第一章 数学运算

本章技巧速览

速算技巧、代入排除法、特殊值法、方程法、图解法、十字交叉法、整体法、公式法、极端法、数学原理法、排列组合相关方法、其他方法

技巧一 速算技巧

释义：利用公式、数的特性等将复杂的计算转化为简单的计算，降低计算量，加快计算速度。我们将这些能简化计算的技巧统称为速算技巧。

分类：

类型	释义
尾数法	尾数法是指不计算(有时可能无法计算)算式各项的值，只考虑算式各项的尾数，进而确定结果的尾数，由此在选项中找出有这一尾数的选项。
提取公因式	如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提取出来作为多项式的一个因式，提取公因式后的式子放在括号里，作为另一个因式。提取公因式是四则运算中的基本方法，提取公因式后加减相消或约分能使计算大大简化。
裂项相消	裂项相消是分解与组合思想在数列求和中的具体应用，实质是将数列中的每项(通项)分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的。
适当组合	在计算复杂算式时，将同类项适当组合在一起，通过加减相消、乘除相消可达到减少计算量的目的。

例题 1:$(1.1)^2+(1.2)^2+(1.3)^2+(1.4)^2$ 的值是(　　)。

A.5.04　　B.5.49　　C.6.06　　D.6.30

【解析】四个选项数字的尾数各不相同,因此考虑使用尾数法

两个数乘积的尾数等于它们尾数相乘之积的尾数,因此$(1.1)^2$的尾数为1,$(1.2)^2$的尾数为4,$(1.3)^2$的尾数为9,$(1.4)^2$的尾数为6。

两个数和的尾数等于它们尾数之和的尾数。各项尾数的和1+4+9+6=20,尾数为0。

所以此题答案为D。

例题 2:已知 $x=\frac{7}{3}$,$y=\frac{9}{5}$,则 $(2x-y)^3+(5x-y)(2x^2-y^2+xy)=$(　　)。

A.$\frac{1979}{15}$　　B.$\frac{2107}{15}$　　C.$\frac{847}{8}$　　D.$\frac{989}{8}$

【解析】若直接代入 x、y 的值计算所求式子的值会很繁琐,此时应该先对原式化简。考虑所求式第二项第二个括号,很容易想到分解因式,然后通过提取公因式,达到化简所求式的目的,然后代入计算,减少计算量。具体计算过程如下:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(2x-y)^3+(5x-y)(x+y)(2x-y)\\&=(2x-y)[(2x-y)^2+(5x-y)(x+y)]\\&=(2x-y)(4x^2-4xy+y^2+5x^2+4xy-y^2)\\&=9x^2(2x-y)=9\times\left(\frac{7}{3}\right)^2\times\left(2\times\frac{7}{3}-\frac{9}{5}\right)=\frac{2107}{15}\end{aligned}$$

所以此题答案为B。

例题 3:$\frac{1}{1\times2}+\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{3}{1\times2\times3\times4}+\cdots\cdots+\frac{9}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\times10}=$(　　)。

A.1　　B.$1-\frac{1}{10!}$　　C.$1-\frac{1}{9!}$　　D.$1+\frac{1}{10!}$

【解析】如果直接计算这道题,计算量会很大,而且很不现实。题中各项形式相同,可分析通项,寻求减少计算量、能快速计算的方法。具体解题过程如下:

从通项入手:这个数字共有9项,第 n 项可表示为$\frac{n}{(n+1)!}$,对这个分式进行改写,运用裂项相消的思想,将分式拆成两项的差。

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n!\times n}{n!\times(n+1)!}=\frac{(n+1)!-n!}{n!\times(n+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{n!\times(n+1)!}-\frac{n!}{n!\times(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

运用这个公式,原式可以很快求出结果。

原式$=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\cdots+\frac{1}{9!}-\frac{1}{10!}$

$=1-\frac{1}{10!}$

所以此题答案为B。

知识链接

常见的通项裂项公式:

- ◆ $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$
- ◆ $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$
- ◆ $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\times[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$
- ◆ $\frac{n}{\sqrt{m+n}+\sqrt{m}}=\sqrt{m+n}-\sqrt{m}$
- ◆ $n!\times n=(n+1)!-n!$

例题4:$(\frac{2}{179}+\frac{4}{179}+\frac{6}{179}+\cdots\cdots+\frac{98}{179})-(\frac{3}{358}+\frac{5}{358}+\frac{7}{358}+\cdots\cdots+\frac{99}{358})=($ $)$。

A.$\frac{2401}{358}$　　B.$\frac{2401}{179}$　　C.$\frac{2500}{179}$　　D.$\frac{250}{358}$

【解析】此题要求的是两个式子的差,可单独计算两个式子的值,第一个式子提取公因式$\frac{1}{179}$,第二个式子提取公因式$\frac{1}{358}$,两个式子剩下的部分都是等差数列,可以计算得到最后结果。

此题如果注意到两部分的分母179和358是2倍关系,可对两部分进行适当组合,达到减少计算量的目的。

$\frac{2}{179}-\frac{3}{358}=\frac{4}{358}-\frac{3}{358}=\frac{1}{358}$;

$\frac{4}{179}-\frac{5}{358}=\frac{8}{358}-\frac{5}{358}=\frac{3}{358}$;

……

$\frac{98}{179}-\frac{99}{358}=\frac{196}{358}-\frac{99}{358}=\frac{97}{358}$

因此原式$=\frac{1}{358}+\frac{3}{358}+\cdots\cdots+\frac{97}{358}$

$=\frac{1}{358}\times(1+3+\cdots\cdots+97)$

$=\frac{1}{358}\times\frac{(1+97)\times49}{2}=\frac{2401}{358}$

所题此题答案为 A。

技巧二 代入排除法

释义:代入排除法是指从选项入手,代入某个选项后,如果不符合已知条件,或者推出矛盾,则可排除此选项的方法。公务员考试行测部分全部都是选择题,而代入排除法是应对选择题的有效方法。

适用范围:代入排除法广泛运用于多位数问题、不定方程问题、剩余问题、年龄问题、复杂行程问题、和差倍比问题等。

分类:

1.直接代入:把选项一个一个代入验证,直至得到符合题意的选项为止;

