

导函数介值定理 (达布定理)

定理 1. 闭区间 $[a, b]$ 上的可导函数一定可以取到介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的值.

证明. 我们证明它的等价形式, 即所谓导函数零点定理: 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. 对于介值定理我们只需要考虑函数 $g(x) = f(x) - \mu x$, 其中 μ 为介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任何值.

不妨假定 $f'_+(a) < 0 < f'_-(b)$, 由导数定义

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

由极限保号性, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (a, a + \delta)$ 时, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 即 $f(x) - f(a) > 0$, 这说明 $f(a)$ 不是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 同理 $f(b)$ 也不是最大值. 因此存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 从而由费马定理可知 $f'(\xi) = 0$. ☆

这个定理阐述了导函数很重要的性质: 介值性. 对于一般的函数而言, 连续才具有介值性, 而导函数的特殊之处在于它存在就具有介值性, 并不需要导函数连续, 当然, 我们有经典的导函数不连续的例子:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

导函数极限定理

定理 2. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续, 在 $x = 0$ 的去心邻域内可导, 且极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且

$$f'(x_0) = A.$$

证明. 这个定理看起来高大上, 实际上一步定义加洛必达就完了:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0).$$

☆

这个定理也阐述导函数的一个特性, 对于连续函数而言, 极限存在无法保证函数的连续性, 但是导函数很特殊, 极限存在就意味着连续. 当然, 上述结论对于单侧导数也同样成立.

步入正题, 以上两个定理是考研教材未列举出来, 而实则需要大家掌握其证明和应用的定理. 在此定理的基础上, 我们推出导函数的其他结论.

推论 1. 可导函数的导函数一定没有第一类间断点.

证明. 不管是第一类的可去间断点还是跳跃间断点, 因为导函数的左右极限均存在, 那么这都将与导函数的极限定理矛盾. ☆



注: 导函数可以有间断点, 但是只能是第二类间断点.

由于积分与导数的互逆性, 我们有

推论 2. 含有第一类间断点的函数在包含此间断的区间上不存在原函数.

利用导函数介值定理, 我们可以很容易证明广义的罗尔定理:

广义罗尔定理

定理 3. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导, 其中 a, b 可以是无穷大, 且满足 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明. 反证法. 假定不存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$, 那么根据导函数的介值定理可知 $f'(x)$ 在 (a, b) 上不变号, 即 $f'(x)$ 恒正或恒负, 因此 $f(x)$ 是严格单调的, 这与 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$ 矛盾, 因此存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. ☆

当然, 广义的罗尔定理以及广义的柯西中值定理都有其特殊的证明方法, 我们假定 $a = -\infty, b = +\infty$, 令

$$F(t) = \begin{cases} f(\tan t), & t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ A, & t = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

则 $F(t)$ 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上满足普通的罗尔定理条件, 存在 $\eta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 使得 $F'(\eta) = f'(\tan \eta) \sec^2 \eta = 0$, 取 $\xi = \tan \eta$, 则 $f'(\xi) = 0$.

除此之外, 在这里会涉及到一些让多数同学混淆的符号, 这里留一个例题给大家:

1. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有定义,

(1) 如果 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 存在, 问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否连续? 是否可导?

(2) 如果 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在且相等, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否可导?

(3) 在 (2) 的基础上假定 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 结果又如何?

