2002-2003 学年第二学期《高等数学》试卷

一、填空题（每小题 3 分，满分 15 分）

1．设函数 $z=\ln(3x-2y+e^{xy})$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$_______.

2．$\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}dy=$______.

3．设 V 为柱体：$x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 1$，则 $\iiint\limits_{\upsilon} e^z d\upsilon=$_____.

4．设 $f(x)=1+x, -\pi\le x\le\pi$，则其以 2π 为周期的傅立叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于___.

5．微分方程 $xy''+y'=0$ 的通解为_____________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则（　　）.

（A）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在　　（B）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续

（C）$f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 都存在　　（D）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

2．曲线 $\begin{cases}2x-e^y+z^2=9,\\ 2x^2+y^2-3z^2=6\end{cases}$ 在点 $(3,0,2)$ 处的切线方程为（　　）.

（A）$x-3=y=z-2$　　（B）$x-3=\dfrac{y}{6}=z-2$

（C）$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{4}$　　（D）$\begin{cases}x-3=-(z-2)\\ y=0\end{cases}$

3．设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$, 则 $\oint_L (x^3+y^3)ds=$（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

4．设常数 $a>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^{1+a}\ln n}$（　　）.

（A）发散　（B）条件收敛　（C）绝对收敛　（D）敛散性与 a 有关

5．设 $y_1=xe^x, y_2=(x+1)e^x, y_3=e^{2x}+xe^x$ 为某二阶线性非齐次微分方程的三个特解，则该方程的通解为（　　），其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

（A）$C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$　　（B）$C_1y_1+C_2y2+y_3$

（C）$C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{2x}-e^x$　　（D）$C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

三、（本题满分 10 分）设 $z=f((x-y)^2,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=x(y-1)$ 在由上半圆周 $x^2+y^2=3(y\ge 0)$ 与 x 轴所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值.

五、（本题满分 10 分）计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

六、（本题满分 12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径，收敛域及和函数 $S(x)$，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)2^n}$ 的值.

七、（本题满分 12 分）已知曲线积分 $\int_L[f'(x)+6f(x)+4e^{-x}]ydx+f'(x)dy$ 与路径无关，其中 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)=1$. 求 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[f'(x)+6f(x)+4e^{-x}]ydx+f'(x)dy$ 的值.

八、（本题满分 10 分）设有 $[0,+\infty)$ 上的连续曲线 $y=f(x),f(x)\ge 0$. 若对 $\forall x\in[0,+\infty)$，在 $[0,x]$ 上以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积 S_1 和以曲线 $y=e^x$ 为曲边的曲边梯形的面积 S_2 满足 $S_2-S_1=f(x)$，求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

九、（本题满分 6 分）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n}-\cos\dfrac{1}{n}+1\right)$ 发散.

2002-2003 学年第二学期《高等数学》试卷参考答案

一、1. $\dfrac{3}{4}dx-\dfrac{1}{4}dy$.　2. 2.　3. $\pi(e-1)$.　4. 1.　5. $y=C_1\ln x+C_2$.

二、1. C.　2. B.　3. A.　4. C.　5. D.

三、解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2(x-y)f_1+yf_2$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(2(x-y)f_1+yf_2)\\&=-2f_1+2(x-y)[-2(x-y)f_{11}+xf_{12}]+f_2+y[2(y-x)f_{21}+xf_{22}]\\&=-2f_1-4(x-y)^2f_{11}+2(x-y)^2f_{12}+xyf_{22}+f_2\end{aligned}$$

四、解：在闭区域D内，由$\begin{cases} f_x' = y-1=0 \\ f_y' = x=0 \end{cases}$得驻点$(0,1)$，$f(0,1)=0$.

在D的边界$x^2+y^2=3(y\geq 0)$上，令

$$F(x,y,\lambda)=x(y-1)+\lambda(x^2+y^2-3)$$

由$\begin{cases} F_x' = y-1+2\lambda x=0 \\ F_y' = x+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$ 得$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$，$f(\sqrt{2},1)=0$.

在D的边界x轴上：$\left(\sqrt{3},0\right)$，$\left(-\sqrt{3},0\right)$，$f\left(\sqrt{3},0\right)=-\sqrt{3}$，$f\left(-\sqrt{3},0\right)=\sqrt{3}$，比较以上各函数值，知最大值为$f\left(-\sqrt{3},0\right)=\sqrt{3}$，最小值为$f\left(\sqrt{3},0\right)=-\sqrt{3}$.

五、解：将Σ的方程代入被积函数，得

$$I=\iint_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$

补充平面$\sum_1 : z=0$上介于$x^2+y^2\leq 1$的圆面，取其下侧．设$\sum$与$\sum_1$所围空间区域为V.

显然，

$$\iint_{\Sigma_1} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy=\iint_{\Sigma_1} 2xydxdy=-\iint_{D_{xy}} 2xydxdy=0$$

由高斯公式，得

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dv-0=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr=\frac{2}{5}\pi\,.$$

六、解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=1$，收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}=1$，当$x=-1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$，此级数收敛；当$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$，此级数发散，故收敛域为$\left[-1,1\right)$．设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\,,$$

则$xS(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$，当$x\neq 0$时，$[xS(x)]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$，

$$xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\Big|_0^x=-\ln(2-x)\,,$$

$$S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\,.$$

当 $x=0$ 时，$S(0)=1$，$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases}$

令 $x=\dfrac{1}{2}$，$S(\dfrac{1}{2})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)2^n}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)2^n}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}=S(\frac{1}{2})-1=2\ln 2-1.$$

七、解：$P(x,y)=[f'(x)+6f(x)+4e^{-x}]y$，$Q(x,y)=f'(x)$．由积分

$$\int_L[f'(x)+6f(x)+4e^{-x}]ydx+f'(x)dy$$

与路径无关得：$\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$，即 $f'(x)+6f(x)+4e^{-x}=f''(x)$，

$$f''(x)-f'(x)-6f(x)=4e^{-x}.$$

特征方程为：$\lambda^2-\lambda-6=0$，特征根为：$\lambda_1=3$，$\lambda_2=-2$，对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$$

因为 $\lambda=-1$ 不是特征方程的特征根，所以可设非齐次方程的特解为 $y^*=ae^{-x}$，代入 $f''(x)-f'(x)-6f(x)=4e^{-x}$，得 $a=-1$．故 $f(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}-e^{-x}$．又 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$C_1=\dfrac{2}{5}$，$C_2=\dfrac{3}{5}$．故 $f(x)=\dfrac{2}{5}e^{3x}+\dfrac{3}{5}e^{-2x}-e^{-x}$，$f'(x)=\dfrac{6}{5}e^{3x}-\dfrac{6}{5}e^{-2x}+e^{-x}$，

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}=\int_{(0,0)}^{(1,0)}+\int_{(1,0)}^{(1,1)}=0+\int_0^1 f'(1)dy=f'(1)=\frac{6}{5}e^3-\frac{6}{5}e^{-2}-e^{-1}.$$

