lineal $\frac{dy}{dx} + p(x) y = q(x)$

$I(x) = e^{\int p(x) dx}$ factor integrante

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x) q(x) dx + c\right]$

MA-2115: Matemáticas 4

Semana 7

7.1 Ecuación de Bernoulli

$\frac{dy}{dx} + p(x) y = q(x) y^p$, $p \neq 1$ $u = y^{1-p}$ $\longrightarrow$ lineal

1. *Encuentra la solución general de la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)y - 6y^3}{2x}.$$

Bernoulli $p=3$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)}{2x} y - \frac{6}{2x} y^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+1\right) y = -\frac{3}{x} y^3$

substitucion $u = y^{1-3} = y^{-2}$, $\frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$, y $y = u^{-1/2}$

Mult $-2y^{-3}$ ambos lados $\Rightarrow$ $\underbrace{-2y^{-3}\frac{dy}{dx}}_{\frac{du}{dx}} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\left(\frac{1}{x}+1\right)\underbrace{y^{-3}y}_{y^{-2}=u} = +\frac{6}{x}\underbrace{y^{-3}y^3}_{1}$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} + \left(\frac{1}{x}+1\right) y = \frac{6}{x}$ lineal $I(x) = e^{\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx} = e^{\ln|x| + x} = x e^x$

$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{xe^x}\left[\int x e^x \frac{6}{x} dx + c\right] = \frac{1}{xe^x}\left[6e^x + c\right] = \frac{6}{x} + \frac{c}{xe^x}$

$y = u^{-1/2}$ $\Rightarrow y(x) = \left[\frac{6}{x} + \frac{c}{xe^x}\right]^{-1/2}$

2. *Encuentra la solución general de la ecuación*

$$x\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$$

forma estandar

$$\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3}$$

Bernoulli: $p = 4/3$ $\quad u = y^{1-4/3}$

substitucion $u = y^{1-4/3} = y^{-1/3} \Rightarrow y = u^{-3} \Rightarrow y' = -3u^{-4}u'$

← noten la diferencia con el problema anterior, tomo derivada de y en lugar de derivada de u.

$$\Rightarrow -3u^{-4}\frac{du}{dx} + \frac{6}{x}u^{-3} = 3(u^{-3})^{4/3}$$

div entre $-3u^{-4}$ $\Rightarrow$

$$\frac{-3u^{-4}}{-3u^{-4}}\frac{du}{dx} + \frac{6}{-3x}\frac{u^{-3}}{u^{-4}} = \frac{3}{-3}\frac{u^{-4}}{u^{-4}} \Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u = -1$$

lineal

$$I(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow u(x) = x^2\left[\int -\frac{1}{x^2}dx + c\right] = x^2\left[\frac{1}{x} + c\right] = x + cx^2$$

$y = u^{-3}$ $\quad \Rightarrow \boxed{y(x) = (x + cx^2)^{-3}}$

$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x)$ separable

7.2 Ecuaciones separables (substitución)

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ homogenea uso $u = \frac{y}{x} \to$ sep. , $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ uso $u = ax+by+c \to$ sep.

1. Rectas que se intersectan

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ num. y denom se intersectan en (a,b) $\quad u = x-a$, $v = y-b \to$ homo

2. *Encuentra la solución general de la ecuación*

$$(x-2y)dy - (x+y-1)dx = 0.$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-2y} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq -\frac{1}{2}$ se intersectan

(1) punto de intersección

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y \to 2y+y=1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \to x = \frac{2}{3}$

punto de corte $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(2) Substitucion

$u = x - \frac{2}{3}$, $v = y - \frac{1}{3} \Rightarrow x = u + \frac{2}{3}$, $y = v + \frac{1}{3}$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{u+\cancel{\frac{2}{3}}+v+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{1}}{u+\cancel{\frac{2}{3}}-2v-\cancel{\frac{2}{3}}} = \frac{u+v}{u-2v} = \frac{1+\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}$$ homogenea.

substitucion

$z = \frac{v}{u} \Rightarrow uz = v \Rightarrow z + u\frac{dz}{du} = \frac{dv}{du}$

$$\Rightarrow z + u\frac{dz}{du} = \frac{1+z}{1-2z} \Rightarrow \frac{dz}{du} = \frac{1}{u}\left(\frac{1+z}{1-2z} - z\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{1+\cancel{z}-\cancel{z}+2z^2}{1-2z}\right)$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{u}\left(\frac{1+2z^2}{1-2z}\right) \text{ sep } \Rightarrow \int \frac{1-2z}{1+2z^2}dz = \int \frac{1}{u}du$$

$$\int \frac{1-2z}{1+2z^2}dz = \int \frac{1}{1+2z^2}dz - \int \frac{2z}{1+2z^2}dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}z) - \frac{1}{2}\ln|1+2z^2| + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}z) - \frac{1}{2}\ln|1+2z^2| = \ln|u| + C.$$

$z = \frac{v}{u}$, $z = \frac{y-1/3}{x-2/3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\,\frac{y-1/3}{x-2/3}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|1+2\left(\frac{y-1/3}{x-2/3}\right)^2\right| = \ln|x-2/3| + C$$

3. Rectas paralelas

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad a_1/b_1 = a_2/b_2 \text{ son paralelas} \qquad \text{uso } u = a_1x+b_1y \longrightarrow \text{sep}$$

En clase dije $u = a_1x+b_1y+c_1$ pero no, c_1 no va.

