第二章 数字推理

本章技巧速览

数项特征分析法、运算关系分析法、整体特征分析法、位置关系分析法

技巧一 数项特征分析法之整除性

释义:一个整数的整除性是指这个数可以被哪些整数整除。每个正整数都可以被 1 和它本身整除,一个数的约数越多,其整除性越好。

常用整除规则:

- ◆ 任何数都能被 1 整除,结果是这个数本身
- ◆ 所有偶数能被 2 整除
- ◆ 各位数字之和能被 3 整除的数能被 3 整除
- ◆ 个位是 0、5 的数能被 5 整除
- ◆ 能同时被 2 和 3 整除的数能被 6 整除
- ◆ 0 可以被任何非 0 数整除

例题:1,6,20,56,144,( )

A.256　　B.312　　C.352　　D.384

【解析】除 1 外各项都有良好的整除性,因此考虑对每项进行乘积拆分。6 可以拆为 2×3,20 拆为 4×5,56 拆为 8×7,144 拆为 16×9,1 只能拆为 1×1。因此第一个乘数依次为 1,2,4,8,16;第二个乘数依次为 1,3,5,7,9。前者是等比数列,后者是等差数列。故所求为(352)=32×11,答案选 C。

技巧二 数项特征分析法之质合性

释义:质数和合数是从约数的角度对所有大于 1 的整数的一个划分,除了 1 和它本身以外还有其他约数的数是合数,只有 1 和它本身两个约数的数

是质数。1既不是质数也不是合数。除2以外,所有的质数都是奇数。

100以内的质数:共有25个,从小到大依次是2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。

例题:20, 22, 25, 30, 37, ( )

A.39　　B.45　　C.48　　D.51

【解析】观察数列,37是质数,不能被其他数整除,排除作商,考虑作差。相邻两项的差依次是2,3,5,7,(11),是质数列。故所求为37+11=(48),答案选C。

技巧三 数项特征分析法之多次方数

释义:通常把能够写成一个整数的整数次幂的数称为多次方数。

常用自然数的多次方:

底数＼指数	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561		
4	16	64	256	1024	4096				
5	25	125	625	3125					
6	36	216	1296	7776					
7	49	343	2401						
8	64	512	4096						
9	81	729	6561						

注:在多次方数列中常出现的两个较特殊的数字0和1的处理:

①数字0可以表示成0的任意非零次方 $0=0^m, m\neq0$;

②数字1可以表示成1的任意次方或任意非零数字的0次方 $1=1^m$;$1=a^0, a\neq0$;$1=(-1)^{2n}$。

例题:1,0,9,16,( ),48

A.33　　B.25　　C.36　　D.42

【解析】1、0、9 均是平方数,考虑构造多次方数列,相邻两项相加为平方数。

1　0　9　16（33）48

　1　9　25　49　81

作和

依次为 1、3、5、7、9 的平方,答案选 A。

技巧四　数项特征分析法之数位特征

释义:将一个多位数看成几个数字的组合,这些数字之间的相互关系被称为这个数的数位特征。

适用范围:数位特征分析法多应用于数字位数较多的数列。

例题:4938,3526,3124,2621,1714,（　）

A.1565　　B.1433　　C.1916　　D.1413

【解析】从数位特征的角度分析,将每个四位数的前两位数字和后两位数字分别看成一个两位数,这两个两位数的差依次是 49-38=11、35-26=9、31-24=7、26-21=5、17-14=3。因此空缺项千位和百位组成的数减去十位与个位组成的数所得的差应是 1,选项中符合这一规律的是 D。

技巧五　运算关系分析法之作差法

释义:作差法是对原数列相邻两项依次作差,由此得到一个新数列,然后分析这个新数列的规律,进而推知原数列的规律。

适用范围:

1.数字增减趋势明显,但增幅平稳;

