2025.9.15

P8. 1. 求定义域

(1) $y=\frac{x}{x^2-1}$

$\because x^2-1\neq 0$

$\therefore x\neq \pm 1$

$\therefore x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(2) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

$\because \begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geq 0\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geq -2\end{cases}$

$\therefore x\in[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

$\because \begin{cases}\sin x\geq 0\\ 16-x^2\geq 0\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}2k\pi\leq x\leq 2k\pi+\pi\\ -4\leq x\leq 4\end{cases}$

$\therefore x\in[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$

(4) $y=\lg(2-x)+\sqrt{3+2x-x^2}$

$\because \begin{cases}2-x>0\\ 3+2x-x^2\geq 0\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x<2\\ -1\leq x\leq 3\end{cases}$

$\therefore x\in[-1,2)$

3. $\because f(x)=x^2-3x+2$

$\therefore f(1)=1-3+2=0$

$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2$
$=x^2-x$

6. $f(-1)=-1-1=-2$

$f(0)=0+1=1$

令 $t=x-1$，则 $x=t+1$

$\therefore f(t)=\begin{cases}t+1-1=t, & -2\leq t+1<0\\ t+1+1=t+2, & 0\leq t+1<2\end{cases}$

即 $f(x-1)=\begin{cases}x, & -3\leq x<-1\\ x+2, & -1\leq x<1\end{cases}$

6. $f(-1)=-2$，$f(0)=1$

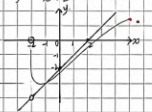
$f(1)=2$

$f(x-1)=\begin{cases}x-1-1, & -2\leq x-1<0\\ x-1+1, & 0\leq x-1\leq 2\end{cases}$

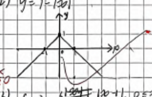
$\Rightarrow f(x-1)=\begin{cases}x-2, & -1\leq x<1\\ x, & 1\leq x\leq 3\end{cases}$

7. 作图

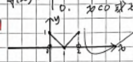
(1) $y=\frac{x^2-4}{x+2}$ $(x\neq -2)$



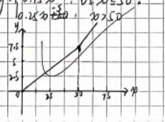
(2) $y=1-|x|$



(3) $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leq x\leq 2\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>2\end{cases}$



9. $y=\begin{cases}0.15x, & 0\leq x\leq 50\\ 0.25x-5, & x>50\end{cases}$



2025.9.20

P22

1. (1) $y=x^2\cos x$

$f(-x)=-x^2\cos x=-f(x)$

$f(0)=0$

奇函数

(2) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)$

偶函数

(3) $y=\sin x+\cos x$

$f(-x)=-\sin x+\cos x$

非奇非偶

(4) $y=\sin x+e^{x}-e^{-x}$

$f(-x)=-\sin x+e^{-x}-e^{x}=-f(x)$

$f(0)=0$，奇函数

3. $f(x)=\frac{x}{1-x}$，$\therefore f(x)=\frac{x}{1-x}$，又 $1-x$ 恒大于 0 $(x\in(1,+\infty))$

$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单增

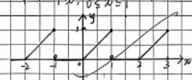
4. $\because f(x)$ 周期为 T

$\therefore f(2x+3+T)=f(2x+3)$

$\therefore f(2(x+\frac{T}{2})+3)=f(2x+3)$

$\therefore f(2x+3)$ 周期为 $\frac{T}{2}$

5. $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ x, & 0\leq x\leq 1\end{cases}$，$T=2$



6. $\because \forall M>0$，$\exists x_0=\frac{1}{M+1}\in(0,1)$

使 $f(x_0)=M+1>M$

$\therefore f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界

$\because 1<x<2$

$\therefore \frac{1}{2}<\frac{1}{x}<1$，即 $\frac{1}{2}<f(x)<1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 有界

P17 1. (1) $\because y=\frac{1-x}{1+x}$

$\therefore x(1+y)=1-y$

$\therefore x=\frac{1-y}{1+y}$

(2) $\because y=2^{3x+1}$

$\therefore \log_2 y=3x+1$

$\therefore x=\frac{\log_2 y-1}{3}$

(3) $\because y=\frac{2^x}{2^x+1}$

$\therefore 2^x=\frac{y}{1-y}$

$\therefore x=\log_2\frac{y}{1-y}$

(4) $\because y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$

$\therefore y=\frac{2\times 10^x}{10^x-10^{-x}}=\frac{2\times 10^{2x}}{10^{2x}-1}$

$\therefore 10^{2x}=\frac{y}{y-2}$，$\therefore x=\frac{\lg\frac{y}{y-2}}{2}$

3. $\because y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1-x^2, & x<0\end{cases}$

$\therefore x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1\\ 0, & y=0\\ -\sqrt{-y-1}, & y<-1\end{cases}$

6. $f(2x+1)=\begin{cases}2x+1+2, & 2x+1<-1\\ -(2x+1), & |2x+1|\leq 1\\ 2x+1-2, & 2x+1>1\end{cases}$

$=\begin{cases}2x+3, & x<-1\\ -2x-1, & -1\leq x\leq 0\\ 2x-1, & x>0\end{cases}$

P24 1. (1) $y=\arccos(3x-2)$

$\therefore -1\leq 3x-2\leq 1$

$\therefore x\in[\frac{1}{3},1]$

(2) $y=3\arccos(x-1)$

$\therefore -1\leq x-1\leq 1$

$\therefore x\in[0,2]$

(3) $f(x)=\ln(x+1)+\arcsin\frac{2x-1}{3}$

$\begin{cases}x+1>0\\ -1\leq\frac{2x-1}{3}\leq 1\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x>-1\\ -1\leq x\leq 2\end{cases}$ 即 $x\in(-1,2]$

(4) $f(x)=\ln(1-x^2)+\tan 2x$

$\begin{cases}1-x^2>0\\ 2x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}-1<x<1\\ x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\end{cases}$ 即 $x\in(-1,-\frac{\pi}{4})\cup(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})\cup(\frac{\pi}{4},1)$

9.22 复习题(A)(B)

(A)

1. D

2. (1) $\because \begin{cases}-1\leq\frac{1}{x}<0\\ 0<\frac{1}{x}\leq 1\\ 2-x\geq 0\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x\leq -1\\ x\geq 1\\ x\leq 2\end{cases}$

即 $x\in(-\infty,-1)\cup[1,2]$

(2) $\because \begin{cases}x+3\geq 0\\ 1-x>0\\ 1-x\neq 1\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x\geq -3\\ x<1\\ x\neq 0\end{cases}$

即 $[-3,0)\cup(0,1)$

(3) $\because -1\leq 2\cos x\leq 1$

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{3}\leq x\leq k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in Z$

3. $(-\infty,+\infty)$ $[-1,1]$

4. $f(x-1)=\begin{cases}1, & -1\leq x-1<0\\ x-1+1, & 0\leq x-1\leq 2\end{cases}=\begin{cases}1, & 0\leq x<1\\ x, & 1\leq x\leq 3\end{cases}$

5. (1) $\because f(-x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=f(x)$

$\therefore$ 偶函数

(2) $\because f(-x)=e^{-2x}-e^{2x}+\sin(-x)$

$=(e^{-2x}-e^{2x}-\sin x)$

$=-f(x)$

$\therefore$ 奇函数

6. (1) ① 有界性：

$\because (1-|x|)^2\geq 0$

$\therefore |1+x^2|\geq 2|x|$

$\therefore |f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{2|x|}{2|1+x^2|}\leq\frac{1}{2}$