一阶线性微分方程的通解形式

在同济高数教材上给出的方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解形式如下:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x) dx} + C \right) \\ &= C e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} \end{aligned}$$

首先同济教材对此公式的推导采用及其复杂的方法, 齐次此通解的形式是及其不明确的式子, 这里包含了三个不定积分符号, 所以每个不定积分都是都带有常数的, 虽然同济书上指出这里的不定积分理解为某个原函数, 但是这种写法无法让人理解, 那么它正确的写法应该怎么写呢, 我们利用积分因子给出它的推导, 和形式上的明确化:

$$y = C e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds.$$

积分因子法的推导

在同济高数教材上给出的方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解形式如下:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x) dx} + C \right) \\ &= C e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} \end{aligned}$$

注意到 $P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$ 是 $p(x)$ 的一个原函数, 在原方程两边乘以 $e^{P(x)}$ 得

$$e^{P(x)}(y' + p(x)y) = (ye^{P(x)})' = q(x)e^{P(x)}$$

将上式从 x_0 到 x 再积分一次得

$$ye^{P(x)} - y_0 e^{P(x_0)} = \int_{x_0}^x q(t) e^{P(t)} dt$$

我们把形式简化一点可以写为

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds$$

上述解其实是满足 $y(x_0) = y_0$ 的解, 把 y_0 写为 C , 就得到通解形式

$$y = C e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds$$

这就是非常明确的形式解, 不包含任何不定积分符号, 只有一个积分常数, 每个变限积分都是具体的一个函数.

一道级数敛散性判别

最近有读者问了我一道级数问题, 难度还不小, 之前也有读者问过类似的题, 今天一并给出解答.

2. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, $a_n > 0 (n > 1)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + b_n, n \geq 2$$

证明:

$$1. \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n, n \geq 2;$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛.}$$

证明 第一问显然, 只需要注意到

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$$

然后两边除以 $\ln n$ 即可. 然后

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{\frac{1}{n \ln n}}{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}} \left(1 + \frac{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}}{\frac{1}{n \ln n}} b_n\right) = \frac{\frac{1}{n \ln n}}{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}} (1 + c_n) \quad (*)$$

注意到

$$c_n = \frac{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}}{\frac{1}{n \ln n}} b_n \sim b_n$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也是绝对收敛, 则存在常数 $m \in \mathbb{N}$, 当 $k \geq m$ 时 $|c_k| < \frac{1}{2}$. 而由 (*) 式可知

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}} > \frac{a_n}{\frac{1}{n \ln n} (1 + c_n)} > \cdots > \frac{a_m}{\frac{1}{m \ln m} \prod_{k=m}^n (1 + c_k)}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\prod_{k=m}^n (1 + c_k)$ 收敛到某个正的常数, 也就是

当 n 充分大时, $a_n > \frac{C}{n \ln n}$, C 为某个正的常数, 这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

同类似的一道题

如果正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + O(b_n), n \rightarrow \infty$$

其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 这题是史济怀数学分析课后问题, 有上一题就知道这题该怎么做了, 和上面类似的推导, 记 $c_n = \frac{n}{n+1} O(b_n)$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{1+c_n},$$

于是得到

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{a_m}{\frac{1}{m} \prod_{k=m}^n (1+c_k)}$$

然后 $\prod_{k=m}^n (1+c_k)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 的极限存在, 说明 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 同阶, 进而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

解答黄之老师两道征解题

向 禹

征解题一解答

1. 设 $f(t) = \int_0^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x - tx) dx, t \in \mathbb{R}$. 证明: 当 t 为非负整数时, $f(t) = \frac{\pi}{t!}$; 当 t 为负整数时, $f(t) = 0$. 并证明: 若 n 为正整数, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} e^{\cos x} \cos\left(\sin x - \frac{nx}{2}\right) \sin \frac{(n+1)x}{2} \csc \frac{x}{2} dx = e\pi.$$

解 利用留数定理可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x - tx) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{\cos x + i \sin x - itx} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \exp(e^{ix} - itx) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{t+1} i} dz \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res} \left(\frac{e^z}{z^{t+1} i}, z=0 \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{t!}, & t \in \mathbb{N} \\ 0, & t \in \mathbb{Z}^- \end{cases}.$$

最后一步留数的计算只需要将 $\frac{e^z}{z^{t+1} i}$ 展开为 Laurent 级数, 找其负一次幂系数即可.

