2025.9.5 ①

高等数学(上)

习题 2-2

习题 2-3

习题 2-4

习题 2-5

4. $f'(4)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sqrt{4+\Delta x}-4}{\Delta x}$

分子有理化 $\rightarrow$ $=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2\sqrt{4+\Delta x}-4)(2\sqrt{4+\Delta x}+4)}{\Delta x(2\sqrt{4+\Delta x}+4)}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{16+4\Delta x-16}{4\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}$

$=\frac{1}{4}$

3) $(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x}{\Delta x}$

提 $\cos x$ $\rightarrow$ $=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x(\cos\Delta x-1)-\sin x\sin\Delta x}{\Delta x}$

$=\cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}-\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$

$=\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1$

$=-\sin x$

6. 解：(1) $\lim_{x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{x}$

$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}$

$=-f'(a)$

$=-k$

(2) 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)+f(a)-f(a-x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(a)-f(a-x)}{-x}$

$=f'(a)+f'(a)$

$=2f'(a)$

$=2k$

7. 解：$\because f(0)=0,\ f'(0)=1$

$\therefore f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$1=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$

$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2x)}{2x}=1$

故 $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=2$

复习题2

10月28日

书P84

1. 解：(1) $y'=2x+3-\cos x$

(2) $y=x^3+2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-3}$

$\therefore y'=3x^2-x^{-\frac{3}{2}}+3x^{-4}$

(3) $s'=(t^{\frac{1}{2}})'\sin t+(\sin t)'\cdot t^{\frac{1}{2}}+(\ln 2)'$

$=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\sin t+\cos t\cdot t^{\frac{1}{2}}$

(4) $y'=x'\cdot\cos x\cdot\ln x+x(\cos x)'\cdot\ln x+x\cos x(\ln x)'$

$=\cos x\cdot\ln x-x\cdot\sin x\cdot\ln x+\cos x$

$=\cos x\cdot(\ln x+1)-x\cdot\sin x\cdot\ln x$

(5) $y'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x-1)'(x+1)}{(x-1)^2}$

$=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$

$=\frac{-2}{(x-1)^2}$

(6) $y'=\frac{(e^x)'(x^2+1)-(x^2+1)'e^x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{e^x(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

2. 解：(1) $y'=x'\arccos x+(\arccos x)'x$

$=\arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore y'|_{x=\frac{1}{2}}=\arccos\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}$

$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$

(2) $\frac{d\varphi}{d\theta}=\theta'\tan\theta+(\tan\theta)'\cdot\theta+(\sec\theta)'$

$=\frac{\theta}{\cos^2\theta}+\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)'+\tan\theta$

$=\frac{\theta+\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\theta}{\cos^2\theta}$

$\therefore \frac{d\varphi}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\pi+2\sqrt{2}+2}{2}=\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}+1$

(3) 设 $f(u)=\ln u$

$u=v^{\frac{1}{2}}$

$v=\frac{t}{t+1}$

$t=e^a$

$a=3x$

则 $f'(x)=f'(u)\cdot u'\cdot v'\cdot t'\cdot a'$

$f'(x)=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\cdot e^a\cdot 3$

故 $f'(0)=\frac{3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$

5. 解：(1) $y'=f'(\csc x)\cdot(\csc x)'$

$=-f'(\csc x)\cdot\csc x\cot x$

(2) $y'=f'(\tan x)\cdot(\tan x)'+[\tan(f(x))]'\cdot f'(x)$

$=f'(\tan x)\sec^2 x+\sec^2 f(x)\cdot f'(x)$

11月3日

书P91

1. 解：(1) 两边同时求导，

$4x^3-4y^3\cdot y'=-4(y+y'x)$

$4x^3-4y^3\cdot y'=-4y-4xy'$

$y'(4x-4y^3)=-4y-4x^3$

故 $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{-4y-4x^3}{4x-4y^3}=\frac{-y-x^3}{x-y^3}$

(2) 两边同时求导，

$y'\sin x+(\cos x)y-[\sin(x-y)](1-y')=0$

$\sin x\,y'+y\cos x-\sin(x-y)+[\sin(x-y)]y'=0$

$y'[\sin x+\sin(x-y)]=\sin(x-y)-y\cos x$

故 $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{\sin(x-y)-y\cos x}{\sin x+\sin(x-y)}$

(3) 两边同时求导，

$e^x-e^y\cdot y'-(\cos xy)(y+y'x)=0$

$e^x-e^y y'-y\cos xy-(x\cos xy)y'=0$

$y'(e^y+x\cos xy)=e^x-y\cos xy$

故 $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{e^x-y\cos xy}{e^y+x\cos xy}$

3. 解：∵ $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$

∴ $y'=2C_1e^{2x}-3C_2e^{-3x}$

∴ $y''=4C_1e^{2x}+9C_2e^{-3x}$

∴ $6y=6C_1e^{2x}+6C_2e^{-3x}$

又 $y''+y'=6C_1e^{2x}+6C_2e^{-3x}$

∴ $y''+y'=6y$

∴ $y''+y'-6y=0$.

