Y-D}{Y-X}\dfrac{A_1-X}{A_1-D}=\dfrac{Y-A}{Y-X}\dfrac{D-C}{D-A_1}\dfrac{A_1-X}{C-A}\left(\dfrac{D-Y}{D-C}\dfrac{A-C}{A-Y}\right)$。此时剩下的问题是$A_1X//CA$如何证明？若证明不了，整个证明功亏一篑。延长 $BX$ 交 $AC$ 于 $K$，根据等腰三角形三线合一的性质，易得 $X$ 为 $BK$ 中点，$A_1X$ 为△$BCK$ 的中位线，所以$A_1X//CA$。

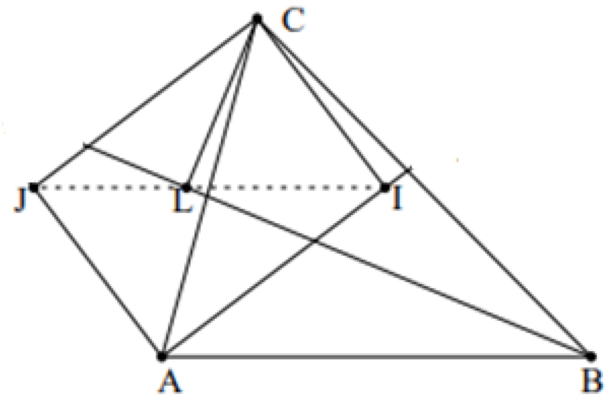
新命题：**例 51：**如图，△$ABC$ 中，$I$ 是垂心，$AD$ 是高，$A_1$ 是 $BC$ 上一点，$B$、$C$ 在 $AI$ 的垂足分别为 $X$、$Y$，求证 $Y$、$A_1$、$X$、$D$ 四点共圆$\Leftrightarrow A_1$是 $BC$ 中点。




**例 52：如图 3，**△$ABC$ 中，内切圆 $I$ 分别切 $BC$、$AC$ 于 $X$、$Y$，$BL\perp AI$ 于 $L$，求证：$X$、$L$、$Y$ 三点共线。

$$\frac{X-L}{X-Y}=\left(\frac{L-X}{L-I}\frac{B-I}{B-X}\right)\frac{\frac{Y-C}{Y-X}}{\frac{I-C}{I-X}}\left(\frac{\frac{I-C}{I-B}}{\frac{A-C}{A-I}}\frac{B-X}{X-I}\right)\frac{L-I}{A-I}\frac{A-C}{Y-C}。$$

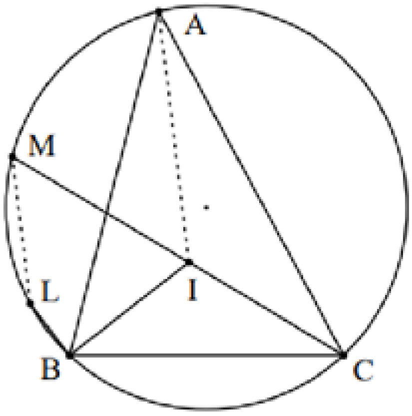
说明：用到$\angle BIC=90^{\circ}+\dfrac{1}{2}\angle A$。见上题。




例 53：如图 3，△$ABC$ 中，$O$ 是内心，$AI$、$BL$ 是角平分线，$AJ$ 是外角平分线，$IA\perp IC$，$LC\perp LB$，$JC\perp JA$，求证：$J$、$L$、$I$ 三点共线。

$$\frac{I-J}{I-L}=\left(\frac{L-O}{L-I}\frac{C-I}{C-O}\right)\left(\frac{J-I}{J-A}\frac{C-A}{C-I}\right)\left(\frac{A-J}{A-C}\frac{O-C}{O-B}\right)\frac{B-O}{L-O}$$

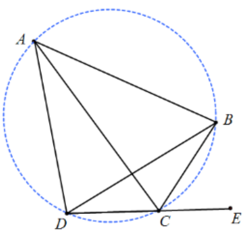
说明：用到 $\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$。见上题。




例 54：如图 3，△$ABC$ 中，$I$ 是内心，$M$、$L$ 在△$ABC$ 的外接圆上，$M$ 在直线 $CI$ 上，$BL\perp BI$，求证：$ML /\!/ AI$。

$$\frac{A-I}{L-M}=\left(\frac{L-B}{L-M}\frac{C-M}{C-B}\right)\left(\frac{C-A}{C-I}/\frac{C-M}{C-B}\right)\left(\frac{I-C}{I-B}/\frac{A-C}{A-I}\frac{B-I}{B-L}\right),$$

说明：用到 $\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$。见上题。



**例 55：如图 3，**四边形 $ABCD$，$E$ 是射线 $DC$ 上的点，若 $DA=DB$，$\angle ACD=\angle BCE$，求证：$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆。

$$\frac{\frac{A-B}{A-D}}{\frac{B-D}{B-A}}\frac{\frac{C-D}{C-A}}{\frac{C-B}{D-C}}=\frac{\frac{A-B}{A-C}}{\frac{D-B}{D-C}}\frac{\frac{A-B}{A-D}}{\frac{C-B}{D-C}},$$

说明：此题非常特别。等式右边两项 $\frac{\frac{A-B}{A-C}}{\frac{D-B}{D-C}}\in R$，$\frac{\frac{A-B}{A-D}}{\frac{C-B}{D-C}}\in R$ 都是 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆的等价式。若求证结论不成立，则恒等式左边为实数，右边不为实数，矛盾。

**带平方的要单独**

探讨 $(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$。

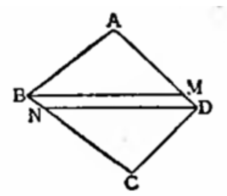
（1）若 $a$ 和 $b$ 都不为 0，则 $a+bi$ 为复数，$(a+bi)^2$ 为复数。

（2）若 $a$=0，$b$≠0，则 $a+bi$ 为纯虚数，$(a+bi)^2$ 为负实数。

（3）若 $a$≠0，$b$=0，则 $a+bi$ 为实数，$(a+bi)^2$ 为正实数。

（4）若 $a$=$b$=0，则 $a+bi=0$，$(a+bi)^2=0$。

一般按正的写

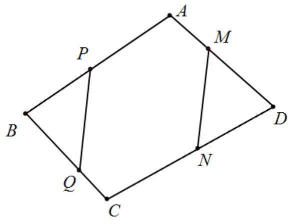



**例 56：如图 3，**在四边形 $ABCD$ 中，若对角 $\angle A$ 与 $\angle C$ 相等，则另一组对角 $\angle B$ 与 $\angle D$ 的平分线相互平行。

$$\left(\frac{N-D}{B-M}\right)^2=\frac{\frac{A-D}{A-B}}{\frac{C-B}{C-D}}\frac{\frac{B-A}{B-M}}{\frac{B-M}{B-C}}\frac{\frac{D-N}{D-A}}{\frac{D-C}{D-N}}。$$

说明：等式右边部分为正实数，因此可判断$\dfrac{N-D}{B-M}$为实数。

**例 57：如图 3，** 在四边形 $ABCD$ 中, 四边上有 $P$、$Q$、$N$、$M$ 四点，且 $BP=BQ$，$DM=DN$，若对角$\angle A$与$\angle C$相等, $PQ\,/\!/\,MN$。



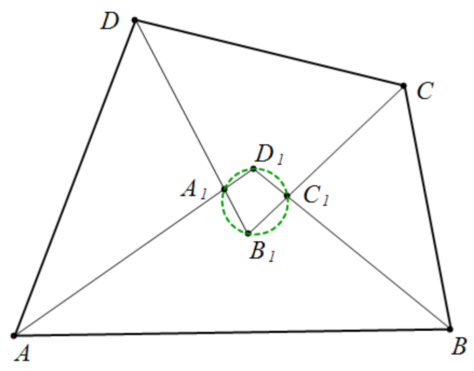

**例 58：如图 3，** $\triangle ABC$ 内有一点 $P$，满足$\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$，求证：$B$、$C$、$P$、$I$ 四点共圆，其中 $I$ 是$\triangle ABC$的内心。

证明：$\left(\dfrac{\frac{P-C}{P-B}}{\frac{I-C}{I-B}}\right)^2=\dfrac{\frac{B-I}{B-C}}{\frac{B-A}{B-I}}\dfrac{\frac{C-B}{C-I}}{\frac{C-I}{C-A}}\left(\dfrac{\frac{B-A}{B-P}}{\frac{B-P}{B-C}}\dfrac{\frac{C-P}{C-A}}{\frac{C-B}{C-P}}\right)$。

**例 59：如图 3，** 四边形 $ABCD$，从四个角引出四条线，相交构成四边形 $A_1B_1C_1D_1$，满足

$\angle CDA_1=\angle DAA_1$，$\angle A_1AB=\angle C_1BC$，$\angle ABC_1=\angle BCC_1$，$\angle C_1CD=\angle A_1DA$，求证四

边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是圆内接四边形。$\dfrac{\frac{A-D}{A_1-D_1}}{\frac{D-C}{A_1-B_1}}\dfrac{\frac{C_1-D_1}{B-C}}{\frac{A_1-D_1}{A-B}}\dfrac{\frac{C-B}{C_1-B_1}}{\frac{B-A}{C_1-D_1}}\dfrac{\frac{A_1-B_1}{D-A}}{\frac{C_1-B_1}{C-D}}=\left(\dfrac{\frac{B_1-A_1}{A_1-D_1}}{\frac{C_1-B_1}{C_1-D_1}}\right)^2$

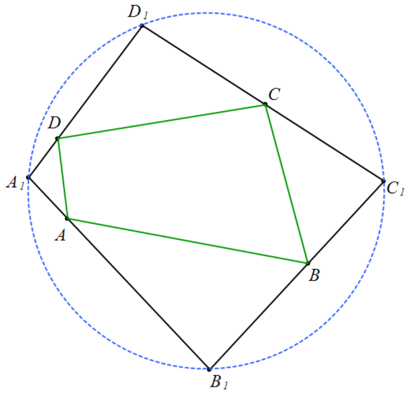



**例 60：如图 3，** 四边形 $ABCD$，四个角的平分线构成四边形 $A_1B_1C_1D_1$，求证四边形

$A_1B_1C_1D_1$ 是圆内接四边形。

证明：$\dfrac{\dfrac{A-D}{A_1-D_1}}{\dfrac{A_1-D_1}{A-B}}\dfrac{\dfrac{C_1-D_1}{B-C}}{\dfrac{B-A}{C_1-D_1}}\dfrac{\dfrac{C-B}{C_1-B_1}}{\dfrac{C_1-B_1}{C-D}}\dfrac{\dfrac{A_1-B_1}{D-A}}{\dfrac{D-C}{A_1-B_1}}=\left(\dfrac{\dfrac{B_1-A_1}{A_1-D_1}}{\dfrac{C_1-B_1}{C_1-D_1}}\right)^2$。

另证：$\angle A_1D_1C_1+\angle A_1B_1C_1=180^\circ-\dfrac{\angle A}{2}-\dfrac{\angle B}{2}+180^\circ-\dfrac{\angle C}{2}-\dfrac{\angle D}{2}=180^\circ$。




$\angle A_1+\angle C_1+\angle A_1AD+\angle A_1DA+\angle C_1CB+\angle C_1BC$

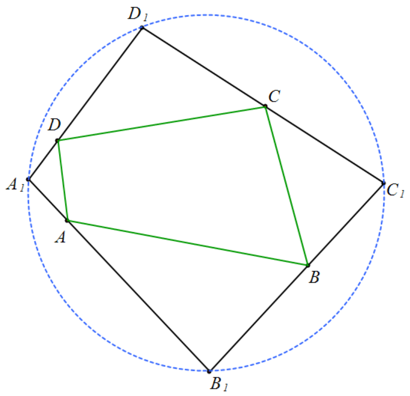
$=\angle B_1+\angle D_1+\angle B_1AB+\angle B_1BA+\angle D_1DC+\angle D_1CD=360^\circ$，易得

$\angle A_1+\angle C_1=\angle B_1+\angle D_1=180^\circ$。

**例 61：如图 3，**作四边形 $ABCD$ 的外接四边形 $A_1B_1C_1D_1$，若 $\angle A_1AD=\angle B_1AB$，$\angle B_1BA=\angle C_1BC$，$\angle C_1CB=\angle D_1CD$，$\angle D_1DC=\angle A_1DA$，则四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是圆内接四边形。

$\dfrac{\dfrac{B_1-A_1}{A-D}}{\dfrac{A-B}{A_1-B_1}}\dfrac{\dfrac{B-C}{B_1-C_1}}{\dfrac{C_1-B_1}{B-A}}\dfrac{\dfrac{D_1-C_1}{C-B}}{\dfrac{C-D}{C_1-D_1}}\dfrac{\dfrac{D-A}{D_1-A_1}}{\dfrac{A_1-D_1}{D-C}}=\left(\dfrac{\dfrac{B_1-A_1}{B_1-C_1}}{\dfrac{A_1-D_1}{D_1-C_1}}\right)^2$。

上下是一个等式。不同解读

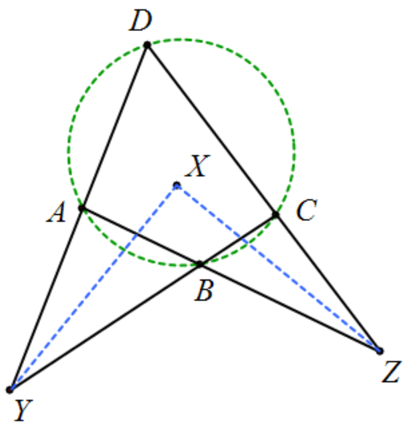



换图

**例 62：如图 3，**作四边形 $ABCD$ 的外接四边形 $A_1B_1C_1D_1$，若 $A_1A=A_1D$， $B_1B=B_1A$，

$C_1C=C_1B$， $D_1D=D_1C$，则四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。

$$\frac{\frac{A-B}{A_1-B_1}}{\frac{C_1-B_1}{B-A}}\frac{\frac{D_1-C_1}{C-B}}{\frac{B-C}{B_1-C_1}}\frac{\frac{C-D}{C_1-D_1}}{\frac{A_1-D_1}{D-C}}\frac{\frac{B_1-A_1}{A-D}}{\frac{D-A}{D_1-A_1}}=\left(\frac{D-C}{D-A}\frac{B-A}{B-C}\right)^2$$



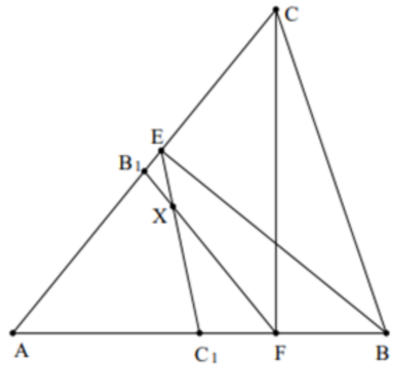

换成和相等试试

**例 63：如图 3，**圆内接四边形 $ABCD$，直线 $DA$ 交 $CB$ 于 $Y$，$AB$ 交 $DC$ 于 $Z$，作∠$AYB$、∠$BZC$ 的角平分线交于点 $X$，求证：$XY\perp XZ$。

$$\left(\frac{X-Y}{X-Z}\right)^2=\frac{\frac{X-Y}{C-B}}{\frac{D-A}{X-Y}}\frac{\frac{A-B}{X-Z}}{\frac{X-Z}{D-C}}\left(\frac{A-D}{A-B}\frac{C-B}{C-D}\right)。$$

注意到等式右边为负实数，所以 $XY$ 与 $XZ$ 只能是垂直，而不能是其他。

扩展：如图，四边形 $ABCD$，直线 $DA$ 交 $CB$ 于 $Y$，$AB$ 交 $DC$ 于 $Z$，作∠$AYB$、∠$BZC$ 的角平分线交于点 $X$，求证：$XY\perp XZ$ 的充要条件是 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆。




**例 64：如图 3，**$\triangle ABC$ 中，$BE$、$CF$ 是高，$B_1$，$C_1$ 分别是 $AC$、$AB$ 中点，$FB_1$ 交 $EC_1$ 于 $X$，求证：$\angle B_1XC_1=3\angle A$。

分析：1) $\angle FAC=\angle CFB_1 \Leftrightarrow \frac{A-C}{F-C}/\frac{F-C}{F-B_1}\in R$；2) $\angle ABE=\angle BEC_1 \Leftrightarrow$ $\frac{E-B}{E-C_1}/\frac{B-A}{B-E}\in R$；3) $\boldsymbol{CF\perp AB}\Leftrightarrow\left(\frac{C-F}{A-B}\right)^2\in R$；4) $\boldsymbol{EB\perp AC}\Leftrightarrow\left(\frac{A-C}{E-B}\right)^2\in R$；

5) $\angle B_1XC_1=3\angle A\Leftrightarrow\left(\frac{A-C}{A-B}\right)^3/\frac{C_1-E}{B_1-F}\in R$。

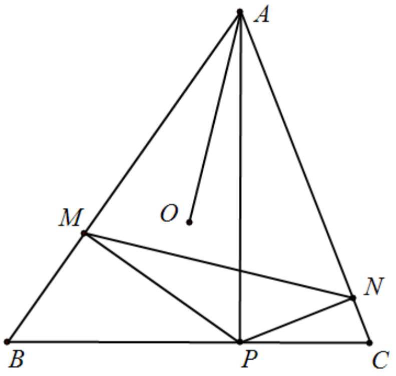
证明：$\left(\frac{A-C}{A-B}\right)^3/\frac{C_1-E}{B_1-F}=\left(\frac{C-F}{A-B}\right)^2\left(\frac{A-C}{E-B}\right)^2\left(\frac{A-C}{F-C}/\frac{F-C}{F-B_1}\right)\left(\frac{E-B}{E-C_1}/\frac{B-A}{B-E}\right)$。

由于平行（包括共线）和垂直结论只涉及两小项，那么用条件表示起来相对容易。而角度关系（包括证明三角形是等腰三角形）和四点共圆，涉及四小项，那么用条件表示起来相对困难。当然这也不是绝对的。

**平行与垂直**

**例 65：如图 1，**$\triangle ABC$ 中，$O$ 是外心，$BD$、$CE$ 是高，求证 $AO\perp DE$。

$$\frac{A-O}{D-E}=\frac{\frac{A-O}{A-B}\ \frac{B-D}{B-C}}{\frac{B-D}{B-C}\ \frac{E-D}{E-C}}\frac{A-B}{C-E},$$

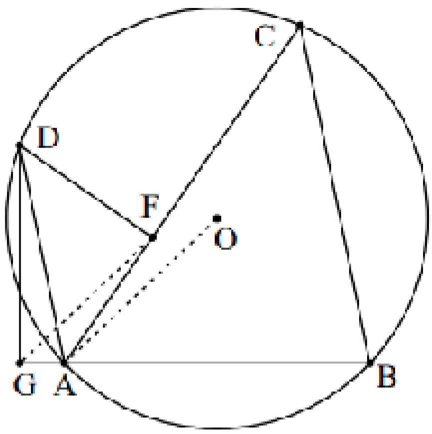



**例 66：如图 3，**△*ABC* 中，*O* 是外心，*AP* 是高，*PM*⊥*AB* 交 *AB* 于 *M*，*PN*⊥*AC* 交 *AC* 于 *N*，求证：*AO*⊥*MN*。

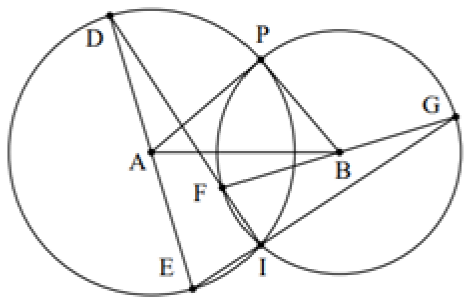
证明：$\dfrac{M-N}{A-O}=\dfrac{\dfrac{A-C}{A-P}}{\dfrac{A-O}{A-M}}\dfrac{\dfrac{C-B}{C-A}}{\dfrac{M-A}{M-N}}\dfrac{P-A}{B-C}$。

说明：根据 $AN\cdot AC=AP^2=AM\cdot AB$ 得 *M*、*B*、*C*、*N* 四点共圆，∠*BCA*=∠*AMN*。或者∠*BCA*=∠*NPA*=∠*AMN*。

**例 67：如图 3，**△*ABC* 中，*O* 是外心，过 *A* 作 *BC* 的平行线交△*ABC* 外接圆于点 *D*，*D* 在 *AB*、*AC* 的垂足分别为 *G*、*F*，求证：*GF*∥*AO*。

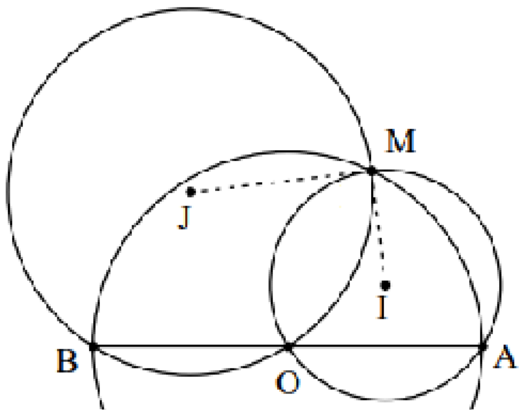



$$\frac{G-F}{O-A}=\left(\frac{G-F}{G-A}\frac{D-A}{D-F}\right)\frac{G-A}{A-B}\frac{B-C}{A-D}\left(\frac{D-F}{A-C}\frac{A-B}{A-O}\frac{C-A}{C-B}\right)$$




**例 68：如图 3，**圆 $A$ 交圆 $B$ 于 $P$、$I$ 两点，且 $PA\perp PB$，$D$ 是圆 $A$ 上一点，$D$、$E$ 关于 $A$ 对称，$DI$ 交圆 $B$ 于 $F$，$EI$ 交圆 $B$ 于 $G$，若 $G$ 在 $FB$ 上，则 $FG\perp DE$。

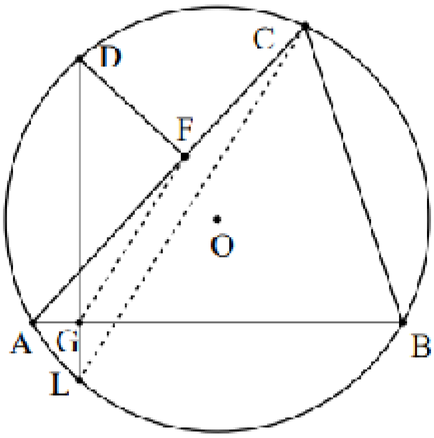
$$\frac{F-G}{E-D}=\frac{G-I}{I-D}\frac{F-G}{B-G}\left(\frac{I-B}{G-I}/\frac{G-I}{G-B}\right)\frac{I-G}{E-I}\frac{A-D}{E-D}\left(\frac{I-A}{I-B}\frac{I-E}{I-D}\right)\left(\frac{D-I}{D-A}/\frac{I-A}{D-I}\right)$$
。




**例 69：如图 3，**$O$ 是 $AB$ 中点，$M$ 是以 $AB$ 为直径的圆上一点，$I$、$J$ 分别是△$AOM$、△$BOM$ 的外心，求证：$MI\perp MJ$。

$$\frac{M-I}{M-J}=\frac{M-A}{M-B}\frac{O-B}{O-A}\left(\frac{B-M}{B-O}\frac{M-O}{M-J}\frac{M-I}{M-O}\frac{A-O}{A-M}\right)$$

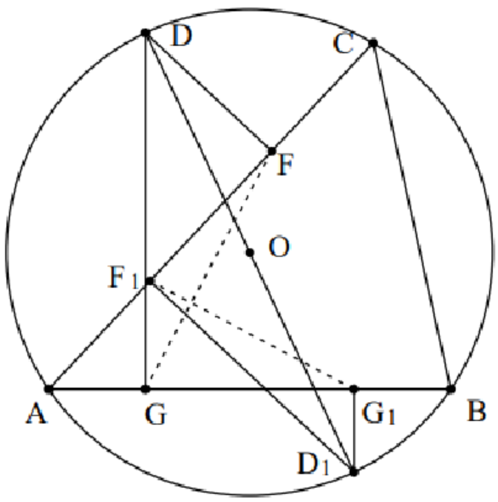
说明：由恒等式可推广。如图，$A$、$B$、$O$ 三点共线，$M$ 不在 $AB$ 上，$I$、$J$ 分别是△$AOM$、△$BOM$ 的外心，求证：$\angle IMJ=\angle AMB$。




**例 70：如图 3，**圆 $O$ 内接四边形 $ABCD$ 中，$D$ 在 $AC$、$AB$ 上的垂足分别为 $F$、$G$，$DG$ 交圆于 $L$，求证：$FG/\!/CL$。

$$\frac{G-F}{L-C}=\left(\frac{G-A}{D-L}\frac{D-F}{A-C}\right)\left(\frac{A-C}{A-D}\frac{L-D}{L-C}\right)\left(\frac{G-F}{G-A}\frac{D-A}{D-F}\right),$$

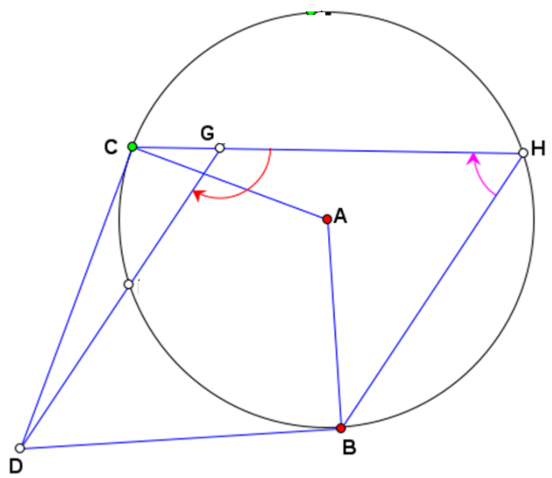
**例 71：如图 3，**△$ABC$ 中，$DD_1$ 是直径，$D$ 在 $AC$、$AB$ 上的垂足为 $F$、$G$，$D_1$ 在 $AC$、$AB$ 上的垂足为 $F_1$、$G_1$，求证：$FG\perp F_1G_1$。