2.思路不明时,从相邻两项的差入手分析是解决数字推理的"第一思维"。

例题 1:62,67,76,89,106,（　）

A.125　　B.127　　C.129　　D.131

【解析】从相邻两项来看,后项不足前项的两倍,则在数列连续变化过程中涉及倍数的可能性较小。这种情况下,可采用作差:

62 67 76 89 106 (127)
5 9 13 17 (21)
作差
公差为 4 的等差数列

例题 2：21，28，33，42，43，60，（ ）

A.45 B.56 C.75 D.92

【解析】数字整体是不断增大的，但增长幅度并不一致，42 后是 43，相差不大，接着是 60，很多的运算规律都不能成立，思路不明，尝试作差，并注意将作差持续下去。

21 28 33 42 43 60 (45)
7 5 9 1 17 (-15)
作差
-2 4 -8 16 (-32)
作差
公比为 -2 的等比数列

技巧六 运算关系分析法之作商法

释义：作商法是对原数列相邻两项依次作商，由此得到一个新数列，然后分析这个新数列的规律，进而推知原数列的规律。

适用范围：当数列相邻项之间有明显的倍数或比例关系时，可以优先考虑作商。

例题：4，6，12，30，90，315，（ ）

A.1580 B.1450 C.1260 D.1080

【解析】观察题干数字，发现有些数字之间是有明显倍数关系的，如 12 是 6 的 2 倍、90 是 30 的 3 倍，为更清楚地看到倍数变化的规律，采用作商。

4 6 12 30 90 315 (1260)
1.5 2 2.5 3 3.5 (4)
作商
公差为 0.5 的等差数列

技巧七 运算关系分析法之作和法

释义：作和法是依次求数列连续两项或连续三项之和，由此得到新数列，再通过观察新数列的规律推知原数列的规律。

例题：1，1，2，3，4，7，6，（　）

A.5　　B.11　　C.4　　D.2

【解析】题干数字很小，相差不大，不具备作差和作商的条件，因此可以考虑作和。

1　1　2　3　4　7　6　(11)

2　3　5　7　11　13　(17)

作和

质数列

技巧八　运算关系分析法之作积法

释义：作积法是从相邻两项之积出发，探寻数列相邻项之积与数列的数字变化之间的联系，为寻找数字推理规律提供帮助。

例题 1：2，3，9，30，273，（　）

A.8913　　B.8193　　C.7893　　D.12793

【解析】题中数字由小数字很快增大到三位数直至选项中的四位数或五位数，提示我们从作积的角度来考虑，因为作积是增幅不断加大的一种方式。

2　3　9　30　273　(8193)

6　27　270　8190

作积

此题的规律是相邻两项之积再加 3 等于下一项，答案为 B。

例题 2：1，7，7，9，3，（　）

A.7　　B.11　　C.6　　D.1

【解析】1　7　7　9　3　(7)

⑦　4⑨　6③　2⑦

作积

此题规律是前两项相乘后取个位数字即为第三项，以此类推，9×3=27，个位数字是 7，答案为 A。

技巧九　运算关系分析法之转化法

释义：转化法是指数列前面的项按照一定的规律转化得到后面的项，这

是一种十分常见的推理规律，在解题过程中应有意识的去寻找这种转化方式。

分类：

1.一项递推转化：指数列的第二项是第一项按照某种规律简单变化的结果，此后的每一项也都是它前面一项按此规律或相关规律简单变化得到的；

2.二项递推转化：指数列的第三项是第一项和第二项按照某种规律简单变化的结果，此后的每一项都是它前面两项按照此规律或相关规律简单变化的结果。

例题 1：1，4，11，27，61，133，（　）

A.268　　B.279　　C.294　　D.309

【解析】在其他解题思路受阻的情况下，我们考虑相邻项间的转化方式，首先考虑相邻两项间的转化方式，由于 1 至 4 的转化方式不易确定，先考虑 4 至 11 的转化方式，$4\times4-5=11$、$4\times3-1=11$、$4\times2+3=11$，结合 11 到 27 的方式，$11\times2+5=27$、$11\times3-6=27$，比较分析不难确定此题的规律。

$$1 \xrightarrow{\times2\ +2} 4 \xrightarrow{\times2\ +3} 11 \xrightarrow{\times2\ +5} 27 \xrightarrow{\times2\ +7} 61 \xrightarrow{\times2\ +11} 133 \xrightarrow{\times2\ +13} (279)$$