4. 解：

11月17日

书P82

1. 解：(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

(2) 原式 $=\lim\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{2(x-\pi)}=\lim\frac{-\tan x}{\pi x}$ [illegible] $=0$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

(4) 原式 [illegible]

(5) 原式 $=\lim\frac{\csc^2 x}{\csc^2 x}$ [illegible] $=3$

(6) 原式 [illegible]

(7) 原式 [illegible]

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sec x}+\frac{x+x\cdot\sec^2 x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sec x}+x+\frac{2x}{\tan x}$ [illegible]

$=1$

(8) 原式 $=\lim\frac{-2x\cdot e^{x^2}+\ldots}{\ldots}$ [illegible] $=0$

(9) 原式 [illegible] $=\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$ [illegible] $=\frac{2}{2}$

(10) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim\frac{3x^2}{e^x}=\lim\frac{6x}{e^x}=\lim\frac{6}{e^x}=0$

(11) 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(x-\frac{\pi}{2})$ [illegible]

(12) 原式 [illegible] $=\lim\frac{-\sin x}{\ldots}$ [illegible] $=-\frac{1}{2}$

(13) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$ [illegible] $=\frac{1}{2}$

(14) 原式 [illegible]

(15) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)}$

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$ [illegible]

故原式 $=e^{-2}$

(16) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x-1}}=\lim e^{\frac{1}{x-1}\ln(\ln x)}=e^0=1$

(17) 原式 [illegible]

(18) 原式 $=\lim\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

3. 解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-2x}{x^2}=\lim\frac{f'(x)-2}{2x}=\lim\frac{f''(x)}{2}=3$

11月21日

书P97

1. 解：∵ $y=e^x-x$

∴ $y'=e^x-1$

令 $y'=0$，得 $x=0$

[illegible]

2. 解：∵ $y=\cos x+x\sin x$

∴ $y'=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$

令 $y'=0$ [illegible]

[illegible]

4. 解：(1) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

∴ $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=6(x-1)(x-2)$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$ ↗，$[1,2]$ ↘

(2) ∵ $f(x)=2x-\ln x$ [illegible]

(3) ∵ $f(x)=(2-x)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}$ [illegible]

(4) ∵ $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$

∴ $f'(x)=\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 -2

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$ ↗，$[-2,0]$ ↘

[illegible]

(1) ∵ $y=3x^2-x^3$ [illegible]

∵ $y'=36x^2-24x=6x^2(6x-4)$ [illegible]

(2) ∵ $y=2-(x-1)^{\frac{1}{3}}$ [illegible]

(4) ∵ $y=4(1+x^2)^{-1}$ [illegible]

[illegible]

1. 解：(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$

∴ $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$

令 $f'(x)=0$，得：$x=3$ 或 -1

∴ $f''(x)=6x-6$ [illegible]

∵ $f''(3)>0$，$f''(-1)<0$

∴ 极大值 $f(-1)=8$

极小值 $f(3)=-24$

(2) ∵ $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

∴ $f'(x)=\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm1$

[illegible]

∴ 极大值 $f(1)=\frac{1}{2}$

极小值 $f(-1)=-\frac{1}{2}$

(3) ∵ $f(x)=2x^2-\ln x$ [illegible]

∴ $f'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}$ $(x\neq0)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{1}{2}$

[illegible]

∴ 极小值 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\ln2$

(4) ∵ $f(x)=(2-x)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}$ [illegible]

[illegible]

(5) ∵ $f(x)=(x^2-1)^3$ [illegible]

∴ $f'(x)=3(x^2-1)^2\cdot2x$ [illegible]

[illegible]

$f''(x)=6(x^2-1)^2+6x\cdot2(x^2-1)\cdot2x$ [illegible]

$=6(5x^4-6x^2+1)$

∵ $f''(0)>0$，$f''(\pm1)=0$

∴ 极小值 $f(0)=-1$ [illegible]