2.选择性代入:根据数的特性(奇偶性、整除特性、尾数特性、余数特性等)先筛选,再代入排除。

例题 1:编号为 **1~55** 号的 **55** 盏亮着的灯,按顺时针方向依次排列在一个圆周上,从 **1** 号灯开始顺时针方向留 **1** 号灯,关掉 **2** 号灯;留 **3** 号灯,关掉 **4** 号灯……这样每隔一盏灯关掉一盏,转圈关下去,则最后剩下的一盏亮灯编号是( )。

A.50　　B.44　　C.47　　D.1

【解析】第一轮灭灯偶数号灯全熄,排除 A、B。熄灭第 54 号灯后隔过 55 号灯灭掉 1 号灯,排除 D 选 C。

例题 2:两个数的差是 2345,两数相除的商是 8,这两个数之和为(　　)。

A.2353　　B.2896　　C.3015　　D.3456

【解析】由两个数的差是 2345 可知,这两个数必是一奇一偶,则两个数的和为奇数,可排除 B、D 两项;又由两数相除的商是 8 可知,一个数是另一个数的 8 倍,则两个数的和是较小数的 9 倍,即两个数的和是 9 的倍数,排除 A,选择 C。

技巧三 特殊值法

释义:特殊值法,就是在题目所给的范围内取一个恰当的特殊值直接代入,将复杂的问题简单化的方法。灵活地运用特殊值法能提高解题速度,增强解题的信心。

适用范围:特殊值法常应用于和差倍比问题、行程问题、工程问题、浓度问题、利润问题、几何问题等。

使用原则:

1.确定这个特殊值不影响所求结果,这决定了是否能够使用特殊值法;

2.所取的特殊值应便于快速、准确计算,尽量使计算结果为整数。

例题 1:某盐溶液的浓度为 20%,加入水后溶液的浓度变为 15%。如果再加入同样多的水,则溶液的浓度为(　　)。

A.13%　　B.12.5%　　C.12%　　D.10%

【解析】设有 15% 盐水 100 克,则含盐 15 克。加水前有盐水 15÷20%=75 克,可知加水 25 克。第二次加水后有盐水 125 克,浓度为 15÷125=12%。此题答案为 C。

例题 2:A、B 两地间有条公路, 甲、乙两人分别从 A、B 两地出发相向而行,甲先走半小时后,乙才出发,一小时后两人相遇,甲的速度是乙的 $\frac{2}{3}$。问甲、乙所走的路程之比是多少?

A. 5:6　　B. 1:1　　C. 6:5　　D. 4:3

【解析】设乙速度为 3,甲速度为 2,甲走了 2×1.5=3 的路程,乙走了 3×1=3 的路程,二者所走路程比为 1:1,此题答案为B。

技巧四 方程法

释义:方程法是指将题目中未知的数用变量(如 x,y)表示,根据题目中所含的等量关系,列出含有未知数的等式(组),通过求解未知数的数值,来解应用题的方法。因其为正向思维,思路简单,故不需要复杂的分析过程。

适用范围:方程法应用较为广泛,公务员考试数学运算绝大部分题目,如行程问题、工程问题、盈亏问题、和差倍比问题、浓度问题、利润问题、年龄问题等均可以通过方程法来求解。

解题步骤:设未知量——找等量关系——列方程(组)——解方程(组)

例题 1:募捐晚会售出300元、400元、500元的门票共2200张,门票收入84万元,其中400元和500元的门票张数相等。300元的门票售出多少张?

A.800　B.850　C.950　D.1000

【解析】设400和500元门票各卖了x张,300元门票卖了(2200-2x)张,则300×(2200-2x)+400x+500x=840000。解得x=600,300元的门票卖了2200-2×600=1000张,此题答案为D。

例题 2:甲、乙、丙、丁四个工人做了270个零件,如果甲多做10个,乙少做10个,丙做的个数乘2,丁做的个数除以2,那么四人做的零件数恰好相等。丙实际做多少个?

A.30　B.45　C.52　D.63

【解析】设最后相等时的零件数为 x,则甲=x-10,乙=x+10,丙=$\frac{x}{2}$,丁=$2x$,从而有$(x-10)+(x+10)+\frac{x}{2}+2x=270$,解得 $x=60$,故丙实际做了$\frac{x}{2}=\frac{60}{2}=30$个。此题答案为A。

技巧五 图解法

释义:图解法是指利用图形来解决数学运算的方法,将复杂的数字之间的关系用图形形象地表示出来,能够更快更准地解决问题。

适用范围:一般说来,图解法适用于绝大部分题型,尤其是在行程问题、

年龄问题、容斥问题等强调分析过程的题型中运用得很广。

分类：

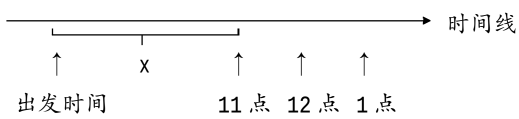
类型	释义
线段图	线段图即是用线段来表示数字和数量关系的方法。一般情况下，我们会用线段来表示量与量之间的倍数关系或者整个运用过程等，来解决和差倍比问题、行程问题等。
网状图/树状图	网状图或树状图一般用来解决过程或者数量关系比较复杂的题型，比如排列组合问题、推理问题或者时间安排类的对策分析问题。
文氏图	文氏图就是用圆圈表示一类事物的图形，在公务员考试数学运算部分中，一般只有容斥问题用到文氏图。
表格	利用表格可以将多次操作问题和还原问题中的复杂过程一一表现出来。同时，我们也可以用表格来理清数量关系，帮助列方程。

例题 1：骑自行车从甲地到乙地，以 10 千米/时的速度行进，下午 1 点到乙地；以 15 千米/时的速度行进，上午 11 点到乙地。如果希望中午 12 点到，那么应当以怎样的速度行进？

A. 11 千米/小时　　B. 12 千米/小时

C. 12.5 千米/小时　　D. 13.5 千米/小时

【解析】路程一定，速度与时间成反比。如下面的时间线所标示，$\frac{x+2}{x}=\frac{15\text{千米/小时}}{10\text{千米/小时}}=3:2$，解得 x=4 小时。



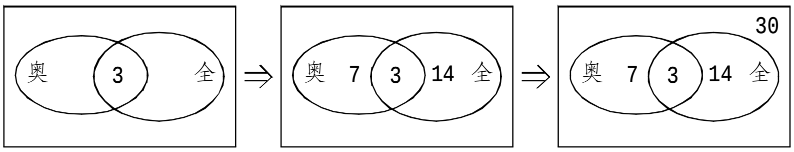
12 点到与 1 点到用时比为 5:6，速度比为 6:5。因此，应以 $10\times\frac{6}{5}=12$ 千米/时行进可在 12 点到，此题答案为B。

例题 2：大学四年级某班共有奥运会志愿者 10 人，全运会志愿者 17 人，

两者都是的有 3 人,另有 30 人两种志愿者都不是,则班内一共有多少人?