注意到

$$\begin{aligned} & \cos \left(\sin x - \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{(n+1)x}{2} \\ &= \left(\cos(\sin x) \cos \frac{nx}{2} + \sin(\sin x) \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{(n+1)x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cos(\sin x) \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \frac{x}{2} \right] + \frac{1}{2} \sin(\sin x) \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]. \end{aligned}$$

于是原极限可以成四部分, 其中由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$L_4 = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{\cos x} \sin(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx = 0.$$

而

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos(\sin x) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi + \pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{e\pi}{2}. \end{aligned}$$

上述积分利用傅里叶级数

$$e^{\cos x} \cos(\sin x) = \operatorname{Re}[\exp(e^{ix})] = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!}$$

即可得到.

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos(\sin x) dx = \frac{1}{2} f(0) = \frac{\pi}{2}, \\ L_3 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{\cos x} \sin(\sin x) \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \sin(\sin x) \frac{\cos^2(x/2)}{\sin(x/2) \cos(x/2)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \exp(e^{ix}) \frac{1 + (e^{ix} + e^{-ix})/2}{(e^{ix} + e^{-ix})/(2i)} dx \\
&= \frac{1}{4} \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} e^z \frac{z+1}{z(z-1)} dz \\
&= \frac{1}{4} \operatorname{Im} [2\pi i (e-1)] = \frac{(e-1)\pi}{2}.
\end{aligned}$$

注意上述积分中, 极点 $z=1$ 在围道边界上, 由小弧引理, 辐角值取 π 而不是 2π .
因此最后所求极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos\left(\sin x - \frac{nx}{2}\right) \sin \frac{(n+1)x}{2} \csc \frac{x}{2} dx = L_1 + L_2 + L_3 - L_4 = e\pi.$$

征解题二解答

2. 当 $t \in \mathbb{R}$ 时, 以下两个极限分别是什么?

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos\left(\sin x - \frac{tx}{2}\right) \sin \frac{(t+1)x}{2} \csc \frac{x}{2} dx, \\
&\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos\left(\sin x - \frac{tx}{2}\right) \sin \frac{(t+1)x}{2} \csc \frac{x}{2} dx.
\end{aligned}$$

解 注意到在第一题中, 如果 $n \rightarrow -\infty$, 则 $L_1 = -\frac{e\pi}{2}$, $L_2 = \frac{\pi}{2}$, $L_3 = \frac{(e-1)\pi}{2}$, 则当 $n \rightarrow -\infty$ 时原极限为零, 那么根据归结原理, 这里的两个极限如果存在一定和上述 $n \rightarrow +\infty$ 和 $n \rightarrow -\infty$ 的极限分别相等. 事实上, 这里的极限利用积化和差公式也可以拆开成四部分. 其中 L_2, L_3 为常数, L_4 由 Riemann-Lebesgue 引理知为 0. 剩下 L_1 , 我们只证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t, x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(n, x) dx,$$

其中

$$g(t, x) = \frac{e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x.$$

对任意 $t > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n \leq t < n+1$, 且 $t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow +\infty$, 则

$$\begin{aligned}
g(t, x) - g(n, x) &= \frac{e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \left[\sin\left(t + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right] \\
&= \frac{2e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{t-n}{2} x \cos\left(\frac{n+t}{2} + 1\right)x.
\end{aligned}$$

注意到

$$\left| \frac{e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{t-n}{2} x \right| < \left| \frac{\frac{x}{2} e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \right|$$

上式右端在 $[0, \pi]$ 绝对可积, 于是用类似 Riemann-Lebesgue 引理的证法可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [g(t, x) - g(n, x)] = 0.$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n, x) = e\pi$, 所以 $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t, x) = e\pi$. 同理可得 $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t, x) = 0$.

几个略有难度的考研极限题

今天讲三个极限题的计算, 其中前两个是非数类难度, 第三个是数学类难度, 那么这里介绍的都是常规的计算技巧, 非常规技巧参见我在 2017 年 9 月份左右发布的 Stolz 定理的函数 Stolz 定理的内容.