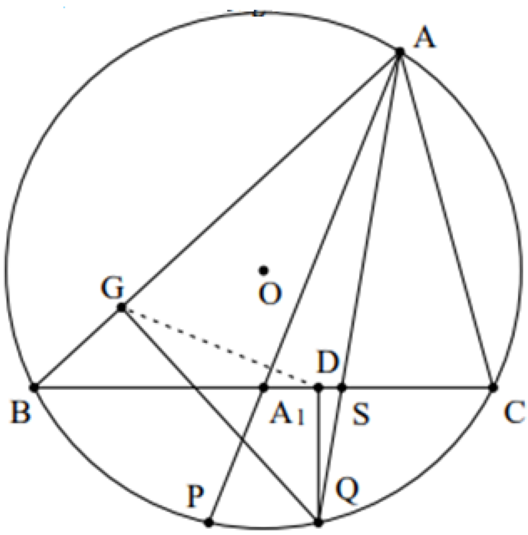

$$\frac{F-G}{F_1-G_1}=\frac{D_1-A}{D-A}\frac{F-D}{D_1-F_1}\frac{A-G}{A-G_1}\left(\frac{F_1-A}{F_1-G_1}\frac{D_1-G_1}{D_1-A}\right)\left(\frac{G-F}{G-A}\frac{D-A}{D-F}\right)\left(\frac{D_1-F_1}{A-F_1}\frac{A-G_1}{D_1-G_1}\right)$$

推广：△$ABC$ 中，$D$、$D_1$ 是任意点，$D$ 在 $AC$、$AB$ 上的垂足为 $F$、$G$，$D_1$ 在 $AC$、$AB$ 上的垂足为 $F_1$、$G_1$，求证：$FG$ 与 $F_1G_1$ 夹角等于∠$DAD_1$。

**例 72：如图 3，**△$BHC$ 中，$A$ 是外心，分别过 $B$、$C$ 作△$BHC$ 的外接圆的切线，两外接线交于点 $D$，△$ADB$ 的外接圆交 $CH$ 于 $G$，求证：$DG/\!/BH$。



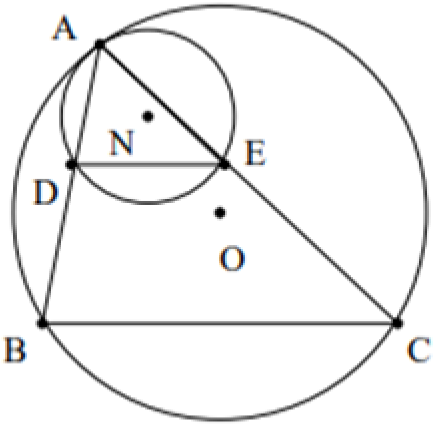

$$\frac{G-D}{H-B}=\frac{C-G}{H-C}\left(\frac{H-C}{H-B}/\frac{A-C}{A-D}\right)\left(\frac{G-A}{G-C}\frac{D-C}{D-A}\right)\left(\frac{G-D}{G-A}/\frac{C-D}{C-A}\right),$$




例 73：如图 3，△$ABC$ 中，$O$ 是外心，$A_1$ 是 $BC$ 中点，$S$ 在 $BC$ 上，且∠$BAA_1$=∠$SAC$，$AA_1$ 交圆 $O$ 于 $P$，$AS$ 交圆 $O$ 于 $Q$，$Q$ 在 $BA$、$BC$ 的垂足分别为 $G$、$D$，求证：$AP\perp DG$。

$$\frac{A-P}{D-G}=\frac{A-P}{A-A_1}\frac{A-B}{B-G}\frac{A-Q}{A-S}\left(\frac{A-C}{A-Q}/\frac{B-C}{B-Q}\right)\left(\frac{A-S}{A-B}/\frac{A-C}{A-A_1}\right)\left(\frac{B-G}{B-Q}\frac{D-Q}{D-G}\right)\frac{B-C}{D-Q}$$

例 74：如图 3，△$ABC$ 中，$D$、$E$ 分别在 $AB$、$AC$ 上，$DE$∥$BC$，$N$、$O$ 分别是△$ADE$、△$ABC$ 的外心，求证：$A$、$N$、$O$ 三点共线。

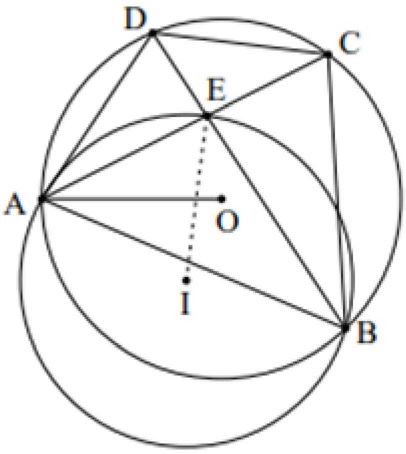



$$\frac{A-N}{A-O}=\frac{B-C}{D-E}\frac{A-E}{A-C}\frac{A-D}{A-B}\left(\frac{A-N}{A-D}\frac{E-D}{E-A}\right)/\left(\frac{A-O}{A-B}\frac{C-B}{C-A}\right),$$

说明：用到外心的性质：$\angle DEA+\angle NAD=90°$ 。

扩展：如图，△*ABC* 中，*D*、*E* 分别在 *AB*、*AC* 上，*N*、*O* 分别是△*ADE*、△*ABC* 的外心，求证：*A*、*N*、*O* 三点共线 ⇔ *DE* // *BC*。

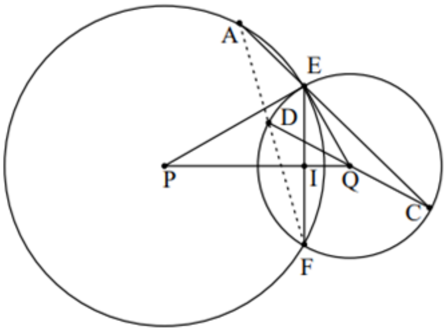
**例 75：如图 3，** 圆 *O* 内接四边形 *ABCD* 中，对角线交于 *E*，*I* 是△*ABE* 的外心，求证：*IE*⊥*DC*。




$$\frac{I-E}{D-C}=\frac{B-E}{B-D}\frac{A-E}{C-A}\left(\frac{B-A}{B-E}\frac{E-I}{A-E}\right)\left(\frac{C-A}{C-D}\frac{B-D}{B-A}\right),$$

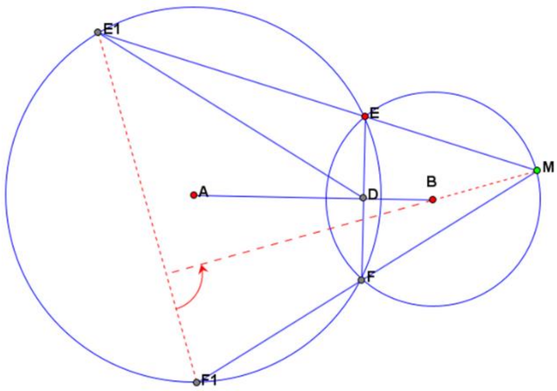
缩写为 $\frac{I-E}{D-C}=\left(\frac{B-A}{B-D}\frac{E-I}{C-A}\right)\left(\frac{C-A}{C-D}\frac{B-D}{B-A}\right)$，就看几何意义明显么？

**例 76：如图 3，** 圆 *P*、圆 *Q* 交于 *E*、*F*，圆 *P* 上有点 *P*，*AE* 交圆 *Q* 于 *C*，*CD* 是圆 *Q* 直径，求证：*A*、*D*、*F* 共线。




$$\frac{D-F}{A-F}=\frac{C-E}{E-A}\left(\frac{F-D}{C-F}\frac{A-E}{A-F}\frac{E-F}{E-P}\right)\left(\frac{C-F}{C-E}/\frac{E-F}{E-P}\right),$$

**例 77：如图 3，** 圆 $A$ 交圆 $B$ 于 $EF$ 两点，过圆 $B$ 上点 $M$，作直线 $ME$ 交圆 $A$ 于 $X$，作直线 $MF$ 交圆 $A$ 于 $Y$，求证 $BM \perp XY$。




$$\frac{B-M}{X-Y}=\left(\frac{M-B}{M-X}/\frac{M-Y}{B-D}\right)\left(\frac{X-M}{D-F}/\frac{X-Y}{Y-M}\right)\frac{D-F}{D-B},$$

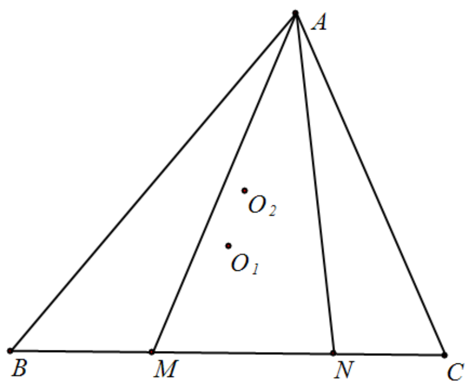



图 1

**例 78：如图 1，** 在锐角△$ABC$ 中，$AB>AC$, $M$, $N$ 是 $BC$ 边上不同的两点，使得$\angle BAM=\angle CAN$. 设△$ABC$ 和△$AMN$ 的外心分别为 $O_1$, $O_2$，求证：$O_1$, $O_2$, $A$ 三点共线。（2012 年全国高中数学联赛加试试题）

$$\frac{A-O_1}{A-O_2}=\frac{\frac{A-C}{A-N}}{\frac{A-M}{A-B}}\left(\frac{C-B}{C-A}\frac{A-O_1}{A-B}\right)/\left(\frac{N-M}{N-A}\frac{A-O_2}{A-M}\right)\frac{M-N}{B-C},$$

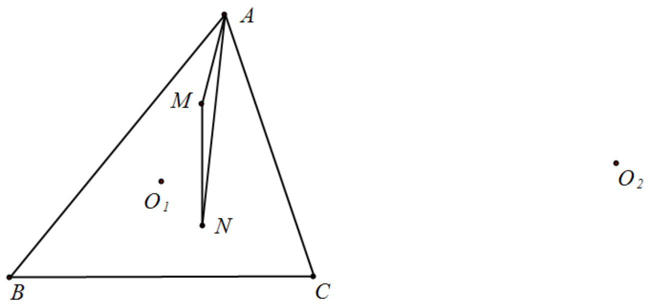



图 2

**例 79：如图 2，**在锐角△$ABC$ 中，$AB>AC$, $M$, $N$ 是△$ABC$ 内两点，使得∠$BAM$=∠$CAN$ 且 $MN\perp BC$. 设△$ABC$ 和△$AMN$ 的外心分别为 $O_1$, $O_2$，求证: $AO_1\perp AO_2$。

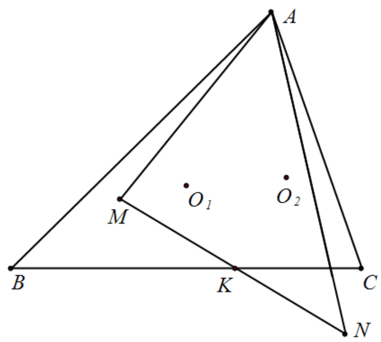



图 3

**例 80：如图 3，**在锐角△$ABC$ 中，$AB>AC$, $M$, $N$ 是△$ABC$ 内两点，使得∠$BAM$=∠$CAN$，$MN$ 交 $BC$ 于 $K$. 设△$ABC$ 和△$AMN$ 的外心分别为 $O_1$, $O_2$，求证: $\angle O_1AO_2=\angle BKM$ 。

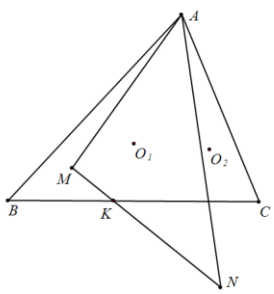


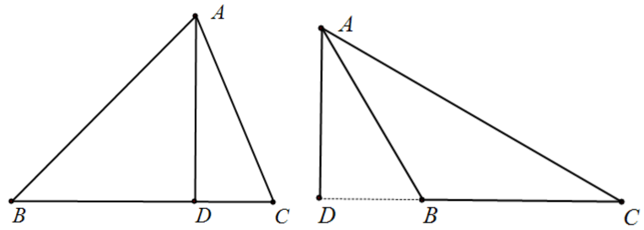

图 4

**例 81：如图 4，**在锐角△$ABC$ 中，$AB>AC$, ∠$CAN$>∠$MAB$，$MN$ 交 $BC$ 于 $K$，设△$ABC$ 和△$AMN$ 的外心分别为 $O_1$, $O_2$，求证: $\angle CAN-\angle MAB=\angle O_1AO_2-\angle BKM$ 。

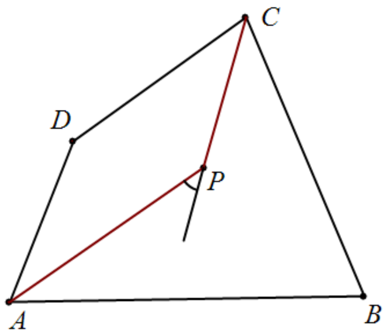
说明：显然例 1 和例 2 是例 3 的特殊情况，例 3 是例 4 的特殊情况。

**角度关系**

**例 82：如图 4，**$\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于 $D$，求证：$BA=BC\Leftrightarrow 2\angle CAD=\angle ABC$。

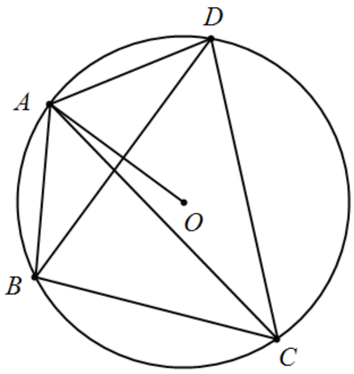



$$\frac{\frac{B-A}{B-C}}{\left(\frac{A-C}{A-D}\right)^2}\frac{\frac{A-C}{A-B}}{\frac{C-B}{C-A}}\left(\frac{B-C}{A-D}\right)^2=-1,$$




**例 83：如图 4，**四边形 $ABCD$，$\angle A$、$\angle C$ 的角平分线交于点 $P$，求证：直线 $CP$、$PA$ 的夹角等于 $\frac{\angle D-\angle B}{2}$。

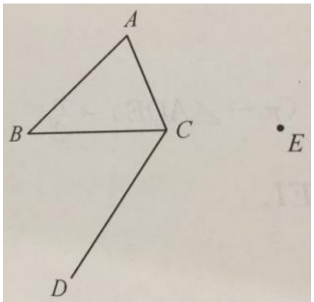
$$\frac{\left(\frac{C-P}{P-A}\right)^2\frac{B-A}{B-C}}{\frac{D-C}{D-A}}\frac{\frac{A-P}{A-B}}{\frac{A-D}{A-P}}\frac{\frac{C-B}{C-P}}{\frac{C-P}{C-D}}=1$$




**例 84：如图 1，** 圆 $O$ 内接四边形 $ABCD$，$OA\perp BD$，求证：$CA$ 平分 $\angle BCD$。

$$\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{C-A}{C-D}}\frac{\frac{O-A}{B-D}}{\frac{A-O}{A-C}\frac{D-C}{D-A}}\frac{\frac{A-C}{A-D}}{\frac{B-C}{B-D}}=1,\quad \left(\frac{B-S}{A-D}\frac{B-D}{B-C}\right)\frac{C-A}{B-S}\frac{\frac{B-C}{B-D}}{\frac{A-C}{A-D}}=-1,$$

**例 85：如图 1，** 点 $D$ 是△$ABC$ 的旁心, 点 $A$ 关于直线 $DC$ 的对称点为 $E$. 证明:$B$、$C$、$E$ 三点共线.（2016 年江西省预赛）

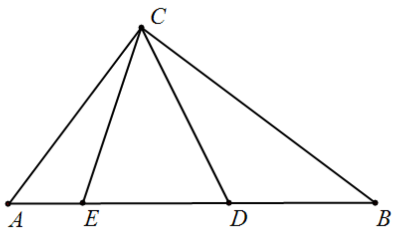


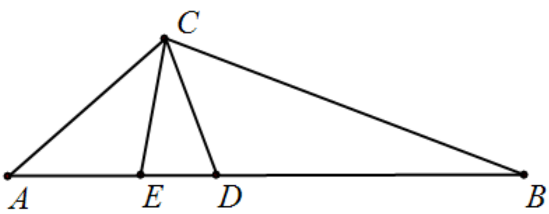

$$\frac{B-C}{C-E}=\frac{\frac{C-B}{C-D}\frac{C-D}{C-A}}{\frac{C-D}{A-C}\frac{C-E}{C-D}},$$

**例 86：如图 1，** △$ABC$，$AD$ 是角平分线，$O$、$P$、$Q$ 分别是△$ABC$、△$ABD$、△$ADC$ 的外心，求证：$OP$=$OQ$。

$$\frac{\frac{P-Q}{P-O}}{\frac{Q-O}{Q-P}}=\left(\frac{A-B}{P-O}\frac{A-C}{O-Q}\right)\left(\frac{P-Q}{A-D}\right)^2\frac{\frac{A-D}{A-B}}{\frac{A-C}{A-D}}$$

**例 87：如图 1，** 已知 $D$、$E$ 是直角△$ABC$ 斜边 $AB$ 上的两点，且 $AD$=$AC$, $BE$=$BC$, 求∠$ECD$ 的度数.



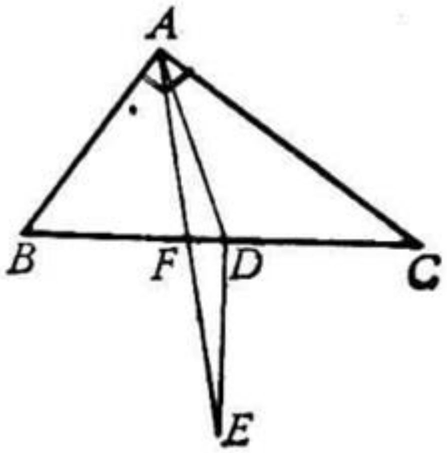



$$\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\left(\frac{C-D}{C-E}\right)^2}=-\frac{\frac{E-C}{A-B}\frac{B-A}{D-C}}{\frac{C-B}{C-E}\frac{C-D}{C-A}}\left(\frac{C-B}{C-A}\right)^2$$，所以∠*ECD*=45°。

将上述恒等式化简得 $\dfrac{\frac{A-C}{C-B}}{\left(\frac{C-D}{C-E}\right)^2}=\dfrac{\frac{E-C}{A-B}\frac{B-A}{D-C}}{\frac{C-B}{C-E}\frac{C-D}{C-A}}$，于是得到推广命题：

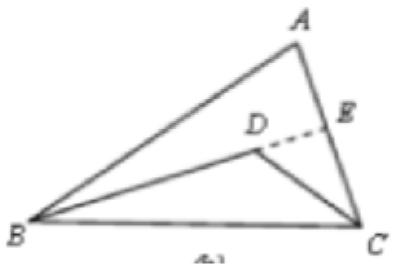
**例 88：如图 1，**△*ABC* 中，已知 *D*、*E* 是 *AB* 上的两点，且 *AD*=*AC*, *BE*=*BC*, 求∠*ECD* 与∠*ACB* 互补。

**例 89：如图 1，**在直角△*ABC* 中，直角 *A* 的平分线交 *BC* 的中垂线 *DE* 于点 *E*, 则∠*DAE*=∠*DEA*.




重复

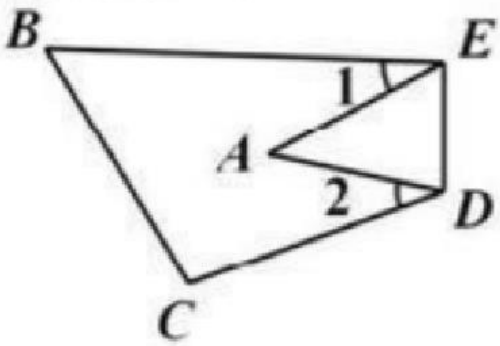
$$\frac{\frac{A-D}{A-E}}{\frac{E-A}{E-D}}=\frac{\frac{A-C}{A-E}\frac{C-B}{C-A}}{\frac{A-E}{A-B}\frac{A-C}{A-D}}\left(\frac{A-C}{A-B}\frac{D-E}{B-C}\right),$$




**例 90：如图 1，**∠BDC=∠ABD+∠A+∠ACD。

$$\frac{D-C}{D-B}=\frac{B-A}{B-D}\frac{C-D}{C-A}\frac{A-C}{A-B}$$

(5)如图，把△$ABC$纸片沿$DE$折叠，当点$A$落在四边形$BCDE$内部时，则∠$A$与∠1＋∠2之间有一种数量关系始终保持不变，你发现的规律是（　　）

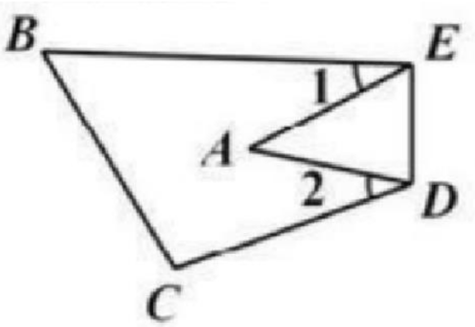



A. $\angle A=\angle 1+\angle 2$

B. $2\angle A=\angle 1+\angle 2$

C. $3\angle A=2\angle 1+\angle 2$

D. $3\angle A=2(\angle 1+\angle 2)$




**例 91：如图 1，**把△$ABC$ 纸片沿 $DE$ 折叠，当点 $A$ 落在四边形 $BCDE$ 内部时，探究∠1+∠2 与∠$A$ 之间的数量关系。

传统证法：在△$ADE$ 中，∠$A$=180°－∠$ADE$-∠$AED$，

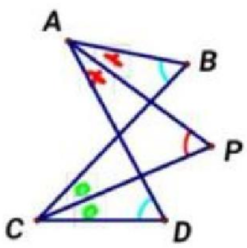
由折叠的性质得：∠1+2∠$ADE$=180°，∠2+2∠$AED$=180°，

则∠1+∠2=360°-2∠$ADE$-2∠$AED$=2（180°－∠$ADE$-∠$AED$）=2∠$A$。

$$\frac{E-A}{E-B}\frac{D-C}{D-A}=\frac{D-C}{E-B}\frac{A-E}{A-D}$$

同义反复价值

**例 92：**

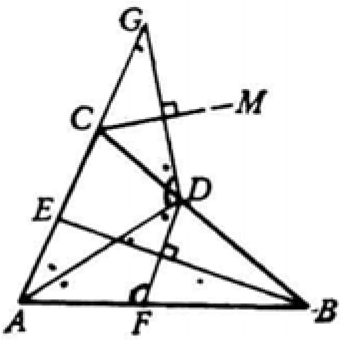



条件：AP、CP是角平分线

结论：$\angle P=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$

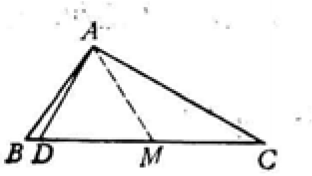
$$\frac{\left(\frac{P-C}{P-A}\right)^2}{\frac{B-C}{B-A}\frac{D-C}{D-A}}=\frac{\frac{A-B}{A-P}\frac{C-P}{C-D}}{\frac{A-P}{A-D}\frac{C-B}{C-P}},$$

例 93：如图 1，已知 $AD$、$BE$ 是△$ABC$ 的∠$A$ 和∠$B$ 的平分线，$DF\perp BE$ 交 $AB$ 于点 $F$, $DG$ 垂直于∠$C$ 的外角平分线 $CM$，且交 $AC$ 的延长线于点 $G$．求证:∠$AFD$=∠$ADG$.




$$\left(\frac{\frac{F-A}{F-D}}{\frac{D-A}{D-G}}\right)^2=\frac{\frac{A-C}{A-D}\frac{C-B}{D-F}\frac{G-D}{C-A}}{\frac{A-D}{A-B}\frac{F-D}{A-B}\frac{B-C}{D-G}}\left(\frac{A-F}{A-B}\right)^2$$

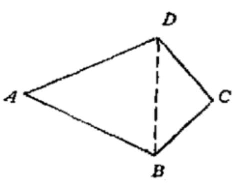
例 94：如图 1，在△$ABC$ 中, ∠$B$=2∠$C$, $AD\perp AC$ 交 $BC$ 于点 $D$．求证:$CD$=2$AB$.




说明：取 $CD$ 中点 $M$, 改证 $AB$=$AM$.