A.51　　B.54　　C.57　　D.60

【解析】这是一个容斥问题,可以用文氏图来解决。对于此类文氏图,应该遵循“从内到外”的原则,一步一步地填充文氏图即可。



由上图可以得出,该班人数为 7+3+14+30=54 人。此题答案为B。

例题 3:5 年前甲的年龄是乙的三倍,10 年前甲的年龄是丙的一半,若用 y 表示丙当前的年龄,下列哪一项能表示乙的当前年龄?

A.$\frac{y}{6}+5$　　B.$\frac{5y}{3}+10$　　C.$\frac{y-10}{3}$　　D.3y–5

【解析】列表分析,箭头指示了填表顺序,可知此题答案为A。

	甲	乙	丙
现在		$\frac{y}{6}+5$	y
5 年前	$\frac{1}{2}(y-10)+5=\frac{y}{2}$	$\frac{1}{3}\times\frac{y}{2}$	
10 年前	$\frac{1}{2}(y-10)$		y-10

技巧六　十字交叉法

释义:十字交叉法是利用“交叉十字”来求两个部分混合后平均量的一种简便方法。

适用范围:十字交叉法一般只用于两个部分相关的平均值问题,且运用的前提已知总体平均值 r。

使用原则:第一部分的平均值为 a,第二部分的平均值为 b(这里假设 $a>b$),混合后的平均值为 r。

	平均值		交叉作差后	对应量
第一部分	a		$r-b$	A
总体平均值		r		
第二部分	b		$a-r$	B

得到等式：$\frac{r-b}{a-r}=\frac{A}{B}$（由此可知，十字交叉法解决的是两者之间的平均值问题）

解题步骤：

1.找出各个部分平均值和总体平均值；

2.平均值间交叉作差，写出部分对应量或对应量的比；

3.利用比例关系解答。

例题 1：某车间进行考核，整个车间平均分是 85 分，其中女工的平均分是 90 分，男工的平均分是 75 分，问女工人数是男工人数的多少倍？

A.1　　B.1.5　　C.2　　D.2.5

【解析】平均数问题，要求男女工人数之比，即求 A、B 之比，可采用十字交叉法。

	平均分		交叉作差后	对应量
女工	90		10	A
总平均分		85		
男工	75		5	B

可知，$\frac{A}{B}=\frac{10}{5}=\frac{2}{1}$，即女工人数:男工人数=2:1，所以女工人数是男工人数的 2 倍。此题答案为 C。

例题 2：一项工程，甲单独完成需 12 天，乙单独完成需 9 天，若甲先做若干天后，改由乙接着做，共用 10 天完成，则甲做的天数是：

A.6　　B.5　　C.3　　D.4

【解析】用十字交叉法，总效率为 $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{90}$
	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{60}$

则甲乙做的天数之比为$\frac{1}{90}:\frac{1}{60}$=2∶3,甲用了$\frac{2}{2+3}\times10=4$天完成。此题答案为D。

技巧七 整体法

释义:整体法是将一个或者多个问题作为整体来考虑,需要考生抓住问题的核心,忽略细节。

分类:

类型	释义
整体代换法	主要用于方程组的求解。在这过程中,要注意求什么就把什么看成整体。
初末态法	这种方法不关注变化的详细过程,只考虑其初态和末态。
整体讨论法	整体讨论不考虑细节,需要考生具有全局观,能够关注到问题的本质。

例题1:某班级去超市采购体育用品时发现买4个篮球和2个排球共需560元,而买2个排球和4个足球则共需500元。问如果篮球、排球和足球各买1个,共需多少元?

A.250元　　B.255元　　C.260元　　D.265元

【解析】设篮球、排球、足球单价为x、y、z,则$4x+2y=560$,$2y+4z=500$。两式相加得$4(x+y+z)=1060$,$x+y+z=265$,此题答案为D。

例题2:有两只相同的大桶和一只空杯子,甲桶装牛奶,乙桶装糖水,先从甲桶内取出一杯牛奶倒入乙桶,再从乙桶取出一杯糖水和牛奶的混合液倒入甲桶,请问,此时甲桶内的糖水多还是乙桶内的牛奶多?

A.无法判定　　B.甲桶糖水多

C.乙桶牛奶多　　D.一样多

【解析】这道题没有具体的数据,只有两次不定量的操作,若通过假设桶和杯子的容积,然后根据溶液混合的公式正常求解,是不可行的。利用整体思想中的初末态法,问题会变得很简单。

问题的核心是初末态物质的量——都有一桶牛奶和一桶糖水。

初态:甲,一桶牛奶;乙,一桶糖水

末态:甲,甲中牛奶+甲中糖水=一桶 ①

乙,乙中牛奶+乙中糖水=一桶 ②

由于初末态总量相同,因此有:甲中糖水+乙中糖水=一桶 ③

对比②和③得到,甲中糖水=乙中牛奶,即甲桶内的糖水和乙桶内的牛奶一样多。此题答案为 D。

例题 3:一名外国游客到北京旅游。他要么上午出去游玩,下午在旅馆休息;要么上午休息,下午出去游玩,而下雨天他只能一天都呆在旅馆里。期间,不下雨的天数是 12 天,他上午呆在旅馆的天数为 8 天,下午呆在旅馆的天数为 12 天,他在北京共呆了( )。