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立

$\therefore y=\frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界

② 单调性

$\because y=f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

$\therefore f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

又 $(1+x^2)^2>0$

$\therefore$ 令 $1-x^2\geq 0$，即 $x\in[-1,1]$

此时 $f'(x)>0$，$f(x)\nearrow$

令 $1-x^2<0$，即 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

此时 $f'(x)<0$，$f(x)\searrow$

(2) ① 有界性

$\because y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$

$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 无界

② 单调性

$\because f'(x)=1+\frac{1}{x}$

在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 恒大于 0

$\therefore$ ~~f(x)~~ $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $\nearrow$

7. (1) $\because 0\leq x^2\leq 1$

$\therefore -1\leq x\leq 1$

(2) $\because 0\leq\sin x\leq 1$

$\therefore 2k\pi\leq x\leq 2k\pi+\pi$，$k\in Z$

(3) $\because 0\leq x+a\leq 1$

$\therefore -a\leq x\leq 1-a$

(4) $\because \begin{cases}0\leq x+a\leq 1\\ 0\leq x-a\leq 1\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}-a\leq x\leq 1-a\\ a\leq x\leq 1+a\end{cases}$

① 当 $0<a\leq\frac{1}{2}$ 时，$a\leq x\leq 1-a$.

② 当 $a>\frac{1}{2}$ 时，无解

8. ① $f(g(x))=f(x\ln x)$
$=2^{x\ln x}$

② $g(f(x))=g(2^x)$
$=2^x\ln 2^x$
$=\ln 2\cdot x\cdot 2^x$

③ $f(f(x))=f(2^x)=2^{2^x}$

④ $g(g(x))=g(x\ln x)$
$=x\ln x\ln(x\ln x)$

9. (1) $y=u^5$，$u=1+x^2$

(2) $y=\frac{1}{u}$，$u=1+v$，$v=\arccos w$，$w=3x$

10. (1) 设 $g(x)=f(x)+f(-x)$

则 $g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$

$\therefore f(x)+f(-x)$ 为偶函数

(2) 设 $h(x)=f(x)-f(-x)$

则 $h(-x)=f(-x)-f(x)=-h(x)$

$\therefore f(x)-f(-x)$ 为奇函数

11. 由题意得 $y=\begin{cases}0.8, & 0<x\leq 20\\ 1.6, & 20<x\leq 40\\ 2.4, & 40<x\leq 60\\ \cdots\\ 80, & 1980<x\leq 2000\end{cases}$

(B)

1. $\arcsin(1-x^2)$，$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

2. B

3. D

4. (1) $\because f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$

$=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=-f(x)$

$\therefore$ 奇函数

(2) $\because y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$\therefore x+\sqrt{1+x^2}=e^y$

$\therefore e^y-x=\sqrt{1+x^2}$

$\therefore 2xe^y=e^{2y}-1$

$\therefore x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

5. $f(-x)=e^{\sin(-x)}-e^{-\sin(-x)}$

$=e^{-\sin x}-e^{\sin x}$

$=-f(x)$

$\therefore$ 奇函数

6. $\because \begin{cases}f(x)=f(2a-x)\\ f(x)=f(2b-x)\end{cases}$

$\therefore f(2b-x)=f(2a-x)$

$\therefore f(2b+x)=f(2a+x)$

$\therefore f(2b-2a+x)=f(x)$

得证

7. $\because f(\sin x)=3-\cos 2x$

$=3-(1-2\sin^2 x)$

$=2+2\sin^2 x$

$\therefore f(x)=2+2x^2$

$\therefore f(\cos x)=2+2\cos^2 x$

8. ~~g(x)~~：

$\because \ln(g(x)-1)=x$

$\therefore g(x)-1=e^x$

$\therefore g(x)=e^x+1$

9. 设 $y=\frac{x+1}{x-1}$，则 $x=\frac{y+1}{y-1}$

$\therefore f(y)=3f\left(\frac{y+1}{y-1}\right)-2\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$

又 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$

$\therefore f(x)=9f(x)-6x-2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

即 $f(x)=\frac{3x}{4}+\frac{x+1}{4(x-1)}$

9.23 习题2-2

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ (2) 不存在

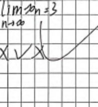
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$

2. √ × √ ×

9.28

2. D 3. A

4. (1)



(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$

(3) $\because \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$

$\therefore$ 不存在 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ 不存在

习题2-3

1. (1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x-1}=0$，无穷小

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}=+\infty$，无穷大.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$，无穷小

$\lim\limits_{x\to +\infty}=+\infty$，无穷大

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2}=0=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2}$，无穷小

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2}=\infty$，无穷大

2. (1) $\because \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$|\sin\frac{1}{x}|\leq 1$，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

(2) $\because \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$

(3) $\because |\cos n^2|\leq 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n^2}{n}=0$

9.29. 习题2-4

2. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-1)^{20}(2x+3)^{30}}{(7x+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-\frac{1}{x})^{20}(2+\frac{3}{x})^{30}}{(7+\frac{1}{x})^{50}}=\frac{3^{20}2^{30}}{7^{50}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{3^n}+3}{\frac{2^n}{3^n}+1}=\frac{2\left(\frac{2^n}{3^n}\right)+3}{\frac{2^n}{3^n}+1}=3$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2}{h}=3x^2+3xh=3x^2$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2-1)}=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\frac{x^3+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{(2-\frac{1}{x^2})(2+\frac{1}{x})}=\frac{1}{4}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)\operatorname{arccot}x}{x^3-x-3}=0$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\frac{\frac{\frac{1}{3^{n+1}}-1}{\frac{1}{3}-1}}{\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-1}{\frac{1}{2}-1}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}=\frac{3}{4}$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$

$=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2}-\frac{n}{2}=-\frac{1}{2(1+\frac{2}{n})}=-\frac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left[\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2(x-1)}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2}\right]=0$

3. $\because \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x^3+1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=(x-1)=-1$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$. $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$. $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=-\infty$

2025.10.13 2-6

1. $\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-x^2}{x^2-x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-x}{x(1-x)}=\infty$

$\therefore x^2-x^3$ 是高阶无穷小

3. (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}=\sqrt{2}a$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{a+b}{2}x\sin\frac{a-b}{2}x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(a^2x^2-b^2x^2)}{2x^2}=\frac{b^2-a^2}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x^2}{\sin\frac{x}{2}\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x}{2}\cdot x}=2$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}=\frac{x}{\ln(1-x)}=-1$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x+x\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^2}{\sin^2 x(2+\frac{x}{\cos^2 x})}=\frac{8x^2}{2x^2}=4$.

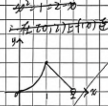
(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=\frac{\ln(\frac{\sin^2 x}{e^x}+1)}{\ln(\frac{x^2}{e^{2x}}+1)}=\frac{\frac{\sin^2 x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}}=e^x=1$

2025.10.14 . 2-7

1. (1) ~~当 $x=1$ 时.~~

~~$x^2=1=2-x$~~

~~$\therefore$ 在 $[0,2]$ 上 $f(x)$ 连续~~



$\because \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 右连续

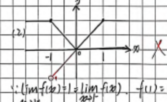
$\because \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)$

$f(1)=1$.

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 连续

$\therefore f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续

(2)



$\because \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$. $f(1)=1$

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 上连续

~~$\because \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$ $f(-1)=1$~~

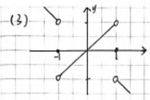
~~$\therefore f(x)$ 在 $x=-1$ 上连续.~~

~~$\therefore f(x)$ 在 R 上连续~~

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=1$. $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-1$

$x=-1$ 是跳跃间断点

(3)



$\therefore f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -x, & |x|>1\end{cases}$

$f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$连续

在$x=\pm1$时间断

① 当$|x|=1$时，$f(x)=0$

② 当$|x|<1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=x$

③ 当$|x|>1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=-x$

2.(1) $y=\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ $(x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty))$

3.(1) 当$x\neq3$时，$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=x+3$.

