2018 年普通高等学校招生全国统一考试

上海　数学试卷

考生注意

1. 本场考试时间 120 分钟, 试卷共 4 页, 满分 150 分, 答题纸共 2 页.
2. 作答前, 在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位，在试卷上作答一律不得分.
4. 用 2B 铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题　（本大题共有 **12** 题，满分 **54** 分，第 **1~6** 题每题 **4** 分，第 **7~12** 题每题 **5** 分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果**.**

$\boxed{4}$　1. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为 __18__.

$\boxed{4}$　2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $\underline{y = \pm\dfrac{1}{2}x}$.

$\boxed{4}$　3. 在 $(1+x)^7$ 的二项展开式中，x^2 项的系数为 __21__ （结果用数值表示）.

$\boxed{4}$　4. 设常数 $a \in \mathbf{R}$，函数 $f(x) = \log_2(x+a)$，若 $f(x)$ 的反函数的图像经过点 $(3,1)$，则 $a =$ __7__.

$\boxed{4}$　5. 已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z = 1 - 7\mathrm{i}$（i 是虚数单位），则 $|z| =$ __5__.

$\boxed{4}$　6. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_3 = 0$，$a_6 + a_7 = 14$，则 $S_7 =$ __14__.

$\boxed{5}$　7. 已知 $\alpha \in \left\{-2,-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1,2,3\right\}$. 若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上递减，则 $\alpha =$ __-1__.

$\boxed{5}$　8. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1,0)$、$B(2,0)$，E、F 是 y 轴上的两个动点，且 $\left|\overrightarrow{EF}\right| = 2$，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值为 __-3__.

$\boxed{5}$　9. 有编号互不相同的五个砝码，其中 5 克、3 克、1 克砝码各一个，2 克砝码两个. 从中随机选取三个，则这三个砝码的总质量为 9 克的概率是 __$\dfrac{1}{5}$__ (结果用最简分数表示).

$\boxed{5}$ 10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = q^{n+1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，前 n 项和为 S_n. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2}$，则 $q =$ ___3___.

$\boxed{5}$ 11. 已知常数 $a > 0$，函数 $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + ax}$ 的图像经过点 $P\left(p, \dfrac{6}{5}\right)$、$Q\left(q, -\dfrac{1}{5}\right)$，若 $2^{p+q} = 36pq$，则 $a =$ ___6___.

$\boxed{5}$ 12. 已知实数 x_1、x_2、y_1、y_2 满足: $x_1^2 + y_1^2 = 1$，$x_2^2 + y_2^2 = 1$，$x_1x_2 + y_1y_2 = \dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \dfrac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为 $\underline{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

二、选择题 （本大题共有 4 题，满分 20 分，每题 5 分） 每题有且只有一个正确选项，考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.

$\boxed{5}$ 13. 设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 上的动点，则 P 到该椭圆的两个焦点的距离之和为 （**C**）.

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{2}$

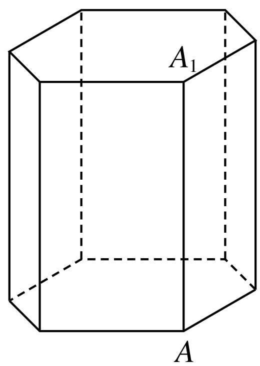
$\boxed{5}$ 14. 已知 $a \in \mathbf{R}$，则“$a > 1$”是“$\dfrac{1}{a} < 1$”的 ....（**A**）.

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

$\boxed{5}$ 15.《九章算术》中，称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马. 设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱，如图. 若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点，以 AA_1 为底面矩形的一边，则这样的阳马的个数是 ....（**D**）.

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

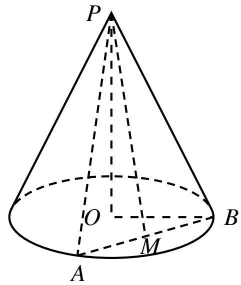


$\boxed{5}$ 16. 设 D 是含数 1 的有限实数集，$f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 若 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{6}$ 后与原图像重合，则在以下各项中，$f(1)$ 的可能取值只能是 ....（**B**）.

