

衡阳师范学院 2018-2019 学年第二学期 化学与材料科学学院化学专业 2020 级 《高等数学 (II)》期末考试试题 A 卷 参考答案及评分标准

考核类型: 闭卷

考试时量: 120 分钟

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 | 合分人 | 复查人 |
|-----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 分 值 | 15 | 15 | 10 | 60 | 100 | | |
| 得 分 | | | | | | | |

| |
|-----|
| 学 院 |
| |
| 专 业 |
| |
| 班 级 |
| |
| 学 号 |
| |
| 姓 名 |
| |

| | |
|----|-----|
| 得分 | 评卷人 |
| | |

一、单选题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $0.3 \times 10^{45} \text{N} =$ ()
 A. 0.3×10^{45} B. 12.3° C. $0.3 \times 10^{45} \text{kg m/s}^2$ D. $3 \times 10^{45} \text{kg m s}^{-2}$
2. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ ()
 A. $e^x + 1$ B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$ C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数 D. e^x
3. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ ()
 A. $e^x + 1$ B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$ C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数 D. e^x
4. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ ()
 A. $e^x + 1$ B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$ C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数 D. e^x
5. 求初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 的特解为 $y =$ ()
 A. $e^x + 1$ B. $\frac{1}{2}x^2 + 1$ C. $x^2 + C$, 其中 C 为任意常数 D. e^x

| | |
|----|-----|
| 得分 | 评卷人 |
| | |

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $x - 2y + 4 = 0$.
7. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $x - 2y + 4 = 0$.
8. 吃饭, 睡觉, 打豆豆.

9. 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程 $x - 2y + 4 = 0$.

| | |
|----|-----|
| 得分 | 评卷人 |
| | |

三、判断题 (正确打✓, 错误打✗, 每小题 2 分, 共 10 分)

10. (✗) 若二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处连续, 则其在该点处可微.

11. (✓) 如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

12. (✗) 若二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处连续, 则其在该点处可微.

13. (✓) 如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

14. (✓) 如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

| | |
|----|-----|
| 得分 | 评卷人 |
| | |

四、解答题 (共 60 分)

15. (10 分) 试将微分方程 $x \frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, x > 0$ 转换成一阶非齐次线性微分方程的标准形式, 然后使用常数变易法求解, 最后对求得的结果进行验算.

解: 一阶非齐次线性微分方程的标准形式为: $\frac{dy}{dx} + \frac{-3}{x}y = x$2 分

先解其对应的齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{-3}{x}y = 0$. 得: $y = cx^3$, 其中 c 为任意的实常数.5 分

使用常数变易法将常数 c 替换成与 x 相关的函数 $c(x)$ 代入原微分方程解得: $\frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2}$, 即 $c(x) = -\frac{1}{x} + C$, 其中 C 为任意常数. 故原微分方程的通解为:

$$y = Cx^3 - x^2, x > 0 \quad \text{其中 } C \text{ 为任意常数.} \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

检验: 代入原微分方程, 左边为 $x(3Cx^2 - 2x) = 3Cx^3 - 2x^2$, 右边为 $x^2 + 3Cx^3 - 3x^2 = 3Cx^3 - 2x^2$. 验算可得结果正确.10 分

16. (9 分) 试求出不共线三点 $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1), R(-1, 1, 2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设法向量为 \vec{n} , 则 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6, 0, 6)$7 分

故其单位法向量 $\pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$9 分

17. (9 分) 试求出不共线三点 $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1), R(-1, 1, 2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设法向量为 \vec{n} , 则 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6, 0, 6)$7 分

故其单位法向量 $\pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$9 分

18. (9 分) 试求出不共线三点 $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1), R(-1, 1, 2)$ 所确定的平面的单位法向量。

解: 设法向量为 \vec{n} , 则 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6, 0, 6)$7 分

故其单位法向量 $\pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$9 分

19. (10 分) 求函数 $f(x, y) = x + y$ 在 $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ 限制下的条件最大值与最小值。(提示: 可以使用拉格朗日乘数法。)

解: 注: 此题也可以不使用乘数法。小题可以看几何意义, 大题可以用三角函数代换。另外也可以使用从限制条件中解出 y 代入 f 来解无条件极值。

$$\text{设 } L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - 1] \text{ 由 } \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

由前两式相减得 $x = y$ 或者 $\lambda = 0$ (舍去)。.....5 分

将 $x = y$ 代入最后一式得 $x^2 = \frac{1}{2}$, 所以 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$7 分

于是 f 的条件极值为 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$9 分

综上所述, f 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $-\sqrt{2}$10 分

20. (13 分) 朱自清是怎么描写时间过得比较快的?

解: 去的尽管去了, 来的尽管来着; 去来的中间, 又怎样地匆匆呢? 早上我起来的时候, 小屋里射进两三方斜斜的太阳。太阳他有脚啊, 轻轻悄悄地挪移了; 我也茫茫然跟着旋转。于是——洗手的时候, 日子从水盆里过去; 吃饭的时候, 日子从饭碗里过去; 默默时, 便从凝然的双眼前过去。我觉察他去的匆匆了, 伸出手遮挽时, 他又从遮挽着的手边过去, 天黑时, 我躺在床上, 他便伶伶俐俐地从我身上跨过, 从我脚边飞去了。等我睁开眼和太阳再见, 这算又溜走了一日。我掩着面叹息。但是新来的日子的影儿又开始在叹息里闪过了。

在逃去如飞的日子里, 在千门万户的世界里的我能做些什么呢? 只有徘徊罢了, 只有匆匆罢了; 在八千多日的匆匆里, 除徘徊外, 又剩些什么呢? 过去的日子如轻烟, 被微风吹散了, 如薄雾, 被初阳蒸融了; 我留着些什么痕迹呢? 我何曾留着像游丝样的痕迹呢? 我赤裸裸来到这世界, 转眼间也将赤裸裸的回去罢? 但不能平的, 为什么偏要白白走这一遭啊?