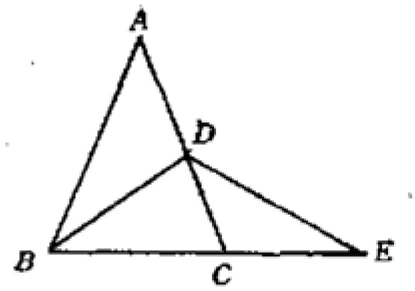
$$\frac{\frac{B-A}{B-C}}{\frac{C-B}{M-A}}\frac{\left(\frac{C-B}{C-A}\right)^2}{\frac{B-A}{B-C}}\frac{\frac{A-C}{A-M}}{\frac{C-B}{C-A}}=1,$$

例 95：如图 1，$AB$=$AD$, ∠$B$=∠$D$。求证:$CB$=$CD$。



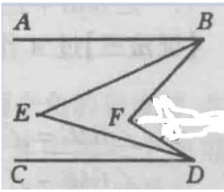
$$\frac{\frac{B-A}{B-D}\cdot\frac{D-C}{D-A}\cdot\frac{B-D}{B-C}}{\frac{D-B}{D-A}\cdot\frac{B-A}{B-C}\cdot\frac{D-C}{D-B}}=1,$$

**例 96：如图 1，**△*ABC* 中，*AB*=*AC*，*BD* 是∠*ABC* 的平分线，*E* 是边 *BC* 延长线上一点, 且 *BD*=*DE*。求证: *CD*=*CE*。

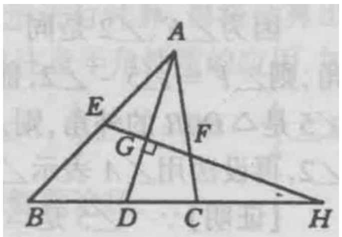



$$\frac{\frac{D-E}{A-C}}{\frac{C-B}{E-D}}=\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{B-A}{B-C}}\cdot\frac{\frac{B-A}{B-D}}{\frac{B-D}{B-C}}\left(\frac{\frac{B-D}{B-C}}{\frac{C-B}{E-D}}\right)^2$$

**例 97：如图 1，***AB*//*CD*, *BE* 和 *DE* 分别是∠*ABF* 和∠*CDF* 的平分线, 求证: 2∠*BED*=∠*BFD*.



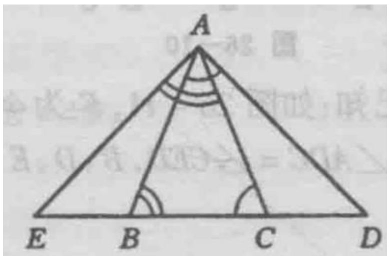

$$\frac{\left(\frac{E-B}{E-D}\right)^2}{\frac{F-B}{F-D}}\cdot\frac{\frac{B-F}{B-E}}{\frac{B-E}{B-A}}\cdot\frac{\frac{D-E}{D-F}}{\frac{D-C}{D-E}}\cdot\frac{C-D}{A-B}=1,$$




**例 98：如图 1，**△*ABC* 中, *AD* 平分∠*BAC*, *EF*⊥*AD* 于 *G*, 交 *AB* 于 *E*, 交 *AC* 于 *F*, 交 *BC* 的延长线于 *H*. 求证: $2\angle H=\angle ACB-\angle B$。

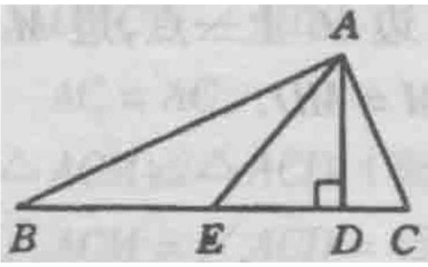
$$\frac{\left(\frac{C-B}{F-E}\right)^2\frac{B-A}{B-C}}{\frac{C-B}{C-A}}=\frac{\frac{B-A}{E-F}}{\frac{F-E}{C-A}},$$

$$2\angle H=2\left(90^{\circ}-\angle ADH\right)=2\left(90^{\circ}-\angle B-\frac{1}{2}\angle BAC\right)=180^{\circ}-2\angle B-\angle BAC=\angle ACB-\angle B$$




**例 99：如图 1，**锐角△*ABC* 中, 在 *BC* 所在直线上取一点 *D*, 使∠*BAD*=∠*ACB*. 再取另一点 *E*, 使∠*CAE*=∠*ABC*. 求证:*AD*=*AE*.

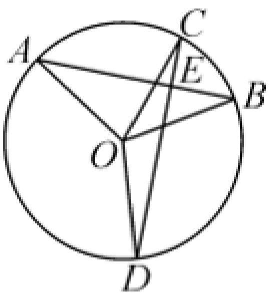
$$\frac{\frac{E-A}{B-C}\frac{C-B}{C-A}\frac{A-C}{A-E}}{\frac{C-B}{D-A}\frac{A-D}{A-B}\frac{B-A}{B-C}}=1,$$




**例 100：如图 1，**△*ABC* 中, ∠*BAC*=90°，*E* 为 *BC* 上的点, 且 *BE*=*AE*. *AD*⊥*BC*, ∠*BAD*=3∠*CAD*. 求证:*AD*=*ED*.

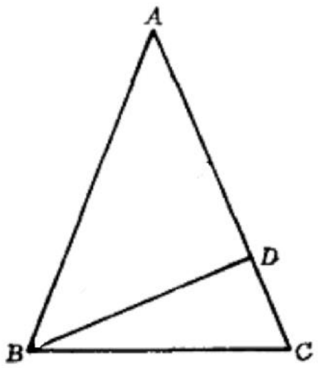
$$\frac{\frac{E-A}{B-C}}{\frac{A-D}{A-E}}=\left(\frac{\frac{A-E}{A-B}}{\frac{B-A}{B-C}}\right)^{2}\frac{\left(\frac{A-C}{A-D}\right)^{3}}{\frac{A-D}{A-B}}\left(\frac{\frac{A-D}{C-B}}{\frac{A-C}{A-B}}\right)^{3}。$$

**例 101：如图 1，**在圆 *O* 中，弦 *AB*⊥*CD*, 垂足为 *E*, 求∠*AOD*+∠*BOC* 的度数.




$$\left(\frac{O-D}{O-A}\frac{O-C}{O-B}\right)\frac{\frac{B-O}{B-A}}{\frac{A-B}{A-O}}\frac{\frac{C-D}{C-O}}{\frac{D-O}{D-C}}\left(\frac{A-B}{C-D}\right)^{2}=1,$$

例 102：如图 3，△*ABC* 中，*AB*=*AC*, *BD*⊥*AC*。求证：2∠*DBC*=∠*A*。



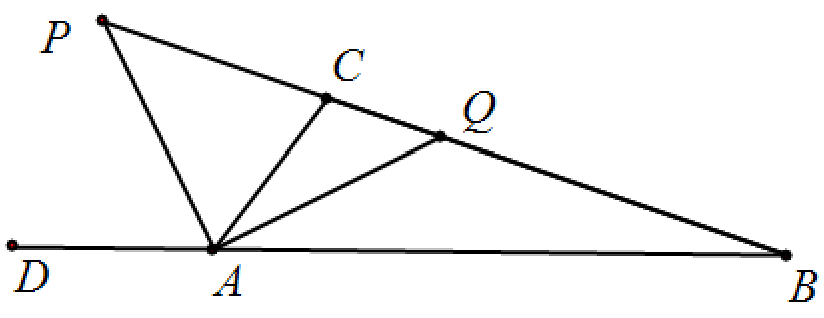

$$\frac{\left(\frac{B-D}{B-C}\right)^2}{\frac{A-C}{A-B}}=-\frac{\frac{B-A}{B-C}}{\frac{C-B}{C-A}}\left(\frac{B-D}{A-C}\right)^2,$$

说明：证明原题的一般方法是作高 *AE*。恒等式方法可以一次证明三个命题。

例 103：如图 3，△*ABC* 中, *AB*=*AC*，若∠*B* 的平分线交 *AC* 于 *P*。求证∠*APB*=3∠*PBC*。

$$\frac{\left(\frac{B-P}{B-C}\right)^3}{\frac{P-B}{P-A}}=\frac{\frac{B-P}{B-C}}{\frac{B-A}{B-P}}\frac{\frac{B-A}{B-C}}{\frac{C-B}{C-A}}\frac{A-P}{A-C}$$

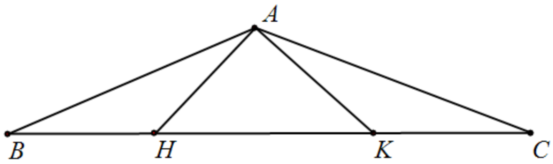
例 104：如图 3，△*ABC* 的边 *BC* 延长至 *D*, ∠*BAC* 的平分线交 *BC* 于 *K*, 求证∠*ABD*+∠*ACD*=2∠*AKD*。




$$\frac{\frac{B-A}{B-D}\frac{C-A}{C-D}}{\left(\frac{K-A}{K-D}\right)^2}=\frac{\frac{A-C}{A-K}}{\frac{A-K}{A-B}}\frac{(D-K)^2}{(B-D)(C-D)},$$

**例 105：如图 3，**△*ABC* 中，将 *BA* 延长至 *D*, ∠*CAB*、∠*CAD* 的平分线交直线 *BC* 于 *P*、*Q*。若 *AP*=*AQ*，求证∠*ACB*−∠*ABC*=90°。

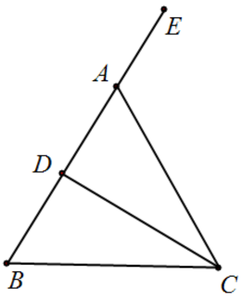
$$\left(\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{B-A}{B-C}}\right)^2=-\frac{\frac{A-P}{A-B}}{\frac{A-C}{A-P}}\frac{\frac{Q-A}{A-C}}{\frac{B-A}{Q-A}}\left(\frac{\frac{C-B}{P-A}}{\frac{Q-A}{B-C}}\right)^2,$$




**例 106：如图 3，**△*ABC* 中，∠*BAC* 是纯角，*AB*、*AC* 的垂直平分线交 *BC* 于 *H*、*K*。求证∠*HAK*=2∠*BAC*−180°。

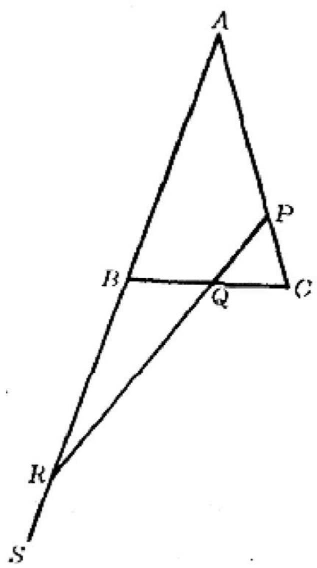
$$\frac{\left(\frac{A-C}{A-B}\right)^2}{\frac{A-K}{A-H}}=-\frac{\frac{A-C}{A-K}}{\frac{C-B}{C-A}}\frac{\frac{B-C}{B-A}}{\frac{A-B}{A-H}}$$

说明：注意等式右边为负实数。




**例 107：如图 3，**△*ABC* 中，*AB*=*AC*，延长 *BA* 至 *E*, 若∠*ACB* 的平分线交 *AB* 于 *D*，求证∠*CDE*=$\frac{3}{4}$∠*CAE*。

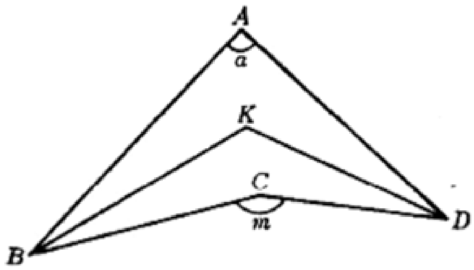
$$\frac{\left(\frac{B-A}{D-C}\right)^4}{\left(\frac{B-A}{A-C}\right)^3}=\left(\frac{\frac{C-B}{C-D}}{\frac{C-D}{C-A}}\right)^2\frac{\frac{B-A}{B-C}}{\frac{C-B}{C-A}},$$




**例 108：如图 3，**$AB=AC, CP=CQ$，求证$\angle SRP=3\angle RPC$。

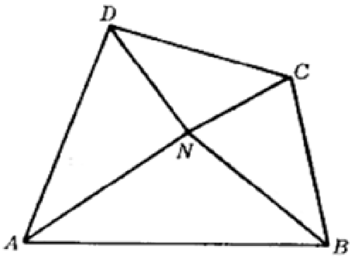
$$\frac{\frac{Q-P}{A-B}}{\left(\frac{A-C}{P-Q}\right)^3}=\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{B-A}{B-C}}\left(\frac{\frac{Q-P}{B-C}}{\frac{A-C}{P-Q}}\right)^2,$$

**例 109：如图 3，**$\angle ABC$、$\angle ADC$ 的平分线交于 $K$。求证：$\angle BAD+\angle BCD=2\angle BKD$。

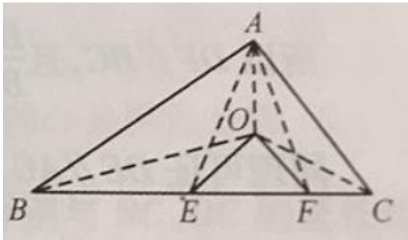



$$\frac{\left(\frac{K-D}{K-B}\right)^2}{\frac{A-D}{A-B}\frac{C-D}{C-B}}=\frac{\frac{B-A}{B-K}\frac{D-K}{D-A}}{\frac{B-K}{B-C}\frac{D-C}{D-K}}$$

**例 110：如图 3，**$NA$、$NB$ 是$\angle DAB$、$\angle CBA$ 的平分线。求证$\angle ADC+\angle BCD=2\angle ANB$。




$$\frac{\left(\frac{N-B}{N-A}\right)^2}{\frac{D-C}{D-A}\frac{C-B}{C-D}}=\frac{\frac{A-D}{A-N}\frac{B-N}{B-C}}{\frac{A-N}{A-B}\frac{B-A}{B-N}}$$

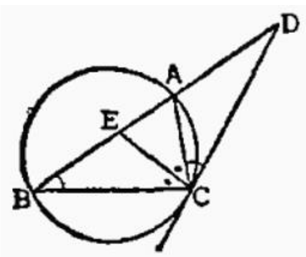



**例 112：如图 3，**△*ABC* 中, 0 为内心, 点 *E*、*F* 都在大边 *BC* 上. 已知 *BF*=*BA*, *CE*=*CA*. 求证: ∠*EOF*=∠*B*+∠*C*.

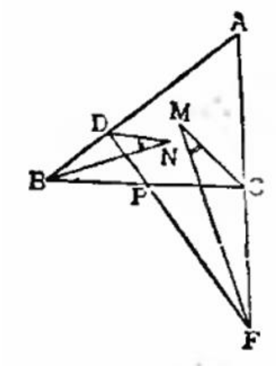
$$\frac{\frac{O-F}{O-E}}{\frac{B-A}{B-C}\frac{C-B}{C-A}}=\frac{\frac{O-F}{O-E}}{\left(\frac{A-F}{A-E}\right)^2}\frac{\frac{A-F}{A-B}}{\frac{F-B}{F-A}}\frac{\frac{A-C}{A-E}}{\frac{E-A}{E-C}}\frac{B-F}{E-C}。$$

说明：注意 *O* 是△*AEF* 的外心，2∠*EAF*=∠*EOF*。

**例 113：如图 3，**过△*ABC* 的外接圆上的点 *C*，作切线与 *BA* 的延长线交于点 *D*，以 *D* 为圆心、*DC* 为半径的圆与 *AB* 相交于点 *E*，则 *CE* 平分∠*ACB*.



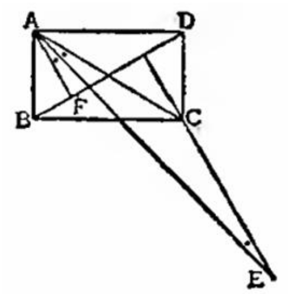

$$\frac{\frac{C-B}{C-E}}{\frac{C-E}{C-A}}=\frac{\frac{C-A}{C-D}}{\frac{B-D}{B-C}}\frac{\frac{E-D}{E-C}}{\frac{C-E}{C-D}}\frac{B-D}{E-D},$$



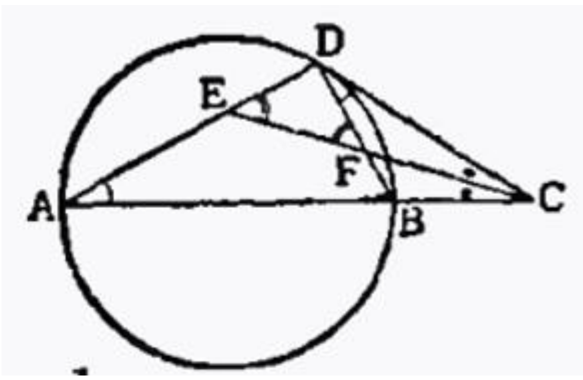

**例 114：如图 3，** 在△*ABC* 的边 *AB* 上任取点 *D*, *AC* 的延长线上任取点 *F*，连结 *DF*。若∠*ADF* 的平分线与∠*ABC* 的平分线交于 *N*. ∠*AFD* 的平分线与∠*ACB* 的平分线交于 *M*, 则∠*BND*=∠*CMF*.

$$\left(\frac{\frac{N-B}{N-D}}{\frac{M-C}{M-F}}\right)^2=\frac{\frac{D-A}{D-N}}{\frac{D-N}{D-F}}\frac{\frac{B-N}{B-C}}{\frac{B-A}{B-N}}\frac{\frac{C-B}{C-M}}{\frac{C-M}{C-A}}\frac{\frac{F-M}{F-A}}{\frac{F-D}{F-M}}\frac{A-B}{A-D}\frac{A-F}{A-C},$$

**例 115：如图 3，** 若从长方形 *ABCD* 的顶点 *C* 引对角线 *BD* 的垂线, 与∠*BAD* 的平分线相交于点 *E*，则 *AC*=*CE*。重复

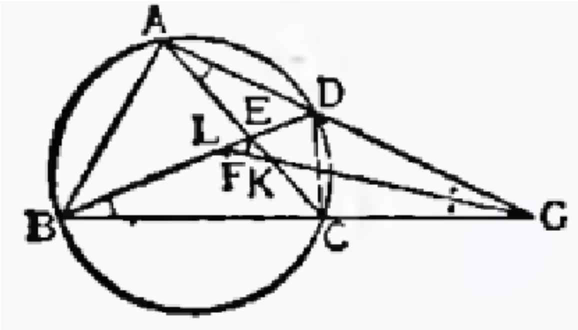



$$\frac{\frac{A-C}{A-E}}{\frac{E-A}{E-C}}=\frac{\frac{A-D}{A-E}}{\frac{A-E}{A-B}}\frac{\frac{A-C}{A-B}}{\frac{B-A}{B-D}}\frac{E-C}{B-D}\frac{A-B}{A-D},$$



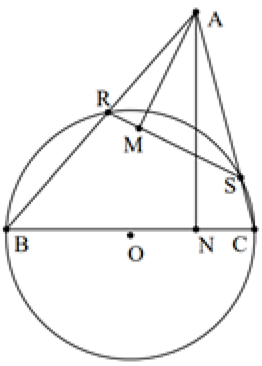
例116：如图3，从直径$AB$的延长线上一点$C$作该圆的切线$CD$, 切点为$D$, 若$AD$、$BD$和$\angle ACD$的平分线的交点为$E$、$F$, 则$DE=DF$.

$$\frac{\frac{A-D}{E-C}}{\frac{C-E}{B-D}}=\frac{\frac{C-A}{C-E}}{\frac{C-E}{C-D}}\frac{\frac{A-D}{A-C}}{\frac{D-C}{D-B}},$$




例 117：如图 3，设圆内接四边形 $ABCD$ 的边 $AD$、$BC$ 的延长线交于点 $G$, $AC$、$BD$ 交于点 $E$, 过 $E$ 作 $AGB$ 的平分线交 $BD$、$AC$ 于 $F$、$K$，求证：$EF=EK$。

$$\frac{\frac{B-D}{K-G}}{\frac{G-K}{C-A}}=\frac{\frac{C-B}{G-K}}{\frac{G-K}{D-A}}\frac{\frac{D-B}{D-A}}{\frac{C-B}{C-A}}。$$




例 118：如图 3，圆内接四边形 $BCSR$，延长 $BR$、$CS$ 交于点 $A$，$A$ 在 $BC$、$RS$ 上的垂足为 $N$、$M$，求证：$\angle BAM=\angle CAN$。

$$\frac{A-M}{R-B}/\frac{S-C}{A-N}=\left(\frac{A-N}{B-C}\frac{A-M}{R-S}\right)\left(\frac{R-S}{R-B}\frac{C-B}{C-S}\right)。$$

例 119：如图 8，两圆交于 $A$，$B$ 两点，过 $A$，$B$ 分别作直线与两圆分别交于 $C$，$D$，$F$，$F$，求证：$CE/\!/DF$。

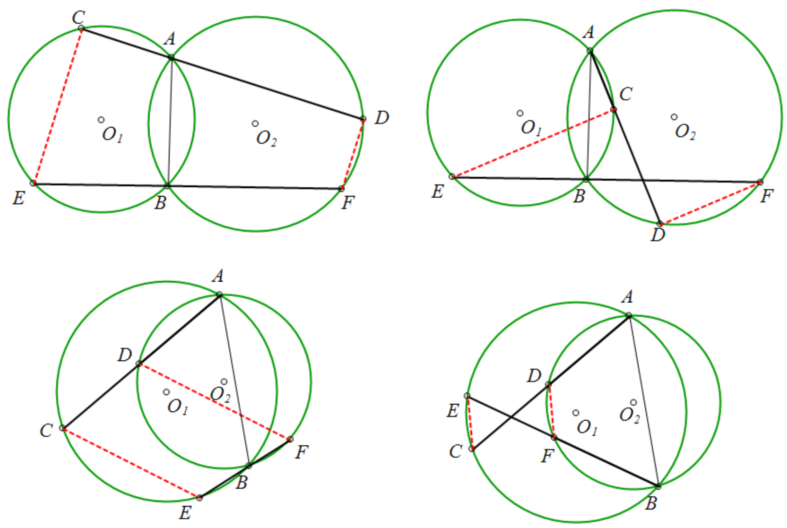



图 8 两相交圆产生平行线的多种情形

证明：$\frac{C-E}{D-F}=\frac{C-A}{A-D}\frac{E-B}{B-F}\frac{(B-A)(C-E)}{(B-E)(C-A)}\frac{(A-D)(F-B)}{(A-B)(F-D)}$。

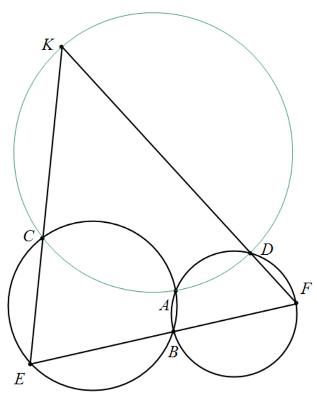
说明：$\frac{C-E}{D-F}\in R \Leftrightarrow CE//DF$，$\frac{C-A}{A-D}\in R \Leftrightarrow C$、$A$、$D$ 三点共线，

$\frac{E-B}{B-F}\in R \Leftrightarrow E$、$B$、$F$ 三点共线，$\frac{(B-A)(C-E)}{(B-E)(C-A)}\in R \Leftrightarrow A$、$C$、$E$、$B$ 四点共圆，

$\frac{(A-D)(F-B)}{(A-B)(F-D)}\in R \Leftrightarrow A$、$B$、$F$、$D$ 四点共圆，

上述恒等式的成立是一目了然的。基于恒等式可知，五个条件中任意四个成立，可推得剩下一个成立。这意味着恒等式方法不单证明了原命题，还获得了新命题。文[24]也曾建立关于此题的恒等式证明，但需要用到共形几何代数等较复杂的数学知识，且运算量大。

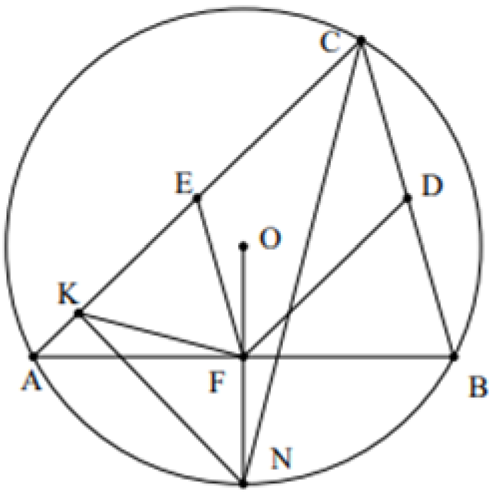
此题情形多样（图8），传统几何默认解答只针对第一种情形，因而认为证明简单：$\angle ECA=\angle ABF=180^\circ-\angle ADF$，所以 $CE//DF$。事实上，$\angle ECA=\angle ABF$ 在第二种情形中就不成立了，此时 $\angle ECA=180^\circ-\angle ABF$。



例 120：如图 3，已知 $A$、$B$、$C$、$E$ 四点共圆，$A$、$B$、$F$、$D$ 四点共圆，$E$、$F$、$B$ 三点共线，$CE$ 交 $DF$ 于 $K$，求证：$K$、$C$、$A$、$D$ 四点共圆。

$$\frac{\dfrac{D-F}{C-E}}{\dfrac{A-D}{C-A}}=\frac{B-F}{E-B}\,\frac{\dfrac{C-A}{A-B}}{\dfrac{E-C}{E-B}}\,\frac{\dfrac{D-F}{D-A}}{\dfrac{F-B}{B-A}}。$$

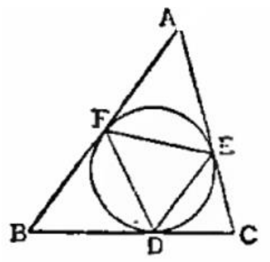
说明：若∠$CAD$=180°，则点 $K$ 在无穷远处，$CE$∥$DF$。于是便与上一题相同。这从恒等式可比较清楚看出。




例 121：如图 3，△$ABC$ 中，$D$、$E$、$F$ 分别是 $BC$、$CA$、$AB$ 的中点，$N$ 是劣弧 $AB$ 的中点，$NK$⊥$CA$ 于 $K$，求证：∠$DFK$+∠$KFE$=180°。

$$\frac{D-F}{F-K}/\frac{F-K}{F-E}=-\frac{F-E}{B-C}\frac{F-D}{A-C}\left(\frac{A-C}{A-K}\right)^2\left(\frac{K-A}{K-F}\frac{N-F}{N-A}\right)^2\left(\frac{C-B}{C-A}\left(\frac{N-A}{N-F}\right)^2\right)。$$

说明：∠$BCA$+2∠$ANF$=180° $\Leftrightarrow \dfrac{C-B}{C-A}\left(\dfrac{N-A}{N-F}\right)^2\in R^-$。

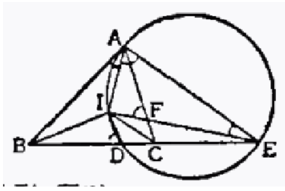



例 122：如图 3，△$ABC$ 的内切圆分别交 $BC$、$CA$、$AB$ 于 $D$、$E$、$F$，求证：
$2\angle FDE=\angle B+\angle C$。

证明：$\dfrac{\frac{B-A}{B-C}\frac{C-B}{C-A}}{\left(\frac{D-F}{D-E}\right)^2}=\dfrac{\frac{C-B}{D-F}\frac{D-E}{B-C}}{\frac{F-D}{A-B}\frac{A-C}{E-D}}$。

对比传统证法：$\angle B+\angle C=180^{\circ}-2\angle BDF+180^{\circ}-2\angle EDC$

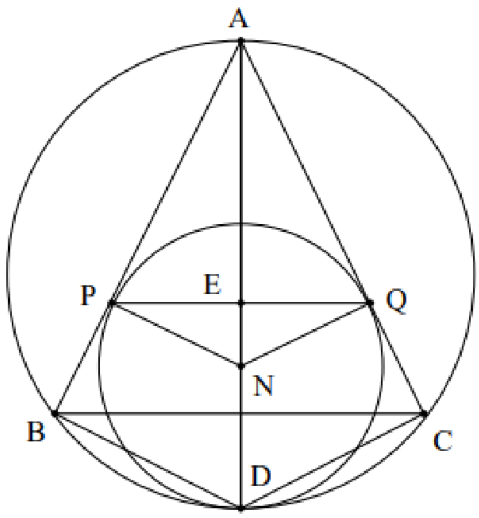
$=2(180^{\circ}-\angle BDF-\angle EDC)=2\angle FDE$，是不是感觉有相通之处。




