MA-2115: Matemáticas 4

Semana 5

5.1 Series de potencias

1. Series de potencias notables

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

2. Serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots .$$

3. Polinomio de approximación y residuo

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots \frac{f(n)(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

4. Represente la función en serie de potencias y encuentre el intervalo de convergencia

$$f(x) = x^2 \operatorname{arccot}(x^2).$$

5. Represente la función en serie de potencias y encuentre el intervalo de convergencia

$$f(x) = \ln\left(\frac{3+x}{4-x}\right).$$

6. Represente la función en serie de potencias y encuentre el intervalo de convergencia

$$f(x) = \frac{x^2}{(2-x)^3}.$$

7. Represente la función en serie de potencias y encuentre el intervalo de convergencia

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}.$$

5.2 EDO de primer orden

1. Ecuación differencial ordinarias

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

2. Clasificación

   - $\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$
   - $\dfrac{dy}{dx} + y + x = 0$
   - $\dfrac{dy}{dt} + e^{-t}y = \sin(t)$
   - $\dfrac{dx}{dt} + tx^2 = 0$
   - $y\dfrac{dy}{dx} + e^x \ln y = 0$
   - $(x+y)\dfrac{dy}{dx} - (x^2 + y^2) = 0$
   - $y' + e^t y = \sin(t)y^3$
   - $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} - y = 0$
   - $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$
   - $2y'' + 4y' - y = e^{-2t}$
   - $y'' + e^x y + y = 0$
   - $(y'')^2 + 2yy' + \sin(y) = 0$
   - $y''' - y'' + y' - y = 0$