

MA-2115: Matemáticas 4

Semana 8

$$\textcircled{1} \begin{cases} \frac{dz}{dx} = \dots \\ \frac{dy}{dx} = \dots \end{cases}$$

8.1 Ecuaciones de segundo grado: reducción de orden

1. Dos casos

$F(x, y, y', y'') = 0$

$\textcircled{1}$ $F(x, y', y'') = 0$
 $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$
 $F(x, z, z') = 0$

$\textcircled{2}$ $F(y, y', y'') = 0$
 $z(y) = y'(x)$
 $F(y, z, z') = 0$

2. Resolver la siguiente ecuación

$$y'' + y' \sqrt{1 - (y')^2} = 0.$$

Substitución

$z(y) = y'(x) \xrightarrow{\text{der resp a x.}} \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$
 $\Rightarrow \frac{dz}{dy} \cdot z = y''$

la $z \neq 0$.

$\frac{dz}{dy} \cdot z + z \sqrt{1 - z^2} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -\sqrt{1 - z^2}$ sep $z \neq 0$

$\int \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} dz = \int -dy \Rightarrow \arcsin z = -y + C_1 \Rightarrow z(y) = \sin(C_1 - y)$

$\int \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} dz = \left\{ \begin{matrix} z = \sin u \\ dz = \cos u du \end{matrix} \right\} = \int \frac{\cos u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} du = u + C = \arcsin z + C$

$\frac{dy}{dx} = \sin(C_1 - y)$ sep. $\Rightarrow \ln |\cot(C_1 - y(x)) + \csc(C_1 + y(x))| = x + C_2$

$\int \frac{1}{\sin(u)} du = \int \csc u du = \int \frac{\cot u \csc u + \csc^2 u}{\cot u + \csc u} du = -\ln |\cot u + \csc u| + C$
 $\times \frac{\cot u + \csc u}{\cot u + \csc u} \quad (\cot u + \csc u)' = -\cot u \csc u - \csc^2 u$

3. Resolver el siguiente problema a valores iniciales

Dos condiciones iniciales
para una ecu. de 2do orden

$$yy'' + (y')^2 - \cancel{(y)^3} = 0, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Falta x

$$z(y) = y'(x) \Rightarrow \frac{dz}{dy} \cdot z = y'' \Rightarrow y \frac{dz}{dy} \cdot z + z^2 - \cancel{z^3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} + \frac{1}{y} z = \frac{1}{y} z^2 \quad \text{Bernoulli}$$

* corregido
Mar 29

$$u = z^{1-2} = z^{-1} \Rightarrow z(y) = u^{-1}(y) \quad y \quad \frac{dz}{dy} = -1 u^{-2}(y) \cdot \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow -u^{-2} \frac{du}{dy} + \frac{1}{y} u^{-1} = \frac{1}{y} u^{-2} \Rightarrow \frac{du}{dy} - \frac{1}{y} u = -\frac{1}{y} \quad \text{lineal}$$

$$I(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln|y^{-1}|} = \frac{1}{y} \quad u(y) = y \left[\int \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{y}\right) dy + C_1 \right]$$

$$\Rightarrow u(y) = y \left[\frac{1}{y} + C_1 \right] = 1 + C_1 y \quad \xrightarrow[\text{a } z(y)]{\text{devuelvo}} z(y) = \frac{1}{1 + C_1 y}$$

$$\text{devuelvo a } y(x) \quad \left(\frac{dy}{dx} = z(y) \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + C_1 y} \Rightarrow \int (1 + C_1 y) dy = \int dx$$

sep

$$y(x) + \frac{C_1}{2} y^2(x) = x + C_2$$

Condiciones iniciales. $y(0) = 1 \quad y'(0) = \frac{1}{2}$

$$y' = \frac{1}{1 + C_1 y} \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{1 + C_1 y(0)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + C_1} \Rightarrow C_1 = 1$$

$$y(0) + \frac{1}{2} y^2(0) = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) + \frac{1}{2} y^2(x) = x + \frac{3}{2}}$$

8.2 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas

Algebra Lineal
 • comb. lin.
 • autovalores
 y autovectores

1. Definition

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$$

$A(t)$ es una matriz $n \times n$ de funciones.

2. Principio de superposición

comb. lineal de soluciones es una solución

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rightarrow \vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \dots + c_n \vec{x}_n \quad \checkmark$$

3. Wronskiano

función de t

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \det(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$$

4. Teorema de independencia lineal

Sean $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ soluciones con $A(t)$ $n \times n$ continua en I , entonces son equivalentes:

- i) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ son linealmente independientes.
- ii) Para todo $t_0 \in I$, $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)(t_0) \neq 0$.
- iii) Existe $t_0 \in I$ tal que $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)(t_0) \neq 0$.

5. Solución general

$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ son LI

$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + c_2 \vec{x}_2(t) + \dots + c_n \vec{x}_n(t)$ es sol. gen.

6. Sistema con matriz constante

Si A es una matriz de coeficientes constantes, entonces la solución general es

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

λ_i, \vec{v}_i son autovalores
y autovectores de A .

mult alg. = # rep. autovalor
mult geom = dim espacio vect de λ . (# autovectores)

7. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

condición inicial.

Autovalores de A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) \\ = (2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-4) = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Autovectores.

$$\lambda_1 = -1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 \leftarrow \frac{1}{3}f_2 \\ f_1 \leftarrow f_1 + f_2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_1 = -2x_3 \end{matrix} \quad x_3 = K \quad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftarrow f_1 + f_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} x_3 = 2K \\ x_2 = -3K \\ x_1 = 3K + 2K = 5K \end{matrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftarrow f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = K \\ x_1 = 2K \end{matrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Condición inicial:

$$\vec{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \leftarrow f_1 + 2f_3 \\ f_1 \leftarrow f_1 + 3f_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} c_2 = -1 \\ c_3 = \frac{5}{2} \\ c_1 + 2(-1) + (\frac{5}{2}) = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Substituir c_1, c_2 y c_3

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} e^{3t}$$

8. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Los autovalores y autovectores son

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 8, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mult. alg. = 2 = mult. geom. = 2

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}$$

9. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Los autovalores y autovectores son

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{2,3} = 2, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mult. alg. = 2 > mult. geom. = 1

Para conseguir el autovector faltante v_3 , resolvemos $(A - \lambda_2 I)v_3 = v_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

↑ ↑

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_3 &= k \\ x_2 &= 1 - k \end{aligned}$$

tomo $k=0$
(un valor
que simplifique
las cuentas)

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{autovector generalizado}$$

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{2t}$$

para lidiar con autovector generalizado \vec{k} de λ con autovector \vec{p} la receta es
 $c(\vec{p}t + \vec{k})e^{\lambda t}$

10. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

autovalores
complejos