八、解：$S_1=\int_0^x f(t)dt$，$S_2=\int_0^x e^t dt$，$\int_0^x(e^t-f(t))dt=f(x)$，两端对 x 求导，得 $e^x-f(x)=f'(x)$，即 $f'(x)+f(x)=e^x$，解得 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$．因为 $x=0$ 时，$f(0)=0$，代入得 $C=-\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{1}{2}e^{-x}$．

九、证明：因为

$$\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}+1=\sin\frac{1}{n}+2\sin^2\frac{1}{2n},$$

当 n 充分大时，有 $\sin\dfrac{1}{n}>0$，$\sin^2\dfrac{1}{2n}>0$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\dfrac{1}{2n}$ 为正项级数.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2\frac{1}{2n}}{(\frac{1}{2n})^2}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\dfrac{1}{2n}$

收敛．则$\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n}+2\sin^2\frac{1}{2n})$发散．从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}+1)$发散．

2003-2004 学年第二学期《高等数学》试卷

一、填空题（每小题 3 分，满分 15 分）

1．微分方程$(y+x^3)dx-2xdy=0$满足$y|_{x=1}=\frac{6}{5}$的特解为__________．

2．设L为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其周长为$c$，则$\oint_L(b^2x^2+2abxy+a^2y^2)ds=$______．

3．交换积分次序$\int_x^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy=$________________．

4．设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$在$x=3$处条件收敛，则该幂级数的收敛半径$R=$______．

5．曲面$z=x^2+y^2$与平面$2x+4y-z=0$平行的切平面方程是____________．

二、选择题（每小题 3 分，满分 15 分）

1．函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续是函数$f(x,y)$在该点处存在偏导数的（　　）．

（A）充分但非必要条件　　（B）必要但非充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不是必要，也不是充分条件

2．微分方程$y''-3y'+2y=3x-2e^x$的特解形式为（　　）．

（A）$(ax+b)e^x$　　（B）$(ax+b)xe^x$

（C）$(ax+b)+ce^x$　　（D）$(ax+b)+cxe^x$

3．设常数 k＞0，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+k}{n^2}$（　　）．

（A）发散　（B）绝对收敛　（C）条件收敛　（D）收敛或发散与 k 的取值有关

4．若$f(x,y)$函数在(x_0,y_0)的某邻域内具有二阶连续偏导数，且满足

$$[f_{xy}(x_0,y_0)]^2-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)>0，$$

则(x_0,y_0)（　　）．

（A）必不为$f(x,y)$的极值点　　（B）必为$f(x,y)$的极大值点

（C）必为$f(x,y)$)的极小值点　　（D）可能不是$f(x,y)$的极值点

5．设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ \cos x, & -\pi\le x<0\end{cases}$的 Fourier 级数在$x=0$和$x=\pi$处分别收敛于$a$和$b$，则

（　　）.

（A）$a=0,b=1$　（B）$a=1,b=0$　（C）$a=\frac{1}{2},b=0$　（D）$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$

三、（本题满分 10 分）求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解.

四、（本题满分 15 分）设 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 du 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$.

五、（本题满分 13 分）计算 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周（$R\neq 1$），方向取逆时针方向.

六、（本题满分 15 分）计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos a+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$，其中 Σ 为锥面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{9}$ 介于 $z=0$ 及 $z=3$ 之间部分的下侧，$\cos a,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处法向量的方向余弦.

七、（本题满分 12 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的和函数.

八、（本题满分 5 分）已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

2003-2004 学年第二学期《高等数学》试卷参考答案

一、1．$y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$.　2．a^2b^2c .　3．$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

4．4 .　5．$2x+4y-z=5$.

二、1．D.　2．D.　3．C.　4．A.　5．D.

三、解：令 $y'=p$，$y''=p\frac{dp}{dy}$. 原方程化为 $yp\frac{dp}{dy}+p^2=0$，

$$y\frac{dp}{dy}+p=0\Rightarrow\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y}\Rightarrow p=\frac{C_1}{y},$$

即

$$y'=\frac{C_1}{y}\Rightarrow ydy=C_1dx\Rightarrow\frac{1}{2}y^2=C_1x+C_2$$

代入初始条件，得 $C_1=\frac{1}{2},C_2=\frac{1}{2}$，所求特解为 $y^2=x+1$.

四、解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1+\frac{1}{z}f_2$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_2$，则

$$du=\frac{1}{y}f_1dx+\left(\frac{1}{z}f_2-\frac{x}{y^2}f_1\right)dy-\frac{y}{z^2}f_2dz\,.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{x}{y^2}f_1+\frac{1}{z}f_2)$$

$$=-\frac{x}{y^2}[f_{12}\cdot(-\frac{y}{z^2})]-\frac{1}{z^2}f_2+\frac{1}{z}[f_{22}(-\frac{y}{z^2})]=\frac{x}{yz^2}f_{12}-\frac{y}{z^3}f_{22}-\frac{1}{z^2}f_2\,.$$

五、解：$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

（1）$R<1$时，积分曲线不包含原点．由格林公式得：

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D 0dxdy=0\,;$$

（2）$R>1$时，作足够小的圆$L_1:x^2+y^2=\delta^2(\delta>0)$，取顺时针方向．设由$L$与$L_1$所围成区域为$D_1$．则

$$I=\oint_{L+L_1}-\oint_{L_1}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{P}{\partial y})dxdy+\oint_{L_1^-}\frac{xdy-ydx}{\delta^2}=0+\frac{1}{\delta^2}\oint_{L_1^-}xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\delta^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta=2\pi$$

所以，$I=\begin{cases}0, & R<1,\\ 2\pi, & R>1.\end{cases}$

六、（15 分）解：补平面$\sum_1:z=3$，（$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\le 1$）的上侧，则$\sum$与$\sum_1$一起构成一个封闭曲面的外侧，记它们围成的锥体区域为V．应用高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos a+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\iiint_V 2(x+y+z)dxdydz$$

$$=2\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^3(x+y+z)dz=2\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^3 zdz=\iint_{D_{xy}}[9-\frac{9}{4}(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\frac{9}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(4-r^2)rdr=18\pi\qquad（这里\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^3(x+y)dz=0）$$

又

$$\iint_{\Sigma_1}(x^2\cos a+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\iint_{\Sigma_1}z^2dS=\iint_{D_{xy}}9dS=36\pi$$

因此，$I=\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=18\pi-36\pi=-18\pi$.

法二：$\sum$ 上任意一点 (x,y,z) 处的法向量为 $\left\{\frac{x}{2},\frac{y}{2},-\frac{2z}{9}\right\}$，单位法向量为

$\left\{\frac{3x}{\sqrt{13(x^2+y^2)}},\frac{3y}{\sqrt{13(x^2+y^2)}},-\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$，

则

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{3x^2}{\sqrt{13(x^2+y^2)}}+\frac{3y^3}{\sqrt{13(x^2+y^2)}}-\frac{2z^2}{\sqrt{13}}\right)dS=0+0-\iint\limits_{\Sigma}\frac{2z^2}{\sqrt{13}}dS$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{13}}\iint\limits_{D_{xy}}\frac{9}{4}(x^2+y^2)\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}dxdy=-18\pi$$

七、解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}$，收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=2$. 当 $x=-2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$，此级数收敛；当 $x=2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$，此级数发散，故收敛域为 $[-2,2)$. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}$，则 $xS(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n$，当 $x\neq 0$ 时，

$$[xS(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x},$$

$$xS(x)=\int_0^x\frac{1}{2-x}dx=-\ln(2-x)\Big|_0^x=\ln 2-\ln(2-x),$$

$$S(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{2}{2-x}.$$

当 $x=0$ 时，$S(0)=\frac{1}{2}$. $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\frac{2}{2-x}, & x\in[-2,0)\cup(0,2),\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

八、证明：因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n^2}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，由比较审敛法知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛；同理 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛. 又 $\because |a_nb_n|\le\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$ 收敛，$\therefore\sum\limits_{n+1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

2004-2005 学年第二学期《高等数学》试卷

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1．设 $z=e^{x-y}$ 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

2．已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，则点 P 的坐标为___________.