转化方式依靠质数列关联。答案为 B。

例题 2：2，3，7，16，65，321，（　）

A.4542　　B.4544　　C.4546　　D.4548

【解析】选项数字均为四位数，与题干数字相比，变化很大，因此应从乘积或多次方角度考虑。先看乘积的情况，前面几个数 $2\times3+1=7$ 的转化方式在后面被否定了，其他有关乘积的也不可行；从多次方角度考虑，由前面 2、3、7 可断定不会是每一项都表示成一个多次方的变化情况，因此规律就是与多次方有关的递推关系。

考虑小数字 2、3、7，常见的有 $2^2+3=7$、$2+7=3^2$。

经验证，第一项的平方加第二项等于第三项即为本题的递推规律，括号中的数应是 $65^2+321=(4546)$，此处可由尾数确定答案为 C。

技巧十　运算关系分析法之拆分法

释义：拆分法就是将每一项的数字拆分为两个部分，这两个部分经过简单运算的结果等于该项数字。其中包括整数乘积拆分和整数和差拆分两种形式。

例题1：1，9，35，91，189，（　）

A.361　　B.341　　C.321　　D.301

【解析】1=1×1、9=3×3、35=5×7、91=7×13、189=9×21，第一个乘数依次是1、3、5、7、9，这是连续的奇数，接下来应是11；第二个乘数依次是1、3、7、13、21，相邻两项的差是2、4、6、8，为连续偶数，因此下一项为21+10=31。所以括号中的数为11×31=(341)，答案为B。

此题也可从另外角度考虑，各项依次可写为0^3+1^3、1^3+2^3、2^3+3^3、3^3+4^3、4^3+5^3、(5^3+6^3)。这就是"整数和差拆分"。

例题2：153，179，227，321，533，（　）

A.789　　B.919　　C.1229　　D.1079

【解析】各项数字呈递增趋势，数字很大，但是不在多次方数附近，考虑拆分成与其接近的整十数字。

$$\begin{array}{cccccc}153 & 179 & 227 & 321 & 533 & (1079)\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 150+3^1 & 170+3^2 & 200+3^3 & 240+3^4 & 290+3^5 & (350+3^6)\end{array}$$

其中，150、170、200、240、290、(350)是二级等差数列，答案为D。

技巧十一　整体特征分析法

释义：数列的整体特征包括三个方面的内容，一是数列的数字构成，二是数列的变化趋势，三是数列的结构特征。

分类：

类型	适用范围	应用原则
数字构成	当题干的数字有整数、分数、根式、小数中的两种或两种以上数字形式	将不同形式的数字转化为相同形式的数字，以便寻找规律。
变化趋势	当题干的数字有明显的递增、递减、先增后减、先减后增或是增减交替时	找出数列的增减趋势与数列各项之间的运算关系或数项特征的关系。
结构特征	当题干数项较多或间隔结构数字交错相似时	分析间隔项之间、相邻的两项或三项，找出其中的规律。

例题 1：$\sqrt{2}+1$，$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$，1，(　)

A.$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　C.$\frac{1}{\sqrt{5}-2}$　　D.$\frac{2}{\sqrt{5}+2}$

【解析】从数字构成的角度分析，$\sqrt{2}+1$，$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$均不能改写为有理数，因此 1 应该改写为无理数形式。各项依次写为$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$，$\frac{1}{\sqrt{4}-1}$，($\frac{1}{\sqrt{5}-1}$)，选 B。

例题 2：$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{28}$，(　)，$\frac{1}{126}$，$\frac{1}{217}$

