- Sucesiones:
  - terminología
  - inducción
  - motivación
- Series:
  - terminología
  - motivación
  - armónicas/geométricas
  - comparación/integral.

MA-2115: Matemáticas 4

Semana 2

1.1 Sucesiones infinitas

1. Definición

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Explícita

$a_n = f(n)$

Implícita (recursiva)

$a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_1)$

resolver

Ecuación en diferencias

$a_n = (-1)^n \cos(n\pi)$

$a_n = 0.3\, a_{n-1} + 1.2$

$a_0 = 1$ (cond. inic.)

2. Convergencia

$\lim_{n\to\infty} a_n = L < \infty$

$\Leftrightarrow$ la sucesión converge

- poli/poli
- factoriz.
- racionaliz.
- L'Hôpitale
- log/exp
- visualización.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = L$ si el límite existe.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(a_{n-1})$

$L = f(L)$

calcular L.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0.3 a_{n-1} + 1.2$

asumir que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

$\Rightarrow L = 0.3 L + 1.2$

$\Rightarrow 0.7 L = 1.2$

$\Rightarrow L = \frac{1.2}{0.7}$

falta comprobar que el límite existe

3. Propiedades

- lineal.
  - $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
  - $\lim_{n\to\infty} c\, a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$
- no lineal
  - $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$ existen.
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Ejemplo: $a_n = (-1)^n \cos(n\pi)$

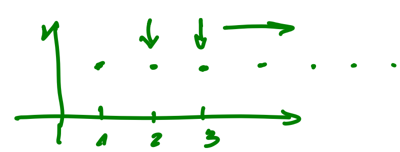
$a_0 = 1$

$a_1 = (-1)(-1) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$a_2 = (-1)^2 1$

$a_3 = (-1)^3(-1)$



4. Sucesiones monótonas

$\{a_n\}$
- creciente (no-decre) si $a_n < a_{n+1}$ $(\leq)$
- decreciente (no-cre) si $a_n > a_{n+1}$ $(\geq)$
- monótona si $>$ $<$

Criterio: creciente (decreciente) y acotado por arriba (abajo) $\Rightarrow$ converge.

5. *Ejercicio 1.2*

Sea a_n la sucesión definida por $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$ para $n \geq 2$. Determine si la sucesión a_n es convergente o no. En caso afirmativo calcule el límite.

$a_1 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$

$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 4) = \frac{1}{2}(2+4) = 3$

a. demostrar que es creciente usando inducción $a_n < a_{n+1}$

1. $a_1 = 2 < a_2 = 3$ ✓
2. Asumir $a_n < a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2}(a_n + 4) < \frac{1}{2}(a_{n+1} + 4)$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_{n+2}$ ✓

$\Rightarrow$ por inducción $\{a_n\}$ es creciente.

criterio de conv. suc. mono

b. $\{a_n\}$ está acotado por arriba por 4, $a_n \leq 4$

1. $a_1 = 2 < 4$ ✓
2. Asumir $a_n \leq 4 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + 4)}_{a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(4+4) \Rightarrow a_{n+1} \leq 4$

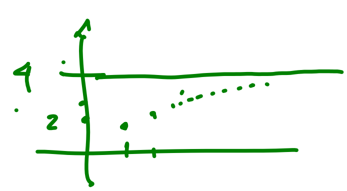
$\Rightarrow$ por inducción $\{a_n\}$ está acotada por 4.

límite

c. calcular el límite: si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

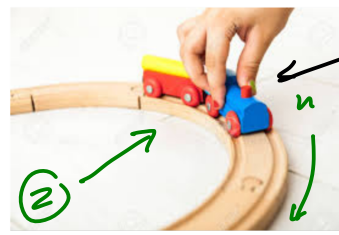
$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + 4)$

$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}(L+4) \Rightarrow \boxed{L = 4}$



$\therefore$ por a, b, y c $\{a_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$

6. Principio de inducción: *ejemplo illustrativo*



1. cada cabeza está conectada a una cola
2. el trencito empieza a andar en una pieza

¿el trencito va a andar perpetuamente?

sí, por inducción.

Motivación

pob. trimestre n

n-1 n-2

7. **Aplicaciones**

(a) *Fibonacci*: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n > 1$, y $F_0 = F_1 = 1$.

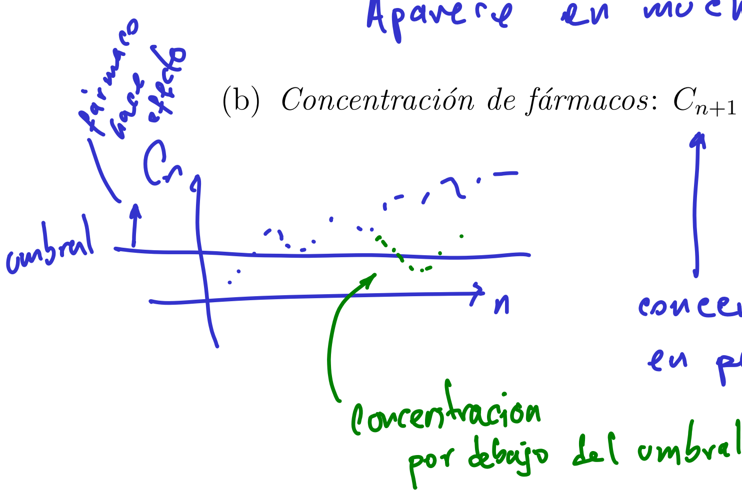
Aparece en muchos sistemas biologicos.

(b) *Concentración de fármacos*: $C_{n+1} = rC_n + d$, dada una concentración inicial C_0.

ingesta

porcentaje de fármaco que queda en el sistema luego de un periodo.

concentracion en periodo n+1



1.2 Series

Términos. Suma parcial

1. Definición

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$\{a_n\}$ es una sucesión

$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$

$\{S_N\}$ es una sucesión

convergencia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ si $\{S_N\}$ converge.

2. Propiedades

- linearidad
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
  - $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3. Serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

- diverge

4. Serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

- si $|r| < 1 \implies$ converge
  $|r| \geq 1 \implies$ diverge

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n r^n = a\frac{1-r^n}{1-r}$

5. Criterio de comparación ordinaria

6. Criterio de comparación usando límite

7. Criterio de la integral

8. *Ejercicio 1.3*

   Determine la converdencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}}$.