3．设 L 为上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ ，则曲线积分 $\int_L (x+y)^2 ds=$________.

4．设 $x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, x\in(-\pi,\pi)$，则 $b_2=$________.

5．微分方程 $xy'-y=x^2$ 的通解为___________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 $z=f(x,y)$ 为二元函数，则下列结论正确的是（　　）.

（A）若 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处偏导数都存在，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}} f(x,y)$ 存在

（B）若 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处连续，且偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处偏导数连续

（D）若 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处偏导数都连续，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处连续

2．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$ 所确定，则 $z=z(x,y)$ 在点 $(-1,-1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{3,4\}$ 的方向导数为（　　）.

（A）$\dfrac{48}{5}$　　（B）$\dfrac{48}{5}$　　（C）-48　　（D） 48

3．设 $f(x,y)$ 为二元连续函数，则 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy=$（　）.

（A） $\int_1^4 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx$　　　（B） $\int_1^4 dy\int_{y^2}^{y} f(x,y)dx$

（C） $\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx$　　　（D） $\int_1^2 dy\int_{y^2}^{y} f(x,y)dx$

4．设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, a_n>0, n=1,2,\cdots$ 条件收敛，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 都收敛　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 都发散

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛

5．微分方程 $y''=1+\left(y'\right)^2$ 的通解为（　　）.

（A）$y=-\ln(\cos x+C_1)+C_2$　　（B）$y=\ln(\cos x+C_1)+C_2$

（C）$y=-\ln\cos\left(x+C_1\right)+C_2$　　（D）$y=\ln\cos\left(x+C_1\right)+C_2$

三、(本题满分 10 分)设 $z=f\left(x^2+y^2,xy\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、(本题满分 12 分)设 $f\left(x,y\right)=4x-4y-x^2-y^2$，(1)求 $f(x,y)$ 的极值；(2)求 $f(x,y)$ 在闭圆盘 $x^2+y^2\le 9$ 上的最大值和最小值.

五、(本题满分 12 分)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$ 的和函数 $S\left(x\right)$，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}$ 的和.

六、(本题满分 14 分)设 Σ 为半球面 $z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$，并取上侧，求曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\left(xz+\frac{1}{3}x^3\right)dydz+\left(\frac{1}{3}y^3-yz\right)dzdx-\left(x^2+y^2+1\right)zdxdy$$

的值.

七、(本题满分 14 分)已知曲线积分 $\int_L\left(e^x+f\left(x\right)\right)ydx+f'\left(x\right)dy$ 与路经无关，其中 $f\left(x\right)$ 二阶可导，并且 $f\left(0\right)=2, f'\left(0\right)=\frac{1}{2}$，求 $f\left(x\right)$ 的表达式.

八、(本题满分 4 分)设 $\left\{a_n\right\}$ 为正项数列，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, n=1,2,\cdots$.

证明：(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

九、(本题满分4分)设 $f\left(x\right)$ 为 $\left[0,1\right]$ 上的正值连续函数，证明：$\iint_D\left(f\left(x\right)+\frac{1}{f\left(y\right)}\right)dxdy\ge 2$，其中 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

2004-2005 学年第二学期《高等数学》试卷参考答案

一、1．0.　　2．$(1,1,2)$.　　3．π.　　4．-1.　　5．$y=x(x+C)$.

二、1．D.　　2．A.　　3．C.　　4．B.　　5．C.

三、解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+yf_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[2yf_{11}+xf_{12}]+y[f_{21}\cdot 2y+xf_{22}]+f_2$$

$$=4xyf_{11}+(2x^2+2y^2)f_{12}+xyf_{22}+f_2.$$

四、解：（1）$f_x=4-2x$，$f_y=-4-2y$，$A=f_{xx}=-2$，$B=f_{xy}=0$，$C=f_{yy}=-2$．由 $f_x'=f_y'=0$ 得 $\begin{cases}4-2x=0\\-4+2y=0\end{cases}$，解得驻点 $(2,-2)$，由于 $AC-B^2>0$，$A<0$，所以 $(2,-2)$ 是极大值点，极大值为 $f(2,-2)=8$

（2）令

$$L(x,y,\lambda)=4x-4y-x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-9),$$

由

$$\begin{cases}L_x=4+2\lambda x=0,\\L_y=-4+2\lambda y=0,\\L_x=x^2+y^2-9=0\end{cases}$$

解得驻点 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 及 $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，故

$$f_{\max}=f(2,-2)=8,\quad f_{\min}=f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=-12\sqrt{2}-9.$$

五、解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=1$，收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$，当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$，此级数发散；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$，此级数发散，幂级数收敛域为 $(-1,1)$．设

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{x}{1-x}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n})'dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x),$$

所以 $S(x)=\frac{x}{1-x}-\ln(1-x)$，令 $x=\frac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}=S(\frac{1}{2})=1+\ln 2$.

六、解：补充平面 $\sum_1:z=1$（含于 $x^2+y^2\le 1$ 内）取其下侧．由高斯公式得

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{V}dv-\iint\limits_{\Sigma_1}[-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\iiint_V dv-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2+1)rdr=\frac{1}{2}(\frac{4\pi}{3})-\frac{3\pi}{2}=-\frac{5\pi}{6}.$$

七、解：由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 得 $e^x+f(x)=f''(x)$，即 $f''(x)-f(x)=e^x$，特征方程为 $r^2-1=0$，特征根为 $r_1=1,r_2=-1$ 相应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$．又由于 $\lambda=1$ 是特征方程的单根，故设非齐次方程的特解为 $y^*=Axe^x$，则

$$(y^*)'=A(x+1)e^x，(y^*)''=A(x+2)e^x.$$

代入 $f''(x)-f(x)=e^x$ 解得 $A=\frac{1}{2}$．所以 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$．将 $f\left(0\right)=2$，$f'\left(0\right)=\frac{1}{2}$ 代入得 $C_1=C_2=1$，故 $f(x)=e^x+e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$．

八、证明：（1）由题意知：$S_{n-1}<S_n$，$\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}>0$，故 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 为正项级数．其前 n 项部分和为 $\sum_{k=2}^{n+1}(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k})=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}<\frac{1}{S_1}$．从而 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛.

