MA-2115: Matemáticas 4

Semana 8

① $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dots \\ \dfrac{dy}{dx} = \end{cases}$

8.1 Ecuaciones de segundo grado: reducción de orden

$F(x, y, y', y'') = 0$

1. Dos casos

① Falta y

$F(x, y', y'') = 0$

$z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$

$F(x, z, z') = 0$

② Falta x

$F(y, y', y'') = 0$

$z(y) = y'(x)$

$F(y, z, z') = 0$

2. *Resolver la siguiente ecuación*

Falta y

$$y'' + y'\sqrt{1 - (y')^2} = 0.$$

Falta x

Substitución

$z(y) = y'(x) \xrightarrow{\text{der resp a } x} \dfrac{dz}{dy} \cdot \underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{y' = z} = \underbrace{\dfrac{d^2y}{dx^2}}_{y''} \Rightarrow \dfrac{dz}{dy} \cdot z = y''$

en la ec. $\Rightarrow$ $\dfrac{dz}{dy} \cdot z + z\sqrt{1 - z^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{dy} = -\sqrt{1 - z^2}$ sep $z \neq 0$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = \int -dy \Rightarrow \arcsin z = -y + C_1 \Rightarrow z(y) = \sin(C_1 - y)$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = \begin{cases} z = \sin u \\ dz = \cos u\, du \end{cases} = \int \frac{\cos u}{\underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 u}}_{\cos u}}\, du = u + C = \arcsin z + C$

devolver a $y(x)$

$\dfrac{dy}{dx} = \sin(C_1 - y)$ sep. $\Rightarrow \ln\left|\cot(C_1 - y(x)) + \csc(C_1 + y(x))\right| = x + C_2$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sin(u)}\, du = \int \csc u\, du = \int \frac{\cot u \csc u + \csc^2 u}{\cot u + \csc u}\, du = -\ln|\cot u + \csc u| + C$

$\times \cot u + \csc u$ den y num

$(\cot u + \csc u)' = -\cot u \csc u - \csc^2 u$

3. *Resolver el siguiente problema a valores iniciales*

Dos Condiciones iniciales para una equ. de 2do orden

$$yy'' + (y')^2 - y^3 = 0, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Falta x

$$z(y) = y'(x) \Rightarrow \frac{dz}{dy} \cdot z = y'' \Rightarrow y\frac{dz}{dy}\cdot z + z^2 - y^3 = 0$$

mult por $\frac{1}{yz}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} + \frac{1}{y}z = \frac{1}{y}z^2 \qquad \text{Bernoulli}$$

Substitucion

$$u = z^{1-2} = z^{-1} \Rightarrow z(y) = u^{-1}(y) \quad y \quad \frac{dz}{dy} = -1\, u^{-2}(y)\cdot\frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow -u^{-2}\frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u^{-1} = \frac{1}{y}u^{-2} \underset{\text{mult por } -u^2}{\Rightarrow} \frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = -\frac{1}{y} \qquad \text{lineal}$$

$$I(y) = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln|y^{-1}|} = \frac{1}{y} \qquad u(y) = y\left[\int \frac{1}{y}\left(-\frac{1}{y}\right)dy + C_1\right]$$

$$\Rightarrow u(y) = y\left[\frac{1}{y} + C_1\right] = 1 + C_1 y \underset{\text{a } z(y)}{\overset{\text{devuelvo}}{\Rightarrow}} z(y) = \frac{1}{1+C_1 y}$$

devuelvo a $y(x)$ $\left(\frac{dy}{dx} = z(y)\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+C_1 y} \Rightarrow \int (1 + C_1 y)\,dy = \int dx$$

sep

$$y(x) + \frac{C_1}{2}y^2(x) = x + C_2$$

Condiciones iniciales. $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = \frac{1}{2}$

$$y' = \frac{1}{1+C_1 y} \underset{\substack{\text{evaluo} \\ \text{en } x=0}}{\Rightarrow} \cancel{y'(0)}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + C_1 \cancel{y(0)}^{1}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1+C_1} \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\cancel{y(0)}^{1} + \frac{1}{2}\cancel{y^2(0)}^{1} = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) + \frac{1}{2}y^2(x) = x + \frac{3}{2}}$$

8.2 Sistemas de ecuaciones lineales homogeneas

Algebra Lineal
- comb. lin.
- autovalores y autovectores

1. **Definition**

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$$

$A(t)$ es una matriz $n \times n$ de funciones.

2. **Principio de superposición**

comb. lineal de soluciones es una solución

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k \longrightarrow \vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_k\vec{x}_k \quad \checkmark$$

3. **Wronskiano**

Función de t

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \det(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$$

4. **Teorema de independencia lineal**

   Sean $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ soluciones con $A(t)$ $n \times n$ continua en I, entonces son equivalentes:

   i) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ son linealmente independientes.

   ii) Para todo $t_0 \in I$, $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)(t_0) \neq 0$.

   iii) Existe $t_0 \in I$ tal que $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)(t_0) \neq 0$.

5. **Solución general**

$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ son LI

$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t)$ es sol. gen.

6. **Sistema con matriz constante**

   Si A es una matriz de coeficientes contantes, entonces la solución general es

$$\vec{x} = c_1\vec{v_1}e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v_2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{v_n}e^{\lambda_n t}.$$

λ_i, v_i son autovalores y autovectores de A.

mult alg. = # rep. autovalor
mult geom = dim espacio vect de λ. (# autovectores)

7. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones*

condición inicial.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auto valores de A

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 4\right)$$

$$= (2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-4) = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 3$

Autovectores.

$\lambda_1 = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftarrow f_1 + f_2]{f_2 \leftarrow \frac{1}{3} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$f_1 = 2-3$

$x_2 = 0$ $x_3 = K$

$x_1 = -2x_3$ $x_1 = -2K$, $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftarrow f_1 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = 2K$

$x_2 = -3K$

$x_1 = 3K + 2K = 5K$

$v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{-2} & \cancel{-2} & \cancel{4} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 = 0$

$x_3 = K$

$x_1 = 2K$

$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Condicion inicial:

$$\vec{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolver el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftarrow f_1 + 3f_2]{f_1 \leftarrow f_1 + 2f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$c_2 = -1$ $c_3 = \frac{5}{2}$

$c_1 + 2(-1) + \left(\frac{5}{2}\right) \to c_1 = -\frac{1}{2}$

substituir c_1, c_2 y c_3

$$\boxed{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix} e^{3t}}$$

8. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Los autovalores y autovectores son

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 8 \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mult. alg. = 2 = mult. geom = 2

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}$$

9. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Los autovalores y autovectores son

$$\lambda_1 = 1 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\lambda_{2,3} = 2} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mult. alg = 2 > mult. geo = 1

Para conseguir el autovector faltante v_3, resuelvo $(A - \lambda_2 I) v_3 = v_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{array}\right)$$

$x_1 = 0$
$x_3 = k$
$x_2 = 1 - k$

tomo $k = 0$ (un valor que simplifique las cuentas)

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ autovector generalizado

$$\boxed{\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{2t}}$$

para lidiar con autovector generalizado $\vec{K}$ de λ con autovector $\vec{P}$ la receta es

$$c\,(\vec{P}\,t + \vec{K})\,e^{\lambda t}$$

10. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

autovalores complejos