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) 0

三、解答题 （本大题共有 **5** 题，满分 **76** 分） 解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17.（本题满分 **14** 分）



已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，半径为 2.

$\boxed{6}$ (1) 设圆锥的母线长为 4, 求圆锥的体积；

$\boxed{8}$ (2) 设 $PO = 4$，OA、OB 是底面半径，且 $\angle AOB = 90°$，M 为线段 AB 的中点，如图. 求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小.

解 (1) $V = \frac{8}{3}\sqrt{3}\pi$；(2) 异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

18.（本题满分 **14** 分）

设常数 $a \in \mathbf{R}$，函数 $f(x) = a\sin 2x + 2\cos^2 x$

$\boxed{6}$ (1) 若 $f(x)$ 为偶函数，求 a 的值；

$\boxed{8}$ (2) 若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$，求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解.

解 (1) $a = 0$；(2) 零点为 $x = -\frac{13}{24}\pi, -\frac{11}{24}\pi, -\frac{5}{24}\pi, \frac{19}{24}\pi$.

19.（本题满分 **14** 分）

某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时，某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示：当 S 中 $x\%$ $(0 < x < 100)$ 的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \le 30, \\ 2x + \dfrac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases}\text{（单位：分钟）},$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响，恒为 40 分钟. 试根据上述分析结果回答下列问题：

$\boxed{6}$ (1) 当 x 在什么范围内时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

$\boxed{8}$ (2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式；讨论 $g(x)$ 的单调性，并说明其实际意义.

解 (1) $x \in (45,100)$ 时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间；

(2) $g(x)=\begin{cases} 40-\dfrac{x}{10}, & 0<x\le 30, \\ \dfrac{1}{50}(x-32.5)^2+36.875, & 30<x<100. \end{cases}$

$x\in(0,32.5]$ 时，$g(x)$ 单调递减；$x\in(32.5,100)$ 时，$g(x)$ 单调递增.

实际意义是当有 32.5% 的上班族采用自驾方式时，上班族整体的人均通勤时间最短. 适当的增加自驾比例，可以充分地利用道路交通，实现整体效率提升；但自驾人数过多，则容易导致交通拥堵，使得整体效率下降.

20.（本题满分 16 分）

设常数 $t>2$，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F(2,0)$，直线 $l: x=t$，曲线 $\Gamma: y^2=8x\ (0\le x\le t, y\ge 0)$. l 与 x 轴交于点 A、与 Γ 交于点 B. P、Q 分别是曲线 Γ 与线段 AB 上的动点.

4 (1) 用 t 为表示点 B 到点 F 的距离；

6 (2) 设 $t=3$，$|FQ|=2$，线段 OQ 的中点在直线 FP 上，求 $\triangle AQP$ 的面积；

6 (3) 设 $t=8$，是否存在以 FP、FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$，使得点 E 在 Γ 上? 若存在，求点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

解 (1) $|BF|=t+2$; (2) $S_{\triangle AQP}=\dfrac{7}{6}\sqrt{3}$; (3) 存在，$P\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\sqrt{5}\right)$.

21.（本题满分 18 分）

给定无穷数列 $\{a_n\}$，若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $|b_n-a_n|\le 1$，则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$“接近”.

4 (1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，$b_n=a_{n+1}+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近，并说明理由；

6 (2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=8$，$\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列，记集合 $M=\{x|x=b_i, i=1,2,3,4\}$，求 M 中元素的个数 m；

8 (3) $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列. 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足：$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近，且在 $b_2-b_1, b_3-b_2, \cdots, b_{201}-b_{200}$ 中至少有 100 个为正数，求 d 的取值范围.

解 (1) 接近; (2) $m=3$ 或 4; (3) $d\in(-2,+\infty)$.