**例 123：如图 3，**设过△*ABC* 的内心 *I* 作一圆和边 *AB* 切于点 *A*, 和 *BC* 的交点为 *D*、*E*, 则 *IC* 平分∠*DIE*.

$$\dfrac{\frac{I-E}{I-C}}{\frac{I-C}{I-D}}=\dfrac{\frac{C-B}{C-I}\frac{A-I}{A-B}\frac{E-I}{E-A}\frac{A-E}{A-I}}{\frac{C-I}{C-A}\frac{A-C}{A-I}\frac{A-I}{A-B}\frac{C-B}{D-I}},$$

**例 124：如图 3，**△*ABC* 中, *AB*=*AC*, 圆 *N* 内切于△*ABC* 的外接圆, 并与 *AB*, *AC* 分别相切于 *P*, *Q*, 求证:线段 *PQ* 的中点 *E* 是△*ABC* 内切圆的圆心.（1978 年 *IMO* 试题）。

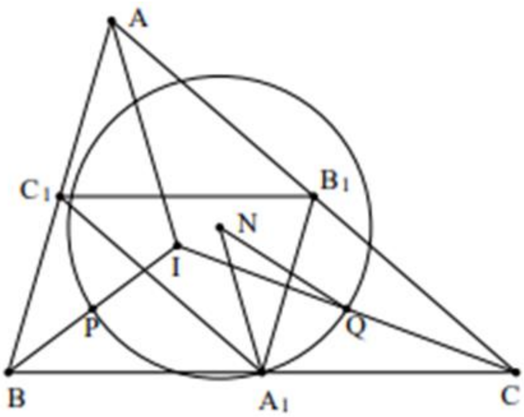



$$\frac{B-A}{B-E}/\frac{B-E}{B-C}=$$

$$\frac{B-A}{P-A}\frac{(B-C)(P-Q)}{(P-E)^2}\left(\frac{P-N}{B-D}\right)^2\left(\frac{D-B}{D-P}/\frac{E-B}{E-P}\right)^2\left(\frac{P-A}{P-Q}/\frac{N-P}{N-A}\right)\left(\frac{N-P}{N-A}/\left(\frac{P-N}{P-D}\right)^2\right)$$

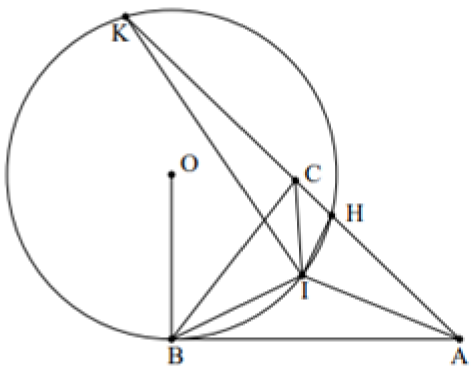
求证结论中出现了平方项$(B-E)^2$，如果条件中只有一项含有$B-E$则容易产生连锁反应，因为这一项会被平方。顺带该项其他部分也会被平方，这些平方项或者被新的平方项消去，或者一分为二，需要两个一次项才能消去。这会导致恒等式变长，变复杂。因此读者遇到此类问题要有心理准备。

**例 125：如图 3，**△$ABC$ 中，$I$ 是内心，$A_1$、$B_1$、$C_1$ 分别是 $BC$、$CA$、$AB$ 的中点，$P$、$Q$ 分别是 $IB$、$IC$ 的中点，$N$ 是△$PA_1Q$ 的外心，求证：$A_1N$ 是∠$C_1A_1B_1$ 的平分线。



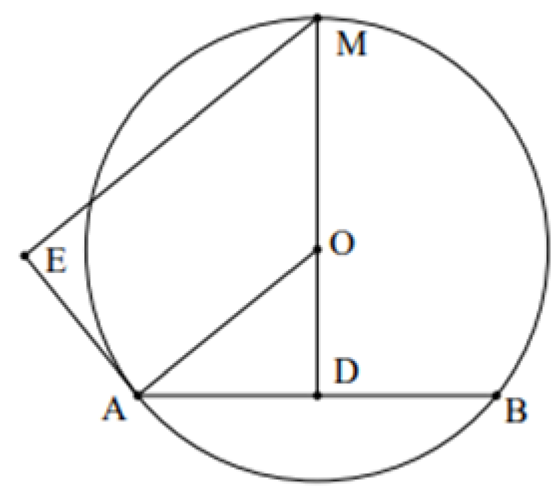

$$\frac{A_1-C_1}{A_1-N}/\frac{A_1-N}{A_1-B_1}=\frac{A_1-C_1}{C-A}\frac{A_1-B_1}{A-B}\left(\frac{P-Q}{B-C}\right)^2\left(\frac{I-C}{P-A_1}\right)^2\left(\frac{I-B}{Q-A_1}\right)^2\left(\frac{P-A_1}{P-Q}\frac{A_1-Q}{A_1-N}\right)^2\left(\frac{C-B}{C-I}/\frac{C-I}{C-A}\right)\left(\frac{B-A}{B-I}/\frac{B-I}{B-C}\right)$$

**例 126：如图 3，**△$ABC$ 中，$I$ 是内心，$OB\perp BA$，以 $O$ 为圆心，$OB$ 为半径作圆，交 $AC$ 于 $H$、$K$ 两点，且 $I$ 在该圆上，求证：$IC$ 是∠$HIK$ 的角平分线。



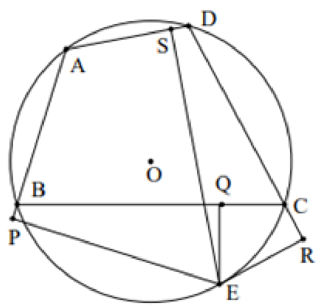

$$\frac{I-K}{I-C}/\frac{I-C}{I-H}=\frac{H-K}{A-C}\left(\frac{C-A}{C-I}/\frac{C-I}{C-B}\right)\left(\frac{B-H}{B-I}/\frac{K-H}{K-I}\right)\left(\frac{H-I}{H-B}/\frac{B-C}{B-I}\right),$$

例 127：如图 3，△*MAB* 中，*O* 是外心，*D* 是 *AB* 中点，*EM*∥*AO*，*EA*⊥*AO*，求证：*MD*=*ME*。




$$\frac{E-M}{E-D}/\frac{D-E}{D-M}=\left(\frac{E-M}{E-A}\frac{A-B}{D-M}\right)\left(\frac{A-E}{A-M}/\frac{D-E}{D-M}\right)^2\left(\frac{A-M}{A-B}/\frac{A-E}{A-M}\right),$$

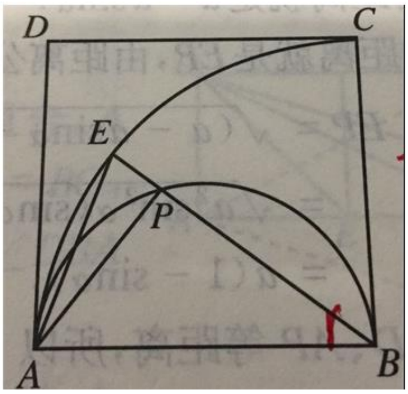
例 128：如图 3，点 *E* 在四边形 *ABCD* 的外接圆 *O* 上，*E* 在 *AB*、*BC*、*CD*、*DA* 上的垂足分别为 *P*、*Q*、*R*、*S*，求证：∠*EPS*=*EQR*。




$$\frac{Q-R}{Q-E}/\frac{P-S}{P-E}=\left(\frac{R-Q}{R-C}\frac{E-C}{E-Q}\right)\left(\frac{S-A}{S-P}\frac{E-P}{E-A}\right)\left(\frac{C-R}{A-S}\frac{E-A}{E-C}\right),$$

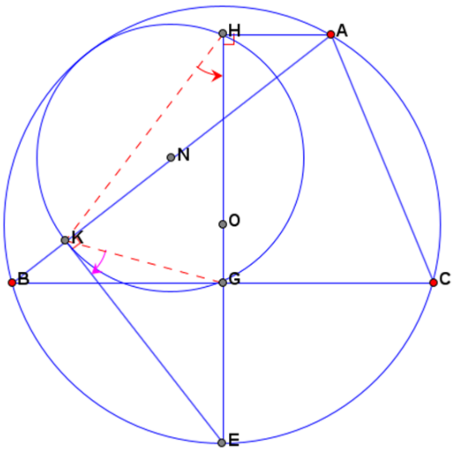
说明：此题出自周高张，但实际上，结论∠*EPS*=*EQR* 只需 *A*、*E*、*C*、*D* 四点共圆，与 *B* 的位置无关。

例 129：如图 3，正方形 *ABCD* 中, 以 *AB* 为直径在正方形内作半圆, 以 *B* 为圆心径在正方形内作四分之一圆弧 *AC*. *P* 是半圆上的一点，延长 *BP* 交弧 *AC* 丁 *E*, 连 *AE*. 则 *AE* 平分∠*DAP*.




$$\frac{A-D}{A-E}/\frac{A-E}{A-P}=\left(\frac{B-A}{B-P}/\frac{A-D}{A-P}\right)\left(\frac{E-B}{E-A}/\frac{A-E}{A-B}\right)\left(\frac{A-D}{A-B}\right)^2\frac{B-P}{E-B}$$ 。

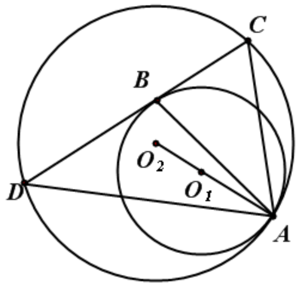
例 130：如图 3，△*ABC* 中，*O* 是外心，*G* 是 *BC* 中点，*OG* 交△*ABC* 外接圆于 *E*，*EN*⊥*AB* 于 *K*，*AH*⊥*OG* 于 *H*，求证：∠*GKE*=∠*GHK*。




$$\frac{K-G}{K-E}/\frac{H-G}{H-K}=\left(\frac{A-E}{A-K}/\frac{H-G}{H-K}\right)\left(\frac{K-G}{K-B}\frac{E-B}{E-G}\right)\left(\frac{B-K}{B-G}/\frac{E-K}{E-G}\right)\left(\frac{B-G}{B-E}/\frac{C-E}{C-B}\right)$$

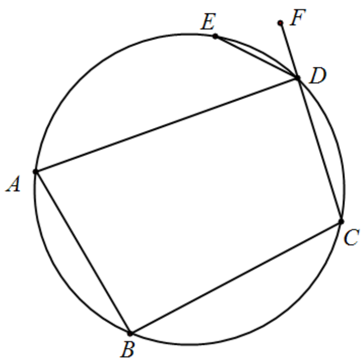
$$\left(\frac{C-E}{C-B}/\frac{A-E}{A-B}\right)\frac{A-K}{B-A}$$

例 131：如图，两圆内切于点 $A$，小圆在点 $B$ 的切线交大圆于 $C,D$，则 $AB$ 平分 $\angle CAD$ .



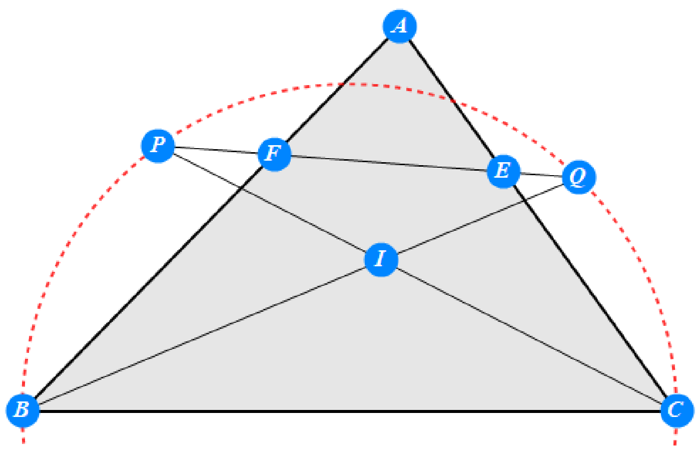

证明：$\dfrac{\dfrac{A-B}{A-C}}{\dfrac{A-D}{A-B}}=\dfrac{\dfrac{B-A}{B-O_1}}{\dfrac{A-O_1}{A-B}}\left(\dfrac{A-O_2}{A-C}\dfrac{D-C}{D-A}\dfrac{O_1-B}{C-D}\right)\dfrac{A-O_1}{A-O_2}$

说明$\dfrac{A-O_2}{A-C}\dfrac{D-C}{D-A}$用到$\angle O_2AC+\angle ADC=90^\circ$。




**例 132：如图 3，**圆内接四边形 *ABCD*，∠*ABC* 的角平分线交圆于 *E*，*F* 在 *CD* 的延长线上，求证 *DE* 是∠*ADF* 的平分线。

$$\dfrac{\dfrac{C-D}{D-E}}{\dfrac{D-E}{D-A}}=\dfrac{\dfrac{D-A}{D-E}}{\dfrac{B-A}{B-E}}\dfrac{\dfrac{A-B}{B-E}}{\dfrac{B-E}{B-C}}/\left(\dfrac{E-D}{E-B}\dfrac{C-B}{C-D}\right),$$



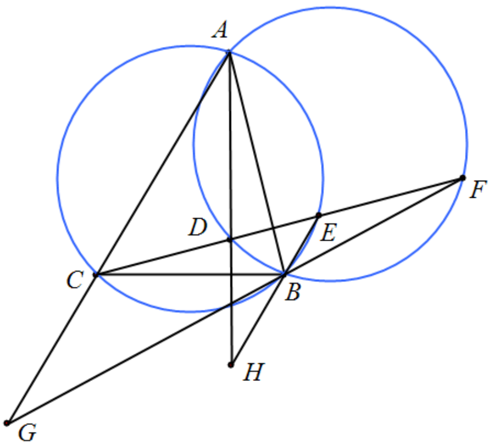
例 133：如图 9，$\triangle ABC$ 中，内切圆 $I$ 分别交 $AC$、$AF$ 于 $E$、$F$，直线 $EF$ 分别交 $BI$、$CI$ 于 $Q$、$P$，求证：$B$、$C$、$P$、$Q$ 四点共圆。

证明：$\left(\dfrac{\dfrac{E-F}{I-B}}{\dfrac{C-I}{C-B}}\right)^2=\dfrac{\dfrac{E-F}{C-A}\dfrac{B-A}{B-I}\dfrac{C-B}{C-I}}{\dfrac{B-A}{F-E}\dfrac{B-I}{B-C}\dfrac{C-I}{C-A}}$。

说明：$B$、$C$、$P$、$Q$ 四点共圆等价于$\angle PQB=\angle PCB$。事实上只需将上式稍作变化，就可以得到新的恒等式$\left(\dfrac{\dfrac{F-E}{A-C}}{\dfrac{B-I}{I-C}}\right)^2=\dfrac{\dfrac{E-F}{C-A}\dfrac{B-A}{B-I}\dfrac{C-I}{C-A}}{\dfrac{B-A}{F-E}\dfrac{B-I}{B-C}\dfrac{C-B}{C-I}}$，说明$\angle QEC=\angle QIC$，$I$、$C$、$Q$、$E$ 四点共圆。这是一种发现新命题的方式。将题目中的某些条件进行变形，包括但不限于：取倒数，加减一个实数等。重组之后，所得表达式形式上若有明显的几何意义，则认为得到了新命题。

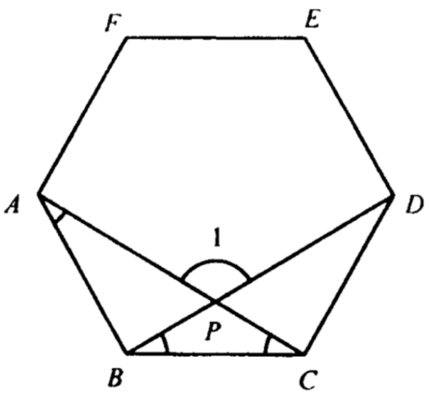
恒等式分别对应$\angle PQB=\angle PCB$，$\angle QEC=\angle QIC$。

自动发现新题




**例 134：如图 3，**$\triangle ABC$ 内有点 $D$，直线 $CD$ 分别交$\triangle ABC$、$\triangle ADB$ 的外接圆于 $E$、$F$，$AC$ 交 $BF$ 于 $G$，$AD$ 交 $EB$ 于 $H$，求证：$\angle AGB=\angle AHB$。

$$\frac{\dfrac{H-A}{H-E}}{\dfrac{G-A}{G-F}}=\frac{\dfrac{B-A}{H-E}\dfrac{H-A}{C-F}}{\dfrac{G-A}{C-F}\dfrac{B-A}{G-F}},$$

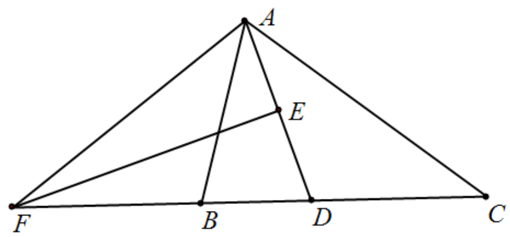



**例 135：如图 3，**A、B、C、D 是某正多边形上依次相邻的四个顶点，AC 交 BD 于 P，求证：$\angle APD=\angle ABC$。

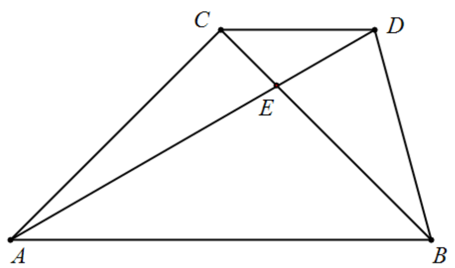
$$\frac{\frac{A-C}{D-B}}{\frac{B-A}{B-C}}=\frac{\frac{A-C}{A-B}}{\frac{C-B}{C-A}}\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{B-D}{B-C}}$$

另证：$\angle APD=\angle ABP+\angle PAB=\angle ABP+\angle ACB=\angle ABP+\angle PBC=\angle ABC$。

**例136：如图1，**△*ABC*中，∠*B*=2∠*C*，∠*BAC*平分线*AD*的中垂线*EF*交*CB*的延长线于点*F*，求证:*AF*=*AC*.




$$\frac{\frac{F-A}{B-C}}{\frac{C-B}{C-A}}=\frac{\frac{A-D}{A-B}}{\frac{A-C}{A-D}}\frac{\frac{C-B}{D-A}}{\frac{A-D}{A-F}}\frac{\frac{B-A}{B-C}}{\left(\frac{C-B}{C-A}\right)^2},$$

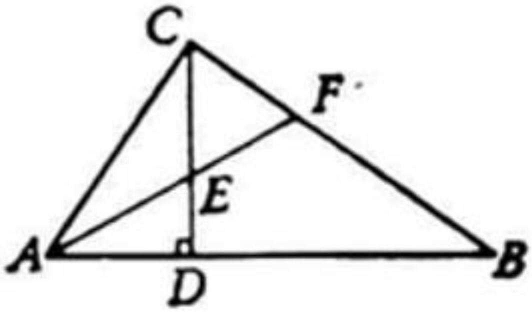



过等腰直角△*ABC*的直角顶点*C*作*AB*的平行线，并在其上取一点*D*，使*AB*=*AD*，设*AD*和*BC*交于点*E*，求证:*BD*=*BE*，$2CD=AE$，$2S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}$，$2\angle CAD=\angle DAB$。

**例137：如图1，△*ABC*，∠*CAB*中有点*D*，**使得*AD*=*AB*，$2\angle CAD=\angle DAB$，*AD*和*BC*交于点*E*，求证：***CA*⊥*CB*的充要条件是***BD*=*BE*。

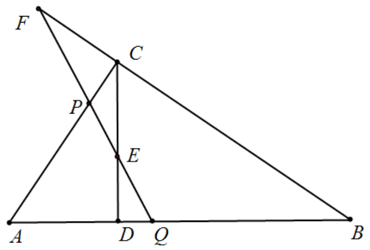
$$\frac{\frac{D-B}{D-A}}{\frac{B-A}{B-D}}\left(\frac{C-B}{C-A}\right)^2\left(\frac{\frac{A-D}{C-B}}{\frac{D-B}{D-A}}\right)^2\frac{\left(\frac{A-C}{A-D}\right)^2}{\frac{A-D}{A-B}}=-1,$$

**例138：如图1，**已知$CD$是$Rt\triangle ABC$的斜边$AB$上的高，$\angle A$的平分线交$CD$于点$E$, 交$CB$于点$F$。求证:$CE=CF$.



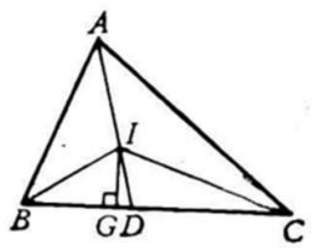

$$\frac{\frac{A-C}{A-F}}{\frac{A-F}{A-B}}\frac{C-B}{C-A}\frac{C-E}{A-B}=\frac{\frac{E-C}{A-F}}{\frac{F-A}{B-C}}。$$

**例139：如图1，**已知$CD$是$Rt\triangle ABC$的斜边$AB$上的高，在$AC$、$AB$上分别取点$P$、$Q$，使得$AP=AQ$，直线$PQ$交$BC$于$F$、交$CD$于$E$。求证:$CE=CF$。




$$\frac{\frac{A-C}{P-Q}}{\frac{Q-P}{A-B}}\frac{C-B}{C-A}\frac{C-E}{A-B}=\frac{\frac{E-C}{P-Q}}{\frac{P-Q}{B-C}}$$

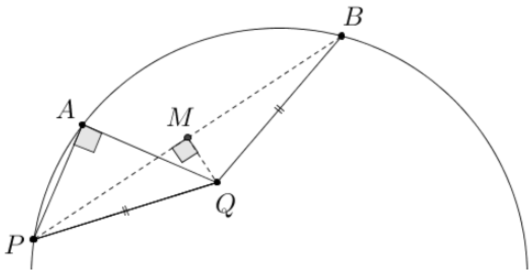
说明：只需将直线$AF$替换成$PQ$即可。



例140：如图1，已知点 $I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心, **$AI$**的延长线交**$BC$**于点 $D$，$IG\perp BC$, $G$ 为垂足. 求证: $\angle BID=\angle CIG$ .

$$-\left(\frac{I-G}{B-C}\right)^2\frac{\frac{I-D}{A-B}\frac{B-A}{B-I}\frac{C-B}{C-I}}{\frac{A-C}{I-D}\frac{B-I}{B-C}\frac{C-I}{C-A}}=\left(\frac{\frac{I-D}{I-B}}{\frac{I-C}{I-G}}\right)^2,$$

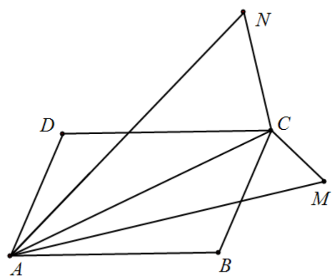
证明：$\angle CIG=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ACB)=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle ABC)=\angle BID$ 。




1. In the figure below, the points $P, A, B$ lie on a circle. The point $Q$ lies inside the circle such that $\angle PAQ = 90^\circ$ and $PQ = BQ$. Prove that the value of $\angle AQB - \angle PQA$ is equal to the arc $AB$.

