$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Sucesiones

$a_n = f(n)$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $\quad a_n = f(a_{n-1}, \ldots)$

- monotonía
- principio de inducción

Series

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad \{a_n\}$

$\{S_n\} = \{\sum_{n=1}^{n} a_n\}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge
- $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge $|r|<1$, diverge $|r|\geq 1$

MA-2115: Matemáticas 4

Semana 3

3.1 Criterios de convergencia

1. Criterio de comparación

$0 \leq a_n \leq b_n \quad n \geq 1$

Si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

$\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

2. Criterio de comparación usando límite $\quad a_n, b_n \geq 0 \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

i) $0 < c < \infty$ $\quad \sum a_n, \sum b_n$ ambas convergen/divergen

ii) $c = 0$ $\quad \sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converger.

iii) $c = \infty$ $\quad \sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

3. Criterio de la integral $\quad a_n = f(n) \quad f$ continua, positiva, decreciente

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

4. Criterio de la serie p $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$p \leq 1 \Rightarrow$ diverge

$p > 1 \Rightarrow$ converge

5. *Ejercicio 3.1*

   Determine la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{n^{-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} \overset{\text{L'H}\times 2}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{e^n} = 0$$

$a_n = e^{-n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ por criterio $p = 2 > 1$ converge

$\Rightarrow$ por crit. comp. usando límite

a_n converge.

6. *Ejercicio 3.2*

   Determine la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^3+1}}$.

$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n^3+1}}$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{3n^3+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{3n^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3}}{\sqrt[3]{3n^3+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\cancel{\frac{n^3}{n^3}}^{1}}}{\sqrt[3]{3\cancel{\frac{n^3}{n^3}}^{1} + \cancel{\frac{1}{n^3}}^{0}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3+0}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = c$$

$0 < c = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} < \infty$ $\quad \sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt[3]{3n^3+1}}$ diverge

7. *Ejercicio 3.3*

   Determine la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin(n)}{\sqrt[p]{n}}$.

$a_n = \frac{1+\sin(n)}{\sqrt[p]{n}}$ $\quad -1 \leq \sin(n) \leq 1$

$0 \leq 1+\sin(n) \leq 2$

$$a_n = \frac{1+\sin(n)}{\sqrt[p]{n}} \leq \frac{2}{\sqrt[p]{n}} = b_n$$

$b_n = \frac{2}{\sqrt[p]{n}} = \frac{2}{n^{1/p}}$ $\quad$ converge si $\frac{1}{p} > 1 \Leftrightarrow p < 1$ ✓

diverge si $\frac{1}{p} \leq 1 \Leftrightarrow p \geq 1$

por criterio de comparación $\quad$ a_n converge si $p < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\cancel{-}2/\cancel{n^2}}{1+2/n}}{\cancel{-}\frac{1}{\cancel{n^2}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1+\cancel{\frac{2}{n}}^{0}} = 2$

8. Criterio del cociente $\sum a_n \quad a_n \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = R$$

- $R<1 \Rightarrow$ converge
- $R>1 \Rightarrow$ diverge
- $R=1$?

9. Criterio de la raíz $\sum a_n \quad a_n \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = R$$

- $R<1 \Rightarrow$ converge
- $R>1 \Rightarrow$ diverge
- $R=1$?

10. *Ejercicio 3.3*

Determine la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

Factorial, potencia $\Rightarrow$ intenta crit. cociente

$a_n = \dfrac{(n+1)!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\; n^n}{(n+1)!\;(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}\; n^n}{\cancel{(n+1)!}\;(n+1)^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}}^{\,1}\cdot\cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}^{\,\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{la serie converge}$$

$\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$

11. *Ejercicio 3.4*

Determine los valores de $a>0$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}_{\text{se parece al crit. de la raíz}}$ converge.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[\cancel{n}]{\left(a+\frac{1}{n}\right)^{\cancel{n}}} = \lim_{n\to\infty} a + \cancel{\frac{1}{n}}^{\,0} = a$$

por el criterio de la raiz

- si $a<1 \Rightarrow$ converge
- si $a>1 \Rightarrow$ diverge
- si $a=1 \Rightarrow$ inconcluso

falta $a=1$ usando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \cancel{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}^{\,e^2}\cdot\cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}}^{\,1} = e^2 > 1$$

por qué? arriba ↑

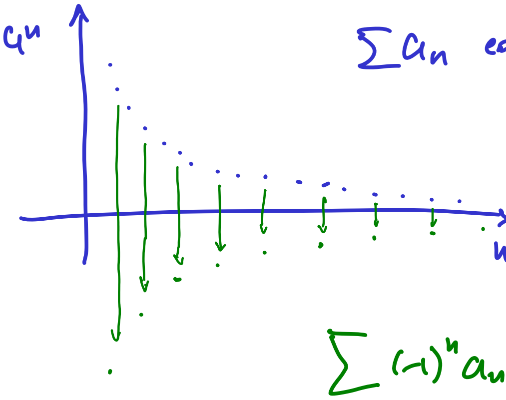
$\Rightarrow$ para $a=1$ diverge

3.2 Series alternantes

1. *Definición*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad a_n \geq 0$$

$$(-1)^0 = 1,\ -1,\ (-1)^2 = 1,\ (-1)^3 = -1$$



$\sum a_n$ conv.?

$\sum (-1)^n a_n$ conv.?

2. Criterio de series alternantes (criterio de Leibniz)

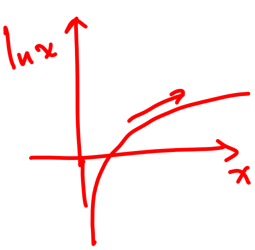
$\{a_n\}$ es decreciente

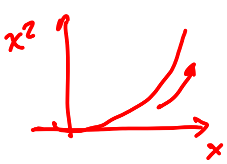
$$\sum (-1)^n a_n \text{ converge} \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

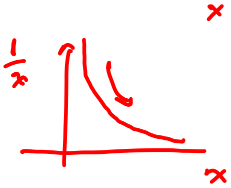
3. *Ejercicio 3.5*

Determine la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\ln^2(n)}$. $\displaystyle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln^2(n)}$

$\boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{muy común}}$







$$a_n = \frac{1}{n\ln^2(n)}$$

• $a_n > a_{n+1}$? decreciente.

comienza por aquí

$\Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$$n < n+1$$
$$\Rightarrow \ln(n) < \ln(n+1)$$
$$\Rightarrow \ln^2(n) < \ln^2(n+1)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\ln^2(n)} > \frac{1}{\ln^2(n+1)}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n\ln^2(n)} > \frac{1}{n\ln^2(n+1)} > \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$
$$\Rightarrow a_n > a_{n+1} \quad \checkmark$$

para llegar a aquí

• $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)} = 0 \quad \checkmark$

por el criterio de la serie alternante, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln^2(n)}$ converge

3.3 Convergencia absoluta

1. *Definición*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge absolutamente}$$

$$\text{si } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

2. ~~Criterio de series alternantes (criterio de Leibnitz)~~

Teorema

Conv. abs. $\Rightarrow$ conv.

3. *Ejercicio 3.5*

Determine la convergencia absoluta de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0 \Rightarrow \text{conv.}$$

$$|a_n| = \frac{1}{n} \text{ armonica, } \underline{\text{diverge}} \Rightarrow$$

la definicion de conv. abs falla

4. *Ejercicio 3.6*

Determine la convergencia absoluta de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\ln^2(n)}$.