$\therefore \lim_{x\to3}f(x)=6$.

要使$f(x)$连续

则当$x=3$时，$f(x)=6$

即$a=6$

(2) $\lim_{x\to0}e^x=1$.

要使$f(x)$连续

则当$x=0$时，$f(x)=1$.

$\therefore -a=1$ $\therefore a=-1$

2.(1) $x=0$为间断点.

$\because \lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=\frac{2x^2}{x^2}=2$

$\therefore x=0$为可去间断点

补充$f(0)=2$.

(2) $x=0$为间断点.

$\because \lim_{x\to0^+}\frac1x=+\infty$.

$\therefore \lim_{x\to0^+}\arctan\frac1x=\frac\pi2$

同理 $\lim_{x\to0^-}\arctan\frac1x=-\frac\pi2$

$x=0$为跳跃间断点.

(3) $x=0$为间断点

$\lim_{x\to0^+}e^{-\frac1x}=0$, $\lim_{x\to0^-}e^{-\frac1x}=+\infty$

$x=0$为无穷间断点

(4) $x=1$, $x=2$为间断点

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{2x}{2x-3}=-2$.

$\therefore x=1$为可去间断点，补充$f(1)=-2$

$\because \lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$.

$\therefore x=2$为无穷间断点

(5) $x=0$, $x=k\pi+\frac\pi2$ $(k\in Z)$为间断点

$\because \lim_{x\to0}\frac{2\tan x}{x}=2$.

$\therefore x=0$为可去间断点. 补充$f(0)=2$

$\because \lim_{x\to k\pi+\frac\pi2}\frac{2\tan x}{x}=\infty$. $\therefore x=k\pi+\frac\pi2$为无穷间断点

(6) $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1$

$\therefore x=0$为跳跃间断点

2025.10.20 2-7

4.(1) $\lim_{x\to\infty}x[\ln(x+a)-\ln x]$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+a)-\ln x}{\frac1x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac ax)}{\frac1x}=a$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac3x-\frac4{x^2}}{\sqrt{1+\frac1{x^4}}}$

$=2$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac12(x^2+x)}{2x}$

$=\frac14$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{1-\sqrt{1+\tan x}}$

令 $t=\sqrt{1+\tan x}$

$\tan x=t^2-1$

原式 $=\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{1-t}=\lim_{t\to1}\frac{(t+1)(t-1)}{1-t}=-2$

(5) $\lim_{x\to+\infty}\cos(\operatorname{arccot}x)$

$=\lim\cos0=1$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x-(-x)}{x}=2$

5. 令 $f(x)=2^x\cdot x$

$\because f(x)$在$[-1,1]$上连续

$f(-1)=-\frac12$, $f(1)=1$

$\therefore f(-1)\cdot f(1)<0$

$\therefore f(x)$在$(-1,1)$上必有一零点

$\therefore$ 在$(-1,1)$内必有实根

6. 令 ~~$f(x)=a\sin x+b-x$~~

$f(x)=x-a\sin x-b$

$\because f(x)$在$[0,a+b]$上连续

$f(0)=-b$, $f(a+b)=a-a\sin(a+b)$

$=a[1-\sin(a+b)]$

又 $a>0$, $b>0$

$\therefore f(0)<0$, $f(a+b)\geq0$

$\therefore f(0)f(a+b)\leq0$

$\therefore f(x)$在$[0,a+b]$上必有一零点

即$x=a\sin x+b$至少有一个正根且不大于$a+b$

10.21 3-1

2. $f'(4)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2\sqrt{4+\Delta x}-2\sqrt4}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2}{\sqrt{4+\Delta x}+\sqrt4}=\frac12$

3. $(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}-\frac12\cos x\Delta x-\sin x=-\sin x$

4.(1) $\because \lim_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}=k=f'(a)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}=k$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(a-x)-f(a)}{x}=-k$

(2) $\because f'(a)=\lim_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(a)-f(a-x)}{x}$

$=k$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f(a)-f(a-x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=2k$

5. $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}$

$=2f'(0)=2$

复习题2 (A)

1.(1) B (2) C

2.(1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x}{1}=2$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4+3}{x-2}=\lim_{x\to2}x+2+\frac{3}{x-2}$

令$t=x-2$, 则原式$=\lim_{t\to0}t+\frac3t+4=\infty$

(3) $\lim_{x\to2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{1}{2x}=\frac14$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac12x}{\frac13x}=\frac32$

3.(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+2)(3n+3)}{2n^3}=\frac12\lim_{n\to\infty}6(1+\frac1n)^3=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}[\frac{1+3+\cdots+(2n+1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}]=\lim_{n\to\infty}[\frac{n^2}{n+1}-n-\frac12]=\lim_{n\to\infty}(-\frac32+\frac{1}{n+1})=-\frac32$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sin x}{5x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{5x}=\frac25$

(4) $\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+1)(x+2)}-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac2x}{\sqrt{1+\frac3x+\frac2{x^2}}+1}=\frac32$

(5) $\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt x}{3-\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to4}\frac{x^{-\frac12}}{(2x+1)^{-\frac12}}=\frac32$ ✗ 原式$=\frac{-\frac12x^{-\frac12}}{-(2x+1)^{-\frac12}}=\frac34$

(6) $\lim_{x\to0}\ln\frac{\sin2x}{x}=\ln\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}=\ln2$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+6x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{6x}=\frac13$

(8) $\lim_{x\to0}(2\csc2x-\cot x)=\lim_{x\to0}\frac{2-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac12x^2}{x}=0$

(9) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x-1})^x$. 令$t=x-1$

则 $\lim_{t\to\infty}(1+\frac2t)^{t+1}=e^{\lim_{t\to\infty}[\frac2t(t+1)]}=e^2$

(10) $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac1x)^{\sqrt x}=e^{\lim_{x\to+\infty}(-\frac1x)\cdot\sqrt x}=e^{\lim_{x\to+\infty}(-x^{-\frac12})}=\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{\sqrt x}}=e^0=1$

(11) $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=e^{\lim_{x\to0}(2x\cdot\frac3x)}=e^6$

(12) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac12x^2}{x\cdot x}=\frac12$

4.(1) 当$x=1$时，$f(1)=0$.

$\because \lim_{x\to1^+}f(x)=2$, $\lim_{x\to1^-}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to1^+}f(x)\neq\lim_{x\to1^-}f(x)$

$\therefore$ 间断点为$x=1$, 且为跳跃间断点

(2) $y=\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\frac{x(x-1)}{|x|(x+1)(x-1)}$

$\therefore x=0, x=-1, x=1$为间断点.

① $\lim_{x\to1}y=\frac12$. $x=1$为可去间断点.

补充定义$f(1)=\frac12$

② $\lim_{x\to0^-}y=-1$, $\lim_{x\to0^+}=1$. $x=0$为跳跃间断点

③ $\lim_{x\to-1}y=\infty$ $x=-1$为第二类间断点

5.(1) $\because f(0)=\frac12$.

$\therefore \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt a-\sqrt{a-x}}{x}=\frac12$.

