

## MA-2115: Matemáticas 4

# Semana 10

### 10.1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$

#### 1. Teorema para ecuaciones homogéneas a coeficientes constantes

La ecuación diferencial lineal

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0,$$

define el polinomio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \end{aligned}$$

donde  $\sum_j m_j = n$  (el número total de raíces es  $n$ , contando repeticiones).

Las raíces  $\lambda_j$  de  $p(\lambda)$  determina la solución general de la forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots c_ny_n(x),$$

donde las soluciones fundamentales  $y_i(x)$  tienen la forma:

- $x^l e^{\lambda_j x}$  si  $\lambda_j$  es raíz no compleja de  $p(\lambda)$  donde  $l = 0, \dots, m_j - 1$ .  
Es decir, una raíz  $\lambda_j$  que se repite  $m_j$  veces define  $m_j$  soluciones de la forma  $e^{\lambda_j x}$ ,  $x e^{\lambda_j x}$ ,  $x^2 e^{\lambda_j x}$  hasta  $t^{m_j-1} e^{\lambda_j x}$ .
- $x^l e^{a_j x} \cos(b_j x)$  y  $x^l e^{a_j x} \sin(b_j x)$  si  $\lambda_j = a_j + ib_j$  es una raíz compleja de  $p(\lambda)$ .  
Es decir, en el caso complejo esas soluciones anteriores con seno y coseno reemplazan  $x^l e^{\lambda_j x}$  y  $x^l e^{\bar{\lambda}_j x}$ , y las repeticiones se tratan con en el punto anterior.

2. Encuentre la solución del problema a valores iniciales

$$y'' + by' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

para  $b = 5, 4, 2$ .

3. Encuentre la solución general

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = 0.$$

## 4. Coeficientes indeterminados

Para conseguir una solución particular  $y_p(t)$  de

$$ay'' + by' + cy = g(t),$$

dependiendo las raíces del polinomio característico

$g(t)$	$y_p(t)$	Comentarios
$Ct^m$	$A_mt^m + \cdots A_1t + A_0$	$r = 0$ no es raíz
$C \cos(\beta t)$ or $C \sin(\beta t)$	$A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)$	$r = i\beta$ no es raíz
$Ct^m e^{rt}$	$t^s \underbrace{(A_mt^m + \cdots A_1t + A_0)}_{p_m(t)} e^{rt}$	$s = 0, 1, 2$ ( $r$ no es raíz, es simple, or es doble)
$Ct^m e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ or $\sin$	$t^s p_m(t) e^{\alpha t} \cos(\beta t) + t^s \underbrace{q_m(t)}_{\neq p_m} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$s = 0, 1$ ( $\alpha + i\beta$ no es, sí es) y $p_m$ y $q_m$ son polinomios (filas anteriores)

## 5. Encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' - 4y' + 13y = \sin(3t).$$

## 6. Variacion de parámetros

Si  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

donde  $p(t), q(t)$  and  $g(t)$  son continuas, entonces la solución particular de

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t),$$

viene dada por

$$y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t),$$

donde

$$v_1(t) = - \int \frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt, \quad v_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt,$$

con

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

## 7. Encuentre la solución general de la ecuación

$$5y'' + -20y' + 20y = t^{-2}e^{2t} + 20, \quad t > 0.$$

## 8. La ecuación de Cauchy-Euler

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x),$$

se convierte en coeficientes constantes

$$az'' + (b - a)z' + cz = f(e^t).$$

despues de usar la substituciones  $x = e^t$  y  $z(t) = y(e^t)$ .

9. *Resuelva el problema*

$$x^2y'' + 3xy' + y = 5x^{-1} \ln x.$$