经典考题

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$$

解 对任意 $x > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$, 且 $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$, 于是

$$\frac{\int_0^{n\pi} |\sin t| dt}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{n\pi}$$

注意到 $\int_0^{n\pi} |\sin t| dt = n \int_0^\pi |\sin t| dt = 2n$, 于是

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} \leq \frac{2(n+1)}{n\pi}$$

不难得知所求的极限为 $\frac{2}{\pi}$.



注: 本题的结论可以有一些推广, 比如上述 $\sin t$ 换为 $\cos t$, 结论照样不变, 利用辅助角公式我们可以进一步得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |a \sin t + b \cos t| dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^x |\sin(t + \varphi)| dt}{x} = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{\pi}$$

事实上, 更一般的结论是

定理 4. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

复习全书上的一道题

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t |\sin t| dt}{x^2}$$

解 对任意 $x > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$, 且 $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$, 于是

$$\frac{\int_0^{n\pi} t |\sin t| dt}{(n+1)^2 \pi^2} \leq \frac{\int_0^x t |\sin t| dt}{x^2} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi} t |\sin t| dt}{n^2 \pi^2}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} t |\sin t| dt &= \int_0^{n\pi} (n\pi - t) |\sin(n\pi - t)| dt \\ &= \int_0^{n\pi} (n\pi - t) |\sin t| dt \\ &= \frac{n\pi}{2} \int_0^{n\pi} |\sin t| dt = n^2 \pi \end{aligned}$$

于是

$$\frac{n^2 \pi}{(n+1)^2 \pi^2} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x t |\sin t| dt \leq \frac{(n+1)^2 \pi}{n^2 \pi^2}$$

不难得知所求的极限为 $\frac{1}{\pi}$.



注: 上述方法虽然对于更高次的极限也可以使用, 但是极限的计算越来越难, 最好是使用函数 Stolz 定理了. 当然了, 利用 $\sin x$ 的傅里叶级数可以得到更一般的结论, 这里就不再介绍.

最后再看一个数学类难度的问题

小有难度的一题

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt$$

解 对任意 $x > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$, 且 $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$,

于是

$$\frac{1}{\ln(n+1)\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \frac{1}{\ln x} \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \frac{1}{\ln(n\pi)} \int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t+k\pi} dt, \\ \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi} dt &< \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t+k\pi} dt < \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} dt, \\ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} &< \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t+k\pi} dt < \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

而上述左右两边的等价无穷大均为 $\frac{2}{\pi} \ln n$, 于是原极限为 $\frac{2}{\pi}$.



注: 作为练习, 读者可以求如下极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} dt.$$

解答一道颇有难度的反常积分证明

难题

今天有同学问了我下面这道题:

4. 设 f 为 $[0, +\infty)$ 上的连续函数, 满足 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx < +\infty$. 求证: 函数

$$g(x) = f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

满足

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) dx = \int_0^{+\infty} f^2(x) dx.$$

这道题的话, 三年前我在贴吧就解答过一次, 记得当时很快就解决了. 但是今天这位同学问我的时候才让记起来事实上我当时忽略了一个很重要的问题. 现在贴吧抽风, 帖子都找不到了. 下面来看正确解答:

证明 要证明

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} g^2(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt \right)^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(f^2(x) - 4e^{-x} f(x) \int_0^x e^t f(t) dt + 4e^{-2x} \left(\int_0^x e^t f(t) dt \right)^2 \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} f^2(x) dx \end{aligned}$$

等价于证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) \int_0^x e^t f(t) dt dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x} \left(\int_0^x e^t f(t) dt \right)^2 dx.$$

这只需要利用分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) \int_0^x e^t f(t) dt dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x} d \left(\int_0^x e^t f(t) dt \right)^2 \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x e^t f(t) dt \right)^2 e^{-2x} dx. \end{aligned}$$