（2）$\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}<\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$（$n\geq 2$），由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛，所以由正项级数比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

九、证明：$\iint_D\left(f\left(x\right)+\frac{1}{f\left(y\right)}\right)dxdy=\iint_D f(x)dxdy+\iint_D\frac{1}{f(y)}dxdy$

$$=\int_0^1dx\int_0^1f(x)dy+\int_0^1dy\int_0^1\frac{1}{f(y)}dx$$

$$=\int_0^1f(x)dx+\int_0^1\frac{1}{f(y)}dy=\int_0^1f(x)dx+\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$$

$$=\int_0^1[f(x)+\frac{1}{f(x)}]dx\geq\int_0^1 2dx=2.$$

2005-2006 学年第二学期《高等数学》试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．曲面 $x-e^y+\ln z=0$ 在点（1，0，1）处的切平面方程为________________.

2．交换二重积分次序$\int_{-1}^{1}dx\int_{x^3}^{1}f(x,y)dy=$______________________．

3．设曲线L的方程为$x^2+y^2=1$，则$\int_L (x-y)^2 ds=$____________．

4．设$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & 0<x\le\pi,\\ x^2-1, & -\pi<x\le 0.\end{cases}$则$f(x)$以周期为$2\pi$的傅里叶级数在点$x=-\pi$处收敛

于______．

5．微分方程$y'+y\tan x=\cos x$的通解为__________________________．

二、选择题（每小题3分，共15分）

1．考虑二元函数$f(x,y)$的下面5条性质：

①当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时$f(x,y)$的极限存在；

②$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续；

③$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在；

④$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续；

⑤$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微．

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质P推出性质Q，则下列结论完全正确的是（　　）．

（A）④$\Rightarrow$ ⑤$\Rightarrow$ ②$\Rightarrow$ ①　　（B）④$\Rightarrow$ ⑤$\Rightarrow$ ③$\Rightarrow$ ①

（C）⑤$\Rightarrow$ ④$\Rightarrow$ ③$\Rightarrow$ ②　　（D）⑤$\Rightarrow$ ③$\Rightarrow$ ②$\Rightarrow$ ①

2．设曲面Σ的方程为$x^2+y^2+z^2=1,x\ge 0,y\ge 0$，$\Sigma_1$为$\Sigma$在第一卦限的部分，并且$\Sigma$和$\Sigma_1$均指向外侧，则下列结论不正确的是（　　）．

（A）$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=0$　　（B）$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=2\iint\limits_{\Sigma_1} zdxdy$

（C）$\iint\limits_{\Sigma} z^2dxdy=0$　　（D）$\iint\limits_{\Sigma} xydxdy=0$

3．设$u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则级数（　　）．

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都收敛　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都发散

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

4．$\ln y + c_1 = c_2 e^x$ 为微分方程（　　）的通解．

（A）$yy'' = y'^2$　　（B）$yy'' - y'^2 = yy'$

（C）$yy'' - y'^2 = y^2$　　（D）$yy'' = y''$

5．设二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个线性无关的特解 y_1, y_2, y_3，则该方程的通解为（　　）．

（A）$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$　　（B）$y = c_1(y_1 - y_3) + c_2(y_2 - y_3)$

（C）$y = c_1y_1 + c_2y_2 - (1 - c_1 - c_2)y_3$　　（D）$y = c_1y_1 + c_2y_2 + (1 - c_1 - c_2)y_3$

三、（本题满分 10 分）设 $z = f(xy, \ln x + g(y))$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 可导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$．

四、（本题满分 10 分）求椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上的点到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的最长距离和最短距离．

五、（本题满分 12 分）计算曲线积分 $I = \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中 L 为抛物线 $y = 2 - 2x^2$ 上从点 A（1，0）到点 B（-1，0）的一段有向曲线．

六、（本题满分 13 分）计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx - dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧．

七、（本题满分 10 分）已知 $(f'(x) + x)ydx + f'(x)dy$ 为某函数的全微分，其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$，求 $f(x)$．

八、（本题满分 10 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的值．

九、（本题满分 5 分）设 $\{a_n\}$ 为单调增加的有界正数列，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛．

2005-2006 学年第二学期《高等数学》试卷参考答案

一、1． $x-y+z=2$． 2． $\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx$． 3． 2π．

4． π^2． 5． $y=(x+c)\cos x$．

二、1．A． 2．A． 3．C． 4．B． 5．D．

三、解：$z_x=f_1\cdot y+f_2\cdot\frac{1}{x}$

$$z_{xy}=f_1+y(f_{11}\cdot x+f_{12}\cdot g')+\frac{1}{x}(f_{21}\cdot x+f_{22}\cdot g')=f_1+xyf_{11}+(yg'+1)f_{12}+\frac{1}{x}g'f_{22}$$

四、解：设 (x,y) 为椭圆上任意一点，则该点到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{4+9}}$$

（法一）Lagrange 乘数法： 构造 Lagrange 函数

$$F(x,y,\lambda)=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$$

则由 $\begin{cases}F_x(x,y,\lambda)=4(2x+3y-6)+2\lambda x=0\\F_y(x,y,\lambda)=6(2x+3y-6)+8\lambda y=0\\F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+4y^2-4=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{8}{5}\\y=-\frac{3}{5}\\\lambda=-\frac{55}{4}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{8}{5}\\y=\frac{3}{5}\\\lambda=\frac{5}{4}\end{cases}$， 又因为该问题最值一定存在，且可能极值点仅有两个， 所以

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|\frac{8}{5}\times2+\frac{3}{5}\times3-6\right|=\frac{1}{\sqrt{13}};\qquad d_{\max}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|-\frac{8}{5}\times2-\frac{3}{5}\times3-6\right|=\frac{11}{\sqrt{13}}$$

（法二）转化为无条件极值问题： 椭圆的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$， $0\le\theta\le2\pi$ 则

$d=\frac{1}{\sqrt{13}}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|=\frac{1}{\sqrt{13}}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$ （其中 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$， $\cos\alpha=\frac{3}{5}$）

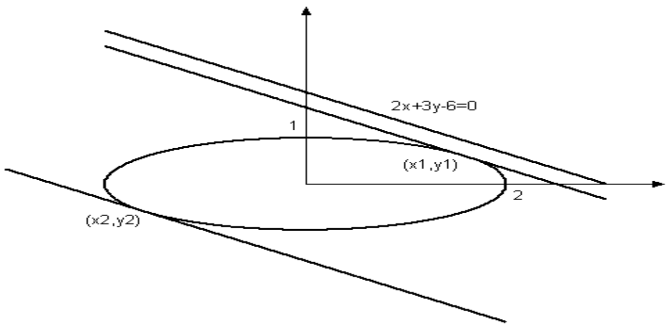
所以 $d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{13}}|5-6|=\frac{1}{\sqrt{13}};\qquad d_{\max}=\frac{1}{\sqrt{13}}|-5-6|=\frac{11}{\sqrt{13}}$