A.16 天 B.20 天 C.22 天 D.24 天

【解析】不下雨的天数是 12 天,则有 12 个半天出去游玩。在旅馆的天数为 8+12=20 个半天,故总天数为 12+20=32 个半天,即 16 天。

技巧八 公式法

在数学运算中很多题目需要运用数学公式计算,对于一些广泛出现的运算题型,这些题型的变化相对较少,且每一题型都有其核心的解题公式,遇到这些题时,只要理清题意,套用公式即可。下面总结了几种常见的题型及其相关的核心公式。

类型	核心公式
植树问题	1.路不封闭且两端都植树:棵数=总路长÷间距+1; 2.路不封闭且有一端植树/封闭道路植树(闭合曲线):棵数=总路长÷间距; 3.路不封闭且两端都不植树:棵数=总路长÷间距-1。
方阵问题	1.方阵相邻两层人数相差 8; 2.实心方阵总人数=最外层每边人数的平方; 空心方阵总人数利用等差数列求和公式来求(首项为最外层总人数,公差为-8 的等差数列); 3.方阵每层总人数=方阵每层每边人数×4-4;

(续表)

类型	核心公式
牛吃草问题	1.草地每天新长的草量 $=\dfrac{\text{较多的天数}\times\text{对应牛的头数}-\text{较少的天数}\times\text{对应牛的头数}}{\text{较多的天数}-\text{较少的天数}}$ 2.最初草量=(所有牛每天吃的草量-草地每天新长草量)×天数 3.牛吃草的天数=最初的草量÷(牛每天吃的草量-草地每天新长的草量)
鸡兔同笼问题	1.标准公式:设鸡求兔 兔头数=(总脚数-2×总头数)÷2 鸡头数=总头数-兔头数 2.变形公式:设得求失 损失数=(每件应得×总件数-实得数)÷(每件应得+每件损赔)

例题 1:环保部门对一定时间内的河流水质进行采样,原计划每41分钟采样1次,但在实际采样过程中,第一次和最后一次采样的时间与原计划相同,每两次采样的间隔变成20分钟,采样次数比原计划增加了1倍。问实际采样次数是多少次?

A. 22　　B. 32　　C. 42　　D. 52

【解析】设原计划采样x次,有x-1个时间间隔,总用时为41×(x-1)分钟。实际采样过程中,第一次和最后一次采样时间与原计划相同说明总用时不变。采样次数变为2x,有2x-1个时间间隔,总用时为20×(2x-1)分钟。所以41×(x-1)=20×(2x-1)⇒x=21次,实际采样次数为42次。此题答案为C。

例题 2:五年级学生分成两队参加广播操比赛,排成甲、乙两个实心方阵,其中甲方阵最外层每边的人数为8。如果两队合并,可以另排成一个空心的丙方阵,丙方阵最外层每边的人数比乙方阵最外层每边的人数多4人,且甲方阵的人数正好填满丙方阵的空心。五年级一共有多少人?

A.200　　B.236　　C.260　　D.288

【解析】空心的丙方阵人数=甲方阵人数+乙方阵人数,若丙方阵为实心的,那么实心的丙方阵人数=2×甲方阵人数+乙方阵人数,即实心丙方阵比乙方阵多8^2×2=128人。丙方阵最外层每边比乙方阵多4人,则丙方阵最外层总人数

比乙方阵多 4×4=16 人,即多了 16÷8=2 层。这两层的人数即为实心丙方阵比乙方阵多的 128 人,则丙方阵最外层人数为(128+8)÷2=68 人,丙方阵最外层每边人数为(68+4)÷4=18 人。那么,共有 $18^2-8^2=260$ 人。此题答案为 C。

例题 3:假设某地森林资源的增长速度是一定的,且不受到自然灾害等原因影响。那么若每年开采 110 万立方米,则可开采 90 年,若每年开采 90 万立方米则可开采 210 年。为了使这片森林可持续开发,则每年最多开采多少万立方米林木?( )

A.30　　B.50　　C.60　　D.75

【解析】牛吃草问题变形森林每年再生(90×210-110×90)-(210-90)=75 万立方米。如果每年开采的资源超过再生的数量,森林就慢慢减少,无法保证可持续开发。此题答案为 D。

例题 4:某零件加工厂按照工人完成的合格零件和不合格零件支付工资,工人每做出一个合格零件能得到工资 10 元,每做一个不合格零件将被扣除 5 元,已知某人一天共做了 12 个零件,得工资 90 元,那么他在这一天做了多少个不合格零件?

A.2　　B.3　　C.4　　D.6

【解析】得失问题,求“失”,应当采用“设得求失”的思路。

做出一个合格零件得 10 元,做出一个不合格零件损失 10+5=15 元。若 12 个零件都合格,那么这个人可以得到 12×10=120 元,可现在只得了 90 元,说明做了(120−90)÷15=2 个不合格的零件。此题答案为 A。

技巧九 极端法

释义:极端法是指通过考虑问题的极端状态,探求解题方向或转化途径的一种常用方法。在公务员考试中运用极端法的情况主要有分析极端状态和考虑极限图形与极限位置两种情况。

适用范围:极端法一般适用于鸡兔同笼问题、对策分析类问题等。

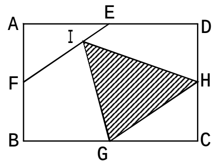
分类:

1.分析极端状态:先分析并找出问题的极限状态,再与题干条件相比较,作出相应调整,得出所求问题的解;

2.考虑极限图形与极限位置:(1)极限图形,主要是利用一些几何知识。例

如,对于空间几何体,当表面积相同时,越趋近于球体的体积越大;同理,当体积相同时,越趋近于球体的表面积越小;(2)极限位置,首先找到途中满足条件的极端位置,再判断极端位置与题中所求之间的关系,进而求出题目答案。

例题 1:如图所示,矩形 $ABCD$ 的面积为 1,E、F、G、H 分别为四条边的中点,FI 的长度是 IE 的两倍,问阴影部分的面积为多少?