2. 解：

∵ $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$

$f'(\frac{\pi}{3})=\frac{a}{2}$ [illegible] $=0$

∴ $a=2$

∴ $f(x)=2\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$

∴ $f'(x)=2\cos x+\cos 3x$

$f(x)=2\sin x-3\sin x$ [illegible]

$f'(\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}<0$

故 $f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$ 为极大值

3. (1) ∵ $f(x)=4x^2-4x$ [illegible]

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 [illegible]

$f(-1)=0$ min

$f(0)=0$

$f(\frac{1}{2})$ [illegible] max

$f(3)=3$

(2) $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ [illegible]

令 $f'(x)=0$，$x=0$

$f(0)=1$ max

$f(-3)=-1$ min

(3) $f(x)=\sin x+\cos x$ [illegible]

[illegible]

$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$ max，$f(\frac{\pi}{2})=-1$ min，$f(0)=1$

4. 解

(1) ∵ $y=\frac{1+\cos x}{x}$ $(x\neq0)$

~~∴ $y'=\frac{-x\sin x-1-\cos x}{x^2}$~~

~~令 $y'=0$，得 x~~

∴ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\cos x}{x}=\infty$

故垂直渐近线为 $x=0$

又 ∵ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{x}=0$

故水平渐近线为 $y=0$

(2) ∵ $y=e^{\frac{1}{x+1}}+1$

$\lim\limits_{x\to-1}e^{\frac{1}{x+1}}+1=\infty$ 故垂直渐近线为 $x=-1$

∴ $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x+1}}+1=\frac{e+1}{e}=\frac{1}{e}+1$

故垂直渐近线为 $x=\frac{1}{e}+1$

∵ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x+1}}+1=2$

故水平渐近线为 $y=2$.

水平渐近线：令 $x\to\infty$

垂直渐近线：令 $f(x)\to\infty$ (找分母为0或式子不存在)

11月25日 [illegible]

1. 解：(1) 当 $C(100)=21250$ (元)

平均 $C(100)\div100=212.5$ (元)

(2) ∵ $\bar{C}(Q)=\frac{1}{40}Q+200+\frac{4000}{Q}$

$=\frac{Q^2+8000Q+160000}{40Q}$

∴ $\bar{C}'(Q)=\frac{1}{40}-\frac{4000}{Q^2}$

∴ 当 $\bar{C}'(Q)=0$ 时，$Q=400$

又 ∵ $\bar{C}''(Q)=\frac{8000}{Q^3}$

∴ $\bar{C}''(400)>0$，极小值

∴ 最低平均成本 $\bar{C}(400)=220$ (元)，

日产量为 400 件

(3) 设总利润为 $W(Q)$

$W(Q)=400Q-C(Q)$

$=-\frac{1}{40}Q^2+200Q-4000$

$=-\frac{1}{40}(Q-4000)^2+396000$

故日产量应为 4000 件，总利润为 396000 元，

平均成本 $\bar{C}(4000)=$ [illegible] (元).

2. 解：设利润为 $W(Q)$

$W(Q)=6Q-C(Q)$

$=$ [illegible] $-1000+0.003Q^2-(0.01Q)^3$

$W'(Q)=0.006Q-0.000003Q^2$

令 $W'(Q)=0$，得 $Q=2000$

故销量为 2000 件

3. 解：∵ $Q=300$ ∴ $P=7$ (元)

故价格为 7 元

平均收入 $=7\times300=2100$ (元)

平均收入 $=2100\div300=7$ (元)

~~$Q(P)=\ldots$~~

边际收入：∵ $Q=1000-100P$

∴ $P=\frac{-Q+1000}{100}=-\frac{1}{100}Q+10$

收入 $R=Q\cdot(-\frac{1}{100}Q+10)$

$=-\frac{Q^2}{100}+10Q$

∴ $R'(Q)=-\frac{1}{50}Q+10$

∴ 边际收入 $R'(300)=4$ (元)

~~故边际收入 $R'(300)=400$ (元)~~

12月2日

书P145

1. 解：(1) 原式 $=\int(x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

(2) 原式 $=2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

(3) 原式 $=\frac{1}{\ln2+1}\cdot(2^x\cdot e^x)+C$

(4) 原式 $=\int(2-5\cdot(\frac{2}{3})^x)dx=2x-\frac{5}{\ln\frac{2}{3}}(\frac{2}{3})^x+C$

