MA-2115: Matemáticas 4

Semana 10

10.1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

1. **Teorema para ecuaciones homogeneas a coeficientes constantes**

   La ecuación diferencial lineal

   $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

   define el polinomio caracteristico

   $$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ &= (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}, \end{aligned}$$

   donde $\sum_j m_j = n$ (el número total de raíces es n, contando repeticiones).

   Las raices λ_j de $p(\lambda)$ determina la solución general de la forma

   $$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots c_n y_n(x),$$

   donde las soluciones fundamentales $y_i(x)$ tienen la forma:

   - $x^l e^{\lambda_j x}$ si λ_j es raiz no compleja de $p(\lambda)$ donde $l = 0, \ldots, m_j - 1$.
     Es decir, una raíz λ_j que se repite m_j veces define m_j soluciones de la forma $e^{\lambda_j x}$, $xe^{\lambda_j x}$, $x^2 e^{\lambda_j x}$ hasta $x^{m_j-1}e^{\lambda_j x}$.
   - $x^l e^{a_j x}\cos(b_j x)$ y $x^l e^{a_j x}\sin(b_j x)$ si $\lambda_j = a_j + ib_j$ es una raiz compleja de $p(\lambda)$.
     Es decir, en el caso complejo esas soluciones anteriores con seno y coseno reemplazan $x^l e^{\lambda_j x}$ y $x^l e^{\bar{\lambda}_j x}$, y las repeticiones se tratan con en el punto anterior.

dos soluciones y_1 y y_2 son LI si

$W[y_1, y_2](t) \neq 0$

2. Encuentre la solución del problema a valores iniciales

$$y'' + by' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

para $b = 5, 4, 2$.

$b=5$ $\quad y''+5y'+4y=0$

Pol. caract. $\quad r^2+5r+4=0 \quad r=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{-5\pm 3}{2}=-1,-4$ real dif.

$y(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-4t} \Rightarrow y'(t)=-c_1e^{-t}-4c_2e^{-4t}$

Cond. iniciales $\begin{cases} y(0)=1=c_1+c_2 \\ y'(0)=0=-c_1-4c_2 \Rightarrow c_1=-4c_2 \end{cases}$

$-4c_2+c_2=1 \Rightarrow c_2=-\frac{1}{3}$

$c_1=\frac{4}{3}$

$$\boxed{y(t)=\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}}$$

$b=4$ $\quad y''+4y'+4y=0$

Eq. caract. $\quad r^2+4r+4=0 \quad r=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{-4\pm 0}{2}=-2$ real rep.

$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t} \Rightarrow y'(t)=-2c_1e^{-2t}+c_2e^{-2t}-2c_2te^{-2t}$

Cond. ini. $\begin{cases} y(0)=1=c_1+\cancel{c_2\cdot 0}^{\,0} \Rightarrow c_1=1 \\ y'(0)=0=-2c_1+c_2 \end{cases}$

$\Rightarrow c_2=2c_1=2$

$$\boxed{y(t)=e^{-2t}+2te^{-2t}}$$

$b=2$ $\quad y''+2y'+4y=0$

Eq. caract. $\quad r^2+2r+4=0 \quad r=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}=-1\pm i\sqrt{3}$

real img.

$y(t)=c_1e^{-t}\cos\sqrt{3}t+c_2e^{-t}\sin\sqrt{3}t \Rightarrow y'(t)=-c_1e^{-t}\cos\sqrt{3}t-\sqrt{3}c_1e^{-t}\sin\sqrt{3}t$
$\qquad -c_2e^{-t}\sin\sqrt{3}t+\sqrt{3}c_2e^{-t}\cos\sqrt{3}t$

Cond. ini. $\begin{cases} y(0)=1=c_1 \\ y'(0)=0=-c_1+\sqrt{3}c_2 \end{cases}$

$c_1=1 \quad c_2=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\boxed{y(t)=e^{-t}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t}$$

3. Encuentre la solución general

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = 0.$$

Eq carac. $r^4 + 2r^3 + 2r^2 + 2r + 1 = 0$

Método de Rufini

$\frac{a_0}{a_n} = \frac{1}{1} = 1$ $\pm$ divisores son la posible raices $\Rightarrow \pm 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & r^4 & +2r^3 & +2r^2 & +2r & +1 \\
 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
-1 & & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 0 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & 1 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 2 & &
\end{array}$$

polinomio irreducible usando raices enteras

$r^4 + 2r^3 + 2r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 (r^2+1) \Rightarrow r = -1$, $r = \pm i$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

4. **Coeficientes indeterminados**

   Para conseguir una solución particular $y_p(t)$ de

$$ay'' + by' + cy = g(t),$$

   dependiendo las raíces del polinomio caracteristico

$g(t)$	$y_{p(t)}$	Comentarios
Ct^m	$A_m t^m + \cdots A_1 t + A_0$	$r = 0$ no es raíz
$C\cos(\beta t)$ or $C\sin(\beta t)$	$A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$	$r = i\beta$ no es raíz
$Ct^m e^{rt}$	$t^s\underbrace{(A_m t^m + \cdots A_1 t + A_0)}_{p_{m(t)}}e^{rt}$	$s = 0, 1, 2$ (r no es raíz, es simple, or es doble)
$Ct^m e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ or sin	$t^s p_m(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + t^s \underbrace{q_m(t)}_{\neq p_m} e^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$s = 0, 1$ ($\alpha + i\beta$ no es, sí es) y p_m y q_m son polinomios (filas anteriores)