（法三）解析几何法：如图所示：点 (x_1,y_1)， (x_2,y_2) 即为所求最值点．由隐函数微分法，

将 $x^2+4y^2=4$ 两边同时关于 x 求导得 $2x+8yy'=0$ 即 $y'=-\dfrac{x}{4y}$. 根据导数的几何意义，

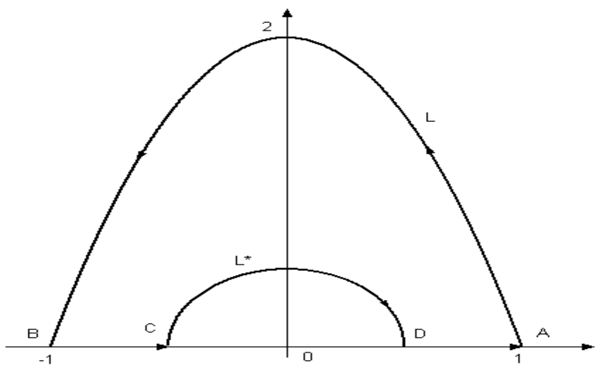
有 $-\dfrac{x}{4y}=-\dfrac{2}{3}$，联立 $x^2+4y^2=4$ 解得 $\begin{cases} x_1=\dfrac{8}{5} \\ y_1=\dfrac{3}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=-\dfrac{8}{5} \\ y_2=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$，所以

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|\frac{8}{5}\times 2+\frac{3}{5}\times 3-6\right|=\frac{1}{\sqrt{13}};\qquad d_{\max}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|-\frac{8}{5}\times 2-\frac{3}{5}\times 3-6\right|=\frac{11}{\sqrt{13}}$$



五、解：（法一）Green 公式：由题意，$P(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，则

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.



如图所示，其中半圆弧 L^* 的方程为 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le\pi$，则

$$I=\left(\oint_{L+\overline{BC}+L^*+\overline{DA}}+\int_{\overline{CB}}-\int_{L^*}+\int_{\overline{AD}}\right)\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0+0+\int_0^{\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta+0=\pi$$

注：用 Green 公式也可补上半平面的折线段（略）!

（法二）直接计算法： L ：$\begin{cases} x = x \\ y = 2-2x^2 \end{cases}$， $x = 1 \to -1$

$$I = \int_1^{-1} \frac{x\cdot(-4x)-(2-2x^2)}{x^2+(2-2x^2)^2}dx = 4\int_0^1 \frac{x^2+1}{4x^4-7x^2+4}dx = 4\int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{4x^2-7+\frac{4}{x^2}}dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{[2(x-\frac{1}{x})]^2+1}d[2(x-\frac{1}{x})] = 2\arctan[2(x-\frac{1}{x})]\Big|_{0^+}^{1} = \pi$$

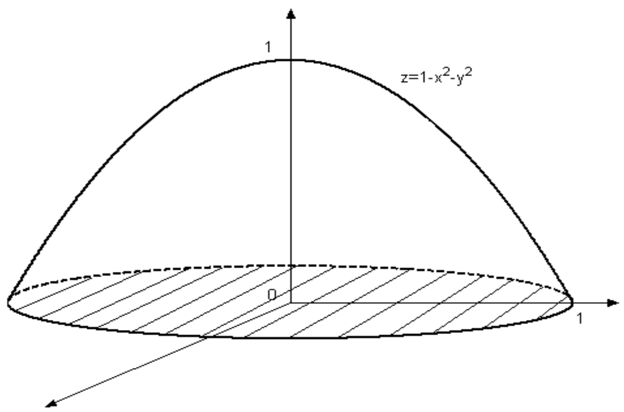
六、解：（法一）Gauss 公式： 补平面 $\sum_1$: $z=0$ （$x^2+y^2\le 1$），取下侧， 记

$$V = \left\{(r,\theta,z)\middle|0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1, 0\le z\le 1-r^2\right\}, \quad D = \left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\},$$

则

$$I = \left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}\right) 2x^3dydz + 2y^3dzdx - dxdy = \iiint_V (6x^2+6y^2)dV - \iint_D dxdy$$

$$= 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} r^2\cdot rdz - \pi = 12\pi\int_0^1 (r^3-r^5)dr - \pi = 0$$



（法二）直接计算法（较繁，略）

七、解：设 $y=f(x)$， $\because$ $(f'(x)+x)ydx + f'(x)dy$ 为某函数的全微分，

$\therefore$ $f'(x)+x = f''(x)$，即 $y''-y'=x$

（法一）视为可降阶的二阶微分方程： 令 $p=y'$ 且 $y''=\dfrac{dp}{dx}$， 则有 $\dfrac{dp}{dx}-p=x$

$$\therefore\ p = e^{-\int -dx}(\int xe^{\int -dx}dx + C_1) = e^x(\int xe^{-x}dx + C_1) = e^x(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1) = -x-1+C_1e^x$$

$$\therefore\ y = \int(-x-1+C_1e^x)dx = -\frac{x^2}{2} - x + C_1e^x + C_2$$

又 $\because$ $f(0)=0$，$f'(0)=1$， $\therefore$ $\begin{cases}0=C_1+C_2\\1=-1+C_1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}C_1=2\\C_2=-2\end{cases}$

$\therefore$ $f(x)==2e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-2$

（法二） 视为二阶常系数非齐次线性微分方程：特征方程为 $r^2-r=0$ $\Rightarrow$ $r_1=0$，$r_2=1$，

$\therefore$ 对应齐次线性微分方程的通解为 $Y=C_1+C_2e^x$．设二阶常系数非齐次线性微分方程的一个特解为 $y^*=x(ax+b)$， 将 $y^*=x(ax+b)$ 代入原方程得

$$2a-(2ax+b)=x \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{2},\ b=-1$$

即 $y^*=-\dfrac{1}{2}x^2-x$， $\therefore$ 原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1+C_2e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x$（下同法一，略）

八、解：（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+2)x^{2n+2}}{(n+1)x^{2n}}\right|=x^2\overset{令}{<}1$ $\Rightarrow$ $-1<x<1$．

又 $\because$ $x=\pm1$ 时原级数显然发散， $\therefore$ 原级数的收敛域为 $-1<x<1$

（2）设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}=S(x)$ ， $-1<x<1$

（法一） $S(x)=\dfrac{1}{2}[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}]=\dfrac{1}{2}[(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1})'+\dfrac{1}{1-x^2}]$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{x}{1-x^2})'+\frac{1}{1-x^2}]=\frac{1}{(1-x^2)^2} \qquad -1<x<1$$

（法二）令 $t=x^2$，则原级数转化为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n=(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1})'=(\frac{t}{1-t})'=\frac{1}{(1-t)^2} \quad , \quad 0<t<1$$

即 $S(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$ $\qquad -1<x<1$．

（3）令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，则由（2）的结论可得

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}=2$

九、证明：$\because$ $\{a_n\}$ 为单调增加的有界正数列$\therefore$ $0 \le 1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}} \le \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$

（法一）正项级数审敛法基本定理：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n \le \frac{1}{a_1}[(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)]=\frac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_1)=\frac{a_{n+1}}{a_1}-1$$

由 $\{a_n\}$ 为单调增加的有界正数列可知：数列 $\{S_n\}$ 有界$\therefore$ 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛

（法二）正项级数比较审敛法：$\because$ 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$ 的前 n 项和数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_1}-1\right\}$ 单调有界 $\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$ 收敛 $\therefore$ 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛.