A.$\frac{1}{55}$　　B.$\frac{1}{54}$　　C.$\frac{1}{65}$　　D.$\frac{1}{75}$

【解析】从数列变化趋势角度分析，分子均为 1，分母呈递增趋势。结合数项特征分析发现这些分母均在多次方数附近，则考虑构造底数递增的多次方数列变式。各项分子均为 1，分母依次是 2^3+1，3^3+1，(4^3+1)，5^3+1，6^3+1，选择 C。

例题 3：4，11，6，13，8，(　)，10

A.15　　B.16　　C.17　　D.18

【解析】数列各项交替相似，4 和 11 差距很大却和 6 比较接近，分析其结构。连续偶数 4、6、8、10 和连续奇数 11、13、(15)分别处于奇数项位置和偶数项位置，选择 A。

例题 4：2，8，4，64，8，512，6，(　)

A.4096　　B.384　　C.216　　D.842

【解析】题干数项较多，对其做结构分析，发现每两个一组，后一个数是前一个数的立方，$8=2^3$、$64=4^3$、$512=8^3$、$(216)=6^3$，答案为 C。

技巧十二　位置分析法

释义：位置分析法就是通过考察不同位置的数字之间的联系来得到数字推理规律的方法。

适用范围：这种方法主要应用于图形形式的数字推理中。

使用原则：

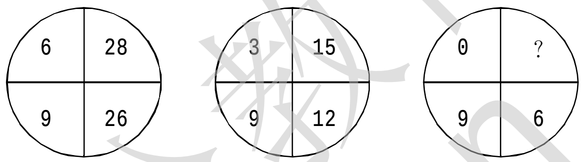
1.简单圆圈形式数字推理优先考虑相邻位置间的运算关系，如果没有找到合适的规律，再寻找对角线之间的运算关系；

2.复杂圆圈形式数字推理考虑四周四个数字与中心数字之间的规律，寻找规律的方法与简单圆圈形式数字推理类似；

3.表格形式数字推理首先考虑行间的运算规律；如果不行，考虑列间的运算规律；如果还没有合适的规律，则可考虑表格整体是否存在有效的规律；

4.三角形式数字推理考虑的是三个角上的数字与中心数字之间的规律，这一点与复杂圆圈形式数字推理类似。

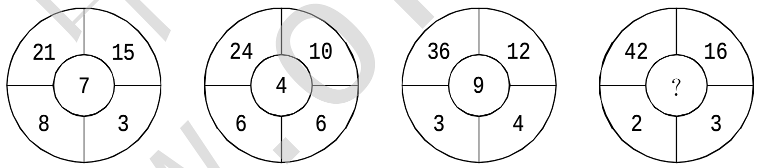
例题 1：



A.13　　B.7　　C.0　　D.−6

【解析】左边两个数字均小而右边两个数字均较大，提示我们左右之间寻求相等关系。对较小的数字可以考虑乘法，对较大的数字可以考虑加法来取得两者间的等价关系。$6\times9=28+26$，$3\times9=15+12$，$0\times9=(-6)+6$，选择 D。

例题 2：



A.14　　B.15　　C.16　　D.17

【解析】四角数字如何运算得到中心数字，从中心数字出发，容易看出 $21\div3=15-8=7$，$24\div6=10-6=4$，$36\div4=12-3=9$，$42\div3=16-2=(14)$。此题答案为 A。

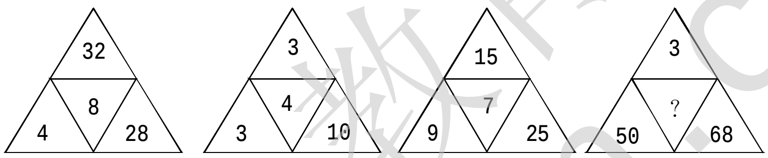
例题 3:

3	5	18
7	3	28
11	1	?