A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{5}{16}$　　D. $\frac{7}{24}$

【解析】本题直接求解较难,观察图形中各个点的位置关系,E、F、G、H 分别为矩形 $ABCD$ 四条边的中点,则 EF 与 GH 平行,故 I 点在 EF 上的任何位置时,$\triangle IGH$ 的高为两条平行线间的距离,是定值,所以 $\triangle IGH$ 的面积都相等,那么就可以考虑将 I 点移动,显然移到线段 EF 的端点(极限位置)时最方便计算。即假设点 I 与点 E(或 F)重合,那么阴影面积即 $S_{\triangle IGH}=S_{\triangle EGH}=\frac{1}{2}S_{四边形\ EGCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times S_{矩形\ ABCD}=\frac{1}{4}$。此题答案为 B。

例题 2:为节约用水,某市决定用水收费实行超额超收,标准用水量以内每吨 2.5 元,超过标准的部分加倍收费。某用户某月用水 15 吨,交水费 62.5 元,若该用户下个月用水 12 吨,则应交水费多少钱?

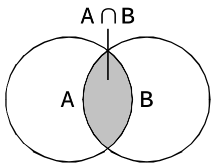
A.42.5 元　　B.47.5 元　　C.50 元　　D.55 元

【解析】每吨水的平均费用有两种极限状态,每吨 2.5 元或 5 元。若 12 吨在标准用水量以内,应交水费 2.5×12=30 元,结合选项可知错误。因此 12 吨超出标准用水量,比用 15 吨少交 5×(15-12)=15 元。应交 62.5-15=47.5 元,此题答案为 B。

技巧十　数学原理法之容斥原理

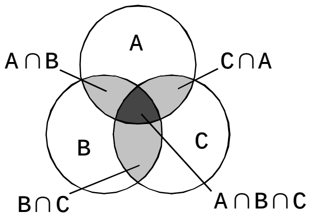
释义:容斥原理是指计数时先不考虑重叠的情况,把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来,再把重复计算的数目排斥出去,使得计算的结果既无遗漏又无重复。

使用原则:两个集合:$A\cup B=A+B-A\cap B$



总数=两个圆内的-重合部分的

三个集合:$A\cup B\cup C=A+B+C-A\cap B-B\cap C-C\cap A+A\cap B\cap C$



总数=三个圆内的-重合一次的+重合两次的

例题:一个班里有 30 名学生,有 12 人会跳拉丁舞,有 8 人会跳肚皮舞,有 10 人会跳芭蕾舞。问至多有几人会跳两种舞蹈?

A. 12 人　　B. 14 人　　C. 15 人　　D. 16 人

【解析】设会跳一种舞的有 A 人,会跳两种舞的有 B 人,会跳三种舞的有 C 人,则 A+2B+3C=12+8+10=30。$B=\frac{30-A-3C}{2}$,显然当 A=C=0 时 B 最大。B 最大为 15,此题答案为 C。

技巧十一　数学原理法之抽屉原理

释义:

1.**抽屉原理一**:将多于 n 件的物品任意放到 n 个抽屉中,那么至少有一个抽屉中的物品件数不少于 2 件。

2.**抽屉原理二**:将多于 $m\times n$ 件的物品任意放到 n 个抽屉中,那么至少有一个抽屉中的物品的件数不少于$(m+1)$件。

适用范围:题干中含有诸如“至少……才能保证……”、“要保证……至少……”这类叙述的题目,一般可以用抽屉原理来解决。

例题：把154本书分给某班的同学，如果不管怎样分，都至少有一位同学会分得4本或4本以上的书，那么这个班最多有多少名学生？

A.77　　B.54　　C.51　　D.50

【解析】此题首先考虑使用最差原则，发现不容易得出答案。看到"至少有一位同学会分得4本或4本以上"这种抽屉问题的标准表述，因此可以考虑使用抽屉原理。每位同学看成一个抽屉，每个抽屉内的物品不少于4件，逆用抽屉原理2，则有$m+1=4$，$m=3$。$154=3\times51+1$，所以这个班最多有51名学生。此题答案为C。

技巧十二　排列组合相关方法

排列组合问题的四种特殊方法：

类型	适用范围
捆绑法	当要求其中两个或者多个元素必须相邻时，我们可以考虑将这些元素捆绑在一起，作为一个整体来参与排列。
插空法	与捆绑法相反，当要求其中两个或者多个元素不相邻时，我们先将其余元素排列好，然后将有限制的元素插到其他元素形成的"空"里。
插板法	当要求将n个相同的元素分成m堆，每堆至少有一个时，我们将m-1个木板插到n个元素形成的n-1个"空"里即可。此时，分配的方法数为C_{n-1}^{m-1}。
归一法	如果其中几个元素的位置相对确定，如甲必须排在乙前面，此时我们只需要将这些元素与其他元素正常排列，然后除以这几个元素的全排列数即可。这里的"归一"是指，这些位置相对确定的元素位置排列以后，我们只取其中一种。

例题1：某展览馆计划4月上旬接待5个单位来参观，其中2个单位人较多，分别连续参观3天和2天，其他单位只参观1天，且每天最多只接待1个单位。问：参观的时间安排共(　　)种。

A.30　　B.120　　C.2520　　D.30240

【解析】将连续参观3天和2天的分别看成2个整体,问题相当于从7天中选择5天进行排列,则参观的时间安排有$A_7^5=7\times6\times5\times4\times3=2520$种。此题答案为C。

例题2:将三盆同样的红花和四盆同样的黄花摆放成一排,要求三盆红花互不相邻,共有多少种不同的方法?

A.8　　B.10　　C.15　　D.20

【解析】由于花是相同的,也就是说不需要考虑顺序问题,所以为组合问题。要求三盆红花互不相邻,则将3盆红花插入四盆黄花形成的5个空位(包括两端)里,有$C_5^3=10$种不同的方法。此题答案为B。

例题3:将10本没有区别的图书分到编号为1、2、3的图书馆,要求每个图书馆分得的图书不小于其编号数,共有多少种不同的分法?

A.12　　B.15　　C.30　　D.45

【解析】将问题转化为"n件相同的物品分成m堆,每堆至少一件"这种标准问题,再用插板法将非常简便。先给编号为2的图书馆1本书、编号为3的图书馆2本书,还剩下10-1-2=7本书,这样问题就变为"7本书分给3个图书馆,每个图书馆至少一本",采用插板法公式可知,有$C_6^2=15$种分法。此题答案为B。

例题4:一张节目表上原有3个节目,如果保持这3个节目的相对顺序不变,再添进去2个新节目,有多少种安排方法?