2006-2007 学年第二学期《高等数学》试卷

一、填空题 （每小题 3 分，满分 15 分）

1．旋转曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,4)$ 处的法线方程为 ________.

2．设 L 为半圆 $x^2+y^2=r^2, x\ge 0$，则 $\int_L (x^2+y)ds=$ _______.

3．设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部，则 $\iint\limits_{\Sigma} zdS=$ ___.

4．设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的 Fourier 在 $x=\pi$ 处收敛于__.

5．函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处的方向导数最大值等于______.

二、选择题（每小题 3 分，满分 15 分）

1．函数 $u=xyz$ 在附加条件下 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}$ $(x>0,y>0,z>0,a>0)$ 下的极值等于（　　）.

（A）$27a^3$　　（B）$9a^3$　　（C）$3a^3$　　（D）a^3

2．设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于（　　）.

（A）$\int_0^1 dy\int_{\pi+arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$　　（B）$\int_0^1 dy\int_{\pi-arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$

（C）$\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+arc\sin y} f(x,y)dx$　　（D）$\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-arc\sin y} f(x,y)dx$

3．设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的某邻域内有定义，且有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则下列结论不正确的是（　　）.

（A）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续　（B）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在

（C）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微　（D）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处某方向 l 的方向导数不存在

4．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+n\alpha+1}{n}\pi$，其中 α 为常数，则下列结论正确的是（　　）.

（A）当 $\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 等整数时，级数发散

（B）当 $\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 等整数时，级数绝对收敛

（C）当 $\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 等整数时，级数条件收敛

（D）当 $\alpha\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 等整数时，级数条件收敛

5．方程 $y''-y'=e^x+1$ 的一个特解形式为（　　）.

（A）ae^x+b　（B）axe^x+b　（C）ae^x+bx　（D）axe^x+bx

三、（本题满分 12 分）设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 dz 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（本题满分 12 分）设 D 为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2,x\ge 0,y\ge 0\}$，计算 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|dxdy$.

五、（本题满分 12 分）已知点 $O(0,0)$ 及点 $A(1,1)$，且曲线积分

$$I=\int_{\widehat{OA}}(ax\cos y-y^2\sin x)dx+(by\cos x-x^2\sin y)dy$$

与路径无关，试确定常数 a,b，并求 I.

六、（本题满分 14 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中 $\sum$ 为有向曲 $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 1)$，其法向量与 z 轴正向夹角为锐角.

七、（本题满分 14 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域及和函数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}$ 的和.

八、（本题满分 6 分）求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

2006-2007 学年第二学期《高等数学》试卷参考答案

一、1. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-4}{-1}$.　　　2. $\dfrac{\pi}{2}r^3$.

3. $\pi a(a^2-h^2)$.　　　4. $\dfrac{\pi^2}{2}$.　　　5. $\sqrt{21}$.

二、1. A.　　2. B.　　3. D.　　4. C.　　5. B.

三、解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1{}'+yg_2{}'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'+xg_2{}'$.

$$dz=(2f'+g_1{}'+yg_2{}')dx+(-f'+xg_2{}')dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[2f'+g_1{}'+yg_2{}']=-2f''+xg_{12}''+g_2{}'+xyg_{22}''$$

四、解：记

$D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2\le 2,x\ge 0,y\ge 0\right\}$

则 $D=D_1\bigcup D_2,D_1D_2=\phi$.

$$\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|dxdy=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}(r^2-1)rdr$$
$$=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\frac{\pi}{2}[(\frac{(\sqrt{2})^4}{4}-\frac{(\sqrt{2})^2}{2})-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})]=\frac{\pi}{4}$$

五、解：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-ax\sin y-2y\sin x$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-by\sin x-2x\sin y$. 由题意得：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

也即：$-ax\sin y-2y\sin x=-by\sin x-2x\sin y$，从而 $a=b=2$. 由于积分与路径无关，所以可取积分路径为：自点 $O(0,0)$ 到 $B(1,0)$，再到点 $A(1,1)$，

$$I=\int_0^1 2xdx+\int_0^1(2y\cos 1-\sin y)dy=2\cos 1.$$

六、解：添加平面：$\Sigma_0: z=1(x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，则 $\sum_0$ 与 $\sum$ 构成封闭曲面，设其所围成的区域为 Ω. 由 Gauss 公式得：

$$\iint_\Sigma(2x+z)dydz+zdxdy=\iint_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}$$

$$=-3\iiint_\Omega 3dxdydz+\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$

$$=-3\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z} dxdy+\pi=-3\int_0^1 \pi z dz+\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

七、解：先求收敛域．由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$得收敛半径$R=1$，收敛区间为$(-1,1)$．当$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，该级数发散；当$x=-1$时，级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$，该交错级数收敛．故幂级数的收敛域为$[-1,1)$． 设和函数为$s(x)$，即$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$，$x\in[-1,1)$． 显然$s(0)=a_0=1$，在$xs(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$的两边求导得

$$[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n+1}x^{n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

对上式从0到x积分，得 $xs(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$．于是，当$x\ne 0$时，有

$$s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x).$$

从而

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$$

由和函数在收敛域上的连续性，$S(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}S(x)=\ln 2$．综上得

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}=S(\frac{1}{2})=-2\ln\frac{1}{2}=2\ln 2.$$

八、解：令$y'=p$，则$y''=p'$．原方程化为：$p'(x+p^2)=p$，即$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p}=p$，故

$$x=e^{\int\frac{dp}{p}}(\int pe^{-\int\frac{dp}{p}}dp+C_1)=p(\int dp+C_1)=p(p+C_1)$$

由$p|_{x=1}=y'(1)=1$得$C_1=0$故$x=p^2$．$\because y'(1)=1\therefore p=\sqrt{x}$，即$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}$，解得

$$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$$

又 $y(1)=1$，$C_2=\dfrac{1}{3}$，则特解为：$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$.

2007-2008 学年第二学期《高等数学》试卷

一、填空（每题 3 分，共 15 分）

1．与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程是____.

2．若 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 为 $f(x)=|x|(x\in[-\pi,\pi])$ 展开的正弦级数，则 $a_2=$______.

3．二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$ 的值等于______________.

4．微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解是__________________________.

5．设 $\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z+1)^2dS=$_____________.

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．设 $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 则在原点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$(　　).

（A）不连续　　　　（B）偏导数不存在

（C）偏导数存在且连续　　　　（D）偏导数不连续但可微

2．已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分．则 a 和 b 分别为（　　).

（A）-2，2　　（B）2,-2　　（C）-3，3　　（D）3，-3

3．设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处（　　).

（A）绝对收敛　（B）条件收敛　（C）发散　（D）敛散性无法判定

4．设 $f(x,y)$ 在有向曲线 L 上连续，其中 L 为上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, y\geq 0$,起点 $A(-a,0)$, 终点 $B(a,0)$, 则以下结论不正确的是（　　).