$\therefore a=1$

(2) 要使$x=0$为$f(x)$间断点,

则 $\lim_{x\to0^-}f(x)=\frac{\sqrt a-\sqrt{a-x}}{x}\neq\frac12$

$\therefore a\neq1$

6. 令$f(x)=x\cdot2^x-1$

$\because f(0)=-1$, $f(1)=1$.

$\therefore f(0)f(1)<0$.

$\therefore$ 在$(0,1)$内存在一零点

即$x\cdot2^x$至少有一个小于1的正根

(B)

1. $\because \lim_{x\to0^+}\arctan\frac1x=\frac\pi2$,

$\lim_{x\to0^-}\arctan\frac1x=-\frac\pi2$.

$\lim_{x\to0^+}(1+|x|)^{\frac1x}=\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac1x}=e$

$\lim_{x\to0^-}(1+|x|)^{\frac1x}=\lim_{x\to0^-}(1-x)^{\frac1x}=\frac1e$

$\therefore \lim_{x\to0^+}[\alpha\cdot\arctan\frac1x+(1+|x|)^{\frac1x}]=\alpha\frac\pi2+e$.

$\lim_{x\to0^-}[\alpha\cdot\arctan\frac1x+(1+|x|)^{\frac1x}]=-\alpha\cdot\frac\pi2+\frac1e$.

又 $\alpha\cdot\frac\pi2+e=-\alpha\cdot\frac\pi2+\frac1e$

$\therefore \alpha=\frac{1-e^2}{\pi e}$

2. C

3. $\because \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac1n)^n-e}{\frac{b}{n^a}}=1$

$\therefore e\lim_{n\to\infty}\frac{(e^{n\ln(1+\frac1n)-1}-1)}{\frac{b}{n^a}}=1$

令$t=\frac1n$, 则 $\lim_{t\to0}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}{b\cdot t^a}=\frac1e$.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+t)-t}{t^{a+1}}=\frac be$.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac12t^2}{t^{a+1}}=\frac be$

$\therefore \begin{cases}a+1=2\\ \frac be=-\frac12\end{cases}$ $\therefore a=1, b=-\frac e2$

4. C

5. 1

6. 令$t=\frac1x$.

$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{(a+bt)e^t-1}{t}=2$

又 $\lim_{t\to0^+}\frac{(a+bt)e^t-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{ae^t-1}{t}+\lim_{t\to0^+}be^t$

$=\lim_{t\to0^+}\frac{ae^t-1}{t}+b$

$\therefore \lim_{t\to0^+}\frac{ae^t-1}{t}=2-b$

则$a=1$. 此时$b=1$

7. C 8. A

9. $\lim_{x\to0}(\frac{1+e^x}{2})^{\cot x}=e^{\lim_{x\to0}(\frac{e^x-1}{2})\cdot\cot x}$

$=e^{\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{2}}{\frac{1}{\cot x}}}=e^{\frac12}$

$=\sqrt e$

2025.10.28 3-2

1.(1) $y'=2x+3+\cos x$

(2) $y'=\frac{x^3(6x^5+x^{-\frac32})-3x^2(x^6+2x^{\frac12}-1)}{x^6}$

$=\frac{3x^8+3x^2-6x+x^{\frac52}}{x^6}$

$=3x^2+3x^{-4}-6x^{-5}+x^{-\frac72}$ ✗

(3) $s'=\frac{\sin t}{2\sqrt t}+\sqrt t\cos t$

(4) $y'=\cos x\cdot\ln x-x\sin x\ln x+\cos x$

(5) $y'=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$

$=-\frac{2}{(x-1)^2}$

(6) $y'=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

2.(1) $y'=\arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore y'|_{x=\frac12}=\arccos\frac12-\frac{\sqrt3}{3}$

$=\frac{\pi-\sqrt3}{3}$

(2) $\rho'=\tan\theta+\frac{\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\theta}{\cos^2\theta}$

$\therefore \frac{d\rho}{d\theta}|_{\theta=\frac\pi4}=\sqrt2+1+\frac\pi2$

(3) $f'(x)=\frac{3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}\times\frac12\times\frac{1}{\sqrt{\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}}}$

$=\frac{3e^{3x}}{2(e^{3x}+1)^2}\times\frac{e^{3x}+1}{e^{3x}}=\frac{3}{2(e^{3x}+1)}$

$\therefore f'(0)=\frac34$

1.(2) $y=x^3+2x^{-\frac52}-x^{-3}$

$\therefore y'=3x^2-5x^{-\frac72}+3x^{-4}$

3. $\because y'=3x^2-1$. 设切线$y=kx+b$

要使切线与$2x-y-1=0$平行

则 $y'=3x^2-1=k=2$. 此时$x=\pm1$

当$x=1$时，$y=1-1+2=2$

当$x=-1$时，$y=-1+1+2=2$

$\therefore (1,2)(-1,2)$上的切线与$2x-y-1=0$平行

4.(1) $y'=\cos x\times\frac{1}{\sin x}=\cot x$

(2) $y'=3x^2\cdot10(x^3-1)^9$

$=30x^2(x^3-1)^9$

(3) $y'=(1-\sin2x)\times3(x+\cos^2x)^2$

$=3(1-\sin2x)(x+\cos^2x)^2$

(4) $y'=\frac{\frac13(x-2)^{-\frac23}(x^2+1)^{\frac12}-\frac12(x^2+1)^{-1}(x-2)^{\frac13}}{(x^2+1)}\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac12}}{(x-2)^{\frac13}}$

$=\frac{1}{3(x-2)}-\frac{x-2}{2(x^2+1)}$

(5) $y'=2\cos x\sin x\sin x^2+2\sin^2x\cos x$

$=\sin2x(\sin x^2+\sin x)$

(6) $y'=\frac{2x\sec[\ln(1+x^2)]}{1+x^2}$

(7) $y'=-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac1x\cdot2^{\sin\frac1x}\cdot\ln2$

(8) $y'=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\cdot e^{\frac{x}{\ln x}}$

(9) $y'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$

(10) $y'=\frac12\cdot\frac12\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+a\cdot\frac1a\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac xa)^2}}$

$=\frac{1}{4\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac xa)^2}}$ ✗

$y'=\frac12(\sqrt{a^2-x^2}+\frac12\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}})+\frac1a\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$

$=\frac12\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x+a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

5.(1) $y'=f'(\csc x)\cdot(\csc x)'$

$=-f'(\csc x)\cdot\cot x\cdot\csc x$

(2) $y'=f'(\tan x)\cdot(\tan x)'+f'(x)\cdot\sec^2(f(x))$

$=f'(\tan x)\cdot\sec^2x+f'(x)\cdot\sec^2(f(x))$

2025.11.3 3-3

1.(1) $4x^3-4y^3=-4(y+xy')$

$\therefore \frac{dy}{dx}=y'=\frac{y^3-y}{x}-x^2$ ✗

$4x^3-4y^3y'=-4(y+y'x)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=y'=\frac{x^3+y}{y^3-x}$

(2) $y'\sin x+y\cos x-(1-y')\sin(x-y)=0$

$\therefore y'=\frac{\sin(x-y)-y\cos x}{\sin(x-y)+\sin x}$

(3) $e^x-y'e^y-(y+xy')\cos xy=0$

$\therefore y'=\frac{e^x-y\cos xy}{x\cos xy+e^y}$

(4) $\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2}$

$\therefore y'=\frac{x(x+y)(1+x^2)}{(x^2+y^2)}+\frac yx$ ✗

$\frac{xy'-y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac12\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2yy')\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\therefore y'=\frac{x+y}{x-y}$