A.20　　B.12　　C.6　　D.4

【解析】此题意思为"安排5个节目,其中三个节目相对顺序确定,有多少种方法?"

方法一,归一法。安排5种节目有$A_5^5=120$种方法,三个节目的全排列数为$A_3^3=6$种。根据归一法可知,一共有120÷6=20种安排方法。

方法二,插空法。节目表上原有的3个节目形成4个空(包含两端),将一个新节目插入这4个空中,有$C_4^1=4$种方法,现在这4个节目形成5个空(包含两端),将剩余的一个节目插入这5个空中,有$C_5^1=5$种方法,所以一共有4×5=20种方法。此题答案为A。

技巧十三 其他方法

类型	释义	适用范围
归纳法	归纳法是指从已知条件入手，从最简单的情况开始试探，一步步归纳出解决此类问题的方法。	归纳法适用于解决分析过程复杂的问题。
逆推法	逆推法是指由问题的结果出发，一步一步逆向推理，逐步推出原来的已知条件，从而使问题得到解决的方法。	逆推法适用于从正面直接考虑比较复杂的题目，在操作还原问题中应用较多。
降维法	用低维的概念去类比高维的概念，将高维的图形转化为低维的图形的方法。	降维法主要应用于立体图形的几何问题，利用这个方法，把立体图形转化为平面图形，降低题目难度。

例题 1：在数列 2,3,5,8,12,17,23,…中，第 2012 个数被 5 除所得余数是（　）。

A.1　　B.3　　C.2　　D.4

【解析】该数列前几项被 5 除的余数为 2、3、0、3、2、2、3、0……，归纳可知该数列各项被 5 除的余数呈 2、3、0、3、2 循环。2012÷5=402……2，因此第 2012 个数被 5 除余 3，此题答案为 B。

例题 2：一袋水果，奶奶拿了全部的一半又 1 个，妈妈拿了剩下的一半又 1 个，奶奶和妈妈拿过后，小明拿了余下的一半又 1 个，结果这袋苹果还剩 3 个留给爸爸，这袋苹果一共有多少个？

A.32　　B.34　　C.36　　D.38

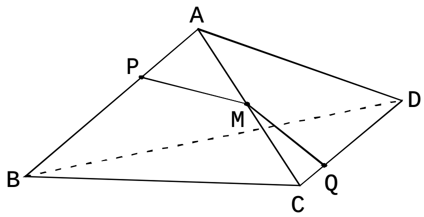
【解析】操作还原问题，直接计算，比较繁琐，从最后的状态一步一步往前推，就容易得多。最后：还剩下 3 个；

小明拿之前：(3+1)×2=8 个；

妈妈拿之前：(8+1)×2=18 个；

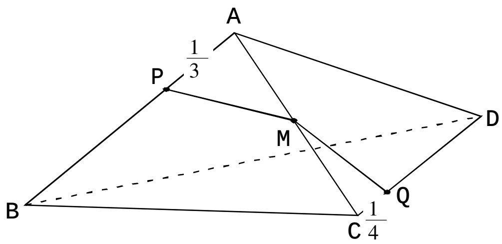
奶奶拿之前，即最初的状态：(18+1)×2=38 个。此题答案为 D。

例题 3:如图,正四面体 ABCD,P、Q 分别是棱 AB、CD 的三等分点和四等分点(AB=3AP=4CQ),棱 AC 上有一点 M,要使 M 到 P、Q 距离之和最小,则 MC:MA=(　)。



A.1:2　　B.4:5　　C.3:4　　D.5:6

【解析】 如图展开,PQ 为最短距离。△APM 与△MCQ 相似,MC:MA=CQ:AP=3:4,此题答案为 C。



附录:基本公式

下面是对数学运算部分涉及的基本公式的整理总结,方便广大考生在今后的学习中查询参阅。数学常用公式是解决数学运算问题的基础,也是广大考生必须掌握的。

希望广大考生在学习过程中对公式不要死记硬背,采用记忆理解和应用相结合的方法。在理解公式涵义的基础上,进行公式的应用;在公式的应用中,加强对公式涵义的理解,真正理解和掌握公式,达到学以致用、熟能生巧的效果。

一、基本运算律

加法交换律　$a+b=b+a$

加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律 $a\times b=b\times a$

乘法结合律 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

乘法分配律 $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

幂次交换律 $a^m\times a^n=a^n\times a^m=a^{m+n}$

幂次结合律 $(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}$

幂次分配律 $(a\times b)^m=a^m\times b^m$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$$

二、运算公式

完全平方和(差):$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

平方差:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

完全立方和(差):$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

立方和:$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

立方差:$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

阶乘:$n!=1\times 2\times\cdots\times n$

三、数列求和

1.等差数列

通项公式:$a_n=a_1+(n-1)d$

递推公式:$a_n=a_m+(n-m)d$

求和公式:$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d$

对称公式:$a_n+a_m=a_k+a_l(n+m=k+l)$

中项求和公式:(1)当 n 为奇数时,等差中项为 $a_{\frac{n+1}{2}}$,且 $a_{\frac{n+1}{2}}=\dfrac{S_n}{n}$ 即 $S_n=na_{\frac{n+1}{2}}$;(2)当 n 为偶数时,等差中项为 $a_{\frac{n}{2}}$ 和 $a_{\frac{n}{2}+1}$,且 $a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}=\dfrac{2S_n}{n}$ 即 $S_n=\dfrac{n}{2}(a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1})$

2.等比数列

通项公式:$a_n=a_1q^{n-1}$

递推公式：$a_n=a_mq^{n-m}$

求和公式：当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$；当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$（常数列）

对称公式：$a_n\times a_m=a_k\times a_l(n+m=k+l)$

3.平方数列求和公式

$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

4.立方数列求和公式

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$

5.裂项公式：$\frac{d}{n(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}$

$\frac{1}{n(n+d)}=\frac{1}{d}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d})$

特例：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

四、排列组合公式

排列数：$A_n^m=n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)$

组合数：$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\times2\times\cdots\cdots\times m}$