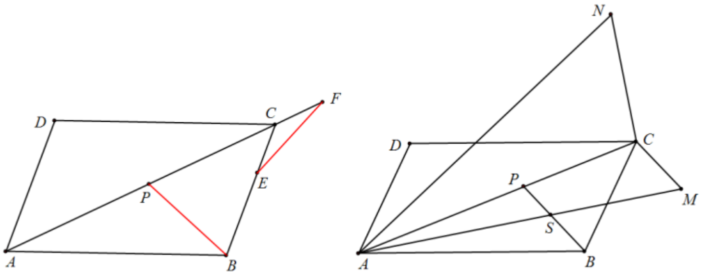
例 141：如图 1，**P**、**A**、**B** 三点在一个圆上，**Q** 在圆内，且 **AP**⊥**AQ**，**QP=QB**，求证：∠**AQB**−∠**PQA** 等于弧 **AB** 所对的圆心角。（伊朗 2015 年竞赛题）

$$\left(\frac{A-P}{A-Q}\right)^2\frac{\frac{B-Q}{B-P}}{\frac{P-B}{P-Q}}\frac{\frac{Q-A}{Q-B}}{\frac{Q-P}{Q-A}\left(\frac{P-A}{P-B}\right)^2}=-1$$

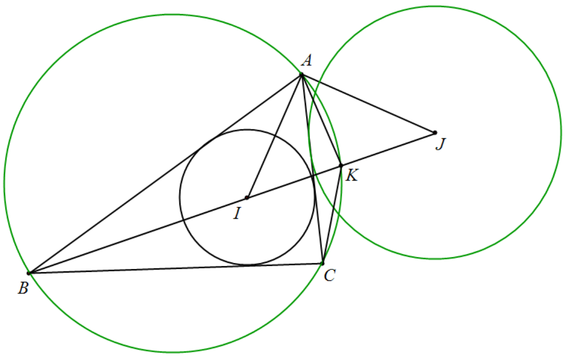



例 142：如图 1，平行四边形 $ABCD$ 中，$M$、$N$ 分别是△$ABC$、△$ADC$ 的旁心，求证：$CM$⊥$AN$，∠$AMC$=∠$ANC$。

$$\left(\frac{C-M}{A-N}\right)^2=-\frac{\frac{C-M}{D-A}\frac{A-D}{A-N}}{\frac{A-C}{C-M}\frac{A-N}{A-C}},\quad \left(\frac{\frac{N-C}{N-A}}{\frac{M-A}{M-C}}\right)^2=\frac{\frac{A-C}{A-M}\frac{C-M}{D-A}\frac{A-D}{A-N}\frac{C-N}{A-C}}{\frac{A-M}{A-B}\frac{A-C}{C-M}\frac{A-N}{A-C}\frac{B-A}{C-N}}。$$




**例 143：如图 1，**三角形一内角的平分线与其外接圆的交点到其它两顶点的距离及其内心与旁心的距离相等。如图，$\triangle ABC$ 中，$I$、$J$ 分别是内心、旁心，$BI$ 交$\triangle ABC$ 的外接圆于 $K$，则 $KA=KC=KI=KJ$。

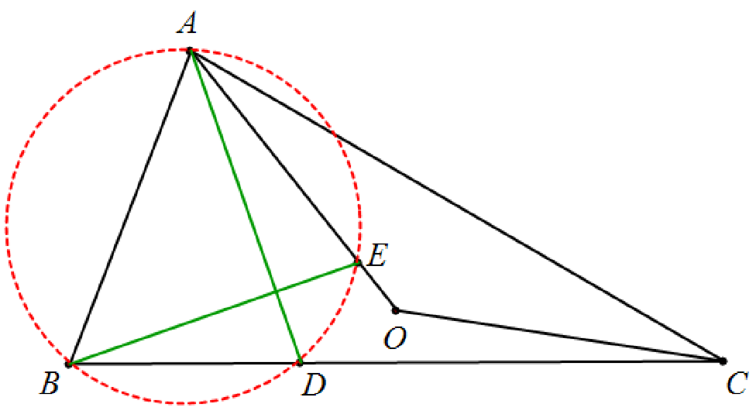



$$\frac{\frac{A-K}{A-I}}{\frac{I-A}{B-K}}=\frac{\frac{B-K}{B-C}\,\frac{A-C}{A-I}\,\frac{C-B}{C-A}}{\frac{B-A}{B-K}\,\frac{A-I}{A-B}\,\frac{K-B}{K-A}}$$ 。

说明：此恒等式说明 $KA=KI$。同时将 $I$ 换作 $J$，即证明了 $KA=KJ$。

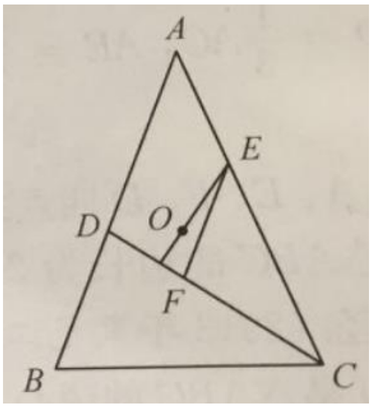
变式：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$ 的角平分线交$\triangle ABC$ 的外接圆于 $K$，在 $AB$、$AC$ 上分别取点 $M$、$N$，使得 $AM=AN$，直线 $MN$ 交 $BK$、$AK$ 于 $P$、$Q$，求证：$KP=KQ$。

**四点共圆**




**例 144：如图 1，**$\triangle ABC$ 中，$O$ 是外心，$AD$ 是角平分线，$BE\perp AD$ 交 $AO$ 于 $E$，求证：$A$、$B$、$D$、$E$ 四点共圆。

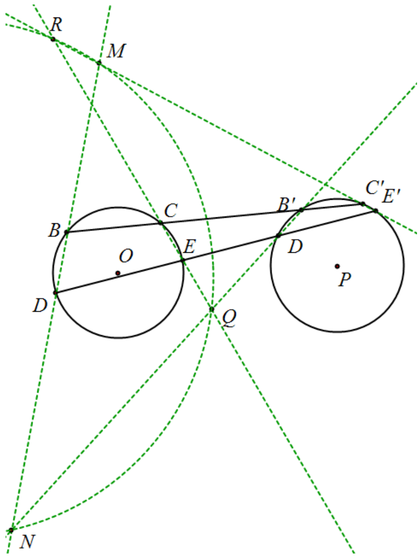
$$\frac{\frac{E-B}{O-A}}{\frac{C-B}{D-A}}=\frac{\frac{A-D}{A-B}\frac{A-C}{A-O}\frac{E-B}{D-A}}{\frac{A-C}{A-D}\frac{C-O}{C-A}\frac{A-C}{A-B}\frac{C-B}{C-O}},$$




**例 145：如图 1，**在锐角△*ABC* 中, ∠*ACB* 的平分线交 *AB* 于点 *D*, 过△*ABC* 的外心 *O*, 作 *CD* 的垂线交 *AC* 于点 *E*, 过点 *E* 作 *AB* 的平行线交 *CD* 于点 *F*. 求证：*C*、*E*、*O*、*F* 四点共圆。（2010 年福建省预赛）

$$\frac{\frac{F-E}{D-C}}{\frac{O-E}{O-C}}=\frac{\frac{C-B}{C-D}}{\frac{C-D}{C-A}}\frac{E-F}{A-B}\left(\frac{D-C}{O-E}\frac{C-O}{C-A}\right)\frac{B-A}{B-C}。$$

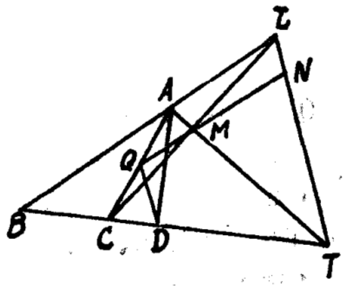
**例 146：如图 1，**设 *BC*、*DE* 为圆 *O* 的弦，延长 *BC*、*DE* 交已知圆 *P* 于 *B*’、*C*’、*D*’、*E*’，再延长 *BD*、*CE*、*B*’*D*’、*C*’*E*’ 相交于 *M*、*N* 及 *R*、*Q*，则 *M*、*R*、*Q*、*N* 四点共圆。



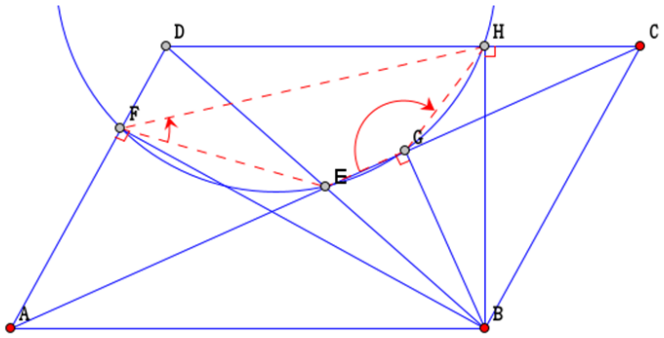

$$\frac{\frac{B-D}{B_1-D_1}}{\frac{C_1-E_1}{C-E}}=\frac{\frac{D-B}{D-E}}{\frac{C-B}{E-C}}\frac{\frac{C-B}{E_1-C_1}}{\frac{D_1-B_1}{D-E}},$$

**例 147：如图 1，**△*ABC* 中，作∠*A* 的外角平分线与 *BC* 的延长线交于 *T*，由 *C* 引 *CM*⊥*AT*

于 $M$, 且与 $BA$ 之延长线交于 $L$, 取 $AC$ 之中点 $Q$，$QM$ 交 $LT$ 于 $N$，再由 $A$ 引 $AD\perp BC$ 于 $D$, 则 $D$、$Q$、$N$、$T$ 四点共圆。




$$\frac{\frac{D-Q}{Q-N}}{\frac{C-B}{T-L}}=\frac{\frac{C-A}{B-C}}{\frac{C-B}{D-Q}}\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{B-A}{L-T}}\frac{B-A}{Q-N},$$

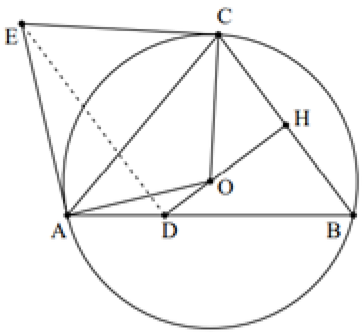



例 148：如图 3，平行四边形 $ABCD$ 中，$AC$ 交 $BD$ 于 $E$，$B$ 在 $AD$、$AC$、$CD$ 上的垂足分别为 $F$、$G$、$H$，求证：$E$、$F$、$G$、$H$ 四点共圆。

$$\frac{F-H}{F-E}\frac{G-E}{G-H}=\left(\frac{B-H}{B-C}/\frac{G-H}{G-C}\right)\left(\frac{H-F}{H-D}/\frac{B-F}{B-D}\right)\left(\frac{B-F}{B-E}/\frac{F-E}{F-B}\right)\left(\frac{B-C}{B-F}\frac{D-H}{B-H}\right)\frac{G-E}{C-G}\frac{B-E}{B-D}$$

此题几何专家没证出来，自动出题

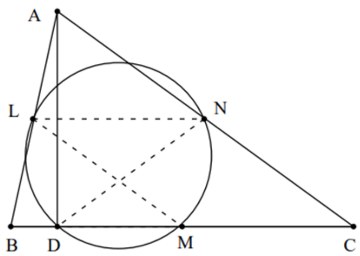
将条件混在一起乘除，尽可能短，最后看有没有几何意义。



**例 149：如图 3，**△*ABC* 中，*O* 是外心，*EA*⊥*AO*，*EC*⊥*CO*，点 *O* 在 *AB* 上，且 *DO*⊥*BC*，求证：*E*、*D*、*O*、*C* 四点共圆。

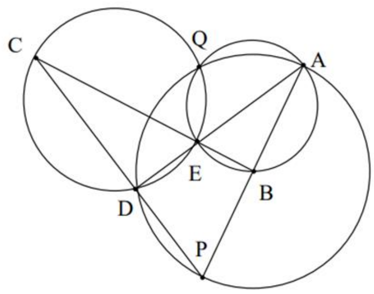
$$\frac{E-O}{E-A}\frac{D-A}{D-O}=\left(\frac{C-A}{C-E}\frac{O-E}{O-A}\right)\left(\frac{B-C}{D-O}\frac{B-A}{B-C}\frac{C-O}{C-A}\right)\left(\frac{O-A}{E-A}\frac{E-C}{C-O}\right)\frac{D-A}{B-A}\text{。}$$

**例 150：如图 3，**△*ABC* 中，*AD* 是高，*M*、*N*、*L* 分别是 *BC*、*CA*、*AB* 的中点，求证：*D*、*M*、*N*、*L*四点共圆。

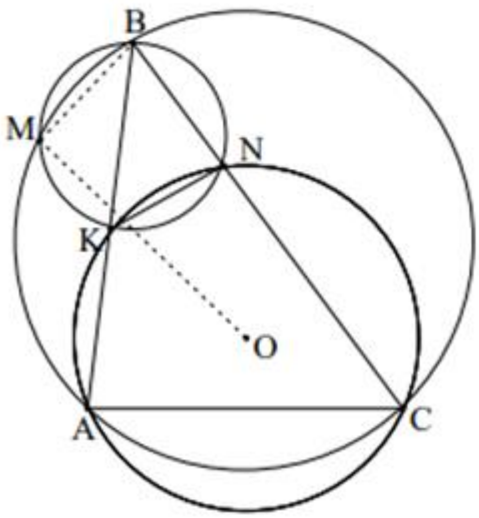



$$\frac{N-D}{N-L}\frac{M-L}{M-D}=\frac{B-C}{N-L}\frac{M-L}{C-A}\left(\frac{N-D}{B-C}\frac{C-A}{M-D}\right),$$

**例 151：如图 3，**直线 *AB*、*CD* 交于 *P*，*AD*、*BC* 交于 *E*，△*ABE*、△*CDE* 的外接圆交于点 *Q*，求证：*A*、*Q*、*D*、*P* 四点共圆。（密克定理）




$$\frac{P-D}{P-A}\frac{Q-A}{Q-D}=\frac{P-D}{D-C}\frac{B-A}{P-A}\frac{E-C}{B-E}\left(\frac{Q-E}{Q-D}\frac{C-D}{C-E}\right)\left(\frac{Q-A}{Q-E}\frac{B-E}{B-A}\right),$$

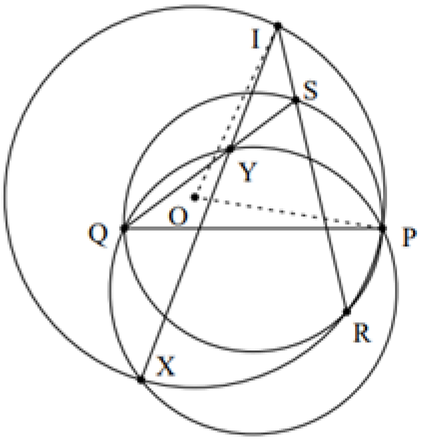



**例 152：如图 3，**$A$、$C$、$K$、$N$ 四点共圆，$O$ 是其圆心，$AK$ 交 $CN$ 于 $B$，$\triangle ACB$、$\triangle KNB$ 的外接圆交于 $M$，求证：$M$、$K$、$O$、$C$ 四点共圆，$MB\perp MO$。（1985*InternationalMathematicalOlympiad*）

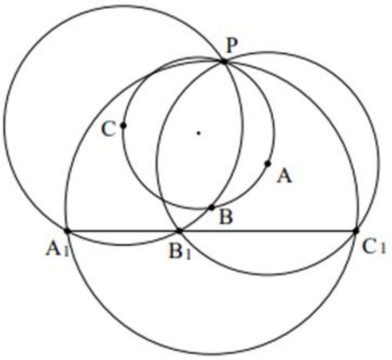
$$\frac{M-K}{M-C}\frac{O-C}{O-K}=\left(\frac{M-B}{M-C}/\frac{A-B}{A-C}\right)\left(\frac{M-K}{M-B}\frac{N-B}{N-K}\right)\frac{N-C}{N-B}\frac{A-B}{K-A}\left(\frac{K-C}{K-O}\frac{A-K}{A-C}\right)$$

$$\left(\frac{N-A}{N-C}\frac{C-O}{C-A}\right)\left(\frac{N-K}{N-A}/\frac{C-K}{C-A}\right),$$

$$\frac{M-O}{M-B}=\frac{\dfrac{A-B}{A-C}}{\dfrac{M-B}{M-C}}\frac{\dfrac{K-C}{K-O}}{\dfrac{M-C}{M-O}}\frac{A-K}{A-B}\left(\frac{K-O}{K-C}\frac{A-C}{A-K}\right)。$$

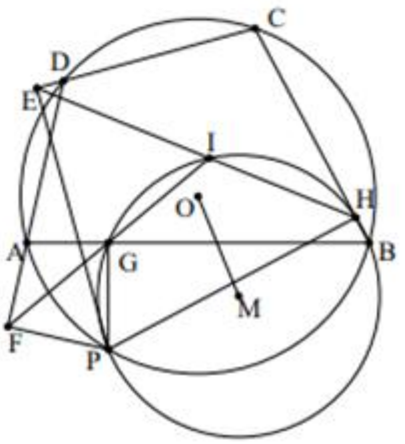



**例 153：如图 3，**已知 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 三点共线，$A$ 是$\triangle PB_1C_1$ 的外心，$B$ 是$\triangle PA_1C_1$ 的外心，$C$ 是$\triangle PA_1B_1$ 的外心，求证：$P$、$C$、$B$、$A$ 四点共圆。

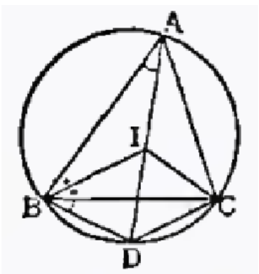



$$\frac{C-P}{C-A}\frac{B-A}{B-P}=\frac{A_1-C_1}{A_1-B_1}\frac{A-B}{P-C_1}\frac{P-B_1}{A-C}\left(\frac{P-C}{P-B_1}\frac{A_1-B_1}{A_1-P}\right)\left(\frac{A_1-P}{A_1-C_1}\frac{P-C_1}{P-B}\right),$$

**例 154：如图 3，**$P$ 是四边形 $ABCD$ 外接圆 $O$ 上一点，$P$ 在 $CD$、$DA$、$AB$、$BC$ 上的垂足分别为 $E$、$F$、$G$、$H$，$EH$ 交 $FG$ 与 $I$，求证：$G$、$P$、$H$、$I$ 四点共圆。



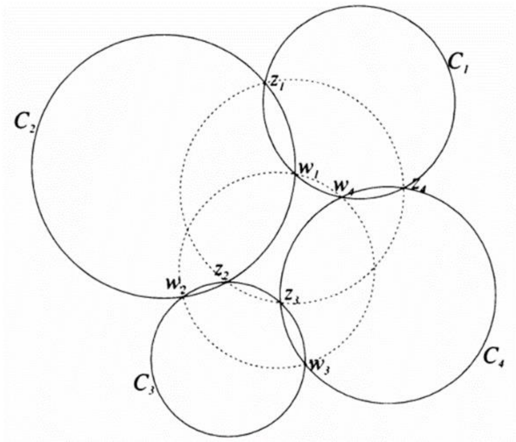

$$\frac{I-H}{I-G}\frac{P-G}{P-H}=\left(\frac{H-E}{H-C}\Big/\frac{P-E}{P-C}\right)\left(\frac{P-F}{P-A}\Big/\frac{G-F}{G-A}\right)\left(\frac{C-D}{C-P}\frac{A-P}{A-D}\right)\left(\frac{C-H}{H-P}\frac{G-P}{A-G}\right)\frac{I-H}{H-E}\frac{F-G}{G-I}\frac{A-D}{F-P}\frac{E-P}{C-D}$$




**例 155：如图 3，**设△$ABC$ 的内心为 $I$, △$BCI$ 的外心为 $D$, 则 $A$、$I$、$D$ 三点共线，$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆。

$$\left(\frac{A-I}{I-D}\right)^2=\frac{\dfrac{B-I}{B-D}\dfrac{C-D}{C-B}\dfrac{I-C}{I-D}\dfrac{A-I}{A-B}\dfrac{B-A}{B-I}\dfrac{C-B}{C-I}}{\dfrac{I-D}{I-B}\dfrac{B-C}{B-D}\dfrac{C-D}{C-I}\dfrac{A-C}{A-I}\dfrac{B-I}{B-C}\dfrac{C-I}{C-A}}\text{。}$$

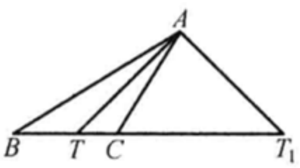
$$\frac{\frac{C-D}{C-B}}{\frac{A-D}{A-B}}=\frac{\frac{B-I}{B-D}}{\frac{I-D}{I-B}}\frac{\frac{B-A}{B-I}}{\frac{B-I}{B-C}}\frac{\frac{C-D}{C-B}}{\frac{B-C}{B-D}}\frac{I-D}{A-D},$$



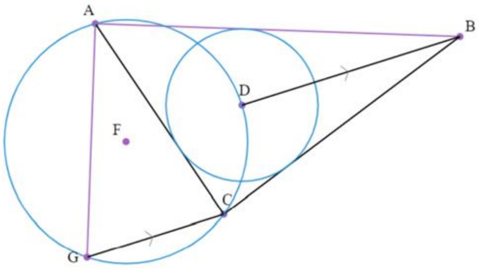

**例 156：如图 3，**平面上有四个圆$C_1$，$C_2$，$C_3$，$C_4$。$C_1$交$C_2$于$Z_1$和$W_1$，$C_2$交$C_3$于$Z_2$和$W_2$，$C_3$交$C_4$于$Z_3$和$W_3$，$C_4$交$C_1$于$Z_4$和$W_4$，求证$Z_1$，$Z_2$，$Z_3$，$Z_4$四点共圆的充要条件是$W_1$，$W_2$，$W_3$，$W_4$四点共圆。

$$\frac{\frac{Z_1-Z_2}{W_2-Z_2}}{\frac{Z_1-W_1}{W_2-W_1}}\frac{\frac{Z_2-Z_3}{W_3-Z_3}}{\frac{Z_2-W_2}{W_3-W_2}}\frac{\frac{Z_3-Z_4}{W_4-Z_4}}{\frac{Z_3-W_3}{W_4-W_3}}\frac{\frac{Z_4-Z_1}{W_1-Z_1}}{\frac{Z_4-W_4}{W_1-W_4}}=\frac{\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_2}}{\frac{Z_1-Z_4}{Z_3-Z_4}}\frac{\frac{W_1-W_2}{W_3-W_2}}{\frac{W_1-W_4}{W_3-W_4}}。$$

**例 157：如图 1，**△*ABC* 中, ∠*ACB*−∠*B*=90°，∠*BAC* 的内、外角平分线分别交 *BC* 及其延长线于 *T*, $T_1$，求证:*AT*=$AT_1$.

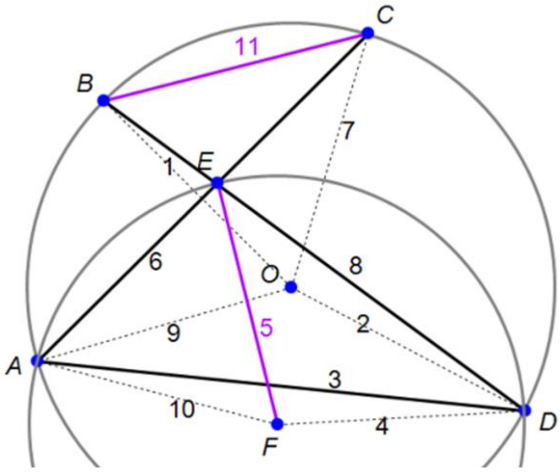



$$\left(\frac{\frac{T-A}{B-C}}{\frac{C-B}{T_1-A}}\right)^2\left(\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{B-A}{B-C}}\right)^2\frac{\frac{A-C}{A-T}}{\frac{A-T}{A-B}}\frac{\frac{B-A}{A-T_1}}{\frac{A-T_1}{A-C}}=-1,$$




例 158：如图 1，$D$ 是△$ABC$ 内心，$G$ 是△$ADC$ 外接圆上一点，且 $CG$∥$BD$，求证 $AB$⊥$AG$。

$$\frac{A-B}{A-G}\frac{\dfrac{B-D}{B-A}}{\dfrac{D-C}{D-A}}\left(\frac{G-A}{G-C}\frac{D-C}{D-A}\right)\frac{G-C}{D-B}=-1。$$



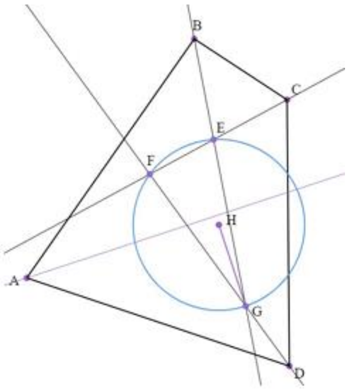

例 159：如图 1，四边形 $ABCD$ 内接于圆 $O$，$E$ 是对角线交点，$F$ 是△$AED$ 的外心，求证：$BC$⊥$EF$。

$$\frac{B-C}{E-F}=\frac{\dfrac{B-C}{B-D}}{\dfrac{A-C}{A-D}}\left(\frac{B-D}{E-F}\frac{A-C}{A-D}\right),$$

说明：$\dfrac{B-D}{E-F}\dfrac{A-C}{A-D}$ 是纯虚数用到∠$DEF$+∠$CAD$=90°。

$$\left(\frac{B-C}{E-F}\right)^2\left(\frac{\dfrac{E-F}{B-D}}{\dfrac{A-C}{A-D}}\right)^2\frac{\dfrac{C-O}{C-B}}{\dfrac{B-C}{B-O}}\frac{\dfrac{A-C}{A-O}}{\dfrac{C-O}{C-A}}\frac{\dfrac{B-D}{B-O}}{\dfrac{D-O}{D-B}}\frac{\dfrac{A-O}{A-D}}{\dfrac{D-A}{D-O}}=1,$$

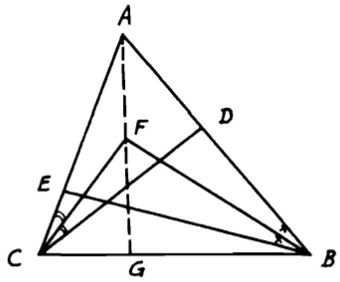
例 160：如图 1，$AK$、$BE$、$CF$、$DG$ 分别是四边形 $ABCD$ 四内角的平分线，$H$ 是△$EFG$ 的外心，求证：$AK$⊥$HG$。



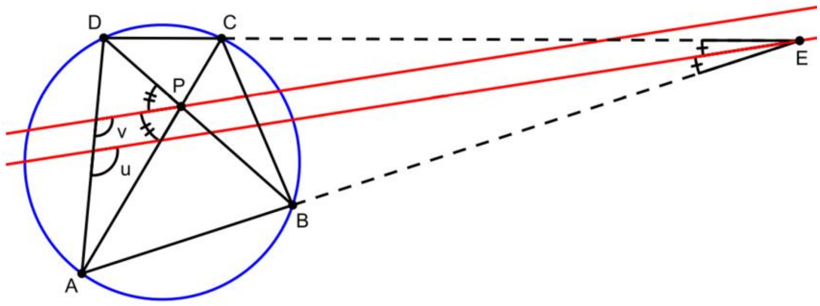

$$\left(\frac{A-K}{H-G}\right)^2\left(\frac{F-E}{F-G}\frac{G-H}{G-E}\right)^2\frac{\frac{A-B}{A-K}\frac{E-G}{B-A}\frac{C-B}{E-F}\frac{G-F}{D-C}}{\frac{A-K}{A-D}\frac{B-C}{E-G}\frac{E-F}{C-D}\frac{D-A}{G-F}}=1,$$

**1.2.** *ABC is a triangle. D and E are any two points on AB and AC. The bisectors of the angles ABE and ACD meet in F. Show that* $\angle BDC + \angle BEC = 2\angle BFC$.