(5) 原式 $=-x^{-1}-\frac{1}{3}x^{-3}+C$ $\int(\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)})dx=\int(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx$

(6) 原式 $=\int\frac{x^4+x^2-x^2}{1+x^2}dx=\int(x^2-\frac{x^2}{1+x^2})dx$ $=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$

$=\int x^2dx-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$

(7) 原式 $=\int(\sec^2x-\sec x\tan x)dx=\tan x-\sec x+C$

(8) 原式 $=\int\frac{1}{1+2\cos^2x-1}dx=\int\frac{1}{2}(\cos x)^{-2}dx=$ ~~$-2\cos x$~~ [illegible] $+C$

(9) 原式 $=\int(\frac{1}{\sin^2x}-2)dx=-\cot x-2x+C$

(10) 原式 $=\int(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$

(11) 原式 $=\int(\frac{2}{\sin^2x}-(\cos x\cdot\sin x)^{-2})dx$

[illegible] $=\tan x-\cot x+C$

(12) 原式 ~~$=\int(\tan^2x+\cot^2x+2\tan x\cot x)dx$~~

$=\int(\tan^2x+\cot^2x+2)dx$ [illegible]

$=\int(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^2dx=\int4(\sin2x)^{-2}dx=\frac{-2}{\sin2x}+C$

$=\int(\sec^2x+\csc^2x)dx=\tan x-\cot x+C$

2. 解：(1) ∵ $f'(e^x)=1+e^{2x}$ → $f'(x)=1+x^2$

~~又 $\int(1+e^{2x})dx=x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$~~ 又 $\int(1+e^{2x})de^x=x+x^3$

∴ $f(x)=x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$ ∴ $f(x)=\int f'(x)dx=\int(1+x^2)dx$ $=x+\frac{1}{3}x^3+C$

∵ $f(0)=1$

∴ $C=\frac{2}{3}$

∴ $f(x)=x+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{2}{3}$

(2) ∵ $\int f'(x)dx=f(x)$

又 ∵ $\sin x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数 ∴ $(\sin x)'=f(x)$

∴ $f(x)=\cos x+C$

(3) ∵ $f'(x)=\cos x$

∴ $f(x)=\int f'(x)dx=-\sin x+C_1$

其中一个原函数为 $\int f(x)$ [illegible] $=\cos x+C_1x+C_2$

(4) ∵ $Q(P)=\int Q'(P)dP$

又 ∵ $Q'(P)=-1000(\frac{1}{3})^P\ln3$

∴ $Q(P)=1000(\frac{1}{3})^P+C$

∵ $Q(0)=1000$

∴ $C=0$

∴ $Q(P)=1000\cdot(\frac{1}{3})^P$

12月8日

5-3 书P114

1. 解 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{12}$ (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{3}$ (6) $-\frac{\pi}{2}$

(7) [illegible] (8) $\frac{1}{3}$ (9) [illegible] (10) $\frac{1}{2}-1$ [illegible]

2. 解 (1) 原式 $=\frac{1}{3\ln a}\cdot a^{3x}+C$

(2) 原式 $=-\frac{1}{15}(3-2x)^{\frac{5}{2}}+C$

(3) 原式 $=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$

(4) 原式 $=\int e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})^2dx=-\int e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}+C$

(5) 原式 $=2\int\sin\sqrt{t}\,d\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C$

(6) 原式 $=\int\frac{1}{\ln x}d\ln|x|=\ln|\ln|x||+C$

设 $u=1+e^x$，$du=e^xdx$

(7) 原式 $=\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+C=\ln|1+e^x|+C$

(8) 原式 $=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int1dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=x-\ln(1+e^x)+C$

(9) 原式 $=\int\frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+C$

(10) 原式 $=\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot d\sqrt{1+x^2}=-\ln|\cos\sqrt{1+x^2}|+C$

(11) 原式 $=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{1}{(e^x)^2+1}de^x=\arctan(e^x)+C$

(12) 原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}dx^2=-\frac{1}{6}\int(2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}d(-3x^2+2)$ [illegible]

(13) 原式 [illegible]

$=\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C$

(14) 原式 $=\int(\cos^2x)^2dx=\int(\frac{1+\cos2x}{2})^2dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos2x+\cos^22x)dx$

$=\frac{1}{4}\int1dx+\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{4}\int\cos^22x\,dx$ [illegible]

$=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{8}\int\cos4x\,dx+\frac{x}{8}$