三年前在贴吧的时候我做到这里就结束了, 现在看来其实是不对的. 在最后一步分部积分中, 我们需要证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^t f(t) dt \right)^2}{e^{2x}} = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^t f(t) dt}{e^x} = 0.$$

之前我忽略了, 而恰巧这是本题最难的地方. 值得一提的是, 以下洛必达法则的做法是错误的:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^t f(t) dt}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = 0$$

因为仅从题目 $f \in L^2 \cap C[0, +\infty)$ 是无法得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 的, 比如我们有经典的反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx$$

收敛, 而其被积函数不趋于 0, 甚至是无界的. 正确做法应该是由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^x e^t f(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^x e^t dt \right) \left(\int_0^x e^t f^2(t) dt \right) < e^x \left(\int_0^x e^t f^2(t) dt \right).$$

令 $F(x) = \int_0^x f^2(t) dt$, 则由题意知极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$ 存在,

$$\int_0^x e^t f^2(t) dt = \int_0^x e^t dF(t) = e^x F(x) - \int_0^x e^t F(t) dt$$

注意到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x F(x) - \int_0^x e^t F(t) dt}{e^x} = A - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^t F(t) dt}{e^x} = A - A = 0$$

这就意味着极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^t f(t) dt\right)^2}{e^{2x}} = 0$$

证毕.

微分中值定理与考研极限计算

5. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right)$.

解 这道题估计绝大多数考研的学生都做过的, 很多人基本都是先把 n 换成 $\frac{1}{x}$, 然后洛必达开始操作了. 俗话说, 没有什么极限是洛必达不能解决的, 如果有, 就再洛 (纯属玩笑, 洛必达慎用). 不否认这样可以做出来, 但是对于考研来说, 节约做题时间也是很有必要的, 我们用拉格朗日中值定理三下五除二解决. 为了方便大家看清楚, 我们考虑 $f(x) = \arctan x$, 存在 $\xi \in \left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n+1}\right)$, 使得 $f\left(\frac{a}{n}\right) - f\left(\frac{a}{n+1}\right) = f'(\xi) \left(\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}\right)$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\xi \rightarrow 0$, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{1 + \xi^2} \left(\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{a}{n(n+1)} = a. \end{aligned}$$

是不是又快又准! 如果稍微有一点基础, 用反正切恒等式 $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$, $xy > -1$, 然后等价无穷小也能很快解决, 比起洛必达实在是事半功倍. 这是一个比较简单的例子, 再看一例:

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x}$.

解 这题比起上一题稍微隐蔽一点, 当然我知道很多拿着就洛必达, 反正经过一些列复杂的求导通分运算之后确实可以做出, 但是我们用拉格朗日中值定理, 简直酸爽. 考虑 $f(x) = \ln(1+x)$, 这里是 $f(\tan x) - f(\sin x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan x) - \ln(1 + \sin x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \xi} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当然, 对数里面分出一个 1 再等价也一样.

前面这两个题呢, 都比较简单, 而且还有一些其他的替代方法. 下面我们来看一道题, 不用中值定理你都没法做:

7. 设 $f(x)$ 连续可导, 且 $f'(0) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^2}$.

解 这里首先洛必达法则不能做, 甚至连泰勒公式都没法做, 因为分母是二次方, 泰勒公式需要将分子展开到二次方, 也就是会出现二阶导数, 然而题目只有一阶导数连续. 然而这题就是中值定理的菜:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)(e^x - 1 - x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当然, 我们认为这题还是比较简单, 还可以再改难一点:

8. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^3}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) \frac{e^x - 1 - x}{x^3} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)}{\xi} \frac{\xi}{x} \\ &= \frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注意我们使用拉格朗日中值定理的时候, ξ 介于 x 与 $e^x - 1$ 之间, 所以 $\xi, x, e^x - 1$ 都是等价无穷小.