$C_n^{n-m}=C_n^m$，比如：$C_n^0=C_n^n=1$

$C_n^0+C_n^1+\cdots\cdots+C_n^n=2^n$

五、平面图形的周长、面积公式

三角形面积：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$

长方形面积：$S=ab$（a,b 为长方形的长和宽）

正方形面积：$S=a^2$

梯形面积：$S=\frac{1}{2}(a+b)h$

圆的周长：$C=2\pi r=\pi d$　圆的面积：$S=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$（$d$ 为圆的直径）

六、立体图形的表面积、体积公式

长方体　表面积：$S=2(ab+bc+ac)$　　体积：$V=abc$

正方体　表面积：$S=6a^2$　　体积：$V=a^3$

球　体　表面积：$S=4\pi r^2$　　体积：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

圆柱体　表面积：$S=2\pi r^2+2\pi rh$　　体积：$V=Sh=\pi r^2h$（S 为圆柱底面积）

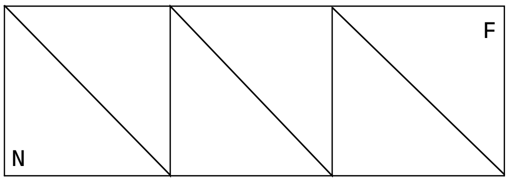
圆锥体　体积：$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h$（$S$ 为圆锥底面积）

实战演练

1.$3015^{2011}+2013^{2011}$的末位数字是(　)。

A.8　　B.6　　C.4　　D.2

2.一个人要沿下图中的线段从N走到F,不允许走回头路,共有多少种不同的路线?



A.15　　B.18　　C.21　　D.28

3.某人上午8点要去上班,可是发现家里的闹钟停在了6点10分,他上足发条但忘了对表就急急忙忙地上班去了,到公司一看还提前了10分钟。中午12点下班后,回到家一看,闹钟才11点整,假定此人上班、下班在路上用的时间相同,那么他家的闹钟停了多少分钟?

A.100　　B.90　　C.80　　D.70

4.某高校2006年度毕业学生7650名,比上年度增长2%,其中本科生毕业数量比上年度减少2%,而研究生毕业数量比上年度增加10%,那么,这所高校今年毕业的本科生有(　)。

A.3920人　　B.4410人　　C.4900人　　D.5490人

5. 某单位共有A、B、C三个部门,三部门人员平均年龄分别为38岁、24岁、42岁。A和B两部门人员平均年龄为30岁,B和C两部门人员平均年龄为34岁。该单位全体人员的平均年龄为多少岁?

A.34　　B.35　　C.36　　D.37

6.某月刊杂志,定价2.5元,劳资处一些人订全年,其余人订半年,共需510元;如果订全年的改订半年,订半年的改订全年,共需300元。问劳资处共有多少人?

A.20　　B.19　　C.18　　D.17

7.6个人站成一排,要求甲、乙必须相邻,那么有多少种不同的排法?

A.280　　B.120　　C.240　　D.360

8.现有一种预防禽流感药物配置成的甲、乙两种不同浓度的消毒溶液。若

从甲中取 2100 克,乙中取 700 克混合而成的消毒溶液的浓度为 3%;若从甲中取 900 克,乙中取 2700 克,则混合而成的消毒溶液的浓度为 5%。则甲、乙两种消毒溶液的浓度分别为( )。

A. 3%,6% B. 3%,4% C. 2%,6% D. 4%,6%

9.将一个表面积为 36 平方米的正方体等分成两个长方体,再将这两个长方体拼成一个大长方体,则大长方体的表面积是( )。

A.24 平方米 B.30 平方米 C.36 平方米 D.42 平方米

10.某公司去年有员工 830 人,今年男员工人数比去年减少 6%,女员工人数比去年增加 5%,员工总数比去年增加 3 人。问今年男员工有多少人?

A.329 B.350 C.371 D.504

11.A、B、C、D、E 五位同学进行象棋单循环比赛,已知 A、B、C、D 已经赛过的盘数依次为 4、3、2、1 盘,此时,E 赛了( )盘。

A.2 B.3 C.4 D.5

12.有 20 位运动员参加长跑,他们的参赛号码分别是 1、2、3、…、20,至少要从中选出多少个参赛号码,才能保证至少有两个号码的差是 13 的倍数?

A.12 B.15 C.14 D.13

13.两棵柳树相隔 165 米,中间原本没有任何树,现在这两棵树中间等距种植 32 棵桃树,第 1 棵桃树到第 20 棵桃树间的距离是( )。

A.90 米 B.95 米 C.100 米 D.前面答案都不对

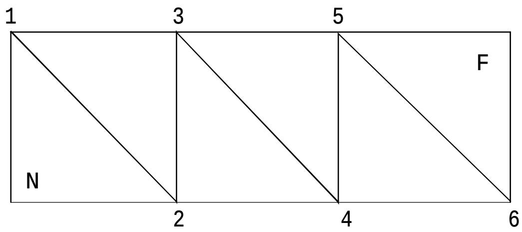
14.某班同学要订 A、B、C、D 四种学习报,每人至少订一种,最多订四种,那么每个同学有多少种不同的订报方式?

A.7 种 B.12 种 C.15 种 D.21 种

参考答案及解析

1.【答案】D。解析:3015^{2011} 的尾数与 5^{2011} 的尾数相同,5 的任何次方的尾数都是 5, 因此 3015^{2011} 的尾数是 5;2013^{2011} 的尾数与 3^{2011} 的尾数相同,3 的 n 次方尾数以 4 为周期,2011÷4=502……3,故 3^{2011} 的尾数与 $3^3=27$ 的尾数相同,为 7。故原式的末位数字应为 5+7=12 的尾数,即为 2。

2.【答案】C。解析:题目中不走回头路的意思是,只能向上、向右或者向右下方向走。因此,如下图所示:



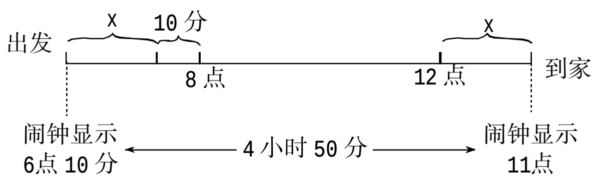
从 N 点到 1 点有 1 种走法,从 N 点到 2 点有 2 种走法;

