## 一道不等式证明

对实数 $\lambda < \mathrm{e}$, 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z - \lambda z} < \pi\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-\lambda)}}.$$

**证明** 最近出现在贴吧的这个不等式相当火, 当然难度相当的大. 这题的不等式是非常 sharp 的, 当 $\lambda \to \mathrm{e}^-$ 时, 可以用数值检验, 两边几乎相等, 所以并不能随意放缩. 这道题我也是做错了好久, 在一些网友的帮助下做出来的.

首先, 我们将两边均展开为级数的形式:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z - \lambda z} &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-\lambda z\mathrm{e}^{-z}}\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^n \mathrm{e}^{-(n+1)z}\mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \lambda^n z^n \mathrm{e}^{-(n+1)z}\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\lambda^n}{(n+1)^{n+1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-\lambda)}} &= \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\left(1-\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^n \\ &= \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^n.\end{aligned}$$

注意, 上述结果只对 $|\lambda| < \mathrm{e}$ 成立. 当 $|\lambda| < \mathrm{e}$ 时, 要证明原不等式, 只需要证明

$$\frac{n!\lambda^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立即可. 令

$$a_n = \frac{\sqrt{2}\pi}{\mathrm{e}^{n+1}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n!},$$

利用 Stirling 公式和 Wallis 公式很容易得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, 我们要证明 $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$, 只需要证明 $a_n$ 单调递减即可. 注意到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(n+2)^{n+2}}{\mathrm{e}(n+1)^{n+2}}$$

要证 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 取对数, 则等价于证明

$$\ln(2n+1) - \ln(2n+2) + (n+2)\ln(n+2) - (n+2)\ln(n+1) < 1.$$

也就是

$$\ln(1+2n) - n\ln(1+n) - 3\ln(1+n) + (n+2)\ln\left(1+\frac{n}{2}\right) + n\ln 2 - \ln 2 < 1.$$

令 $f(x)=\ln(1+2x)-x\ln(1+x)-3\ln(1+x)+(x+2)\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+x\ln 2-\ln 2,\ x>0$, 那么

$$f'(x)=\frac{2}{1+2x}-\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}-\frac{3}{1+x}+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+1+\ln 2,$$

$$f''(x)=-\frac{4}{(1+2x)^2}-\frac{1}{1+x}+\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{1}{2+x}=\frac{-7x-5}{(2+x)(1+3x+2x^2)^2}<0.$$

因此 $f'(x)$ 单调递减, 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 这说明 $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 单调递增. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, 所以 $f(x)<1$, 那么到这里就完成了 $|\lambda|<\mathrm{e}$ 部分的证明[✍]. 当 $\lambda\leqslant-\mathrm{e}$ 时, 令 $-\lambda=k\mathrm{e}$, 则 $k\geqslant1$, 原不等式等价于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+k}}{\mathrm{e}^{z-1}+kz}\mathrm{d}z<\sqrt{2\pi}$$

再令 $t=\sqrt{1+k}\geqslant\sqrt{2}$, 则 $k=t^2-1$, 令

$$g(t)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{z-1}+(t^2-1)z}\mathrm{d}z,$$

则

$$g'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{(1-t)\mathrm{e}^{z-1}-(t^2+1)z}{[\mathrm{e}^{z-1}+(t^2-1)z]^2}\mathrm{d}z<0,$$

于是 $g(t)$ 单调递减,

$$g(t)\leqslant g\big(\sqrt{2}\big)=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^{z-1}+z}<\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^{z-1}}=\sqrt{2}\mathrm{e}<\sqrt{2\pi},$$

证毕.

[✍]特别鸣谢积分群 QQ 小冰同学!