2. $\because x^3+3xy+y^3=5$

$\therefore 3x^2+3y+3xy'+3y^2=0$

即 $y'=-x-\frac{y(y+1)}{x}$

$\therefore y'|_{x=1}=-3$

则切线方程 $y-1=-3(x-1)$ ✗

$\because y'_法\cdot y'|_{x=1}=-1$

$\therefore y'_法=\frac13$ $\therefore$ 法线: $y-1=\frac13(x-1)$

$3x^2+3(y+xy')+3y^2y'=0$

$\therefore y'=-\frac{x^2+y}{x+y^2}$

$\therefore y'|_{x=1}=-1$ $\therefore$ 切线 $y-1=-1(x-1)$

$\because y_法|_{x=1}=1$ $\therefore$ 法线 $y-1=x-1$

3.(1) $\because y=x^{\sin x}$

$\therefore \ln y=\sin x\ln x$

$\therefore \frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$

$\therefore y'=y\cos x\ln x+\frac{y\sin x}{x}$

(2) $y'=ax^{a-1}+a^x\ln a+x^x(\ln x+1)$

(3) $\because \ln y=\frac12\ln\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ $\frac{y'}{y}=\frac12(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$

$\therefore \frac{y'}{y}=\frac12\cdot\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)}\cdot\frac{-4x^2+20x-22}{[(x-3)(x-4)]^2}$

即 $y'=\frac{(-2x^2+10x-11)y}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ ✗

$y'=\frac12\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$

(4) $\because y\ln\sin x=x\ln\cos y$

$\therefore y'\ln\sin x+y\cdot\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}=\ln\cos y-\frac{x\sin y}{\cos y}\cdot y'$

$\therefore y'=\frac{\ln\cos y-x\tan y-y\cot x}{\ln\sin x}$

$y'=\frac{\ln\cos y-y\cot x}{\ln\sin x+x\tan y}$

4.(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-2t}{1-2t}=1+\frac{1}{2t-1}$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{a\cos\theta\cdot3\sin^2\theta}{-a\sin\theta\cdot3\cos^2\theta}=-\tan\theta$

5. ∵ $x=6\cos t$, $y=4\sin t$

∴ $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{4\cos t}{-6\sin t}=-\frac{2}{3}\cot t$

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时 $y=4\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt2$，$y'=-\frac23\cot\frac{\pi}{4}=-\frac23$

∴切线方程 $y-2\sqrt2=-\frac23(x-3\sqrt2)$

5.(1) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-3}{2t-2}=\frac{3(t+1)}{2}$

$y''=\frac{2t^2-2t-t^2+1}{(t-1)^2}=1$

(2) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{a(1+\sin t)}{a(1-\cos t)}=\frac{1+\sin t}{1-\cos t}$

$y''=\frac{\cos t-\sin t-1}{(1-\cos t)^2}$

2025.9.30 2-5

1.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}R^2\cdot\frac{2\pi}{n}=\pi R^2$

(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x}{-1}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan3x}{\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{2x}=\frac32$

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{x}{\sqrt{\frac12x^2}}=\sqrt2$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{x\sin x}=\frac{\frac12(4x)^2}{x^2}=8$

(6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos(x-1)}{2x}=\frac12$

2.(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac2x)^{\frac{2-x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac2x\cdot\frac{2-x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x}{x}}=e^{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+1}{2x-1})^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-1}}=e$

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan x)^{\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to0}2\tan x\cot x}=e^2$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot3\sec x}=e^3$

2025.11.17 4-3

1.(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

(2) $\lim\frac{\ln\cos2x}{-(x-\pi)^2}=-\frac{\frac{2\sin2x}{\cos2x}}{2(x-\pi)}=\lim(-\frac{\tan2x}{x-\pi})=\lim(-2\sec^22x)=-2$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x-\sin x}=\frac{e^x-e^{-x}}{1-\cos x}=\frac{e^x+e^{-x}}{\sin x}=2$

(4) $\lim\frac{\ln(1+\frac1x)}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}=\frac{x(x+1)}{x^2+1}=\frac{2x}{2x+1}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{\cot3x}=\frac{-\csc^2x}{-3\csc^23x}=\frac{\sin^23x}{3\sin^2x}=3$

(6) $\lim\frac{\ln x}{\ln\cot x}=\frac{\sin x\cos x}{x}=-1$

(7) $\lim\frac{x^2\tan x}{\tan x-x}=\frac{2x\tan x+x^2\sec^2x}{\sec^2x-1}=\frac{x^2}{\tan^2x}\cdot3=3$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}+x^2}{x\sin^22x}=\frac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\frac16$

(9) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\sin3x}{\ln\sin2x}=\frac32\cot3x\tan2x=\frac{3\cos3x\sin2x}{2\cos2x\sin3x}=\frac{\cos3x}{\cos2x}=1$

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\frac{x^3}{e^x}=\frac{3x^2}{e^x}=\frac{2}{e^x}=0$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\cdot\ln(1-x)=\frac{\ln(1-x)}{\tan x}=-2\sin x\cos x=-\sin2x=0$

(12) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\frac{\cos x-1}{6x\sin x-x^2\cos x}=-\frac16$

(13) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\frac{x\ln x-x+1}{\ln x(x-1)}=\frac{\ln x+1}{\ln x+2}=\frac12$

(14) $\lim(\frac{1}{e^x-1}-\frac1x)=-\frac12$

(15) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\frac{\cos2x-1}{x^2}}=e^{\lim-\frac{\sin2x}{x}}=e^{\lim-2\cos2x}=e^{-2}$

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x-1}}=e^{\lim\frac{\ln\ln x}{x}}=e^{\lim\frac{1}{x\ln x}}=1$

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$

(18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-2x}{x^2}=\frac{f'(x)-2}{2x}=\frac{f''(x)}{2}=3$

2025.11.18 4-4

1. 令 $y=e^x-x$

∴ $y'=e^x-1$

令 $y'=e^x-1=0$

则 $x=0$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y'<0$，则 y 单调递减

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y'>0$，则 y 单调递增

2. ∵ $y=\cos x+x\sin x$

∴ $y'=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$.

令 $y'=x\cos x=0$，则 $x=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ ($x=0$ 舍去)

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 时 $y'<0$

则 y 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 上单调递减

3.(1) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

∴ $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-2)(x-1)$

① 当 $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

② 当 $x\in[1,2]$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

(2) $f(x)=2x^2-\ln x$ $(x>0)$

∴ $f'(x)=4x-\frac1x=\frac{4x^2-1}{x}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$

① 当 $x\in(0,\frac12)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

② 当 $x\in(\frac12,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}$

∴ $f'(x)=\frac{(3x-4)(x-2)}{3\cdot[(2-x)^2(x-1)]^{\frac23}}$

令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac43$ 或 2

① 当 $x\in(-\infty,\frac43)\cup(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$. $(-\infty,1)\cup(1,\frac43)$

② 当 $x\in(\frac43,2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$ $\cup(2,+\infty)$

(4) $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$ $(x\neq-1)$

∴ $f'(x)=\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2}=\frac{x(3x+2)}{(1+x)^2}$

① 当 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,-\frac23)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$ ×

② 当 $x\in(-\frac23,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

$f'(x)=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$

增区间 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

减区间 $(-2,-1)\cup(-1,0)$

4.(1) 令 $f(x)=2+x-2\sqrt{1+x}$

∴ $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ∵ $f'(0)=0$，且 $x>0$ 时，$f'(x)>0$

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↑.

又 $f(0)=0$ ∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于0 即 $2+x>2\sqrt{1+x}$

(2) ① 令 $g(x)=x-\ln(1+x)$

∴ $g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$

∴ $g'(0)=0$ 且 $x\in(0,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$.