$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{32}\sin4x+C$

(15) 原式 $=\int\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

[illegible]

$=\frac{1}{2}\arcsin2x+\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$

(16) 原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{4+x^2}dx^2$

$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+4}{4+x^2}dx^2-\frac{1}{2}\int\frac{4}{4+x^2}dx^2$

$=\frac{1}{2}x^2-2\int\frac{1}{4+x^2}d(x^2+4)$

$=\frac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)+C$

(17) 原式 $=\int\frac{1}{(x-3)(x+2)}dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-3}d(x-3)-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x+2}d(x+2)$

$=\frac{1}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\ln|x+2|+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$

(18) 原式 $=\int\frac{1}{(x+5)(x-1)}dx=-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+5}d(x+5)-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x-1}d(x-1)$

$=-\frac{1}{6}\ln(x+5)(x-1)+C$

(19) 原式 $=\frac{1}{2}\int(\cos(2\omega x+2\varphi)+1)dx=\frac{1}{2}\int\cos(2\omega x+\varphi)dx+\frac{x}{2}$

$=\frac{1}{4\omega}\int\cos(2\omega x+2\varphi)d(2\omega x+2\varphi)+\frac{x}{2}$

$=\frac{1}{4\omega}\sin(2\omega x+2\varphi)+\frac{x}{2}+C$

(20) 原式 $=-\int\cos^2(\omega x+\varphi)d\cos(\omega x+\varphi)$

$=-\frac{1}{4}\sin2x-\frac{x}{2}+C$

(21) 原式 $=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}$

$=2\int\arctan\sqrt{x}\,d(\arctan\sqrt{x})$

$=(\arctan\sqrt{x})^2+C$

(22) 原式 $=\int\frac{1}{(\arcsin x)^2}d(\arcsin x)=-\frac{1}{\arcsin x}+C$

(23) 原式 $=\int\frac{\sin^4x}{\cos^4x}dx=\int\frac{\sin^4x}{\cos^2x}d\tan x$

$=\int\frac{\tan^4x}{\frac{1}{\cos^2x}}d\tan x=\int\frac{\tan^4x}{\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x}}d\tan x$

$=\int\frac{\tan^4x}{\tan^2x+1}d\tan x$

$=\int\frac{\tan^4x-1+1}{\tan^2x+1}d\tan x=\int(\tan^2x-1)d\tan x+\int\frac{1}{\tan^2x+1}d\tan x$

$=\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+\arctan(\tan x)+C$

$=\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x+C$

(24) 原式 $=\int\tan^2x\,d\sec x$

$=\int(\sec^2x-1)d\sec x$

$=\frac{1}{3}\sec^3x-\sec x+C$

3. 解：(1) 设 $u=\sqrt{2x-3}$，故 $u^2=2x-3$，两边同时求导得 $2udu=2dx$

$udu=dx$，即原式 $=\int\frac{u}{u+1}du=\int(du-\int\frac{1}{u+1}du)$

$=\sqrt{2x-3}-\ln(\sqrt{2x-3}+1)+C$

(2) 原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx^2$

令 $x=\sin\theta$，$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $dx=\cos\theta d\theta$

原式 $=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\cdot\cos\theta}d\theta=\int\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta=\int\csc^2\theta d\theta=-\cot\theta+C$

∵ $x=\sin\theta$，$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

∴ 原式 $=-\cot\theta+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

(3) 原式 令 $x=a\sin\theta$，则 $dx=a\cos\theta d\theta$，$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$

原式 $=\int\frac{a^2\sin^2\theta}{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta d\theta=\int a^2\sin^2\theta d\theta=a^2\int\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$

$=\frac{a^2}{2}\int d\theta-\frac{a^2}{2}\int\cos2\theta d\theta=\frac{a^2}{2}\theta-\frac{a^2}{4}\sin2\theta+C$

∵ $x=a\sin\theta$，∴ $\theta=\arcsin\frac{x}{a}$

∴ 原式 $=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{a^2}{4}\sin2\arcsin\frac{x}{a}+C$

(4) 令 $x=\tan\theta$，故 $dx=\sec^2\theta d\theta$

故原式 $=\int\frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}d\theta=\int\frac{1}{\sec\theta}d\theta=\int\cos\theta d\theta$

$=\sin\theta+C$

$=\frac{\tan\theta}{\sec\theta}+C=\frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

(3) 令 $x=3\sec\theta$，故 $dx=3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