考研内用中值定理解决的题目难度也就上述题目了, 考研以外的话, 题目难度就大不相同了. 当然, 今天写这篇文章的目的不是说中值定理是万能的, 每一种方法都存在其局限性. 我们以前介绍了洛必达法则, Stolz 定理, 它们也只是某些场合适用, 而大部分人(包括某些所谓的老师)是根本不知道如何使用洛必达法则的, 完全就是瞎用, 错了还不自知. 但这并不是说我们就不能用这些方法了, 很多地方, 洛必达或者中值定理都有很好的应用, 前提是你对方法的掌握程度足够好, 而不是人云亦云.

一道小有难度的导数概念题

上次的题目涉及到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^2}$ 的极限问题, 前提是给定 $f(x)$ 连续可导, 然后 $f'(0) = 1$, 当然这题比较简单. 现在反过来考虑, 如果 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^2} = 0$, 问 $f(x)$ 是否在 $x = 0$ 处可导? 那我们知道如果 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$ 的话, $f'(0)$ 是存在的.

中国科学技术大学数学科学学院 2019 夏令营试题——数学分析

1. 请写出一个具体的定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数 $f(x, y)$, 使得下式左右两边都有意义, 但是却不相等.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) dy.$$

有没有可能找到一个二元连续函数的 f , 满足如上的要求, 为什么?

2. 设某函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) 有一阶连续偏导数, 而且存在 $C > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 满足

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \geq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

求证: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, f 在 \mathbf{x} 点的 Jacobi 矩阵 $Df(\mathbf{x})$ 可逆.

3. 设有二阶连续可偏导的函数 $f(x, y)$ 满足

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

而且

$$f(1, 1) = f(1, -1) = f(-2, 0).$$

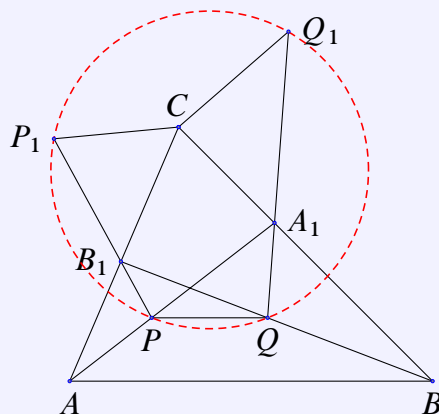
求证:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2019, \quad \forall x^2 + y^2 \leq 1.$$

4. 设函数列 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一致收敛的, 且对于任何 $x \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 是收敛的. 问: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上是不是一致收敛的? 请给出理由.

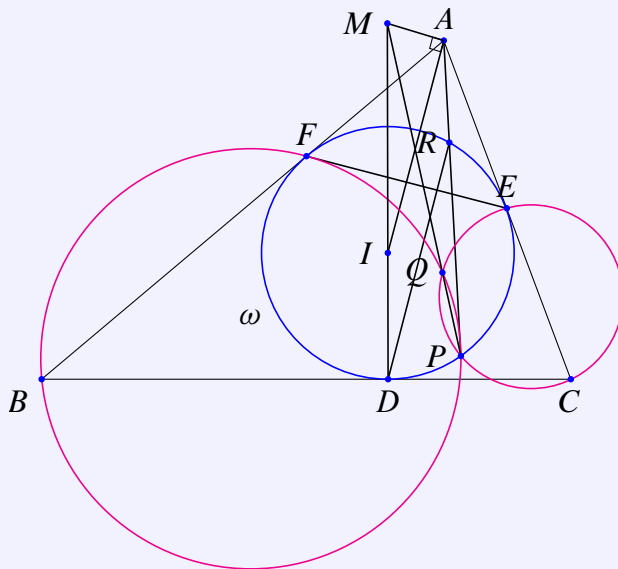
IMO 第一天平面几何题

在三角形 ABC 中, 点 A_1 在边 BC 上, 点 B_1 在边 AC 上. 点 P 和点 Q 分别在线段 AA_1, BB_1 上, 满足 PQ 与 AB 平行. 设 P_1 是直线 PB_1 上一点, 满足 B_1 在线段 PP_1 上 (不含端点) 且 $\angle PP_1C = \angle BAC$, 类似地在直线 QA_1 上定义点 Q_1 , 使得 A_1 在线段 QQ_1 上 (不含端点), 且 $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. 证明: P, Q, P_1, Q_1 四点共圆.