∴ $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↑

又 $g(0)=0$ ∴ $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于0.

∴ $x>\ln(1+x)$

② 令 $h(x)=\ln(1+x)-x+\frac12x^2$

∴ $h'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}$

∵ $h'(0)=0$，$x>0$ 时，$h'(x)>0$.

∴ $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↑.

又∵ $h(0)=0$，∴ $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于0

∴ $\ln(1+x)>x-\frac12x^2$

综上，$x>0$ 时，$x>\ln(1+x)>x-\frac12x^2$

5. 由题可知，需证 $f(x)=x^5+2x^3+x-1$ 在 $(0,1)$ 上有零点 且只有一个

∵ $f'(x)=5x^4+6x^2+1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$ $f(x)\uparrow$.

又 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$，∴ $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且只有一个零点

即 $x^5+2x^3+x-1=0$ 有且只有一个小于1的正根.

6.(1) $y=3x^4-4x^3+1$

∴ $y'=12x^3-12x^2$

∴ $y''=36x^2-24x=12x(3x-2)$

① 当 $x\in(-\infty,0)\cup(\frac23,+\infty)$ 时，$y''>0$，是凹弧

② 当 $x\in[0,\frac23]$ 时，$y''<0$，是凸弧

③ 当 $x=0$ 时，$y''=0$，$y=1$.

当 $x=\frac23$ 时，$y''=0$，$y=\frac{11}{27}$ ∴拐点为 $(0,1)$ $(\frac23,\frac{11}{27})$

(2) $y=2-\sqrt[3]{x-1}$

∴ $y'=-\frac13(x-1)^{-\frac23}$ ∴ $y''=\frac29(x-1)^{-\frac53}$

① 当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$y''<0$，是凸弧

② 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$y''>0$，是凹弧

③ 当 $x=1$ 时，$y''=0$，$y=2$ ∴拐点为 $(1,2)$

(3) $y=\frac{4}{1+x^2}$

∴ $y'=\frac{-8x}{(1+x^2)^2}$

∴ $y''=\frac{-8(1+x^2)^2+8x\cdot4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{24x^2-8}{(1+x^2)^3}$

令 $y''=0$，则 $x=\pm\frac{\sqrt3}{3}$

① 当 $x\in(-\infty,-\frac{\sqrt3}{3})\cup(\frac{\sqrt3}{3},+\infty)$ 时，$y''>0$ 是凹弧

② 当 $x\in(-\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3})$ 时，$y''<0$，是凸弧

③ 当 $x=\pm\frac{\sqrt3}{3}$ 时，有拐点 $(-\frac{\sqrt3}{3},3)$，$(\frac{\sqrt3}{3},3)$

(4) $y=(x-1)\sqrt[3]{x^5}$

∴ $y'=x^{\frac53}+\frac53x^{\frac23}(x-1)$

∴ $y''=\frac53x^{\frac23}+\frac53(\frac23x^{-\frac13})(x-1)+\frac53x^{\frac23}=\frac29(5x^{\frac23}+x^{-\frac13})$

令 $y''=0$，则 $x=-\frac15$

① 当 $x\in(-\infty,-\frac15)$ 时 $y''<0$，是凸弧

② 当 $x\in(-\frac15,+\infty)$ 时，$y''>0$，是凹弧

③ 当 $x=-\frac15$ 时，$y''=0$，是拐点 $y=-\frac{6}{5\sqrt[3]{25}}$

∴拐点为 $(-\frac15,-\frac{6\sqrt[3]{5}}{25})$

7. 令 $f(x)=xe^x$，则 $f(y)=ye^y$，$f(\frac{x+y}{2})=\frac{x+y}{2}\cdot e^{\frac{x+y}{2}}$

即证 $\frac{f(x)+f(y)}{2}>f(\frac{x+y}{2})$ ∴要证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹的

∵ $f'(x)=(x+1)e^x$ ∴ $f''(x)=(x+2)e^x$

当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$ ∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹弧

综上，可得证.

2025.11.24 4-5

1.(1) ∵ $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$

∴ $f'(x)=3x^2-6x-9$

令 $f'(x)=0$，则 $x=-1$ 或 3

∴ $f''(x)=6x-6$

∴ $f''(-1)=-12<0$.

$f''(3)=12>0$.

则极大值 $f(-1)=8$

极小值 $f(3)=-24$

(2) ∵ $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

∴ $f'(x)=\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$

令 $f'(x)=0$，则 $x=-1$ 或 1

∵ $f''(x)=\frac{2x^5-4x^3-6x}{(1+x^2)^4}$

∴ $f''(-1)=\frac12>0$，$f''(1)=-\frac12<0$.

则极大值 $f(1)=\frac12$

极小值 $f(-1)=-\frac12$

(3) $f(x)=2x^2-\ln x$ $(x>0)$

∴ $f'(x)=4x-\frac1x$ $(x>0)$

令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac12$

∵ $f''(x)=4+\frac{1}{x^2}$

∴ $f''(\frac12)=8>0$

则极小值 $f(\frac12)=\frac12+\ln2$

无极大值

(4) ∵ $f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}$

∴ $f'(x)=\frac23(2-x)^{-\frac13}(x-1)^{\frac13}+\frac13(2-x)^{\frac23}(x-1)^{-\frac23}$

$=\frac{(3x-4)(x-2)}{3[(2-x)^2(x-1)]^{\frac23}}$

令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac43$，且当 $x=2$ 时 $f'(x)$ 不存在

由单调性易得 极大值 $f(\frac43)=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

极小值 $f(2)=0$

(5) $f(x)=(x^2-1)^3-1$ 极小值 $f(0)=-2$，无极大值.

~~$f'(x)=6x(x^2-1)^2$~~

~~令 $f'(x)=0$，则 $x=-1$ 或 1~~

~~$f''(x)=24(x^2-1)$~~

~~$f''(-1)=0$ $f''(1)=0$~~

2. 由题意得 $f'(x)=a\cos x+\cos3x$

∴ $f'(\frac{\pi}{3})=\frac{a}{2}-1=0$ ∴ $a=2$

∴ $f''(x)=-2\sin x-3\sin3x$ ∴ $f''(\frac{\pi}{3})=-\sqrt3<0$

∴ $f(\frac{\pi}{3})=0$ 为极大值

3.(1) $f(x)=x^4-2x^2+3$

∴ $f'(x)=4x^3-4x$

令 $f'(x)=0$，则 $x=\pm1$ 或 0

① 当 $x\in[-\frac32,-1)\cup(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$.

② 当 $x\in(-1,0)\cup(1,2]$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$.