（A）$f(-x,y)=-f(x,y)$ 时，$\int_L f(x,y)ds=0$， （B）$f(-x,y)=f(x,y)$ 时，$\int_L f(x,y)ds=2\int_{L_1} f(x,y)ds$，其中 L_1 为 L 右半部分

（C）$\int_L f(x,y)ds=\int_{\pi}^{0} f(a\cos\theta,b\sin\theta)\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta$

（D）$\int_L f(x,y)dy=\int_{\pi}^{0} f(a\cos\theta,b\sin\theta)b\cos\theta d\theta$

5．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$（　　）.

（A）发散　　（B）条件收敛　　（C）绝对收敛　　（D）敛散性无法判定

三、（本题满分 10 分）已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2,0\le y\le 2\right\}$，计算 $\iint\limits_D \min\left\{xy,2\right\}dxdy$.

四、（本题满分 10 分）求原点到曲面∑：$(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离.

五、（本题满分 10 分）计算 $\int\limits_L (x+y^3)dx-(x^3-y)dy$，其中 L 为上半圆周 $x^2+y^2=a^2,(y\ge 0)$，从起点 $A(-a,0)$ 到终点 $B(a,0)$，其中 a 为实常数.

六、（本题满分 14 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数，并计算 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)3^{n+1}}$.

七、（本题满分 12 分）设曲面∑是 $z=2-x^2-y^2(1\le z\le 2)$ 的上侧，计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y-x)dydz+(z-y)dzdx+(x-z)dxdy.$$

八、（本题满分 8 分）已知函数 $u=u(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0\ldots①$$

函数 $v=v(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\qquad\ldots②$$

若利用变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{\alpha x+\beta y}$ 可将方程①化为方程②，试求实常数 α,β.

九、（本题满分 6 分）设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})$的敛散性.

2007-2008 学年第二学期《高等数学》试卷参考答案

一、1．$x-y+z=0$．　　2．0．　　3．$\frac{1}{2}$（$1-\mathrm{e}^{-1}$）．

4．$e^{-\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$．　　5．$8\pi$．

二、1．D．　2．B．　3．A．　4．C．　5．B．

三、解：$\iint\limits_{D}\min\{xy,2\}\,dxdy=\iint\limits_{D_1}xydxdy+\iint\limits_{D_2}2dxdy$

$$=\int_1^2 dx\int_0^{\frac{2}{x}}xydy+2\int_1^2 dx\int_{\frac{2}{x}}^{2}dy=\int_1^2 x(\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{\frac{2}{x}}dx+2\int_1^2(2-\frac{2}{x})dx$$

$$=\int_1^2 x(\frac{1}{2}\bullet\frac{4}{x^2})dx+4-4\ln 2=2\int_1^2\frac{dx}{x}+4-4\ln 2=4-2\ln 2$$

四、解：设（x,y,z）为曲面$\sum$上的点，原点$(0,0,0)$到$\sum$的距离$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．为了计算方便，求$d^2=x^2+y^2+z^2$在$(x-y)^2-z^2=1$条件下的极值．设 Lagrange 函数为：

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1]$$

令$\begin{cases}F_x'=2x+2\lambda(x-y)=0\\F_y'=2y-2\lambda(x-y)=0\\F_z'=2z-2\lambda z=0\\F_\lambda'=(x-y)^2-z^2-1=0\end{cases}$解得$\lambda=1$或$z=0$，当$\lambda=1$显然不成立．当$z=0$时得$\lambda=-\frac{1}{2}$，

$x_1=\frac{1}{2}$，$y_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$，$y_2=\frac{1}{2}$ $\therefore d_1^2=d_2^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，故最短距离$d=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

五、解：$\int\limits_{L}(x+y^3)dx-(x^3-y)dy$

$$=\oint\limits_{L+\overline{BA}}(x+y^3)dx-(x^3-y)dy-\int\limits_{\overline{BA}}(x+y^3)dx-(x^3-y)dy$$

$$\overset{Green}{=\!=}\iint_D 3(x^2+y^2)dxdy-\int_{\overline{BA}}=3\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a r^3dr+\int_{\overline{AB}}=\frac{3}{4}\pi a^4+\int_{-a}^{a}xdx$$

$$=\frac{3}{4}\pi a^4+a^2.$$

六、解：先求收敛域，由 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+3}x^{2n+2}}{(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n}}\right|=|x|^2$，当 $|x|^2<1$，即 $|x|<1$ 时级数收敛；当 $|x|^2>1$，即 $|x|>1$ 时级数收敛，所以收敛半径为 1．$x=1$ 时，$\sum(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ 条件收敛，$x=-1$ 时，$\sum(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ 条件收敛，原级数收敛域 $[-1,1]$．设和函数为 $S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}\qquad x\in[-1,1]$$

$$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\left[xS(x)\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\qquad(|x|\le 1)$$

对上式从 0 到 x 积分

$$xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^x=\arctan x\qquad(|x|\le 1)$$

$x\ne 0$ 时，$S(x)=\dfrac{\arctan x}{x}$；$x=0$ 时，$S(x)=0$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x} & |x|\le 1,x\ne 0\\ 0 & x\ne 0\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2n}=\frac{1}{3}S(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{3}\bullet\sqrt{3}\bullet\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

七、补做 $\sum_1$：$Z=1\ \ (x^2+y^2\le 1)$，方向取下侧，$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$

$$I=\iint_{\sum}(y-x)dydz+(z-y)dzdx+(x-z)dxdy=\oiint_{\sum+\sum_1}-\iint_{\sum_1}$$

其中 $\displaystyle\oiint_{\sum+\sum_1}\overset{Gauss}{=}-3\iiint_{\Omega}dxdydz=-3\int_0^1 dz\iint_{x^2+y^2\le 2-z}dxdy=-3\int_1^2\pi(2-z)dz=-\frac{3}{2}\pi$

$$\iint_{\Sigma_1} = -\iint_D (x-1)dxdy = 0+\pi$$

故 $I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = -\frac{3}{2}\pi - \pi = -\frac{5}{2}\pi$

八、$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} e^{\alpha x+\beta y} + \alpha v e^{\alpha x+\beta y} = (\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha v) e^{\alpha x+\beta y}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 v) e^{\alpha x+\beta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\frac{\partial v}{\partial y} + \beta v) e^{\alpha x+\beta y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\beta \frac{\partial v}{\partial x} + \beta^2 v) e^{\alpha x+\beta y}$$

将上述诸式代入（1）得：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (2+2\alpha)\frac{\partial v}{\partial x} + (2-2\beta)\frac{\partial v}{\partial y} + (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha + 2\beta)v = 0$$

$$\begin{cases} 2+2\alpha = 0 \\ 2-2\beta = 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

九、依题知：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \exists$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 则 $a > 0$，且 $a_n > a, n = 1, 2, \cdots$

而 $\left|(-1)^n (1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})\right| = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_n - a_{n+1}}{a}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a}$ 收敛，

由比较审敛法，原级数绝对收敛.

2008-2009 学年第二学期《高等数学》试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程是________________.

2．由方程 $\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \sqrt{2}xyz = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz =$__________.

3．设 $L: x^2 + y^2 = 1$，则 $\oint_L \left(x^3 + y^2\right) ds =$_______.

4．微分方程 $xy'' = y'$ 的通解为________________.

5．已知直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$， $L_2: \frac{x+2}{2} = y-1 = z$，则过 L_1 且平行 L_2 的平面方程为___________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$， $f'_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　）.