A.22　　　B.24　　　C.26　　　D.28

【解析】从每行来看,第二个数字加 1,再乘以第一个数字,得到第三个数字。3×(5+1)=18、7×(3+1)=28、11×(1+1)=(22),选择 A。

例题 4:



A.9　　　B.10　　　C.11　　　D.12

【解析】周围数字比中心数字大很多,通过乘除加减运算都无法得到中心数字,这时考虑多次方运算。易发现中心数字平方等于三角数字之和。$32+4+28=8^2$,$3+3+10=4^2$,$9+15+25=7^2$,$3+50+68=(11)^2$。此题答案为 C。

附录:数字推理中的基本数列

名称	特点	实例
等差数列	数列相邻两项之差为常数的数列,这个常数称为这个等差数列的公差。	自然数列、奇数列、偶数列
等差数列变式	数列相邻两项之差为简单数列的数列,这个简单数列通常是等差数列、等比数列。	0,1,3,6,10,15,21,…… 0,1,3,7,15,31,63,……
等比数列	数列相邻两项之比为非零常数的数列,这个常数称为这个等比数列的公比。	3,6,12,24,48,96,…… 2,6,18,54,162,……
和数列	典型和数列包括两项和数列、三项和数列两种。两项和数列是指从数列第三项开始,每一项都等于它前面两项之和;三项和数列是指从数列第四项开始,每一项都等于它前面三项之和。	1,1,2,3,5,8,13,21,34,…… 0,1,2,3,6,11,20,37,……
积数列	典型积数列包括两项积数列、三项积数列两种。两项积数列是指从数列第三项开始,每一项都等于它前面两项之积;三项积数列是指从数列第四项开始,每一线都等于它前面三项之积。	1,2,2,4,8,32,256,…… 1,2,3,6,36,648,……
质数列	数列是连续递增或连续递减的质数	2,3,5,7,11,……
合数列	数列是连续递增或连续递减的合数	4,6,8,9,10,12,14,……
平方数列	连续自然数的平方	1,4,9,16,25,……
立方数列	连续自然数的立方	1,8,27,64,125,……

实战演练

1. 8，18，40，63，110，（　）

A.121　　B.130　　C.144　　D.156

2. 1，32，81，64，25，（　），1

A.5　　B.6　　C.10　　D.12

3. 1，4，16，49，121，（　）

A.256　　B.225　　C.196　　D.169

4. 19，100，149，174，183，（　）

A.195　　B.180　　C.184　　D.240

5. 450，150，60，30，20，20，（　）

A.10　　B.5　　C.1　　D.40

6. 3，7，16，107，（　）

A.1707　　B.1704　　C.1086　　D.1072

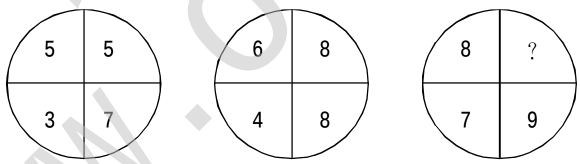
7. 1，$\frac{5}{6}$，$\frac{7}{12}$，$\frac{3}{8}$，（　）

A.$\frac{11}{36}$　　B.$\frac{11}{48}$　　C.$\frac{13}{48}$　　D.$\frac{13}{36}$

8. 8，15，6，20，40，3，4，（　）

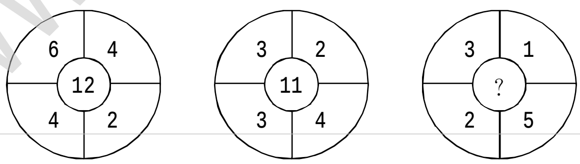
A.7　　B.12　　C.30　　D.5

9.



A.10　　B.6　　C.14　　D.2

10.