**例 161：如图 1，**$\triangle ABC$ 中，$D$、$E$ 分别是 $AB$、$AC$ 上的点，$\angle ABE$ 和$\angle ACD$ 的角平分线交于 $F$，求证：$\angle BDC+\angle BEC=2\angle BFC$。




$$\frac{\frac{D-B}{D-C}\frac{E-B}{E-C}}{\left(\frac{F-B}{F-C}\right)^2}=\frac{\frac{C-F}{C-D}\frac{B-E}{B-F}}{\frac{C-E}{C-F}\frac{B-F}{B-D}},$$



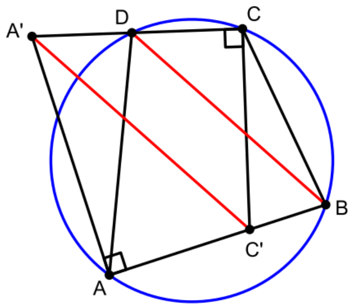

**例 162：如图 1，**四边形 $ABCD$，$AC$ 交 $BD$ 于 $P$，$AB$ 交 $DC$ 于 $E$，求证：$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆的充要条件是$\angle APD$ 和$\angle AED$ 的角平分线平行。

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \frac{\dfrac{A-C}{A-B}}{\dfrac{D-C}{D-B}} \frac{\dfrac{L_1}{B-D}}{\dfrac{C-A}{L_1}} \frac{\dfrac{B-A}{L_2}}{\dfrac{L_2}{C-D}} = 1,$$

$$u = \pi - \angle A - \frac{\pi - \angle A - \angle D}{2} = \frac{\pi - \angle A + \angle D}{2},$$

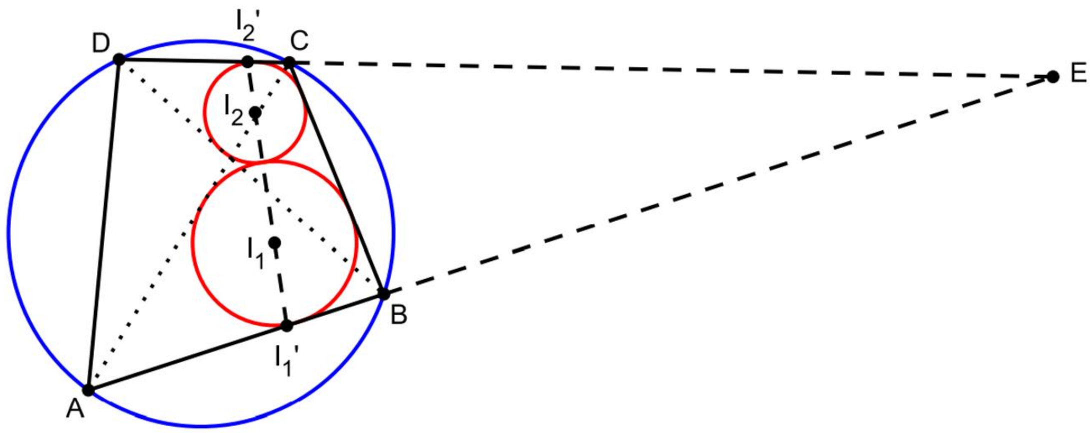
$$v = \frac{\pi - \angle DAC - \angle BDA}{2} + \angle BDA = \frac{\pi - \angle DAC + \angle BDA}{2},$$

$$u = v \Leftrightarrow -\angle A + \angle D = -\angle DAC + \angle BDA。$$




**例 163：如图 1，** 四边形 $ABCD$， $AA' \perp AB$ 交 $CD$ 于 $A'$， $CC' \perp CD$ 交 $AB$ 于 $C'$，求证：$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆的充要条件是 $A'C' // BD$。

$$\frac{A'-C'}{D-B} \frac{\dfrac{A-C}{A-B}}{\dfrac{D-C}{D-B}} \frac{\dfrac{A'-C}{A'-C'}}{\dfrac{A-C}{A-C'}} \frac{D-C}{A'-C} \frac{A-B}{A-C'} = 1$$



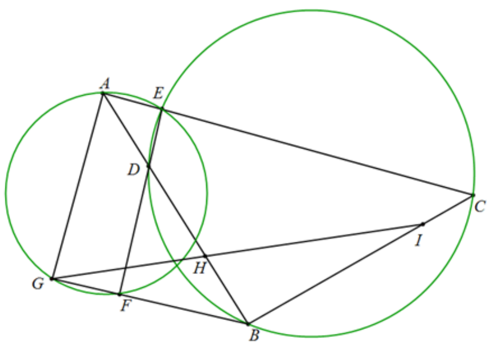

**例 164：如图 1，** 四边形 $ABCD$，$AB$ 交 $DC$ 于 $E$，$I_1$、$I_2$ 分别是△$ABC$、△$DBC$ 的内心，$I_1I_2$ 交 $AB$ 于 $I_1'$，交 $DC$ 于 $I_2'$，求证：$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆的充要条件是 $EI_1' = EI_2'$。

$$\left(\frac{\frac{B-I_1}{B-I_2}}{\frac{C-I_1}{C-I_2}}\right)^2\frac{\frac{A-C}{A-B}}{\frac{D-C}{D-B}}\frac{\frac{C-B}{C-I_2}}{\frac{C-I_2}{C-D}}\frac{\frac{B-A}{B-I_1}}{\frac{B-I_1}{B-C}}\frac{\frac{C-I_1}{C-A}}{\frac{C-B}{C-I_1}}\frac{\frac{B-I_2}{B-C}}{\frac{B-D}{B-I_2}}=1,$$

$$\frac{\frac{D-C}{I_2-I_1}}{\frac{I_1-I_2}{A-B}}\frac{\frac{I_1-I_2}{I_1-C}}{\frac{B-I_2}{B-C}}\frac{\frac{A-C}{A-B}}{\frac{D-C}{D-B}}\frac{\frac{C-B}{C-I_1}}{\frac{I_2-B}{I_2-I_1}}\frac{\frac{C-I_1}{C-A}}{\frac{C-B}{C-I_1}}\frac{\frac{B-I_2}{B-C}}{\frac{B-D}{B-I_2}}=1,$$

说明：要证 $EI_1'=EI_2'$，需要引进直线 $I_1'I_2'$，这一项不方便消去。需要分两步走，先证 $B$、$I_1$、$I_2$、$C$四点共圆，然后再证 $EI_1'=EI_2'$。但因此一来，给反推回去造成麻烦。下面证法可能就更合适一些。

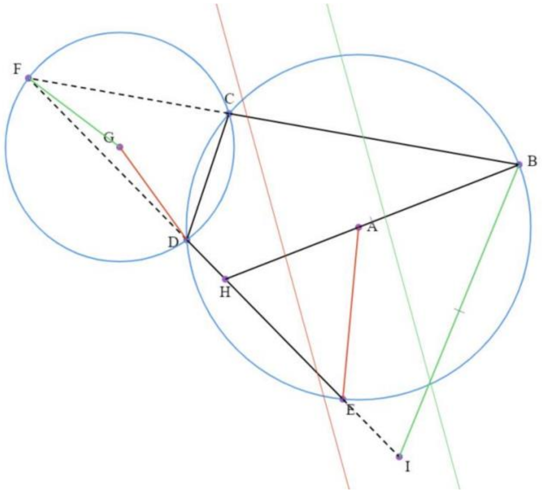
$$
\begin{aligned}
& \angle BAC=\angle BDC \\
\Leftrightarrow\ & \angle ABC+\angle ACB=\angle DBC+\angle DCB \\
\Leftrightarrow\ & \angle I_1BC+\angle I_1CB=\angle I_2BC+\angle I_2CB \\
\Leftrightarrow\ & \angle BI_1C=\angle BI_2C \\
\Leftrightarrow\ & BI_1I_2C \text{ 是圆内接四边形} \\
\Leftrightarrow\ & \angle I_2I_1B+\angle I_2CB=\angle I_1I_2C+\angle I_1BC \\
\Leftrightarrow\ & \angle I_2I_1B-\angle I_1BA=\angle I_1I_2C-\angle I_2CD \\
\Leftrightarrow\ & \angle EI_1'I_2'=\angle EI_2'I_1' \\
\Leftrightarrow\ & EI_1'=EI_2'
\end{aligned}
$$




**例 165：如图 1,** $\triangle ABC$ 中，在 $AB$ 上取点 $B$，$\triangle BCD$ 的外接圆与 $AC$ 交于 $E$，在 $ED$ 的延长线上取点 $F$，$BE$ 与$\triangle AEF$ 的外接圆交于 $G$，在 $AB$ 上取点 $H$，使得 $AG=AH$，延长 $GH$ 交 $BC$ 于 $I$，求证 $BG=BI$。

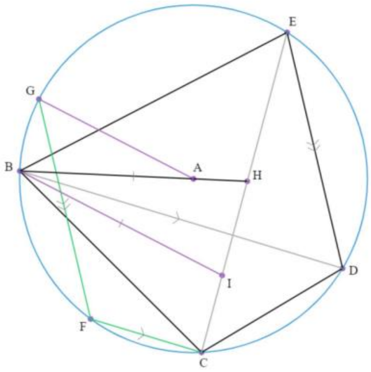
$$\frac{\frac{G-I}{G-B}}{\frac{C-B}{I-G}}=\frac{\frac{A-C}{E-F}}{\frac{B-C}{A-B}}\frac{\frac{F-E}{G-B}}{\frac{A-C}{A-G}}\frac{\frac{I-G}{B-A}}{\frac{G-A}{G-I}},$$

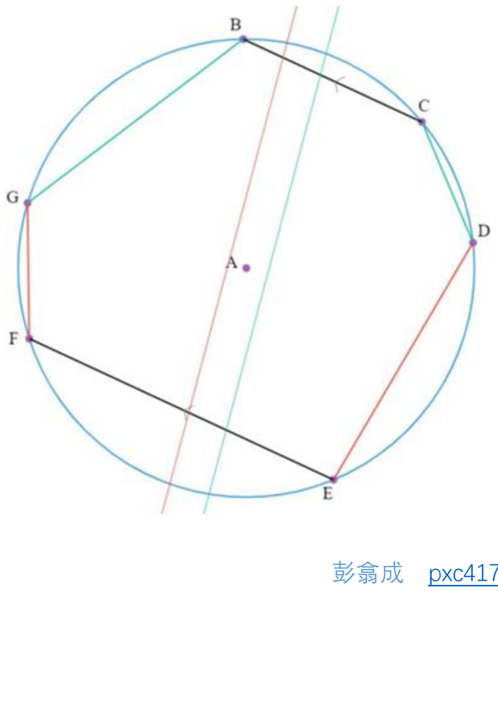
思考：恒等式中没有出现 $D$、$H$，无形中将这两个点消去。如果 $H$ 在 $BA$ 延长线上，结论是否还成立？




**例 166：如图 1,** 圆 $A$ 内接四边形 $BCDE$，$F$ 是 $BC$ 和 $ED$ 的交点，$G$ 是△$CDF$ 的外心，延长 $BA$ 交 $DE$ 于 $H$，设 $DG$ 和 $EA$ 关于直线 $l_1$ 对称，在 $DE$ 延长线上取点 $I$，$GF$ 和 $IB$ 关于直线 $l_2$ 对称，求证 $BI = BH \Leftrightarrow l_1 // l_2$。

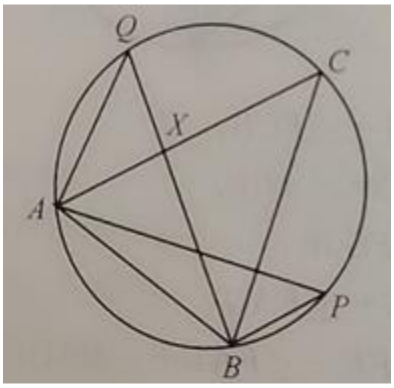
$$\frac{\frac{E-F}{D-G}}{\frac{F-G}{F-E}}\frac{\frac{H-B}{F-E}}{\frac{E-F}{I-B}}\frac{\frac{L}{I-B}}{\frac{G-F}{L}}\frac{\frac{D-G}{L}}{\frac{L}{E-A}}\frac{\frac{B-E}{B-H}}{\frac{E-A}{E-B}}\left(\frac{F-G}{F-E}\frac{E-F}{E-B}\right)^2=-1$$



**例 167：如图 1,** 圆内接多边形 $BCDEFG$，其中 $FG$ 和 $ED$ 关于直线 $l_1$ 对称，$BG$ 和 $DC$ 关于直线 $l_2$ 对称，则 $EF//BC \Leftrightarrow l_1//l_2$。

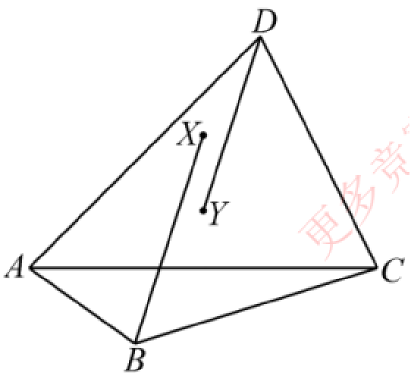
证明：若已知 $l_1//l_2$，则由 $\dfrac{\frac{B-C}{B-E}}{\frac{D-C}{E-D}}\dfrac{\frac{G-F}{B-G}}{\frac{E-F}{E-B}}\dfrac{\frac{L}{E-D}}{\frac{F-G}{L}}\dfrac{\frac{B-G}{L}}{\frac{L}{C-D}}\dfrac{E-F}{C-B}=1$，可得 $EF//BC$。若已知 $EF//BC$，则由 $\dfrac{\frac{B-C}{B-E}}{\frac{D-C}{E-D}}\dfrac{\frac{G-F}{B-G}}{\frac{E-F}{E-B}}\dfrac{\frac{l_1}{E-D}}{\frac{F-G}{l_1}}\dfrac{\frac{B-G}{l_2}}{\frac{l_2}{C-D}}\dfrac{E-F}{C-B}$ 是正实数，得 $\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right)^2$ 为正实数，可得 $EF//BC$。



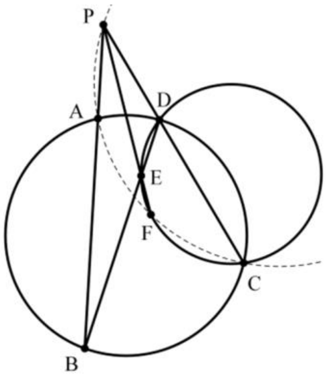

**例 168：如图 1,** $\triangle ABC$ 中，过点 $A$ 的高线交$\triangle ABC$ 外接圆于点 $P$, $X$ 为线段 $AC$ 上的点, 且 $BX$ 交圆于 $Q$. 证明:$BX=CX$ 的充分必要条件是 $PQ$ 为外接圆的直径. (2003 年英国数学竞赛题)

$\dfrac{\frac{B-C}{B-P}}{\frac{A-C}{A-P}}\dfrac{\frac{B-Q}{B-C}}{\frac{C-B}{C-A}}\dfrac{C-B}{A-P}\dfrac{B-P}{Q-B}=1$,

**例 169：如图 1,** 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD=\angle DCB$, $X$、$Y$ 分别为$\triangle ABC$ 的外心和$\triangle ACD$ 的外心. 求证:$BX//DY$.

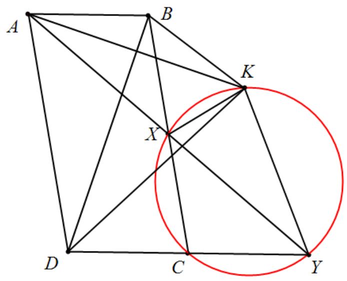


$$\frac{D-Y}{B-X}=\left(\frac{D-Y}{D-A}\frac{C-A}{C-D}\right)\left(\frac{B-A}{B-X}\frac{C-B}{C-A}\right)\frac{\frac{A-D}{A-B}}{\frac{C-B}{C-D}},$$




**例170：如图1,** $A$、$B$、$C$、$D$四点共圆，$BA$交$CD$于$P$，点$E$在线段$BD$上，延长$PE$，与$\triangle CDE$的外接圆交于$F$. 求证：$P$、$F$、$A$、$C$四点共圆。

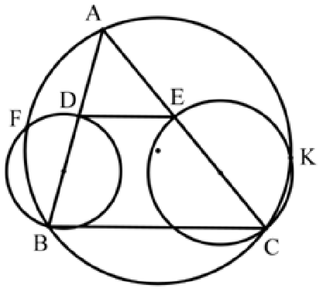
$$\frac{\frac{B-P}{A-C}}{\frac{F-P}{F-C}}=\frac{\frac{B-D}{P-C}}{\frac{F-P}{F-C}}\frac{\frac{B-P}{B-D}}{\frac{C-A}{C-P}},$$




**例 171：如图 1,** 平行四边形 $ABCD$，$\angle A$ 的角平分线交 $BC$ 于 $X$，交 $DC$ 于 $Y$，$K$ 与 $A$ 关于 $BD$ 对称。求证：$C, X, Y, K$ 四点共圆。

$$\left(\frac{\frac{D-A}{X-K}}{\frac{B-A}{Y-K}}\right)^2\frac{\frac{A-B}{A-D}}{\frac{K-D}{K-B}}\frac{\frac{K-X}{K-B}}{\frac{D-A}{X-K}}\frac{\frac{B-A}{Y-K}}{\frac{K-Y}{K-D}}=1。$$

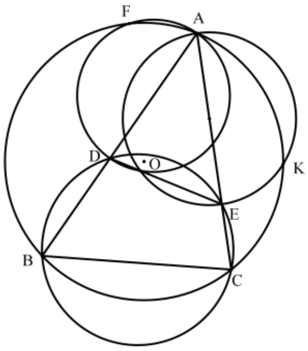
**例172：如图1,** 已知$\triangle ABC$中, 作$DE//BC$交$AB$、$AC$分别于点$D$、$E$, 以$BD$、$CE$为直径的圆与$\triangle ABC$的外接圆的第二个交点分别为$F$、$K$. 求证:$D$、$E$、$K$、$F$四点共圆.（万喜人命题）



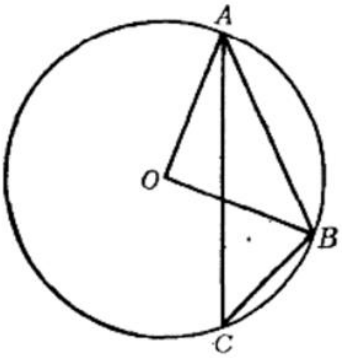

$$\frac{\frac{F-D}{F-K}\frac{F-K}{F-B}\frac{K-C}{K-E}}{\frac{D-E}{E-K}\frac{C-K}{B-C}\frac{F-D}{F-B}}\frac{D-E}{B-C}=1,$$

说明：此题与$A$毫无关系。$D$、$E$、$K$、$F$四点共圆$\Leftrightarrow DE//BC$。$\angle DFB=\angle CKE=90^{\circ}$可以去掉$90^{\circ}$的限制。

**例173：如图1,** $\triangle ABC$中，点$D$、$E$分别在边$AB$、$AC$上，使得$\angle ADE=\angle ACB$，以$AD$、$AE$为直径的圆与$\triangle ABC$的外接圆的第二个交点分别为$F$、$K$. 求证:$D$、$E$、$K$、$F$四点共圆.

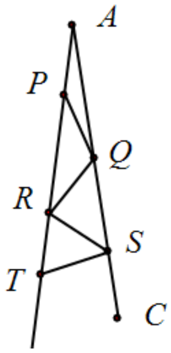



$$\frac{\frac{F-K}{F-D}\frac{B-A}{D-E}\frac{K-E}{K-A}\frac{A-K}{K-C}\frac{F-A}{F-K}}{\frac{E-K}{D-E}\frac{C-B}{C-A}\frac{F-A}{F-D}\frac{B-A}{B-C}\frac{C-A}{C-K}}=1$$




**例174：如图1,** $O$是$\triangle ABC$的外心，若$\angle ACB=\angle OAB$，则$AO\perp OB$。

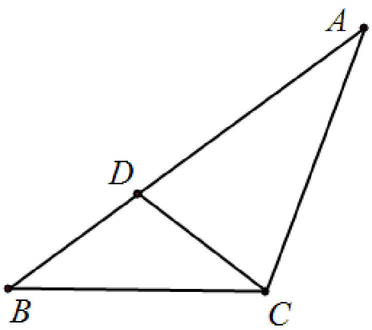
$$\left(\frac{O-B}{O-A}\right)^2\frac{\frac{C-A}{C-B}}{\frac{B-O}{B-A}}\frac{\frac{C-O}{C-A}}{\frac{A-C}{A-O}}\frac{\frac{C-A}{C-B}}{\frac{A-B}{A-O}}\frac{\frac{B-C}{B-O}}{\frac{C-O}{C-B}}=-1,$$



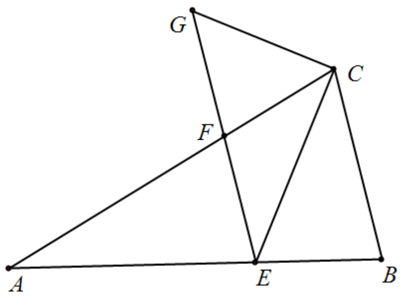

**例175：如图1,** 已知$APRT$、$AQSC$都是直线，且$AP=PQ=QR=RS=ST$。求证：$\angle CST=5\angle AQP$。

$$\frac{\left(\frac{Q-P}{C-A}\right)^5}{\frac{A-C}{S-T}}=\left(\frac{\frac{Q-P}{C-A}}{\frac{A-C}{A-P}}\right)^4\frac{\frac{P-Q}{A-P}}{\frac{A-P}{R-Q}}\frac{\frac{A-C}{Q-R}}{\frac{S-R}{C-A}}\frac{\frac{R-S}{A-P}}{\frac{A-P}{T-S}},$$

**例176：如图1,** $\triangle ABC$中，$\angle C=3\angle B$，在$AB$上截取$AD=AC$，求证：$CD=DB$。



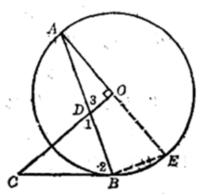

$$\left(\frac{\frac{C-B}{C-D}}{\frac{B-A}{B-C}}\right)^2\frac{\left(\frac{B-A}{B-C}\right)^3}{\frac{C-B}{C-A}}\frac{\frac{C-D}{C-A}}{\frac{B-A}{D-C}}=1,$$




**例177：如图1,** $\triangle ABC$中，$\angle C$的平分线交$AB$于$E$, 从$E$作$BC$的平行线交$AC$于$F$，交$\angle C$的外角平分线于$G$，则$EF$=$FG$。

证明：设 $A=0$， $E=kB$， $F=kC$， $G=2F-E$， $\dfrac{\frac{C-G}{B-C}}{\frac{C-A}{C-G}}+\dfrac{\frac{C-E}{C-A}}{\frac{C-B}{C-E}}=4k-4k^2$ 。

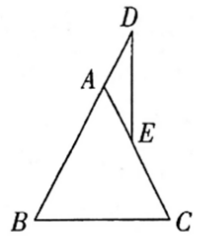
$C$为原点




**例178：如图1,** $AB$为圆$O$的弦，$OC$垂直$OA$，交$AB$于$D$, 交过$B$的切线于$C$，则$BC$=$CD$。

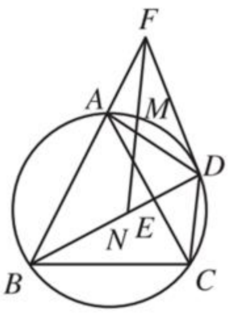
$$\dfrac{\frac{A-B}{O-C}}{\frac{B-C}{B-A}}=\dfrac{\frac{B-A}{B-O}}{\frac{A-O}{A-B}}\dfrac{\frac{A-O}{O-C}}{\frac{B-C}{B-O}},$$

**例179：如图1,** $\triangle ABC$中, $AB$=$AC$, $D$是$BA$延长线上一点, $E$在$AC$上，且$AD$=$AE$, 求证:$DE\perp BC$.




$$\dfrac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{B-A}{B-C}}\dfrac{\frac{C-A}{E-D}}{\frac{D-E}{A-B}}\left(\frac{E-D}{B-C}\right)^2=-1。$$

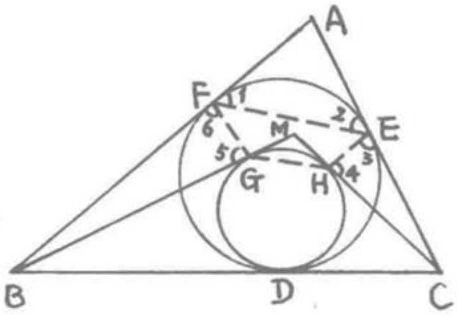
**例 180：如图 1,** 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 交于点 $E$，且 $AC\perp BD$，$AB$=$AC$, 过点 $D$ 作 $DF\perp BD$, 交 $BA$ 的延长线于点 $F$，$\angle BFD$ 的平分线分别交 $AD$、$BD$ 于点 $M$、$N$. 求证: $\angle BAD$=3$\angle DAC$.




$$\frac{\left(\frac{A-D}{A-C}\right)^3}{\frac{A-D}{A-B}} = -\left(\frac{D-B}{C-A}\right)^2 \left(\frac{\frac{A-D}{A-C}}{\frac{B-D}{B-C}}\right)^2 \frac{\frac{B-A}{B-C}}{\frac{C-B}{C-A}},$$

**例181：如图1,** 证明等腰梯形的底角相等.

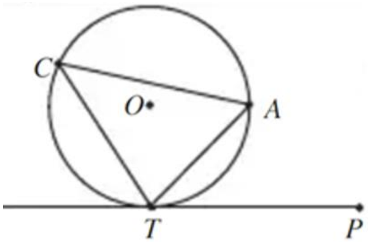
设梯形$ABCD$两腰$AB$=$CD$，则∠$B$=∠$C$.