4. *Encuentra la solución general de la ecuación*

$$(x+2y-1)dx - (2x+4y-3)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-1}{2x+4y-3} \qquad 1/2 = 2/4 = 1/2 \quad \text{paralelas.}$$

substitucion $\quad z = x+2y \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 1 + 2\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{2} = \frac{z-1}{2z-3} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2\left(\frac{z-1}{2z-3} + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{4z-5}{4z-6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2\,\frac{4z-5}{4z-6} \quad \text{sep} \quad \Rightarrow \int \frac{4z-6}{4z-5}\,dz = \int 2\,dx$$

$$\left[\int \frac{4z-\overbrace{6}^{5+1}}{4z-5}\,dz = \int \frac{4z-5}{4z-5}\,dz - \int \frac{1}{4z-5}\,dz = z - \frac{1}{4}\ln|4z-5| + c.\right]$$

$$\Rightarrow z - \frac{1}{4}\ln|4z-5| = 2x + c$$

$z = x+2y \quad \Longrightarrow \quad x+2y - \dfrac{1}{4}\ln|4(x+2y)-5| = 2x + c$

7.3 Resumen de ecuaciones diferenciales de primer orden

lineal: $y' + p(x)y = q(x)$ $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ factor integrante $\Rightarrow y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)q(x)dx + C\right]$

Bernoulli: $y' + p(x)y = q(x)y^p$ $p \neq 1$ $u = y^{1-p} \longrightarrow$ lineal

Separable: $y' = f(x)g(y)$ integracion en ambos lados

$y' = f(ax+by+c)$ $u = ax+by+c \longrightarrow$ sep

Homogenea: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ $u = \frac{y}{x} \longrightarrow$ sep

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

- num y denom se intersectan en (a,b) $u = x-a$, $v = y-b \longrightarrow$ homogenea
- num y denom son paralelos $u = a_1x + b_1y \longrightarrow$ sep.

creo no que son parte de Mate4

Exactas: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Suponer que existe $F(x,y) = 0$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

¿Qué viene ahora?

2do orden $F(x,y,y',y'') = 0 \longrightarrow$ Reduccion de orden $\longrightarrow$ Equs de 1re orden

$\longrightarrow$ Lineales $\longrightarrow$
- Coef. const.
- Coef indeter.
- Var. de parametros

Metodos para 2do orden

sistemas de ecuaciones lineales $y' = Av + b \longrightarrow$ Algebra lineal.

7.4 Ecuaciones de segundo grado: reducción de orden

$F(x, y, y', y'') = 0$

1. Dos casos

$F(x, y', y'') = 0$

$z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$

$F(x, z, z') = 0$

$F(y, y', y'') = 0$

$z(y) = y'(x)$

$F(y, z, z') = 0$

2. *Resolver la siguiente ecuación*

$$xy'' = y' \ln\left|\frac{y'}{x}\right|.$$

falta y

substitucion $u(x) = y'(x) \Rightarrow u'(x) = y''(x)$

$\Rightarrow x u' = u \ln\left|\frac{u}{x}\right| \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \ln\left|\frac{u}{x}\right|$ homo.

substitucion $v = \frac{u}{x} \Rightarrow xv = u \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx}$

$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = v \ln|v| \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v\ln|v| - v}{x}$ sep.

$\int \frac{1}{v(\ln|v|-1)} dv = \int \frac{1}{x} dx$ $\quad w = \ln|v| - 1$, $dw = \frac{1}{v} dv$ $\Rightarrow \ln|\ln|v|-1| = \ln|x| + C_0$

exp $\Rightarrow \ln|v| - 1 = C e^{\ln|x|} = Cx \overset{+1,\ y\ \exp}{\Longrightarrow} v(x) = e^{cx+1}$

$\Rightarrow u(x) = x e^{cx+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x e^{cx+1}$

$\Rightarrow \int dy = \int x e^{cx+1} dx$ $\quad \left[\int x e^{cx+1} dx \underset{\text{i.p.p.}}{=} \frac{1}{c} x e^{cx+1} - \frac{1}{c^2} e^{cx+1} + K\right]$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{c} e^{cx+1}\left(x - \frac{1}{c}\right) + K$$