MA-2115: Matemáticas 4

Semana 10

10.1 Ecuaciones differenciales lineales de orden n

1. **Teorema para ecuaciones homogeneas a coeficientes constantes**

   La ecuación differencial lineal

   $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

   define el polinomio caracteristico

   $$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \end{aligned}$$

   donde $\sum_j m_j = n$ (el número total de raíces es n, contando repeticiones).

   Las raices λ_j de $p(\lambda)$ determina la solución general de la forma

   $$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots c_n y_n(x),$$

   donde las soluciones fundamentales $y_i(x)$ tienen la forma:

   - $x^l e^{\lambda_j x}$ si λ_j es raiz no compleja de $p(\lambda)$ donde $l = 0, \ldots, m_j - 1$.
     Es decir, una raíz λ_j que se repite m_j veces define m_j soluciones de la forma $e^{\lambda_j x}$, $xe^{\lambda_j}x$, $x^2 e^{\lambda_j x}$ hasta $t^{m_j - 1}e^{\lambda_j x}$.
   - $x^l e^{a_j x}\cos(b_j x)$ y $x^l e^{a_j x}\sin(b_j x)$ si $\lambda_j = a_j + ib_j$ es una raiz compleja de $p(\lambda)$.
     Es decir, en el caso complejo esas soluciones anteriores con seno y coseno reemplazan $x^l e^{\lambda_j x}$ y $x^l e^{\bar{\lambda}_j x}$, y las repeticiones se tratan con en el punto anterior.

2. Encuentre la solución del problema a valores iniciales

$$y'' + by' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

para $b = 5, 4, 2$.

3. Encuentre la solución general

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = 0.$$

4. **Coeficientes indeterminados**

   Para conseguir una solución particular $y_p(t)$ de

$$ay'' + by' + cy = g(t),$$

   dependiendo las raíces del polinomio caracteristico

$g(t)$	$y_{p(t)}$	Comments
Ct^m	$A_m t^m + \cdots A_1 t + A_0$	$r = 0$ no es raíz
$C\cos(\beta t)$ or $C\sin(\beta t)$	$A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$	$r = i\beta$ no es raíz
$Ct^m e^{rt}$	$t^s(\underbrace{A_m t^m + \cdots A_1 t + A_0}_{p_{m(t)}})e^{rt}$	$s = 0, 1, 2$ (r no es raíz, es simple, or es doble)
$Ct^m e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ or sin	$t^s p_m(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + t^s \underbrace{q_m(t)}_{\neq p_m} e^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$s = 0, 1$ ($\alpha + i\beta$ no es, sí es) y p_m y q_m son polinomios (filas anteriores)

5. *Encuentre la solución general de la ecuación*

$$4y'' + 11y' - 3y = -2te^{-3t}$$

6. **Variacion de parámetros**

   Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones lineal mente independientes de la ecuación homogenea

   $$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

   son $p(t), q(t)$ and $g(t)$ son continuas, entonces la solución particular de

   $$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t),$$

   viene dada por

   $$y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t),$$

   donde

   $$v_1(t) = -\int \frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt, \quad v_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt,$$

   con

   $$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

7. *Encuentre la solución general de la ecuación*

   $$5y'' + -20y' + 20y = t^{-2}e^{2t} + 20, \qquad t > 0.$$

8. La **ecuación de Cauchy-Euler**

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x),$$

se convierte en coeficientes constantes

$$az'' + (b-a)z' + cz = f(e^t).$$

despues de usar la substituciones $x = e^t$ y $z(t) = y(e^t)$.

9. *Resuelva el problema*

$$x^2y'' + 3xy' + y = 5x^{-1}\ln x.$$