从 N 点到 3 点,可以先到 1 点再到 3 点,或者先到 2 点再到 3 点,有 1+2=3 种走法;

从 N 点到 4 点,可以先到 2 点再到 4 点,或者先到 3 点再到 4 点,有 2+3=5 种走法;

由上可以看出,从 N 点到不同编号的路线数恰好构成和数列。因此,从 N 点到 5 点、6 点和 F 点的路线数分别为 3+5=8,5+8=13,8+13=21,即共有 21 种不同的路线。

3.【答案】C。解析:这个忘了上发条的时钟问题实际对应的是一个时间轴,我们选择此模型分析题干情境。



如图,这个人 8 点上班,12 点下班,把相应的信息对应在时间轴上。到公司时提前了 10 分钟说明实际抵达时间为 7 点 50 分。上下班时间相同,设为x。把这人出发与回到家的时间也分别写在对应的时间轴上。

闹钟从 6 点 10 分走到 11 点,共走了 4 小时 50 分,也就相当于 2x+10 分钟+4 小时,即 4 小时 50 分=2x+10 分钟+4 小时,可知 x=20 分钟。

从而可知这个人从家出发的时间为 7 点 30 分, 而此时闹钟停在了 6 点 10 分,所以闹钟停了 60+20=80 分钟。

4.【答案】C。解析:本科毕业生数量比上年度减少 2%,即为上年度的 98%= $\frac{49}{50}$,因此今年本科毕业生数量应该能被 49 整除。同理,研究生毕业数量为上年度的 110%= $\frac{11}{10}$,今年研究生毕业生数量能被 11 整除。只有 C 项符合条件。

5.【答案】B。解析:先求出 A、B、C 三个部门的人数之间的比例关系,再按照加权平均数的求法,求出全体人员的平均年龄。

根据题意,可利用十字交叉法求出 A、B 两部门人数之比和 B、C 两部门人数之比。

A 部门平均年龄　38　　(6)　A 部门人数

30

B 部门平均年龄　24　　(8)　B 部门人数

由上可得,A、B 两部门人数比为 6:8=3:4,

B 部门平均年龄　24　　(8)　B 部门人数

34

C 部门平均年龄　42　　(10)　C 部门人数

B、C 两部门人数比为 8:10=4:5,则 A、B、C 三部门人数之比为 3:4:5,可假设 A、B、C 三部门的人数分别为 3、4、5,该单位全体人员的平均年龄为(38×3+24×4+42×5)÷(3+4+5)=35 岁。

6.【答案】C。解析:此题的一般解法是将原来订全年和半年的人数设为未知数,列出一个二元一次方程组,解出方程得到答案。这样做费时费力,容易出错。

如果考虑到将问题整体考虑,将可以很方便得出答案。

我们可以这么设计两次杂志的订阅,第一次一部分人订全年,其余人订半年,共需 510 元;第二次,让订全年的再订半年,订半年的再订全年,又需 300 元。

把上面两次订阅整体起来考虑,所有人都订了一年半的报纸,共花费 510+300=810 元。又因为每个人订一年半的报纸需要 2.5×12×1.5=45 元,因此劳资处共有 810÷45=18 人。

7.【答案】C。解析:要求“甲、乙必须相邻”,则可将甲、乙“捆绑”在一起,看作一个人参与排列,共有 $A_5^5=120$ 种。再考虑甲、乙两人本身的顺序(即甲在乙的左边还是右边),有 $A_2^2=2$ 种。所以共有 120×2=240 种。

8.【答案】C。解析:甲、乙混合能配成 3%、5%的溶液,说明其中一个的浓度小于 3%,另外一个则大于 5%,结合选项直接选 C。

9.【答案】D。解析:根据体积一定,越趋近于球体,表面积越小可知,重新拼的长方体表面积必然大于原来的正方体。结合选项直接选大于 36 平方米的 D 项。

10.【答案】A。解析:今年男员工人数比去年减少 6%,即男员工人数是去年的 94%,相当于 $\frac{94}{100}=\frac{47}{50}$。因此今年男员工人数是 47 的倍数,选项中只有 A 符合。

11.【答案】A。解析:这道题关系比较复杂,涉及几位同学的比赛盘数,为了使得几个人之间的关系直观明了,尝试画图来解决。用连线表示两人已赛过一盘。

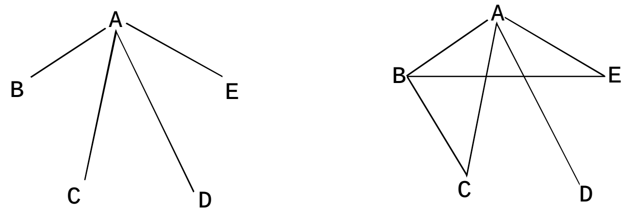


图1　图2

A 应画四条线。(如图 1)

D 只赛了一盘,只能连一条线段,已经有 AD,所以不能再连了。

B 应画 3 条,但不能连 D,又有一条 AB,所以 B 只画 BC、BE。(如图 2)

C 赛了 2 盘,所以从 C 出发应有两条,已有 AC、BC,不需要再画了,所以 E 只赛了 2 盘。

12.【答案】C。解析:根据“两个号码的差是 13 的倍数”将数分组:{1、14}、{2、15}、{3、16}、{4、17}、{5、18}、{6、19}、{7、20},共 7 组。还剩下号码 8、9、10、11、12、13,共 6 个,各自成一组。即一共构造出 6+7 个抽屉。

考虑最差的情况,先从 13 个抽屉中各选出 1 个号码,这样再从前 7 个抽屉中任意取出 1 个号码,就能保证至少有两个号码的差是 13 的倍数,共取出了 13+1=14 个号码。

13.【答案】B。解析:“现在这两棵树中间等距种植 32 棵桃树”,说明是“两端都不植树”型。

现不知道桃树与桃树之间的距离, 因此需要先求间距。根据棵数=总路长÷间距-1,有间距=总路长÷(棵数+1)=165÷(32+1)=5 米。

那么第 1 棵到第 20 棵间的距离为 5×(20−1)=95 米。

14.【答案】C。解析:每种报纸有订或不订两种选择,共有 2^4=16 种订法,除去一种没订的情况,共有 16-1=15 种订报方式。