MA-2115: Matemáticas 4

Semana 9

8.1 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

1. **Autovectores repetidos: todos los casos.**

   - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   - $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

   - $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. **Teorema (autovalores complejos)**

   Si λ y $\vec{v}$ son autopar complejo de A, entonces $\Re(e^{\lambda t}\vec{v})$ y $\Im(e^{\lambda t}\vec{v})$ son soluciones LI de $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.

3. **Formula de Euler**: $e^{a+ib} = (\cos b + i \sin b)e^a$.

4. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

8.2 Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$$

1. **Metodo de variacion de parámetros**

   La solución de $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ viene dada por

   $$\vec{x}(t) = \Psi(t) \int (\Psi(t))^{-1} \vec{f}(t) dt,$$

   donde $\Psi(t) = (x_1(t)| \cdots |x_n(t))$ es la *matrix fundamental* cuyas columnas son las soluciones LI del sistema homogeneo $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.

2. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones*

   $$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \end{pmatrix}.$$

3. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \sec(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8.3 Aplicaciones

1. Ecuación de crecimineto (decrecimiento) exponencial

$$N' = rN.$$

2. Ecuación de crecimineto logístico

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

3. Sistema renina-angiotensina

$$\begin{aligned}
\frac{d[AGT]}{dt} &= k_{AGT} - PRA - \frac{ln(2)}{h_{AGT}}[AGT],\\
\frac{d[AngI]}{dt} &= PRA - (c_{ACE} + c_{Chym} + c_{NEP})[AngI] - \frac{ln(2)}{h_{AngI}}[AngI],\\
\frac{d[AngII]}{dt} &= (c_{ACE} + c_{Chym})[AngI] - (c_{ACE2} + c_{AT1R} + c_{AT2R})[AngII] - \frac{ln(2)}{h_{AngII}}[AngII],\\
\frac{d[AT1RAngII]}{dt} &= c_{AT1R}[AngII] - \frac{ln(2)}{h_{AT1R}}[AT1RAngII],\\
\frac{d[AT2RAngII]}{dt} &= c_{AT2R}[AngII] - \frac{ln(2)}{h_{AT2R}}[AT2RAngII],\\
\frac{d[Ang17]}{dt} &= c_{NEP}[AngI] + c_{ACE2}[AngII] - \frac{ln(2)}{h_{Ang17)}}[Ang17],\\
\frac{d[AngIV]}{dt} &= c_{AngIIAngIV}[AngII] - \frac{ln(2)}{h_{AngIV}}[AngIV].
\end{aligned}$$

4. Modelo epidemiológico

$$\begin{aligned}
S' &= \beta IS + \gamma R,\\
I' &= \beta IS - \alpha I,\\
R' &= \alpha I - \gamma R.
\end{aligned}$$

5. Modelo de depredador-presa de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\alpha x + \beta xy,\\
\dot{y} &= \gamma y - \delta xy.
\end{aligned}$$