∴ $f(-\frac32)=\frac{57}{16}$，$f(0)=3$，$f(2)=11$

∴最大值为 $f(2)=11$

∵ $f(-1)=2$，$f(1)=2$

∴最小值为 $f(-1)=f(1)=2$

(2) $f(x)=x+\sqrt{1-x}$

∴ $f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ ∵ $\sqrt{1-x}>0$ ∴ $f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

∴最小值 $f(-1)=-1$，最大值 $f(1)=1$ ×

(3) $f(x)=x\sin x+\cos x$

∴ $f'(x)=x\cos x$. 令 $f'(x)=0$，则 $x=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$

① 当 $x\in[-\pi,-\frac{\pi}{2})\cup(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

② 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，

$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

∴ $f(-\pi)=-1$，$f(0)=1$，$f(\pi)=-1$

∴最小值为 $f(-\pi)=f(\pi)=-1$

∵ $f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$，$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$ ∴最大值为 $f(-\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$

4.(1) $y=\frac{1+\sin x}{x}$

∵ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{x}=0$

∴水平渐近线 $y=0$

∵ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x}{x}=\infty$

∴垂直渐近线 $x=0$

(2) $y=e^{\frac{1}{x-1}}+1$

∵ $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\frac{1}{x-1}}+1)=2$

∴水平渐近线 $y=2$

∵ $\lim\limits_{x\to1^+}(e^{\frac{1}{x-1}}+1)=+\infty$

∴垂直渐近线 $x=1$

2025.11.25 4-6

1.(1) $C(100)=\frac{1}{40}\times100^2+200\times100+1000=21250$

$\bar C(100)=\frac{1}{100}\times21250=212.5$

(2) $\bar C(Q)=\frac{1}{40}Q+200+\frac{1000}{Q}$ $(Q>0)$

$\bar C'(Q)=\frac{1}{40}-\frac{1000}{Q^2}=\frac{(Q+200)(Q-200)}{Q^2}$ 令 $\bar C'(Q)=0$ 则 $Q=200$

此时 $\bar C''(200)=\frac{1}{4000}>0$ 有极小值 $\bar C(200)=210$

∴最低平均成本为210，相应日产量为200

(3) $L(Q)=400Q-\frac{1}{40}Q^2-200Q-1000$

$=-\frac{1}{40}Q^2+200Q-1000$

$=-\frac{1}{40}(Q-4000)^2+399000$

要使~~日产量~~利润最大，则日产量为4000.

$\bar C(4000)=300.25$

2. $L(Q)=6Q-C(Q)=-1000+0.003Q^2-(0.01Q)^3$

$L'(Q)=0.006Q-3\times10^{-6}Q^2=-3\times10^{-6}Q(Q-2000)$

令 $L'(Q)=0$，则 $Q=2000$，此时 $L(Q)$ 取得极大值.

使利润最大时，销量为2000

3. $R=PQ=-100P^2+1000P=-\frac{Q^2}{100}+10Q$

$\bar R(300)=$ ~~2100~~ $R'(300)=-\frac{300}{50}+10=4$

$R(300)=2100$

4.(1) $R(Q)=PQ=-0.1Q^2+80Q$

~~$C(Q)$~~ $L(Q)=R(Q)-C(Q)=-0.1Q^2+60Q-5000$

$L'(Q)=-0.2Q+60$.

∴ $L'(200)=20$，$L'(400)=-20$

(2) ∵ $L'(300)=0$，$L''(300)=-0.2<0$

∴当 $Q=300$ 时，$L(Q)$ 取极大值，此时利润最大

5.(1) $\eta=P\frac{f'(P)}{f(P)}=-\frac{\ln4}{1600}P$

(2) 增加13.9%

6.(1) $\eta(P)=Q'\cdot\frac{P}{Q}=-\frac{P}{3}$

(2) $|\eta(2)|=\frac23<1$，$P=2$ 时，价格↑1%，需求↓0.67%

$|\eta(3)|=1$，$P=3$ 时，价格与需求变动幅度相同

$|\eta(4)|=\frac43>1$，$P=4$ 时，价格↑1%，需求↓1.33%

7.(1) $Q'=-2P$.

$P=5$ 时，边际需求为 -10

(2) $\eta(5)=f'(5)\frac{P}{75-P^2}=-1$

(3) 不变 (4) 减少0.85%

2025.12.1　5-2

1.(1) $\int\sqrt{x}(x^2-6)dx=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

(2) $\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

(3) $\int 2^x e^x dx=\frac{2^x e^x}{\ln 2+1}+C$

(4) $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx=2x-\frac{2^x\cdot 5}{3^x(\ln 2-\ln 3)}+C$

(5) $\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx=\int(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx=\cancel{\frac{\arctan\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)}+C}=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$

(6) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int(x^2-1+\frac{1}{x^2+1})dx=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$

(7) $\int\sec x(\sec x-\tan x)dx=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)dx=\tan x-\sec x+C$

(8) $\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1}{2\cos^2 x}dx=\frac{\tan x}{2}+C$

(9) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx=\int(\frac{1}{\sin^2 x}-2)dx=-\cot x-2x+C$

(10) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int(\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{2})dx=\frac{1}{2}x-\frac{\sin x}{2}+C$

(11) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)dx=-\cot x-\tan x+C$

(12) $\int(\tan x+\cot x)^2dx=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)dx=\tan x-\cot x+C$

2.(1) $\because f'(e^x)=1+e^{2x}$

$\therefore f'(x)=1+x^2$

$\therefore\int(1+x^2)dx=x+\frac{1}{3}x^3+C$

又 $f(0)=1$　$\therefore C=1$　$\therefore f(x)=x+\frac{x^3}{3}+1$

(2) $\int f(x)dx=\cos x+C$

(3) $\because f'(x)=\cos x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\sin x+C$

(4) $\because Q'(p)=-1000(\frac{1}{3})^p$

$\therefore Q(p)=\int Q'(p)dp=\cancel{\frac{1000}{\ln 3}\cdot(\frac{1}{3})^p+C}$　$1000(\frac{1}{3})^p+C$

又 $Q(0)=1000$　$\therefore C=0$　$\therefore Q(p)=1000(\frac{1}{3})^p$

5-1

1.(1) $\frac{1}{6}x^6$　(2) $-\sin x$　(3) $\frac{1}{t}\sqrt{t}$　(4) $2\arcsin x$

2.(1) $\int\cancel{\frac{1}{x^3}}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}+C$

$(-\frac{1}{2}x^{-2})'=(-2)\times(-\frac{1}{2})\times x^{-3}=\frac{1}{x^3}$

(2) $(-\cos x+\sin x)'=\sin x+\cos x$

3.(1) $f'(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $f''(x)=(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})'=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. 由题意知 $f(0)=1$，$f'(x)=e^{-x}$

则 $f(x)=\int f'(x)dx=-e^{-x}+C$

又 $f(0)=-1+C=1$　$\therefore C=2$

$\therefore f(x)=-e^{-x}+2$

2025.12.8　5-3

1.(1) $\frac{1}{5}$　(2) $-\frac{1}{2}$　(3) $\frac{1}{12}$　(4) $-\frac{1}{2}$　(5) $\frac{1}{3}$　(6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(7) $-$

(8) $\frac{1}{3}$　(9) $-$　(10) $2x$

2.(1) $\int a^{3x}dx=\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C$

(2) $\int(3-2x)^3dx=-\frac{(3-2x)^4}{8}+C$

(3) $\int\frac{dx}{1-2x}=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$

(4) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$：令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\int t^2e^t(-\frac{1}{t^2})dt=\int-e^tdt=-e^t+C=-e^{\frac{1}{x}}+C$

(5) 令 $u=\sqrt{t}$，则 $t=u^2$，$dt=2udu$

$\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=\int\frac{\sin u}{u}\cdot 2udu=\int 2\sin udu=-2\cos u+C=-2\cos\sqrt{t}+C$

(6) $\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{1}{\ln x}\cancel{dx}=\int\frac{1}{\ln x}d(\ln x)=\ln|\ln x|+C$

(7) 令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，$dx=\frac{1}{t}dt$

$\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\frac{1}{1+t}dt=\ln|t+1|=\ln|e^x+1|+C$

(8) 令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，$dx=\frac{1}{t}dt$

$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t}dt=\int\frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{1+t}dt=\frac{\ln|t|}{\ln|t+1|}+C$