A.14　　B.12　　C.5　　D.3

参考答案及解析

1.【答案】D。解析:观察题干中的数字,发现整体呈平稳递增趋势,但作差没有得到合理的规律。此时发现各项均有较好的整除性,因此考虑乘积拆分。63 一般分成 7×9,110 一般分成 10×11,结合前面的 40 进行拆分,发现各项只能写成 2×4、3×6、5×8、7×9、11×10,其中第一个乘数是质数列,第二个乘数是合数列,因此下一项只能为 13×12=(156)。

2.【答案】B。解析:题干中最明显的多次方数是 $25=5^2$,难点在于判断 81 和 64 的多次方形式,两项是否也是平方数,即 9^2、8^2。由于 32 不是平方数,因此我们尝试用 3^4 表示 81,用 4^3 表示 64。第一项和最后一项都是 1,这两个 1 是两种不同的多次方表现形式,构造多次方数列应为:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 32 & 81 & 64 & 25 & (6) & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1^6 & 2^5 & 3^4 & 4^3 & 5^2 & (6^1) & 7^0 \end{array}$$

底数和指数都是连续自然数

3.【答案】A。解析:观察数列,很显然各项都是平方数,依次为 1,2,4,7,11 的平方,那么我们只要找出底数的规律,实际上 1,2,4,7,11 是一个典型的二级等差数列,后一项减前一项得到等差数列 1,2,3,4,(5),所以下一项的底数应为 11+5=16,则所求项为 $16^2=(256)$。

4.【答案】C。解析:由题干后几项可确定不会涉及倍数变化,数列变化并不平稳,思路一时不明。这种情况下,可采用作差:

19 100 149 174 183

81 49 25 9

作差

所得新数列有 4 个数字,它们都是完全平方数,依次是 9^2、7^2、5^2、3^2,下一项应是 $1^2=1$,所以原数列括号中的数是 183+1=(184)。

5.【答案】D。解析:题干数字相邻项之间有明显的倍数或比例关系,采用作商。

450 150 60 30 20 20

3 2.5 2 1.5 1

前项除以后项

新数列是一个公差为-0.5 的等差数列,下一项应是 0.5,原数列括号中的数应是 20÷0.5=(40)。

6.【答案】A。解析:题干数字由小数字快速增大,优先考虑乘积或乘方运算。可通过求数列相邻项之积,确认乘积是不是数列数字变化的主要因素。

3　7　16　107

作积

21　112　1712

新数列与原数列对比，112 和 107 已经很接近，相差为 5，21 和 16 也是相差 5，由此确定了此题规律。第一项×第二项−5=第三项，3×7−5=16、7×16−5=107、16×107−5=(1707)。

7.【答案】B。解析：第二项 $\frac{5}{6}$ 和第三项 $\frac{7}{12}$ 的分子和分母联系紧密，可猜想分母是等比数列，则依次应是 3、6、12、24，此时各项分子就是 3、5、7、9，是连续奇数。所填分数分母应是 24×2=48，分子应是 9+2=11，$\frac{11}{48}$，选择 B。

8.【答案】C。解析：题干数字不规则增减，其中必不存在连续变化规律。若从分组组合的角度考虑，8 和 15、6 和 20、40 和 3，分析这三组数字之间的运算关系。8×15=6×20=40×3=120，所以括号中的数字与 4 的乘积也应是 120，120÷4=(30)，选择 C。

9.【答案】D。解析：前两个图形中的数字相差不大，分组后，若考虑加法、减法不能得到规律，数字之间的倍数关系也不明显，也不易使用除法，故考虑乘法。

第一个图形中，一条对角线数字 5 和 7 相乘等于 35，可由另一条对角线数字组合而得；第二个图形中，6×8=48，也符合这种规律，则在第三个图形中，8×9=72，则应填入 2，选择 D。

10.【答案】A。解析：题中第二个图形的中心数字 11 是质数，它是由 3、2、3、4 四个数字运算得到的，这些数字在运算过程中极有可能涉及到加法或减法运算，即先运算得到一个数，然后加上一个数或减去一个数得到 11。

题中 3、4 等数易于得到 11 附近的数字 12，在 12 的基础上通过加法或减法得到 11，按照这种思路，不难确定此题规律。第一个图形中 6×2−(4-4)=12；第二个图形中 3×4−(3-2)=11；第三个图形中 3×5−(2-1)=(14)。