原式 $=\int\frac{3\tan\theta}{3\sec\theta}\times3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$=\int3\tan^2\theta\,d\theta$

$=3\int\sec^2\theta\,d\theta-3\int1\,d\theta$

$=3\tan\theta-3\theta+C$

$=3\times\sqrt{\sec^2\theta-1}-3\theta+C$

$\sec\theta=\frac{x}{3}$，$\theta=\operatorname{arcsec}\frac{x}{3}$

$=3\times\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}-3\theta+C$

$=\sqrt{x^2-9}-3\arctan\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}+C$

(6) 令 $x=\sin\theta$，故 $dx=\cos\theta\,d\theta$

原式 $=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}d\theta$

$=\int\csc\theta\,d\theta$

$=\ln|\csc\theta-\cot\theta|+C$

$\because x=\sin\theta$

$\therefore \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\csc\theta=\frac{1}{x}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\therefore$ 原式 $=\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\right|+C$，原式 $=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$

(7) 令 $x=\sin\theta$，故 $dx=\cos\theta\,d\theta$

原式 $=\int\frac{\cos\theta+1-1}{1+\cos\theta}d\theta$

$=\int1\,d\theta-\int\frac{1}{1+\cos\theta}d\theta$

$=\int1\,d\theta-\int\frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta$

$=\int1\,d\theta-\int\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

$=\int1\,d\theta-\int\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta+\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

$=\int1\,d\theta-\int\csc^2\theta\,d\theta+\int\frac{1}{\sin^2\theta}d\sin\theta$

$=\theta+\cot\theta-\frac{1}{\sin\theta}+C$

$\because x=\sin\theta$

$\therefore\theta=\arcsin x$

$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\therefore$ 原式 $=\arcsin x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{1}{x}+C$

(8) 令 $x=\tan\theta$，故 $dx=\sec^2\theta\,d\theta$，$\because\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$

原式 $=\int\frac{\sec^2\theta}{\tan^4\theta\sec\theta}d\theta$

$=\int\frac{\cos^3\theta}{\sin^4\theta}d\theta$

$=\int\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^4\theta}d\sin\theta$

$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin^3\theta}+\frac{1}{\sin\theta}+C$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore$ 原式 $=-\frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

(9) 令 $x=2\sin\theta$，$dx=2\cos\theta\,d\theta$

原式 $=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}{4\sin^2\theta}\times2\cos\theta\,d\theta$

$=\int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

~~$=\int\cot^2\theta\,d\theta$~~

$=\int\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

$=\int\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta-\int1\,d\theta$

$=-\cot\theta-\theta+C$

$\because x=2\sin\theta$

$\therefore\sin\theta=\frac{x}{2}$

$\therefore\theta=\arcsin\frac{x}{2}$

$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}}{\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

$\therefore$ 原式 $=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{2}+C$

(10) 令 $u=\sqrt{e^x-1}$，则 $e^x=u^2+1$，故 $dx=\frac{2u}{u^2+1}du$

故原式 $=\int\frac{2u^2}{u^2+1}du$

$=\int\frac{2u^2+2-2}{u^2+1}du$

$=2\int1\,du-2\int\frac{1}{u^2+1}du$

$=2u-2\arctan u+C$

$=2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C$

12月9日

1. 解：(1) 原式 $=\int x\,d\sin x=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+C$

(2) 原式 $=\int x\,de^{-x}=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

(3) 原式 $=x\arctan x-\int x\,d(\arctan x)$

$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$

$=x\arctan x-(x+\arctan x)+C$　$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

(4) 原式 $=\int e^{-x}d\sin x$

$=e^{-x}\sin x-\int\sin x\,de^{-x}$

$=e^{-x}\sin x+\int\sin x\cdot e^{-x}dx$

$=e^{-x}\sin x-\int e^{-x}d\cos x$

$=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int\cos x\,de^{-x}$

即 $\int e^{-x}\cos x\,dx=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x+\int\cos x\cdot e^{-x}dx$

故 $\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)+C$

(5) 原式 $=\int e^{-2x}d\cos\frac{x}{2}$

$=-e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+\int\cos\frac{x}{2}de^{-2x}$

$=-e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-2\int\cos\frac{x}{2}e^{-2x}dx$

$=-e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+2\int e^{-2x}d\sin\frac{x}{2}\cdot2$

$=-e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+2e^{-2x}\sin\frac{x}{2}$ [illegible]

$=-e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+2e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+4\int\sin\frac{x}{2}e^{-2x}dx$