5. *Encuentre la solución general de la ecuación*

poly - 1 trig.

$$y'' - 4y' + 13y = \sin(3t).$$

Eq. caract. $r^2 - 4r + 13 = 0$, $r = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = 2 \pm i3$

$$\Rightarrow y_h(t) = C_1 e^{2t}\cos 3t + C_2 e^{2t}\sin 3t$$

$$y_p(t) = A\sin 3t + B\cos 3t$$

$$\rightarrow y_p'(t) = 3A\cos 3t - 3B\sin 3t$$

$$\rightarrow y_p''(t) = -9A\sin 3t - 9B\cos 3t$$

$\rightarrow$ $\sin 3t: \ -9A + 12B + 13A = 1$

$\cos 3t: \ -9B - 12A + 13B = 0$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{40} \quad B = \dfrac{3}{40}$

$$y_p(t) = \frac{1}{40}\sin 3t + \frac{3}{40}\cos 3t$$

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{2t}\cos 3t + C_2 e^{2t}\sin 3t + \frac{1}{40}\sin 3t + \frac{3}{40}\cos 3t}$$

otro problema $y'' - 4y' + 13y = \underbrace{t^2}_{\text{poli}}\underbrace{e^{2t}\sin 3t}_{\text{exp. trig.}}$ $\quad r = 2 \pm i3$ raiz del pol.

$$y_p(t) = t(At^2 + Bt + C)e^{2t}\sin 3t + t(Dt^2 + Et + F)e^{2t}\cos 3t$$

Ahora hay que calcular A, B, C, D, E y F

6. **Variacion de parámetros**

   Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones lineal mente independientes de la ecuación homogenea

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

son $p(t), q(t)$ and $g(t)$ son continuas, entonces la solución particular de

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t),$$

viene dada por

$$y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t),$$

donde

$$v_1(t) = -\int \frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt, \quad v_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt,$$

con

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

7. *Encuentre la solución general de la ecuación*

$f_1(t)$, y_{p_1} $f_2(t)$, y_{p_2}

$$5y'' + -20y' + 20y = t^{-2}e^{2t} + 20, \qquad t > 0.$$

Homogénea $5y'' - 20y' + 20y = 0$, $5r^2 - 20r + 20 = 0 \Rightarrow r = 2$

$$y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

- $f_1(t) = t^{-2}e^{2t}$, $y_1(t) = e^{2t}$, $y_2(t) = t e^{2t}$

  Var. par.

$$W_{[y_1,y_2]}(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{2t}e^{2t}\begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & 1+2t \end{vmatrix}$$

$$= e^{4t}(1 + \cancel{2t} - \cancel{2t}) = e^{4t} \neq 0 \text{ para todo } t.$$

$$v_1(t) = -\int \frac{t^{-2}\cancel{e^{2t}}\, t\, \cancel{e^{2t}}}{\cancel{e^{4t}}}dt = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + c_1$$

$$v_2(t) = \int \frac{t^{-2}\cancel{e^{2t}}\, \cancel{e^{2t}}}{\cancel{e^{4t}}}dt = \int t^{-2}dt = -t^{-1} + c_2$$

$$y_{p_1}(t) = -\ln|t|e^{2t} - t^{-1}te^{2t} = -\ln|t|e^{2t} - e^{2t}$$

$= -y_1$ este término ya está presente en y_h

- $f_2(t) = \underline{20}$ $y_{p_2}(t) = A$, $y_{p_2}'(t) = y_{p_2}''(t) = 0$, $20A = 20 \Rightarrow A = 1$ $y_{p_2}(t) = 1$

  Coef. Ind. usando la ecuación

$$\boxed{y(t) = \underbrace{c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}}_{y_h} \underbrace{- \ln|t| e^{2t}}_{y_{p_1}} + \underbrace{1}_{y_{p_2}}}$$

8. La **ecuación de Cauchy-Euler**

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x),$$

se convierte en coeficientes constantes

$$az'' + (b-a)z' + cz = f(e^t).$$

despues de usar la substituciones $x = e^t$ y $z(t) = y(e^t)$.

9. *Resuelva el problema*

$$x^2y'' + 3xy' + y = 5x^{-1}\ln x.$$

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \qquad z(t) = y(e^t),$

$z' = e^t y' = xy' \qquad z'' = e^t y' + e^t y'' \cdot e^t = \overbrace{xy'}^{z'} + x^2y''$

$\Rightarrow z'' - z' = x^2 y''$

$\Rightarrow z'' - z' + 3z' + z = 5e^{-t}t$

$\Rightarrow z'' + 2z' + z = 5te^{-t}$

2nd orden lin.
coef const.
no homo.

Ec carac. $\quad r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad r = -1$

$\rightarrow z_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

$z_p(t) = t^2(At + B)e^{-t} = (At^3 + Bt^2)e^{-t}$

$z_p'(t) = (-At^3 + (3A-B)t^2 + 2Bt)e^{-t}$

$z_p''(t) = (At^3 + (-6A+B)t^2 + (6A-4B)t + 2B)e^{-t}$

$t^3e^{-t}: 0 = 0$

$t^2e^{-t}: 0 = 0$

$te^{-t}: 6A - 4B + 4B = 5 \qquad A = \frac{5}{6}$

$e^{-t}: 2B = 0 \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow z_p(t) = \frac{5}{6}t^3e^{-t}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \underbrace{c_1x^{-1} + c_2x^{-1}\ln x}_{y_h(x)} + \underbrace{\frac{5}{6}x^{-1}\ln^3 x}_{y_p(x)}}$$