(9) $\int\frac{x-1}{x^2-1}dx=\int\frac{1}{x+1}dx=\ln|1+x|+C$

(10) ~~令 $t=\sqrt{1+x^2}$　则 $x=\sqrt{t^2-1}$　$dx=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$~~

~~$\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\tan t\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int\frac{\tan t}{t}dt$~~

$\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}=\int\tan\sqrt{1+x^2}\,d(\sqrt{1+x^2})=-\ln|\cos\sqrt{1+x^2}|+C$

(11) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{de^x}{e^{2x}+1}=\arctan e^x+C$

(12) 令 $t=2-3x^2$，则 $x=\sqrt{\frac{2-t}{3}}$　$dt=-6xdx$

$\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx=\int-\frac{1}{6\sqrt{t}}dt=-\frac{1}{3}\sqrt{t}+C=-\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C$

(13) 令 $t=1-x^4$，则 $dt=-4x^3dx$，即 $x^3dx=-\frac{1}{4}dt$

$\int\frac{3x^3}{1-x^4}dx=\int(-\frac{3}{4})\frac{1}{t}dt=-\frac{3}{4}\ln|t|+C=-\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C$

(14) $\int\cos^4xdx=\int(\frac{1+\cos 2x}{2})^2dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

$=\frac{1}{4}\int(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)dx$

$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

(15) $\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx+\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}d(9-4x^2)$　$\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}}d(\frac{2}{3}x)$

$=\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$

(16) 令 $4+x^2=t$，则 $dt=2xdx$

$\int\frac{x^3}{4+x^2}dx=\int\frac{x(x^2+4)-4x}{4+x^2}dx=\int xdx-2\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}x^2-2\ln|4+x^2|+C$

(17) $\int\frac{dx}{x^2-x-6}=\frac{1}{5}\int(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2})dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-3}dx-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x+2}dx\cancel{=\frac{1}{5}\ln|x-3|}$

$=\frac{1}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\ln|x+2|+C$

(18) $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\arctan(x+2)+C$

(19) $\int\cos^2(wx+\varphi)dx=\int\frac{\cos(2wx+2\varphi)+1}{2}dx=\frac{1}{2}\int\cos(2wx+2\varphi)dx+\frac{1}{2}\int dx$

$=\frac{1}{4w}\int\cos(2wx+2\varphi)d(2wx+2\varphi)+\frac{1}{2}\int dx$

$=\frac{1}{4w}\sin(2wx+2\varphi)+\frac{x}{2}+C$

(20) 令 $u=wx+\varphi$，则 $du=wdx$，$dx=\frac{1}{w}du$

$\int\cos^2(wx+\varphi)\sin(wx+\varphi)dx=\frac{1}{w}\int\cos^2u\sin udu$

令 $t=\cos u$，则 $dt=-\sin udu$，$\sin udu=-dt$

原式 $=\frac{1}{w}\int t^2(-dt)=-\frac{1}{w}\int t^2dt=-\frac{1}{3w}\cdot t^3+C=-\frac{1}{3w}\cos^3(wx+\varphi)+C$

(21) 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int\frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\cdot 2tdt=2\int\frac{\arctan t}{1+t^2}dt=2\int\arctan t\,d\arctan t$

$=(\arctan\sqrt{x})^2+C$

(22) $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2}=-\frac{1}{\arcsin x}+C$

(23) $\int\tan^4xdx=\int[(\tan^2x+1)(\tan^2x-1)+1]dx=\int(\tan^2x\sec^2x-\sec^2x+1)dx$

$=\int\tan^2xd\tan x-\tan x+x=\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x+C$

(24) $\int\tan^3x\sec xdx=\int\tan^2xd\sec x=\int(\sec^2x-1)d\sec x=\frac{1}{3}\sec^3x-\sec x+C$

3.(1) 令 $t=\sqrt{2x-3}$，则 $x=\frac{t^2+3}{2}$，$dx=tdt$

$\int\frac{1}{\sqrt{2x-3}+1}dx=\int\frac{t}{t+1}dt=\int(1-\frac{1}{t+1})dt=t-\ln|t+1|+C$

(2) 令 $x=\sin\theta$，则 $dx=\cos\theta d\theta$，$\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$

$\int x^2\sqrt{1-x^2}dx=\int\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4\theta)d\theta$

$=\frac{1}{8}(\theta-\frac{\sin 4\theta}{4})+C=\frac{1}{8}\arcsin x-\frac{1}{32}x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)+C$

(3) 令 $u=\arcsin\frac{x}{a}$，则 $du=d\arcsin\frac{x}{a}=\frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int\sin^2udu=a^2\int\frac{1-\cos 2u}{2}du=\frac{a^2}{2}(u-\frac{1}{2}\sin 2u)+C$

$=\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\sin(\arcsin\frac{2x}{a}))+C$

(4) 令 $x=\tan t$，则 $dx=\cancel{\sec^2x}\sec^2tdt$

$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=\int\frac{\sec^2t}{\sec^3t}dt=\int\cos tdt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

(5) 令 $x=3\sec t$，则 $dx=3\sec t\tan tdt$

$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\int\frac{3\tan t}{3\sec t}\cdot 3\sec t\tan tdt=3\int\tan^2tdt=3\tan t-3t+C$

$=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C$

(6) 令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos tdt$

$\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{1}{2}\int(1+\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t})dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln|\sin t+\cos t|+C$

$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1-x^2}|+C$

(7) 令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos tdt$

$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t}{1+\cos t}dt=\int(\csc t\cot t-\cot^2t)dt=-\csc t+\cot t+t+C$

$=-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x+C$

2025.12.9　5-4

1.(1) $\int x\cos xdx=\int xd\sin x=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$

(2) $\int xe^{-x}dx=-\int xde^{-x}=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

(3) $\int\arctan xdx=x\arctan x-\int xd(\arctan x)=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$

(4) $\int e^{-x}\cos xdx=-\int\cos xde^{-x}=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin xdx$

$=-e^{-x}\cos x-(-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos xdx)=e^{-x}(\sin x-\cos x)-\int e^{-x}\cos xdx$

解得 $\int e^{-x}\cos xdx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$

(5) $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int e^{-2x}\cos\frac{x}{2}dx$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx)$

解得 原式 $=$ ~~$-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\quad\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos$~~

$-\frac{8}{17}e^{-2x}(4\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})+C$

(6) $\int x\tan^2xdx=\int x(\sec^2x-1)dx=\int x\sec^2xdx-\int xdx$

$=\int xd\tan x-\frac{x^2}{2}=x\tan x-\int\tan xdx-\frac{x^2}{2}$

$=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$

(7) $\int te^{-2t}dt=-\frac{1}{2}te^{-2t}+\frac{1}{2}\int e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+C$

(8) $\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-\int x\cdot\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$，$dx=\cos tdt$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$

则 原式 $=x(\arcsin x)^2-2\int\frac{t\sin t}{\cos t}\cos tdt=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$

(9) ~~$\int\cos(\ln x)dx=$~~ 令 $t=\ln x$，则 $x=e^t$，$dx=e^tdt$

$\int\cos(\ln x)dx=\int\cos t\cdot e^tdt=\cancel{e^t\cos t}\int\cos tde^t=e^t\cos t-\int e^td\sin t$

$=e^t\cos t-(\int e^t\cos tdt-e^t\sin t)=e^t(\cos t+\sin t)-\int e^t\cos tdt$

解得 原式 $=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C$

(10) $\int(x^2-1)\sin 2xdx=\int x^2\sin 2xdx-\int\sin 2xdx$

$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\int x\cos 2xdx-\int\sin 2xdx$

$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$