即 $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=\frac{2}{17}e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-\frac{8}{17}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+C$

(6) ~~原式 $=\int\tan^2x\,dx^2$~~

~~$=\frac{1}{2}x^2\tan^2x-\int x^2d\tan^2x$~~

(6) 原式 $=\int x(\sec^2x-1)dx$

$=\int x\sec^2x\,dx-\int x\,dx$

$=\int x\,d\tan x-\frac{x^2}{2}$

$=x\tan x-\int\tan x\,dx-\frac{x^2}{2}$

$=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx-\frac{x^2}{2}$

$=x\tan x+\int\frac{1}{\cos x}d\cos x-\frac{x^2}{2}$

$=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$

(7) 原式 $=2\int t\,de^{-2t}$

$=-2te^{-2t}+2\int e^{-2t}dt$

$=-2te^{-2t}-e^{-2t}+C$

(8) 原式 $=x(\arcsin x)^2-\int x\,d(\arcsin x)^2$

$=x(\arcsin x)^2-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}d(\arcsin x)$

$=x(\arcsin x)^2-\int\frac{x}{1-x^2}dx$

$=x(\arcsin x)^2+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x^2}d(x^2)$

$=x(\arcsin x)^2+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$

$2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$

(9) 原式 $=\int\ln x\,d\sin x$

$=\ln x\cdot\sin x-\int\sin x\,d\ln x$

$=\ln x\cdot\sin x-\int\frac{\sin x}{x}dx$

$=\ln x\cdot\sin x-\mathrm{Si}(x)+C$　$\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$

(10) 原式 $=\int x^2\sin2x\,dx$ [illegible]

$=\frac{1}{2}(x^2+\frac{3}{2})\cos2x+\frac{3x}{2}\sin2x+C$

(11) 原式 [illegible]

(12) 原式 $=\int\ln^3x\,dx$ [illegible]

(14) 原式 $=\frac{1}{2}\int x\sin2x\,dx$ [illegible]

(15) 原式 $=\int\tan^3x\sec x\,dx$ [illegible]

$=\frac{1}{3}\sec^3x-\tan x-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$

(16) 原式 $=\int\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)e^x dx$

$=\int\frac{e^x}{1+x}dx-\int\frac{e^x}{(1+x)^2}dx$

$=\frac{e^x}{1+x}+C$

11月16日复习课 [illegible]

1. n 为什么时候… 等价无穷小，同阶无穷小，高阶无穷小

$e^{\sin x^2}-1$ 是 $\ln(2-\cos x)$ 的 同阶 无穷小

解：$\lim_{x\to0}(e^{\sin x^2}-1)=0$，$\lim_{x\to0}\ln(2-\cos x)=0$

$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x^2}-1}{\ln(2-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x}=\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$

等价无穷小的代换

5. 已知 $y=e^{x^2}(\sec x+\tan x)$，求 dy

解：$dy=[2x\cdot e^{x^2}(\sec x+\tan x)+e^{x^2}(\sec x+\tan x)']dx$

$=[2x\cdot e^{x^2}(\sec x+\tan x)+e^{x^2}(\sec x\tan x+\sec^2x)]dx$

$=e^{x^2}[2x(\sec x+\tan x)+\sec x\tan x+\sec^2x]dx$

方法二：

$dy=d[e^{x^2}(\sec x+\tan x)]$

$=(\sec x+\tan x)de^{x^2}+e^{x^2}d(\sec x+\tan x)$

$=e^{x^2}(\sec x+\tan x)\cdot2x\,dx+e^{x^2}(\sec x\tan x\,dx+\sec^2x\,dx)$

$=e^{x^2}[2x(\sec x+\tan x)+\sec x\tan x+\sec^2x]dx$

6. $y=e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线：水平 $\lim_{x\to\infty}f(x)=A$，$y=A$

$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$，$y=1$

铅直 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$x=x_0$

$\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$，$x=0$

若 $y=\frac{x}{x-1}$，则 水平：$y=1$，铅直：$x=1$

7. $y=\begin{cases}kx^2, & x\ge1\\ 2x+3, & x<1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，求 k

解：$\lim_{x\to1^+}kx^2=k$，$y|_{x=1}=2\times1+3=5$，则 $k=5$

① $f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{k(1+\Delta x)^2-k}{\Delta x}=2k$

② $f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{2(1+\Delta x)+3-k}{\Delta x}$ … $\Rightarrow k=5$

