

衡阳师范学院 2018-2019 学年第二学期 化学与材料科学学院化学专业 2020 级 《高等数学 (II)》期末考试试题 A 卷 参考答案及评分标准

考核类型: 闭卷

考试时量: 120 分钟

题号	一	二	三	四	总分	合分人	复查人
总分	15	15	10	60	100		
得分							

学 院
专 业
班 级
学 号
姓 名

得分	评阅人

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ ()
 A. $e^x + 1$ B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$ C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数 D. e^x
2. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ ()
 A. $e^x + 1$ B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$ C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数 D. e^x
3. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ ()
 A. $e^x + 1$ B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$ C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数 D. e^x
4. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ ()
 A. $e^x + 1$ B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$ C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数 D. e^x
5. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ ()
 A. $e^x + 1$ B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$ C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数 D. e^x

得分	评阅人

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $x - 2y + 4 = 0$.
7. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $x - 2y + 4 = 0$.
8. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $x - 2y + 4 = 0$.

9. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $x - 2y + 4 = 0$.

10. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $x - 2y + 4 = 0$.

得分	评阅人

三、判断题 (每小题 2 分，共 10 分)

11. 若二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处连续，则其在该点处可微。 X

12. 如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。 ✓

13. 若二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处连续，则其在该点处可微。 X

14. 如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。 ✓

15. 如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。 ✓

得分	评阅人

四、解答题 (每小题 10 分，共 60 分)

16. 试将微分方程 $x \frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, x > 0$ 转换成一阶非齐次线性微分方程的标准形式，然后使用常数变易法求解，最后对求得的结果进行验算。

解: 一阶非齐次线性微分方程的标准形式为: $\frac{dy}{dx} + \frac{-3}{x}y = x$2 分

先解其对应的齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{-3}{x}y = 0$. 得: $y = cx^3$, 其中 c 为任意的实常数。5 分

使用常数变易法将常数 c 替换成与 x 相关的函数 $c(x)$ 代入原微分方程解得: $\frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2}$, 即 $c(x) = -\frac{1}{x} + C$, 其中 C 为任意常数。故原微分方程的通解为:

$$y = Cx^3 - x^2, x > 0 \quad \text{其中} C \text{为任意常数。} \quad \dots\dots 8 \text{分}$$

检验: 代入原微分方程, 左边为 $x(3Cx^2 - 2x) = 3Cx^3 - 2x^2$, 右边为 $x^2 + 3Cx^3 - 3x^2 = 3Cx^3 - 2x^2$. 验算可得结果正确。10 分

17. 试求出不共线三点 $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1), R(-1, 1, 2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设该平面的法向量为 \vec{n} , 则 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6, 0, 6).$ 2+5 分

故其单位法向量为 $\pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1).$ 10 分

18. 试求出不共线三点 $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1), R(-1, 1, 2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设该平面的法向量为 \vec{n} , 则 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6, 0, 6).$ 2+5 分

故其单位法向量为 $\pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1).$ 10 分

19. 试求出不共线三点 $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1), R(-1, 1, 2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设该平面的法向量为 \vec{n} , 则 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6, 0, 6).$ 2+5 分

故其单位法向量为 $\pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1).$ 10 分

20. 求函数 $f(x, y) = x + y$ 在 $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ 限制下的条件最大值与最小值。(提示：可以使用拉格朗日乘数法。)

解：注：此题也可以不使用乘数法。小题可以看几何意义，大题可以用三角函数代换。另外也可以使用从限制条件中解出 y 代入 f 来解无条件极值。

$$\text{设 } L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - 1] \text{ 由 } \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

由前两式相减得 $x = y$ 或者 $\lambda = 0$ (舍去)。 $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

将 $x = y$ 代入最后一式得 $x^2 = \frac{1}{2}$, 所以 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

于是 f 的条件极值为 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

综上所述, f 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $-\sqrt{2}$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

21. 试求出不共线三点 $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1), R(-1, 1, 2)$ 所确定的平面的单位法向量。

$$\text{解: 设该平面的法向量为 } \vec{n}, \text{ 则 } \vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6, 0, 6). \quad \text{2+5 分}$$

故其单位法向量为 $\pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$