**例182：如图1,** 设$M$为△$ABC$内一点，△$ABC$的内切圆与边$BC$，$CA$, $AB$的切点分别为$D$, $E$, $F$，△$MBC$的内切圆与边$BC$，$CM$，$MB$的切点分别为$D$、$H$、$G$，求证：$E$、$F$、$G$、$H$四点共圆。

$$\left(\frac{\frac{F-E}{F-G}}{\frac{H-E}{G-H}}\right)^2 \frac{\frac{B-A}{F-E}}{\frac{E-F}{C-A}} \frac{\frac{B-M}{G-H}}{\frac{H-G}{C-M}} \frac{\frac{F-G}{A-B}}{\frac{M-B}{G-F}} \frac{\frac{H-E}{M-C}}{\frac{A-C}{E-H}} = 1,$$

说明：本题看起来复杂，但只需将$AF$=$AE$，$MG$=$MH$，$BF$=$BD$=$BG$，$CD$=$CE$=$CH$，这些线段关系转化成角度表示即可。

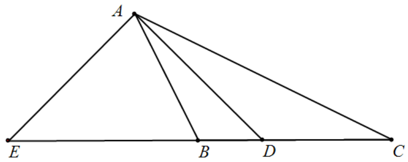


**例 183：如图 1,** 弦切角定理：弦切角的度数等于它所夹的弧所对的圆心角度数的一半，等于它所夹的弧所对的圆周角度数。$TA$ 是圆 $O$ 上一条弦，$TP$ 是切线，$C$ 是圆上一点，且在弦 $AT$ 所对的弧上，则 $\angle PTA=\angle ACT$ 。

证法 1：$\angle PTA=90^{\circ}-\angle ATO=\frac{1}{2}\left(180^{\circ}-\angle ATO-\angle OAT\right)=\frac{1}{2}(\angle AOT)=\angle ACT$ 。

证法 2：$\left(\dfrac{\dfrac{T-A}{C-P}}{\dfrac{C-A}{C-T}}\right)^2=-\left(\dfrac{T-O}{T-P}\right)^2\dfrac{\dfrac{A-T}{A-O}}{\dfrac{T-O}{T-A}}\dfrac{\dfrac{O-A}{O-T}}{\left(\dfrac{C-A}{C-T}\right)^2}$

可以发现：两种证法思路完全一样，只是写法上有所不一样。不同之处，似乎证法 1 更简洁。那么证法 2 有何优越之处？恒等式表明：四个条件 $\angle PTA=\angle ACT$ 、$TO\perp TP$、$OA$=$OT$、2$\angle ACT$=$\angle AOT$，任意知道三个，可确定第四个也成立。

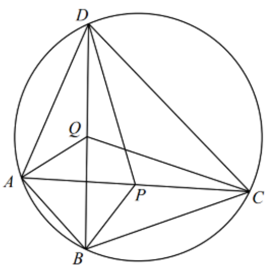



**例 184：如图 1,** △$ABC$ 中，$D$、$E$ 分别在 $CB$ 及其延长线上，$AD$=$AE$，$\angle BAD$=$\angle CAD$，$AD\perp AE$，求证：$\angle B-\angle C=\frac{\pi}{2}$。

证明：$A=0$，$\dfrac{\dfrac{B}{B-C}}{\dfrac{C-B}{C}}=\dfrac{\dfrac{C}{D}}{\dfrac{D}{B}}\dfrac{\dfrac{E}{B-C}}{\dfrac{C-B}{D}}\dfrac{D}{E}$。

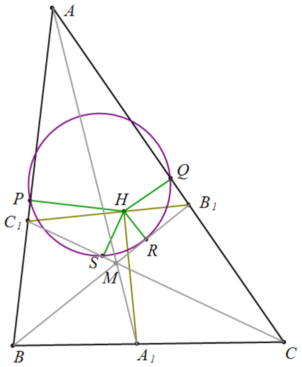
推广：△$ABC$ 中，$D$、$E$ 分别在 $CB$ 及其延长线上，求证：$AD$=$AE$，$\angle BAD$=$\angle CAD$，$\angle B$−$\angle C$=$\angle EAD$，这三个条件任意知道两个，可得第三个成立。

**例 185：如图 1,** $P$、$Q$ 分别是圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 的中点，若$\angle BPA$=$\angle DPA$，证明：$\angle AOB$=$\angle COB$.（2011 全国联赛）




证明：设$\dfrac{\dfrac{(B+D)/2-C}{D-B}}{\dfrac{D-B}{(B+D)/2-A}}=t_1$，$\dfrac{\dfrac{(A+C)/2-B}{C-A}}{\dfrac{C-A}{(A+C)/2-D}}=t_2$，$\dfrac{\dfrac{D-A}{D-B}}{\dfrac{C-A}{C-B}}=t_3$，则

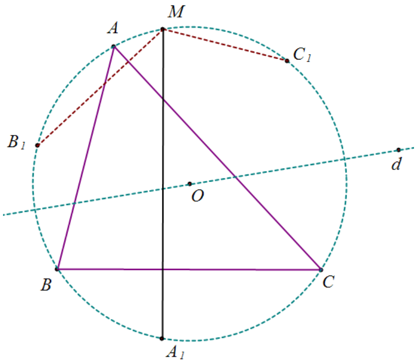
$-3-4t_1-4t_2+16t_1t_2+16t_3-16t_3^{\ 2}$。




**例 186：如图 1,** $\triangle ABC$ 中有点 $M$，$AM$、$BM$、$CM$ 分别交对边于 $A_1$，$B_1$，$C_1$，$A_1H$ 垂直 $B_1C_1$ 于 $H$，过 $H$ 向 $AB$、$AC$、$BB_1$，$CC_1$ 作垂线段 $HP$、$HQ$、$HR$，$HS$，求证：$P$、$Q$、$R$、$S$ 四点共圆。

$$\frac{\frac{P-Q}{P-S}}{\frac{R-Q}{S-R}}=-\left(\frac{B_1-C_1}{H-A_1}\right)^2\frac{\frac{P-Q}{P-H}}{\frac{A-C}{A-H}}\frac{\frac{P-H}{P-S}}{\frac{C_1-B_1}{C_1-C}}\frac{\frac{C-A}{B_1-C_1}}{\frac{R-Q}{R-H}}\frac{\frac{M-H}{C-C_1}}{\frac{R-H}{R-S}}\frac{\frac{H-A_1}{H-M}}{\frac{H-A}{A_1-H}},$$

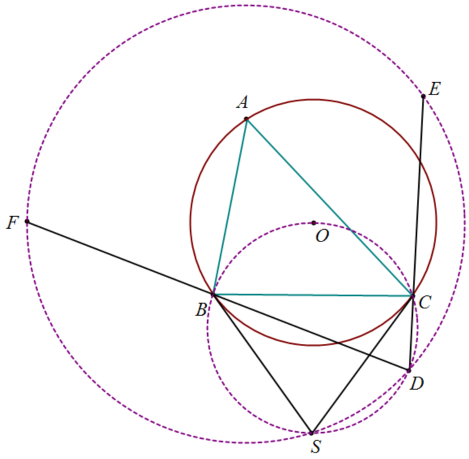
$\dfrac{\frac{H-A_1}{H-M}}{\frac{H-A}{A_1-H}}\in R$ 等价于 $\angle AHA_1$ 与 $\angle MHA_1$ 互补，等价于 $\angle AHC_1=\angle MHC_1$，需要补充证明这一结论。




**例 187：如图 1,** $\triangle ABC$ 中，直线 $d$ 过$\triangle ABC$ 的外心 $O$，$A$、$B$、$C$ 关于 $d$ 的对称点为 $A_1$、$B_1$、$C_1$，过 $A_1$ 作直线垂直 $BC$ 交圆于 $M$，求证 $MB_1\perp AC$，$MC_1\perp AB$。

证明：下面只证 $MB_1\perp AC$。

$$\frac{B_1-M}{A-C}\frac{\frac{C_1-A_1}{C_1-B_1}}{\frac{C-B}{C-A}}\frac{\frac{M-A_1}{M-B_1}}{\frac{C_1-A_1}{C_1-B_1}}\frac{B-C}{M-A_1}=-1。$$

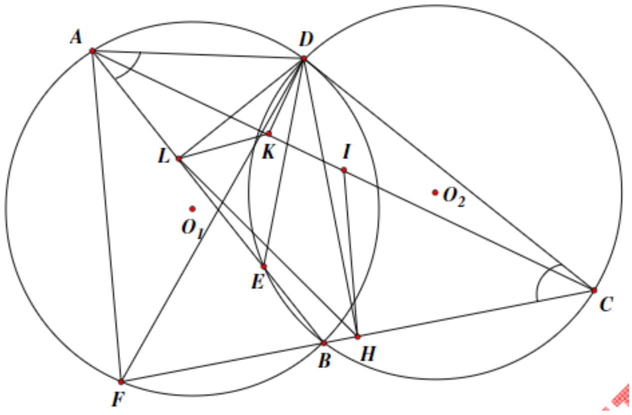



**例 188：如图 1,** $SB$、$SC$ 是△$ABC$ 外接圆 $O$ 的两条切线，$B$ 和 $E$ 关于 $AC$ 对称，$C$ 和 $F$ 关于 $AB$ 对称，$BF$ 交 $CE$ 于 $D$，求证：$B$、$C$、$D$、$S$ 四点共圆。

$$\frac{\frac{B-S}{B-F}}{\frac{C-S}{C-E}}=\frac{\frac{B-A}{B-C}}{\frac{B-F}{B-A}}\frac{\frac{C-B}{C-A}}{\frac{C-A}{C-E}}\frac{\left(\frac{A-C}{A-B}\right)^2}{\frac{S-C}{B-S}},$$

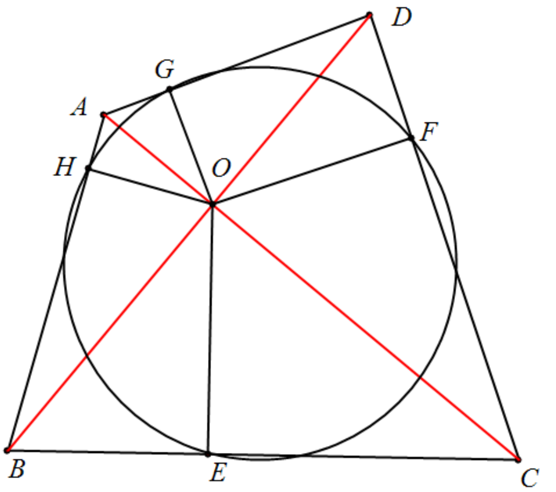
说明：还可研究 $F$、$E$、$D$、$S$ 四点共圆，$B$、$C$、$D$、$S$、$O$ 五点共圆。

**例 189：如图 1,** 四边形 $ABCD$，$\angle DAB=\angle BCD$，过 $D$ 向 $AB$、$BC$、$CA$ 作垂线段 $DL$、$DH$、$DK$，$I$ 是 $AC$ 中点，求证：$K$、$L$、$H$、$I$ 四点共圆。



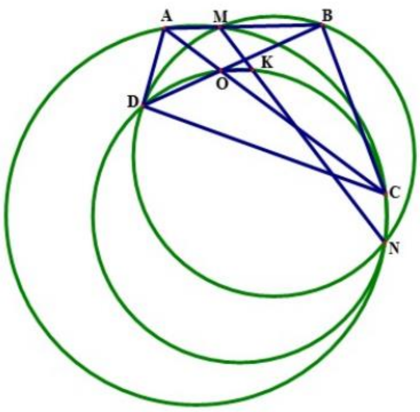

$$\frac{\frac{K-H}{K-L}}{\frac{I-H}{I-L}}=\frac{\frac{B-A}{A-D}}{\frac{K-L}{K-D}}\frac{\frac{C-D}{B-C}}{\frac{K-D}{K-H}}\frac{\frac{A-D}{A-B}}{\frac{F-D}{B-C}}\frac{\frac{C-E}{F-A}}{\frac{D-C}{D-F}}\frac{A-F}{I-H}\frac{L-I}{E-C}。$$

说明：设 $AB$ 交⊙$O_2$ 于 $E$，易证△$DAE$ 是等腰三角形。设 $BC$ 交⊙$O_1$ 于 $F$，易证△$DFC$ 是等腰三角形。于是 $LK/\!/EC$，$IH/\!/AF$，△$DAE$∽△$DFC$，△$DAF$∽△$DEC$



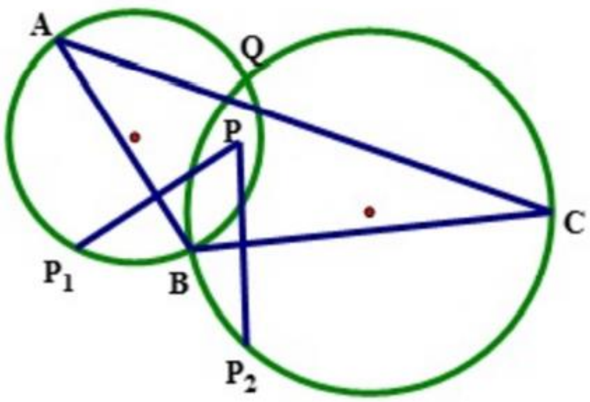

**例 190：如图 1,** 四边形 $ABCD$，$AC$ 交 $BD$ 于 $O$，$O$ 在 $BC$、$CD$、$DA$、$AB$ 四边的垂足为 $E$、$F$、$G$、$H$，求证：$AC\perp BD$ 的充要条件是 $E$、$F$、$G$、$H$ 四点共圆。

$$\frac{\frac{G-F}{G-H}}{\frac{E-F}{E-H}}=\left(\frac{A-C}{B-D}\right)^2\frac{\frac{G-O}{G-H}}{\frac{A-C}{A-B}}\frac{\frac{G-F}{G-O}}{\frac{D-C}{D-B}}\frac{\frac{E-H}{E-O}}{\frac{B-A}{B-D}}\frac{\frac{E-O}{E-F}}{\frac{C-A}{C-D}}$$。




**例 191：如图 1,** 四边形 $ABCD$，$AC$ 交 $BD$ 于 $O$，$M$ 是 $AB$ 上的点，$\triangle ACM$ 的外接圆交$\triangle BDM$ 的外接圆于 $N$，求证：$B$、$O$、$C$、$N$ 四点共圆；若 $MN$ 交$\triangle BOC$ 外接圆于 $K$，则 $AB/\!/OK$。

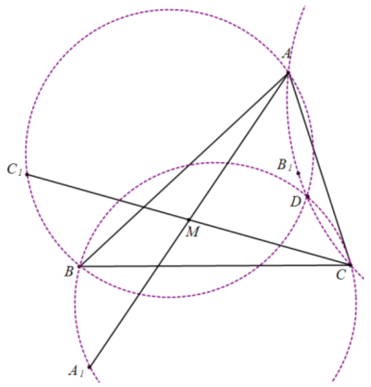
$$\frac{\frac{A-C}{B-D}}{\frac{N-C}{D-N}}\frac{\frac{A-M}{A-C}}{\frac{N-M}{N-C}}\frac{\frac{B-D}{B-M}}{\frac{N-D}{N-M}}\frac{M-B}{A-M}=1,\quad \frac{O-K}{A-B}\frac{\frac{N-M}{N-C}}{\frac{O-K}{A-C}}\frac{\frac{A-B}{A-C}}{\frac{N-M}{N-C}}=1$$。




例 192：如图 1, △$ABC$ 平面上有点 $P$，$P$、$P_1$ 关于 $AB$ 对称，$P$、$P_2$ 关于 $BC$ 对称，$P$、$P_3$ 关于 $CA$ 对称，求证：$\triangle ABP_1$、$\triangle BCP_2$、$\triangle CAP_3$ 的外接圆交于一点。

证明：假设 $\triangle ABP_1$、$\triangle BCP_2$ 的外接圆交于 $Q$，只需证∠$AQC$=∠$APC$。

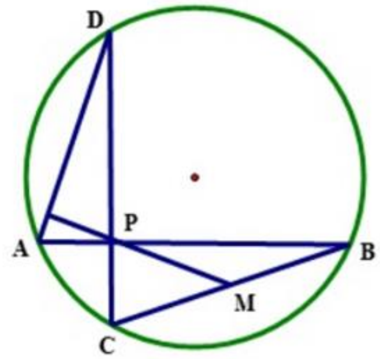
$$\frac{\frac{Q-C}{Q-A}}{\frac{P-A}{P-C}}=\frac{\frac{Q-B}{Q-A}}{\frac{B-P_1}{P_1-A}}\frac{\frac{P-B}{P-A}}{\frac{P_1-A}{P_1-B}}\frac{\frac{Q-C}{Q-B}}{\frac{P_2-C}{B-P_2}}\frac{\frac{P-C}{P-B}}{\frac{P_2-B}{P_2-C}}。$$




例 193：如图 1, △$ABC$ 中有点 $M$，延长 $AM$ 至 $AA_1$，使得 $AM$=$A_1M$，延长 $BM$ 至 $BB_1$，使得 $BM$=$B_1M$，延长 $CM$ 至 $CC_1$，使得 $CM$=$C_1M$，求证：△$ABC_1$、△$A_1BC$、△$AB_1C$ 的外接圆交于点 $D$。

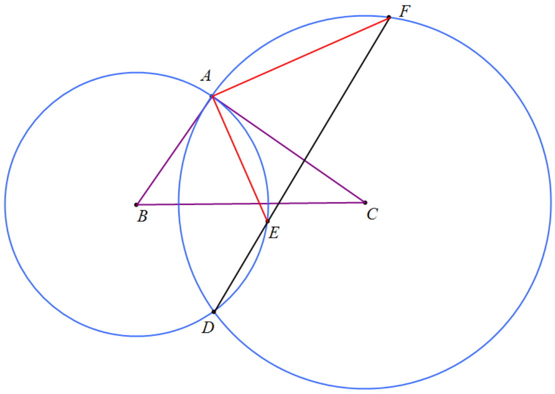
证明：假设△$ABC_1$、△$A_1BC$ 的外接圆交于点 $D$，再证 $D$ 在△$AB_1C$ 的外接圆上。

$$\frac{\frac{D-A}{D-C}}{\frac{B_1-A}{B_1-C}}=\frac{A_1-B}{B_1-A}\frac{C_1-A}{A_1-C}\frac{B_1-C}{C_1-B}\frac{\frac{B-D}{D-C}}{\frac{A_1-B}{A_1-C}}\frac{\frac{D-A}{B-D}}{\frac{C_1-A}{C_1-B}},$$




**例 194：如图 1,** 已知 $AB\perp CD$，$AB$ 交 $CD$ 于 $P, M$ 是 $BC$ 中点，求证：$PM\perp AD$ 的充要条件是 $A$、$C$、$B$、$D$ 四点共圆。

$$\frac{P-M}{D-A}=\frac{\frac{P-M}{P-C}}{\frac{C-D}{C-B}}\frac{\frac{C-D}{C-B}}{\frac{A-D}{A-B}}\frac{C-P}{A-B},$$

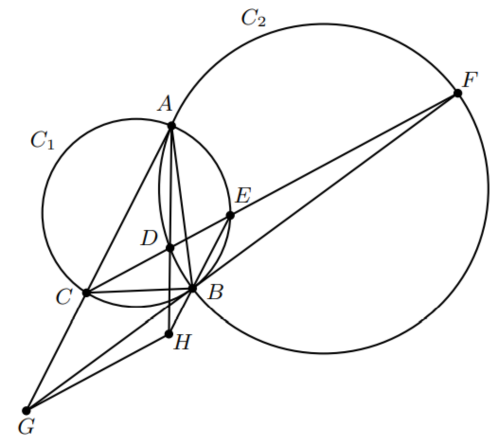



**例 195：如图 1,** $\triangle ABC$，$AB\perp AC$，分别以 $B$、$C$ 为圆心，$BA$、$CA$ 为半径作圆，交点 $A$、$D$，圆 $B$ 上有 $E$，延长 $DE$ 交 $DE$ 于 $F$，求证：$AE\perp AF$。

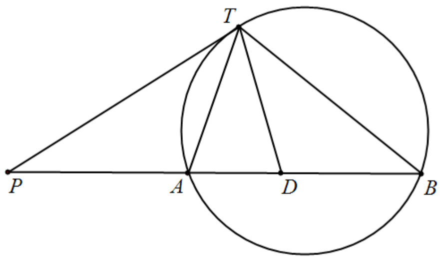
$$\frac{A-E}{A-F}=\frac{\frac{D-F}{D-C}}{\frac{F-C}{F-D}}\frac{\frac{A-E}{A-D}}{\frac{D-F}{D-C}}\frac{\frac{F-C}{F-A}}{\frac{A-F}{A-C}}\frac{\frac{A-D}{A-B}}{\frac{F-D}{F-A}}\frac{A-B}{A-C},$$

**例 196：如图 1,** 两圆交于 $A$、$B$ 两点，一直线交两圆于 $D$、$D$、$E$、$F$ 四点，$G$ 是 $AC$ 和 $BF$ 的交点，$H$ 是 $AD$ 和 $BE$ 的交点，求证：$GH /\!/ CF$。

证明：由 $\frac{\frac{H-A}{H-E}}{\frac{G-A}{G-F}}=\frac{\frac{B-A}{H-E}}{\frac{G-A}{C-F}}\frac{\frac{H-A}{C-F}}{\frac{B-A}{G-F}}$ 得 $\angle AGB=\angle AHB$，于是 $A$、$B$、$H$、$G$ 四点共圆，$\angle ACF=\angle ABE=\angle AGH$。

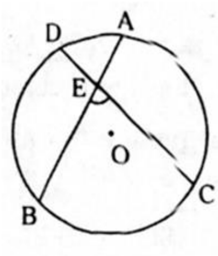


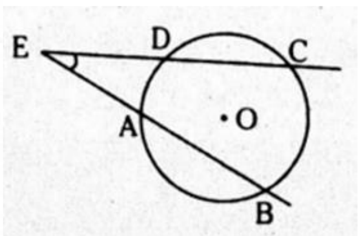

说明：由于 $GH$ 这条线是最后添加的，没有出现在任何的条件中，所以不可能由条件化简得到类似 $G-F$ 这样的项，因此难以直接恒等式一步到位解决，只能拐着弯处理。




例 197：如图 1, $\triangle ABT$ 中，过 $T$ 作$\triangle ABT$ 外接圆的切线，交 $AB$ 于 $P$，$TD$ 平分$\angle ATB$，求证：$PD=PT$。

$$\frac{\frac{B-P}{D-T}}{\frac{T-D}{T-P}}=\frac{\frac{T-B}{T-D}}{\frac{T-D}{T-A}}\frac{\frac{B-P}{B-T}}{\frac{T-A}{T-P}},$$



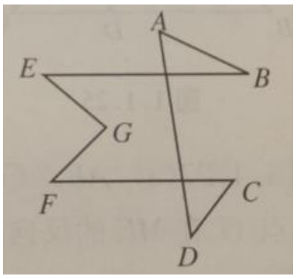




例 198：如图 1, 圆 $O$ 上有 $A$、$B$、$C$、$D$，$AB$ 交 $CD$ 于 $E$，求证：$2\angle CEB=\angle COB+\angle DOA$。

$$\frac{\left(\frac{D-C}{A-B}\right)^2}{\frac{O-C}{O-B}\frac{O-D}{O-A}}=\frac{\frac{D-C}{D-O}}{\frac{C-O}{C-D}}\frac{\frac{A-O}{A-B}}{\frac{B-A}{B-O}},$$

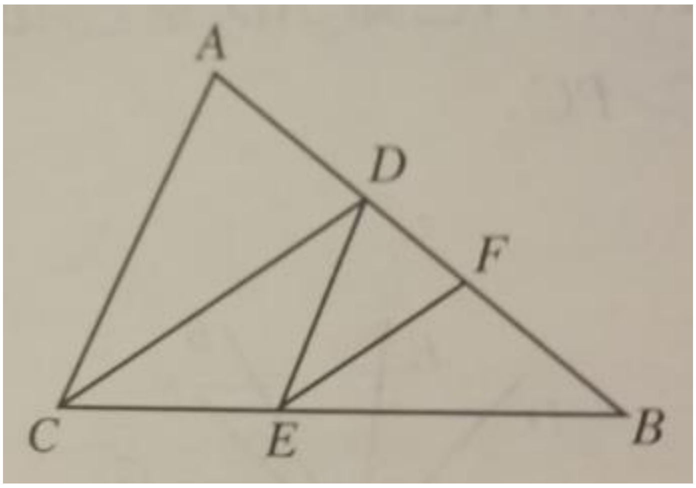
说明：恒等式用的是有向角。如果采用常规角，如图 1，$2\angle CEB=\angle COB+\angle DOA$。如图 2，$2\angle CEB=\angle COB-\angle DOA$。

**例 199：如图 1,** 已知∠*EGF*=∠*BEG*+∠*CFG*. 求证: ∠*A*+∠*B*+∠*C*+∠*D*=180°．



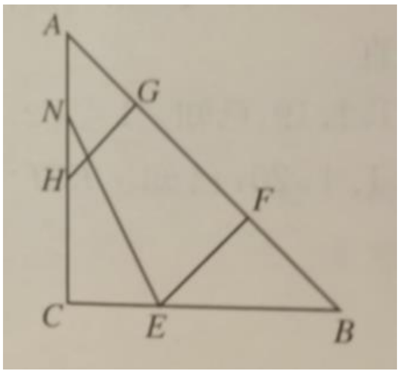

$$\frac{\frac{E-B}{E-G}\frac{F-G}{F-C}}{\frac{G-F}{G-E}}=-\frac{A-B}{A-D}\frac{B-E}{B-A}\frac{C-D}{C-F}\frac{D-A}{D-C},$$

**例 200：如图 1,** 已知 *CD* 平分∠*ACB*, *AC*//*DE*, *CD*//*EF*. 求证: *EF* 平分∠*DEB*.

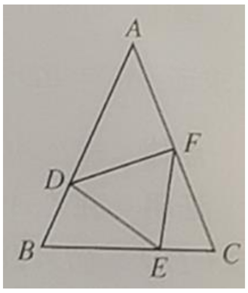



$$\frac{\frac{E-D}{E-F}}{\frac{E-F}{C-B}}=\frac{\frac{C-A}{C-D}}{\frac{C-D}{C-B}}\frac{E-D}{C-A}\left(\frac{C-D}{E-F}\right)^2,$$

**例 201：如图 1,** 在△*ABC* 中, ∠*ACB*=90°, 直线 *EF* 与边 *CB*、*AB* 分别交于点 *E*、*F*, 直线 *HG* 与边 *AC*、*AB* 分别交于点 *H*、*G*, 且 *HG*//*EF*. 求证: ∠*CEF*−∠*AHG*=90°．



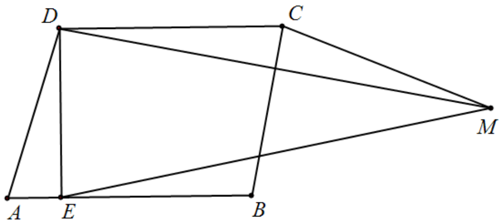
$$\frac{\frac{C-B}{E-F}}{\frac{C-A}{H-G}}=\frac{H-G}{E-F}\frac{C-B}{C-A},$$




**例 202：如图 1,** 在△*ABC* 中, *AB*=*AC*, *D*、*E*、*F* 分别在 *AB*、*BC*、*CA* 上, 且 *DE*=*EF*=*FD*. 求证: $2\angle DEB=\angle ADF+\angle CFE$.