8. 曲线 $\begin{cases}x=\ln(1+3t)\\ y=\arctan2t\end{cases}$ 在 $t=0$ 处切线方程、法线方程

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(\arctan2t)'}{[\ln(1+3t)]'}=\frac{\frac{2}{1+(2t)^2}}{\frac{3}{1+3t}}=\frac{2+6t}{3+12t^2}$

当 $t=0$ 时，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{2}{3}$

$x(0)=\ln(1+3\times0)=0$，$y(0)=\arctan(2\times0)=0$；切线：$y-0=\frac{2}{3}(x-0)$，即 $y=\frac{2}{3}x$；法线：$y=-\frac{3}{2}x$

续 12月2日

5-1.

1. 解：(1) $\frac{2}{3}x^3+1$

(2) $-\sin x+2$

(3) $\sqrt{x}+3$

(4) $2\cos x$

2. 解：(1) 由 $\frac{1}{x^3}$ 得 $x\ne0$，所以 $(-\frac{1}{2}x^{-2})'=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$，故正确

(2) 由 $\sin x+\cos x$ 得 $x\in\mathbb{R}$，所以 $(-\cos x+\sin x)'=\sin x+\cos x$，故正确

3. 解：(1) $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\times(x+\sqrt{1+x^2})}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $f(x)=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\times2x$

$=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$

4. 解：由题意：$f(0)=1$，$f(x)=y$，$f'(x)=e^{-x}$

$\int f'(x)dx=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C$

故 $f(x)=-e^{-x}+C$

$\because f(0)=1$ $\therefore C=2$

$\therefore f(x)=-e^{-x}+2$

12月22日

1. $\int f(x)dx=e^{-x^2}+C$，求 $f(x)$

$f(x)=(e^{-x^2})'=-2xe^{-x^2}$

2. 求 $\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{1}{\ln(x-1)}\right)$

原式 $=\lim_{x\to2}\frac{x\ln(x-1)-(x-2)}{(x-2)\ln(x-1)}$ [illegible]

$=\infty$

3. 求 $\lim_{x\to0}\frac{(x\cos x-\sin x)\cos x}{\sin x^3}$

原式 $=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$

4. $y^2e^{xy}-\sin x+1=0$，求 $y'(0)$ [illegible]

$y'=\frac{\cos x-y^3e^{xy}}{\ldots}$

一、求 $\int\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+\tan x\right)dx$

原式 $=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx+\int\tan x\,dx$

$=e^{\sqrt{x}}+\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$=e^{\sqrt{x}}-\int\frac{1}{\cos x}d\cos x$

$=e^{\sqrt{x}}-\ln|\cos x|+C$

6. 求 $\int\tan\sqrt{x}\,dx$

令 $t=\sqrt{x}$，$dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

故 $2t\cdot dt=dx$

原式 $=\int\tan t\cdot2t\,dt$

$=2\int t\cdot\tan t\,dt$

~~$=\int\tan t\,dt^2$~~

$=2\int t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}dt$

$=2\int t\cdot\frac{1}{\cos t}d\cos t$

7. 求 $\int\cos\sqrt{x}\,dx$

令 $t=\sqrt{x}$，故 $t^2=x$，$2t\,dt=dx$

故原式 $=\int\cos t\cdot2t\,dt$

$=2\int t\,d\sin t$

$=2t\sin t-2\int\sin t\,dt$

$=2t\sin t+2\cos t+C$

$=2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C$

8. 求 $\int x\arcsin x\,dx$

原式 $=\frac{1}{2}\int\arcsin x\,dx^2$

$=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int x^2d\arcsin x$

$=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arcsin x+\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4})\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$

令 $x=\sin\theta$，$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

原式 $=\frac{1}{2}\int\cos\theta\,d\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\int\cos^2\theta\,d\theta$

$=\frac{1}{4}\int(1+\cos2\theta)d\theta$

$=\frac{\theta}{4}+\frac{1}{8}\sin2\theta+C$

9. 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间、凹凸区间与拐点

① 确定定义域 D

② 求 y'、y''，令 $y'=0$，$y''=0$

$y'=0$ 或 y' 不存在（驻点与不可导点）

$y'>0$ ↗，$y'<0$ ↘

③ $y''=0$ 或不存在

$y''>0$ 凸，$y''<0$ 凹

扫描全能王 创建
扫描全能王 创建
扫描全能王 创建
扫描全能王 创建
扫描全能王 创建
扫描全能王 创建
扫描全能王 创建