（A）充分非必要条件　　　　（B）必要非充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既非充分又非必要条件

2. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为 $f(x) = \begin{cases} 3, & -1 < x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \end{cases}$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=1$ 处收敛于（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

3．微分方程 $y'' + y = x + \sin x$ 的特解形式可设为（　　）.

（A） $y^* = x(ax+b) + A\sin x + B\cos x$　　（B） $y^* = ax + b + x(A\sin x + B\cos x)$

（C） $y^* = x(ax + b + A\sin x + B\cos x)$　　（D） $y^* = ax + b + A\sin x + B\cos x$

4．设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x,y)dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x,y)dx =$（　　）.

（A） $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x,y)dx$　　（B） $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x,y)dy$

（C） $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x,y)dy$　　（D） $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y)dx$

5．级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin n}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$（　　）.

（A）条件收敛　　（B）绝对收敛　　（C）发散　　（D）无法确定

三、（本题满分 10 分）设 $z = f(x^2+y^2, xe^y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、（本题满分 10 分）计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) dv$，其中 Ω 是 xoz 平面上的直线 $z = x$ 绕 z 轴旋转一周所得到的曲面与平面 $z=1$ 所围成的闭区域.

五、（本题满分 10 分）求二元函数 $f(x,y) = 2y - x^2 - y^2$ 在由抛物线 $y = x^2$ 和直线 $y = 4$ 所

围成的闭区域D上的最大值和最小值.

六、(本题满分 12 分)设$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0)=1, f'(0)=2$，已知曲线积分

$$\int_L 6f(x)\sin ydx+[5f(x)-f'(x)]\cos ydy$$

与路径无关，(1)求$f(x)$；(2)求$I=\int_{(0,0)}^{(\pi/2,\pi/2)} 6f(x)\sin ydx+[5f(x)-f'(x)]\cos ydy$.

七、(本题满分 10 分)设$\sum$是曲面$z=a^2-x^2-y^2(z\ge 0)$的下侧，其中$a>0$，$\sum$与xoy面围成空间区域Ω的体积为V. 证明：$\iint\limits_{\Sigma} x^2yz^2dydz-xy^2z^2dzdx-z(1+xyz)dxdy=V$.

八、(本题满分 12 分)设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$，(1)求其收敛区间；(2)求其和函数；(3)求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n$的和.

九、(本题满分 6 分)设正项数列$\{a_n\}$单调减，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

2008-2009 学年第二学期《高等数学》试卷参考答案

一、1. $2x+y-4=0$.　　2. $dx+2dy$.　　3. π

4. $y=C_1x^2+C_2$.　　5. $x-3y+z+2=0$.

二、1. D.　　2. C.　　3. B.　　4. A.　　5. C.

三、解：$z_x=f_1\cdot 2x+f_2\cdot e^y$

$$\begin{aligned}z_{xy}&=2x(f_{11}\cdot 2y+f_{12}\cdot xe^y)+e^y f_2+e^y(f_{21}\cdot 2y+f_{22}\cdot xe^y)\\&=e^y f_2+4xyf_{11}+2e^y(x^2+y)f_{12}+xe^{2y}f_{22}\end{aligned}$$

四、解：旋转曲面方程为$z=\sqrt{x^2+y^2}$，则Ω可表示为

$$\Omega=\left\{(r,\theta,z)\middle|0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1, r\le z\le 1\right\}$$

利用柱面坐标计算得

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^1 r^2\cdot rdz=2\pi\int_0^1 r^3(1-r)dr=\frac{\pi}{10}$$

五、解：(1)内部：

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2x = 0 \\ f_y(x,y) = 2-2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

即 $f(x,y)$ 在闭区域 D 内有唯一驻点 $(0,1)$，且 $f(0,1)=1$

（2）边界：

♠ $y=4,\ -2\le x\le 2$：代入得 $f=-8-x^2,\ -2\le x\le 2$

$$\frac{df}{dx} = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

故可能的最值有 $f\left(\pm 2,4\right)=-12, f(0,4)=-8$

♥ $y=x^2,\ -2\le x\le 2$：代入得 $f=y-y^2, 0\le y\le 4$

$$\frac{df}{dy} = 1-2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

故可能的最值有 $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}, f(0,0)=0$

综上，比较即得最小值 $f\left(\pm 2,4\right)=-12$，最大值 $f(0,1)=1$

六、解：（1）由第二型曲线积分与路径无关的条件知

$$6f(x)\cos y = [5f'(x) - f''(x)]\cos y$$

化简得

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$$

特征根为 $r_1 = 2$，$r_2 = 3$

则通解为 $f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

又 $f(0)=1, f'(0)=2$，代入可得 $C_1=1, C_2=0$，故 $f(x)=e^{2x}$

（2）将 $f(x)=e^{2x}$ 代入，并取竖直和水平路径，得

$$\begin{aligned} I &= \int_{(0,0)}^{(\pi/2,\pi/2)} 6e^{2x}\sin y dx + 3e^{2x}\cos y dy \\ &= \int_0^{\pi/2} 3\cos y dy + \int_0^{\pi/2} 6e^{2x} dx = 3 + 3(e^{\pi}-1) = 3e^{\pi} \end{aligned}$$

七、证：设 $P=x^2yz^2$，$Q=-xy^2z^2$，$R=-z(1+xyz)$，则

$$P_x = 2xyz^2，\ Q_y = -2xyz^2，\ R_z = -(1+2xyz)$$

记$\sum' : z = 0, (x,y) \in \left\{(x,y)\middle| x^2+y^2 \le a^2\right\}$，取上侧，则由 Gauss 公式知

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx - z(1+xyz)dxdy \\
&= \oiint_{(\Sigma+\Sigma')-\Sigma'} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx - z(1+xyz)dxdy \\
&= \iiint_{\Omega}(1+2xyz)dV - 0 = \iiint_{\Omega} dV + \iiint_{\Omega} 2xyzdV
\end{aligned}$$

利用三重积分的几何意义及奇偶对称性简化计算得

$$\oiint_{\Sigma} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx - z(1+xyz)dxdy = V + 0 = V$$

即证。

八、解：（1）$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{2n+1}x^2 = 0 \ \therefore R = +\infty$，收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

（2）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n} = S(x), x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n} - 1\right) = x\left(e^{x^2}-1\right)$$

求导得 $$S(x) = (2x^2+1)e^{x^2} - 1$$

（3）令$x=\sqrt{2}$，由上述结论得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n = S(\sqrt{2}) = 5e^2 - 1$$

故 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n = 5e^2 - 1 + 1 = 5e^2$$

九、证：由题意知数列$\{a_n\}$单调减有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，则$a\ge 0$．若$a=0$，由 Leibniz 判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，与题意矛盾，故$a>0$，则$\dfrac{1}{a_n+1} < \dfrac{1}{a+1} < 1$，故$\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n < \left(\dfrac{1}{a+1}\right)^n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a+1}\right)^n$收敛，由比较审敛法即证。

注：也可用根值审敛法证。

2009-2010 学年第二学期《高等数学》试卷

2009-2010 学年第二学期《高等数学》试卷参考答案