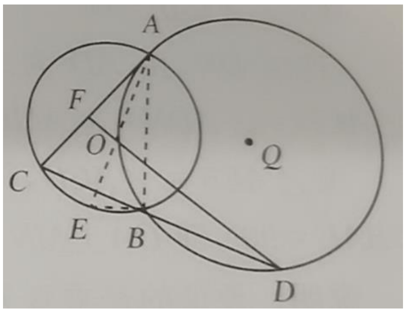
$$\frac{\left(\frac{C-B}{E-D}\right)^2}{\frac{B-A}{D-F}\frac{A-C}{F-E}}=\frac{\frac{C-B}{C-A}\frac{D-F}{D-E}}{\frac{B-A}{B-C}\frac{E-D}{E-F}},$$

**例 203：如图 1,** 在平行四边形 *ABCD* 中，*DE*⊥*AB* 于点 *E*，*MD*=*ME*，*MC*=*CD*. 求证: ∠*EMC*=3∠*BEM*.




$$\frac{\frac{M-E}{M-C}}{\left(\frac{E-M}{A-B}\right)^3}=\left(\frac{A-B}{D-E}\right)^4\frac{\frac{M-D}{M-C}}{\frac{A-B}{D-M}}\left(\frac{\frac{E-D}{E-M}}{\frac{D-M}{D-E}}\right)^2,$$

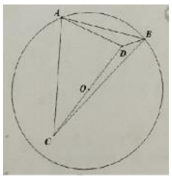
说明：恒等式中只用到 *AB*∥*DC*，无需要求四边形 *ABCD* 是平行四边形。




**例 204：如图 1,** 已知圆 *O* 和圆 *Q* 相交于点 *A*、*B*, 圆 *Q* 经过点 *O*, *C* 是圆 *O* 优弧 *AB* 上一点, *CB* 的延长线交圆 *Q* 于点 *D*. 求证: *DO*⊥*AC*.

$$\frac{A-C}{D-O}=\frac{\frac{C-A}{C-B}\frac{D-B}{D-O}}{\frac{B-C}{B-A}\frac{A-B}{A-O}}\frac{C-B}{D-B}\frac{B-C}{A-O},$$

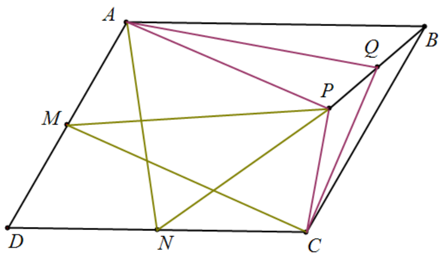
**例 205：如图 1,** $A$、$B$ 为 $O$0 上的两点, $O$ 为 $CD$ 中点. 证明: $\angle BAD+\angle BAC=90°$ 的充要条件是 $\angle ABD+\angle ABC=90°$ . （黄利兵命题）



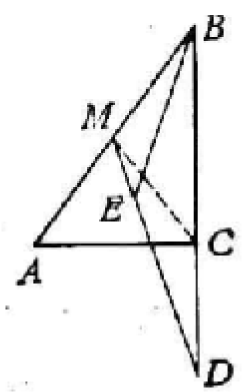

$$\frac{A-D}{A-B}\frac{A-C}{A-B}-\frac{B-D}{B-A}\frac{B-C}{B-A}=2\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{C+D}{2}}{A-B},$$

ABCD is parallelogram and P a point inside, such that the midpoint of AD is equidistant from P and C, and the midpoint of CD is equidistant from P and A. Let Q be the midpoint of PB. Show that ∠PAQ = ∠PCQ.

**例 206：如图 1,** $P$ 是平行四边形 $ABCD$ 内一点，$M$、$N$ 分别是 $DA$、$DC$ 中点，$MP=MC$，$NA=NP$，求证：$\angle PAQ=\angle PCQ$。




$$\frac{\frac{A-\frac{P+B}{2}}{A-P}}{\frac{C-P}{C-\frac{P+B}{2}}}=\frac{\frac{A+C-B+C}{2}-\frac{A+P}{2}}{P-A}\frac{\frac{A+C-B+A}{2}-\frac{C+P}{2}}{P-C}$$

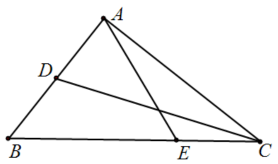


**例 207：如图 1,** 已知点 $M$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 $AB$ 的中点，延长 $BC$ 至点 $D$, 使 $2CD=AB$，连 $MD$，交$\angle B$ 的平分线于点 $E$，求证:$BE=ED$.

证明：设 $C=0$，$\left(\dfrac{\dfrac{B-0}{B-E}}{\dfrac{D-\dfrac{A+B}{2}}{D-0}}\right)^2=2\dfrac{\dfrac{B-0}{B-E}}{\dfrac{B-E}{B-A}}\dfrac{\dfrac{\dfrac{A+B}{2}-0}{\dfrac{A+B}{2}-D}}{\dfrac{D-\dfrac{A+B}{2}}{D-0}}\dfrac{\dfrac{D}{A-B}}{\dfrac{A+B}{B}}$

[证]连 $MC$, 则 $MC=MB$, 故$\angle MCB=\angle MBC=2\angle EBD$.
而 $MC=CD$, 故$\angle MCB=\angle CMD+\angle D=2\angle D$;
所以$\angle EBD=\angle D$，$BE=ED$.

**例 208：如图 1,** △ABC 中，D 是 AB 中点，E 是 BC 三等分点，且 BE=2EC，∠ADC=∠BAE，求∠BAC。(英国数学奥林匹克试题 2005)




设 $A=0$，$4\left(\dfrac{C}{B}\right)^2+6\dfrac{\dfrac{\dfrac{B+2C}{3}}{B}}{\dfrac{B}{\dfrac{B}{2}-C}}-1=0$。

说明：根据恒等式可知 $\angle ADC=\angle BAE \Leftrightarrow \angle BAC=90^{\circ}$。

设 $\left[\left(\dfrac{A+B+2C}{4}-A\right)^2-\left(\dfrac{A+B+2C}{4}-\dfrac{A+B}{2}\right)^2\right]-\dfrac{1}{2}(A-B)(A-C)=0$。

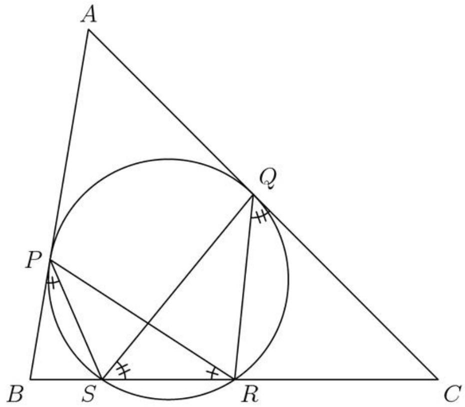
其中 AE 与 CD 的交点为 $\dfrac{A+B+2C}{4}$。

**USAJMO 2012**
www.artofproblemsolving.com/community/c3975
by BOGTRO, tc1729, rrusczyk

**Day 1** April 24th

**1** Given a triangle $ABC$, let $P$ and $Q$ be points on segments $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$, respectively, such that $AP=AQ$. Let $S$ and $R$ be distinct points on segment $\overline{BC}$ such that $S$ lies between $B$ and $R$, $\angle BPS=\angle PRS$, and $\angle CQR=\angle QSR$. Prove that $P,Q,R,S$ are concyclic (in other words, these four points lie on a circle).

**例 209：如图 1,** 给定△ABC，P、Q 分别是边 AB、AC 上的点，且满足 AP= AQ；S、R 是边 BC 上的二个不同的点，且点 S 位于 B、R 之间，∠BPS = ∠PRS，∠CQR = ∠QSR 。证明: P、Q、R、S 四点共圆。(2012 年美国数学奥林匹克 USAJMO 试题)




$$\frac{\frac{P-S}{P-B}}{\frac{C-B}{R-P}}\frac{\frac{S-Q}{B-C}}{\frac{Q-C}{Q-R}}\frac{\frac{Q-C}{Q-P}}{\frac{P-Q}{P-B}}\left(\frac{P-Q}{P-S}/\frac{R-Q}{B-C}\right)\left(\frac{C-B}{R-P}/\frac{Q-S}{Q-P}\right)=1$$

此题理解起来有点绕。如果是换种说法就很好理解了：
给定△ABC，P、Q 分别是边 AB、AC 上的点，S、R 是边 BC 上的二个不同的点，且点 S 位于 B、R 之间，∠BPS=∠PRS，∠CQR =∠QSR。若 P、Q、R、S 四点共圆，求证 AP= AQ。

Full-angle method

**Example 81** *If the two bisectors of the angle $A$ of the triangle $ABC$ are equal, and the circle having $BC$ for diameter cuts the sides $AB$, $AC$ in the points $P$, $Q$, show that $CP \equiv CQ$.*

Point order: $u, v, a, b, c, o, p, q$.

Hypotheses: perp$(a, u, a, v)$, cong$(a, u, a, v)$, coll$(u, v, b)$, eqangle$(c, a, u, u, a, b)$, coll$(u, v, c)$, midpoint$(o, b, c)$, coll$(a, b, p)$, coll$(a, c, q)$, pbisector$(o, b, q)$, pbisector$(o, b, p)$.

Conclusion: pbisector$(c, p, q)$.

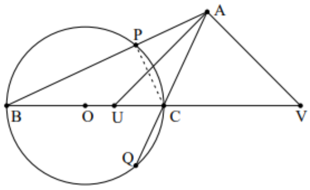



Figure 81

The Machine Proof

$-[qp, qc] - [qp, pc]$

(Since $q$, $p$, $c$, $b$ are cyclic; $[qp, qc] = [pb, cb]$.)

$= -[qp, pc] - [pb, cb]$

(Since $pc \perp ab$; $[qp, pc] = [qp, ba] + 1$.)

$= -[qp, ba] - [pb, cb] - 1$

(Since $a$, $c$, $q$ are collinear; $q$, $p$, $c$, $b$ are cyclic; $[qp, ba] = [qp, qc] + [ca, ba] = [pb, cb] + [ca, ba]$.)

$= -2[pb, cb] - [ca, ba] - 1$

(Since $a$, $b$, $p$ are collinear; $[pb, cb] = -[cb, ba]$.)

$= 2[cb, ba] - [ca, ba] - 1$

(Since $b$, $c$, $u$, $v$ are collinear; $[cb, ba] = -[ba, vu]$.)

$= -[ca, ba] - 2[ba, vu] - 1$

(Since $\angle[ac, ab] = \angle[ua, ab]$ ; $[ca, ba] = [ca, ua] + [ua, ba] = -2[ba, au]$.)

$= 2[ba, au] - 2[ba, vu] - 1$

(Since $ba \parallel ba$; $2[ba, au] - 2[ba, vu] = -2[au, vu]$.)

$= -2[au, vu] - 1$

(Since $au = av$ $ua \perp av$; $[au, vu] =_1 423772$.)

如图，△ABC 中，AU、AV 分别是∠A 的内、外角平分线，以 BC 为直径作圆分别交 AB、AC 于 P、Q，若 AU=AV，则 CP=CQ。

$$\frac{\dfrac{P-C}{P-Q}}{\dfrac{Q-P}{C-A}} = \frac{\dfrac{B-A}{B-C}}{\dfrac{Q-P}{C-A}} \frac{\dfrac{P-C}{P-Q}}{\dfrac{B-C}{B-Q}} \frac{\dfrac{C-B}{V-A}}{\dfrac{U-A}{B-C}} \frac{\dfrac{A-U}{A-B}}{\dfrac{A-C}{A-U}} \frac{A-V}{A-U} \frac{A-C}{B-Q}$$

**Example 78** *ABC is triangle inscribed in a circle; DE is the diameter bisecting BC at G; from E a perpendicular EK is drawn to one of the sides, and the perpendicular from the vertex A on DE meets DE in H. Show that EK touches the circle GHK.*

Point order: $a, b, c, o, g, e, k, h, n$.

Hypotheses: circumcenter$(o, b, a, c)$, midpoint$(g, b, c)$, coll$(g, o, e)$,
pbisector$(o, b, e)$, perp$(k, e, a, b)$, coll$(k, a, b)$, perp$(a, h, o, g)$, coll$(h, o, g)$, circumcenter$(n, g, h, k)$.

Conclusion: perp$(e, k, k, n)$.

The Machine Proof

$-[nk, ke] + 1$

(Since $ke \perp ab$; $[nk, ke] = [nk, ba] + 1$.)

$= -[nk, ba]$

(Since circumcenter($n$,$k$, $g$, $h$ ); $[nk, ba] = [nk, kg] + [kg, ba] = [hk, hg] + [kg, ba] + 1$.)

$= -[hk, hg] - [kg, ba] - 1$

(Since $hg \perp bc$; $[hk, hg] = [hk, cb] + 1$.)

$= -[hk, cb] - [kg, ba]$

(Since $e$, $g$, $h$ are collinear; $h$, $k$, $e$, $a$ are cyclic;
$[hk, cb] = [hk, he] + [eg, cb] = [ka, ea] + [eg, cb]$.)

$= -[kg, ba] - [ka, ea] - [eg, cb]$

(Since $a$, $b$, $k$ are collinear; $k$, $g$, $b$, $e$ are cyclic;
$[kg, ba] = [kg, kb] = [eg, eb]$.)

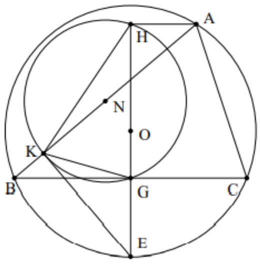



Figure 78

$= -[ka, ea] - [eg, eb] - [eg, cb]$

(Since $a$, $b$, $k$ are collinear; $[ka, ea] = -[ea, ba]$.)

$= -[eg, eb] - [eg, cb] + [ea, ba]$

(Since $eg \perp bc$; $[eg, eb] = -[eb, cb] + 1$.)

$= -[eg, cb] + [eb, cb] + [ea, ba] - 1$

(Since $eg \perp cb$; $[eg, cb] = 1$.)

$= [eb, cb] + [ea, ba]$

(Since $b$, $e$, $c$, $a$ are cyclic; $[eb, cb] = [ea, ca]$.)

$= [ea, ca] + [ea, ba]$

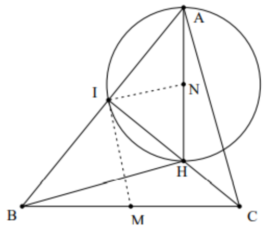
(Since circumcenter($o$,$a$, $e$, $c$, $b$ ); $oc \perp eb$; $[ea, ca] = -[ea, ba]$.)

$= 0$

△ABC 中，O 是外心，E 是劣弧 BC 的中点，G 是 BC 中点，EK⊥AB 于 K，AH⊥GE 于 H，N 是△GHK 的外心，求证：E 在 AB 上。

$$\frac{N-K}{B-K}=\left(\frac{H-G}{H-K}\frac{K-N}{K-G}\right)\frac{\left(\frac{E-G}{G-H}\frac{A-K}{A-B}\right)}{\left(\frac{A-E}{A-B}\frac{E-B}{E-H}\right)}\frac{\frac{A-E}{A-K}\frac{K-G}{K-B}}{\frac{H-E}{H-K}\frac{E-G}{E-B}}$$

**Example 66** *Show that in a triangle ABC the circles on AH and BC as diameters are orthogonal.*




Point order: $a, b, c, i, h, n, m$.

Hypotheses: foot$(i, c, a, b)$, coll$(h, c, i)$, perp$(h, a, b, c)$, midpoint$(m, c, b)$, midpoint$(n, a, h)$.

Conclusion: perp$(m, i, n, i)$.

The Machine Proof

$[mi, ni] + 1$

(Since circumcenter$(m,i, b, c)$; $[mi, ni] = [mi, ib] + [ib, ni] = -[ni, ib] + [ic, cb] + 1$.)

$= -[ni, ib] + [ic, cb]$

(Since circumcenter$(n,i, a, h)$; $[ni, ib] = [ni, ia] = [hi, ha] + 1$.)

$= -[hi, ha] + [ic, cb] - 1$

(Since $hi \parallel ic$; $-[hi, ha] + [ic, cb] = [ha, cb]$.)

$= [ha, cb] - 1$ (Since $ha \perp cb$; $[ha, cb] = 1$.)

$= 0$

△ABC 中，H 是垂心，CI 是高，M、N 分别是 BC、AH 的中点，求证：IM⊥IN。

$$\frac{I-M}{I-N}=\frac{\left(\frac{I-M}{A-B}\right)^2}{\frac{M-I}{B-C}}\frac{\left(\frac{B-A}{I-N}\right)^2}{\frac{A-H}{N-I}}\frac{A-H}{B-C}$$

**Example 58** *Let A, B, C, D be four points on circle (O). $E = CD \cap AB$. CB meets the line passing through E and parallel to AD at F. GF is tangent to circle (O) at G. Show that $FG = FE$.*

Point order: $a, b, c, d, e, f$.

Hypotheses: cyclic$(a, b, c, d)$, coll$(e, a, b)$, coll$(e, c, d)$, coll$(f, b, c)$, para$(f, e, a, d)$.

Conclusion: eqangle$(f, e, b, e, c, b)$.

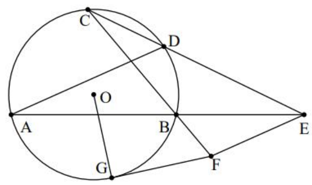



Figure 58

The Machine Proof

$[fe, eb] - [ec, cb]$

(Since $fe \parallel ad$; $[fe, eb] = -[eb, da]$.)

$= -[ec, cb] - [eb, da]$

(Since $c, d, e$ are collinear; $[ec, cb] = [dc, cb]$.)

$= -[eb, da] - [dc, cb]$

(Since $a, b, e$ are collinear; $[eb, da] = -[da, ba]$.)

$= -[dc, cb] + [da, ba]$

(Since $c, d, b, a$ are cyclic; $[dc, cb] = [da, ba]$.)

$= 0$

如图，A、B、C、D 四点在圆 O 上，AB 交 CD 于 E，作 EF//AD 交 CB 于 F，过 F 作圆 O 的切线 FG，求证：FG=FE。

$$\frac{\frac{C-E}{C-F}}{\frac{E-F}{E-B}}=\frac{C-B}{C-F}\frac{A-D}{F-E}\frac{C-E}{C-D}\frac{B-E}{A-B}\frac{\frac{C-D}{C-B}}{\frac{A-D}{A-B}}$$

说明：改证 $FG^2=FE^2=FB\cdot FC$，即证△CFE∽△EFB，即证∠FEB=∠ECB。

**Example 64** *Given two circles $(A)$, $(B)$ intersecting in $E$, $F$, show that the chord $E_1F_1$ determined in $(A)$ by the lines $MEE_1$, $MFF_1$ joining $E$, $F$ to any point $M$ of $(B)$ is perpendicular to $MB$.*

Point order: $e, f, m, b, d, a, e1, f1$.

Hypotheses: circumcenter$(b, e, f, m)$, midpoint$(d, e, f)$, coll$(a, d, b)$, coll$(e1, m, e)$, cong$(e1, a, e, a)$, coll$(f1, m, f)$, cong$(f1, a, e, a)$.

Conclusion: perp$(e1, f1, m, b)$.

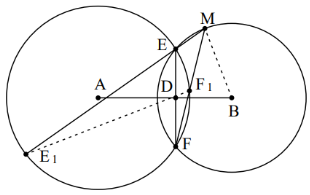


Figure 64

The Machine Proof

$[f1e1, bm] + 1$

(Since $f$, $f1$, $m$ are collinear; $f1$, $e1$, $f$, $e$ are cyclic;
$[f1e1, bm] = [f1e1, f1f] + [fm, bm] = [e1e, fe] - [bm, mf]$.)

$= [e1e, fe] - [bm, mf] + 1$

(Since $e$, $e1$, $m$ are collinear; $[e1e, fe] = [me, fe]$.)

$= -[bm, mf] + [me, fe] + 1$ (Since circumcenter($b,m, f, e$ ); $[bm, mf] = [bm, mf] = [me, fe] + 1$.)

$= 0$

如图，

$$\frac{M-B}{E_1-F_1}=\frac{\frac{F_1-F}{F_1-E_1}}{\frac{E-F}{E-E_1}}\frac{E-F}{E-E_1}\frac{M-B}{F-F_1}$$

如图，圆 O 上有 A、B、C、D、E 五点，CO⊥AB，CD、CE 交 AB 于 F、G，求证：F、G、E、D 四点共圆。

**Example 23** *From the midpoint $C$ of arc $AB$ of a circle, two secants are drawn meeting line $AB$ at $F$, $G$, and the circle at $D$ and $E$. Show that $F$, $D$, $E$, and $G$ are on the same circle.*

Point order: $a, c, d, e, o, m, f, g$.

Hypotheses: cong$(o, a, o, c)$, cong$(o, a, o, d)$, cong$(o, a, o, e)$, coll$(m, c, o)$, perp$(m, a, c, o)$, coll$(f, a, m)$, coll$(f, c, d)$, coll$(g, a, m)$, coll$(g, c, e)$.

Conclusion: $[ce, fg] + [cd, de]$.

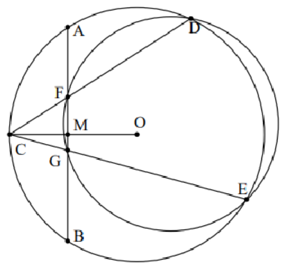


Figure 23

The Machine Proof

$-[gf, ec] - [ed, dc]$

(Since $a$, $f$, $g$, $m$ are collinear; $[gf, ec] = [ma, ec]$.)

$= -[ma, ec] - [ed, dc]$

(Since $ma \perp co$; $[ma, ec] = [oc, ec] + 1$.)

$= -[oc, ec] - [ed, dc] - 1$

(Since circumcenter($o$,$c$, $e$, $d$ ); $[oc, ec] = [oc, ce] = -[ed, dc] + 1$.)

$= 0$

$$\frac{\frac{D-E}{D-C}}{\frac{E-C}{G-F}} = \frac{F-G}{C-O}\left(\frac{C-O}{C-E}\frac{D-E}{D-C}\right)$$

**Example 67** *The circle $IBC$ is orthogonal to the circle on $I_bI_c$ as diameter.*

Point order: $a, b, c, i, o, b1, c1, m$.

Hypotheses: incenter$(i, a, b, c)$, circumcenter$(o, b, c, i)$, coll$(b1, b, i)$, perp$(b1, c, c, i)$, coll$(c1, c, i)$, perp$(c1, b, b, i)$, midpoint$(m, b1, c1)$.

Conclusion: perp$(m, b, o, b)$.

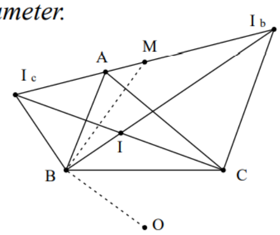


Figure 67

The Machine Proof

$[mb, ob] + 1$

(Since circumcenter($m$,$b$, $c$, $b1$ ); $[mb, ob] = [mb, bc] + [bc, ob] = -[b1c, b1b] - [ob, cb] + 1$.)

$= -[b1c, b1b] - [ob, cb]$

(Since $b1c \perp ci$; $[b1c, b1b] = -[b1b, ic] + 1$.)

$= [b1b, ic] - [ob, cb] - 1$

(Since $b$, $b1$, $i$ are collinear; $[b1b, ic] = -[ic, ib]$.)

$= -[ob, cb] - [ic, ib] - 1$

(Since circumcenter($o$,$b$, $c$, $i$ ); $[ob, cb] = [ob, bc] = -[ic, ib] + 1$.)

$= 0$

$$\frac{B-M}{B-O} = -\left(\frac{B-M}{B-C}\frac{I_b-C}{I_b-B}\right)\left(\frac{B-C}{B-O}\frac{B-I_b}{I-C}\right)\frac{I-C}{I_b-C}$$

**Example 84** *The tangent to the nine-point circle at the midpoint of a side of the given triangle is antiparallel to this side with respect to the two other sides of the triangle.*

Point order: $b, c, a, a_1, b_1, c_1, n, k, j$.

Hypotheses: midpoint$(a_1, b, c)$, midpoint$(c_1, b, a)$, midpoint$(b_1, a, c)$, pbisector$(n, a_1, b_1)$, pbisector$(n, a_1, c_1)$, perp$(a_1, k, a_1, n)$, coll$(a, c, k)$, coll$(k, a_1, j)$, coll$(a, b, j)$.

Conclusion: cyclic$(k, j, b, c)$.

The Machine Proof

$[jk, jb] - [kc, cb]$

(Since $a_1$, $j$, $k$ are collinear; $a$, $b$, $j$ are collinear; $[jk, jb] = [ka_1, ab]$.)

$= [ka_1, ab] - [kc, cb]$

(Since $ka_1 \perp a_1n$; $[ka_1, ab] = [na_1, ab] + 1$.)

$= -[kc, cb] + [na_1, ab] + 1$

(Since $a$, $c$, $k$ are collinear; $[kc, cb] = [ac, cb]$.)

$= [na_1, ab] - [ac, cb] + 1$

(Since circumcenter$(n, a_1, c_1, b_1)$;

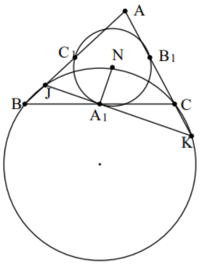



Figure 84

$[na_1, ab] = [na_1, a_1c_1] + [a_1c_1, ab] = -[c_1b_1, b_1a_1] + [c_1a_1, ab] + 1$.)

$= -[c_1b_1, b_1a_1] + [c_1a_1, ab] - [ac, cb]$

(Since $c_1a_1 \parallel ac$; $[c_1a_1, ab] - [ac, cb] = -[ab, cb]$.)

$= -[c_1b_1, b_1a_1] - [ab, cb]$

(Since $b_1a_1 \parallel ab$; $-[c_1b_1, b_1a_1] - [ab, cb] = -[c_1b_1, cb]$.)

$= -[c_1b_1, cb]$

(Since $c_1b_1 \parallel cb$; $[c_1b_1, cb] = 0$.)

$= 0$

$$\frac{\frac{J-K}{A-B}}{\frac{A-C}{C-B}}\left(\frac{A_1-C_1}{A_1-N}\frac{B_1-A_1}{B_1-C_1}\right)=\frac{J-K}{A_1-N}\frac{B-C}{B_1-C_1}\frac{A_1-B_1}{A-B}\frac{A_1-C_1}{A-C}$$