IMO 第二天平面几何题

在锐角三角形 ABC 中, I 是内心, $AB \neq AC$. 三角形 ABC 的内切圆 ω 与边 BC, CA 和 AB 分别相切于点 D, E 和 F , 过点 D 且垂直于 EF 的直线与 ω 的另一交点为 R , 直线 AR 与 ω 的另一个交点为 P , 三角形 PCE 和三角形 PBF 的外接圆交于另一点 Q . 证明: 直线 DI 和 PQ 的交点在过点 A 且垂直于 AI 的直线上.



一道概率论练习题

设 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布随机变量序列, $\{\xi_n\}$ 的分布列为 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\eta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{2^k}$. 求证: $\{\eta_n\}$ 的分布收敛于 $[-1, 1]$ 上的均匀分布.

证明. 首先 ξ_k 的特征函数为

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \mathbb{E}(e^{it\xi_k}) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t.$$

因此 $\eta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{2^k}$ 的特征函数为

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \cos \frac{t}{2^k}.$$

利用熟知的极限公式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{t}{2^k} = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$, 这刚好就是 $[-1, 1]$ 上均匀分布的特征函数, 因此 $\{\eta_n\}$ 的分布收敛于 $[-1, 1]$ 上的均匀分布. ☆

一道线代练习题

设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 且 A 为非零半正定矩阵, B 为正定矩阵, 证明: $|A + B| > |B|$.

证明. 待证式等价于 $|B^{-1}||A + B| = |B^{-1}A + I| > 1$. 设 λ 为 $B^{-1}A$ 的任一特征值, 对应的特征向量为 x , 则 $B^{-1}Ax = \lambda x$, 即 $Ax = \lambda Bx$, 于是 $x^T Ax = \lambda x^T Bx$, 那么由条件可知 $\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T Bx} \geq 0$. 且由于 A 为非零矩阵, 那么至少有一个特征值 $\lambda \neq 0$, 于是 $B^{-1}A + I$ 的所有特征值都不小于 1, 且至少有一个特征值严格大于 1, 于是 $|B^{-1}||A + B| = |B^{-1}A + I| > 1$, 得证. ☆

一道小思考题

已知函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0, 1)$, 问 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是否有界?

纠正一道最近频繁问及的错题

俗话说,好题不出门,坑题传千里.最近,很多 qq 群都在传一道错误的中值定理证明题如下:

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数,且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)^3$.

直接取反例 $f(x) = x(1-x)$, $[a, b] = [0, 1]$ 可知题目是错的, 正确的题目应当是

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$. 进一步, 我们需要说明, 这里的 $-\frac{1}{12}$ 其实就是最佳系数.

证明. 首先注意到由分部积分可得

$$\int_a^b f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-a)(b-x) dx,$$

然后由积分中值定理得

$$\int_a^b f(x) dx = -\frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-a)(b-x) dx = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

事实上通过以上过程, 我们证明了

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3, \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|,$$

而且取 $f(x) = (x-a)(b-x)$ 可以取等, 所以系数 $-\frac{1}{12}$ 是最佳的. ☆

纵观上述证明, 我们利用到了 $f''(x)$ 的可积性, 也就是题目给定了 $f''(x)$ 的连续性. 但是根据 Darboux 定理可知 $f''(x)$ 的介值性不依赖于它的连续性, 于是, 我们可以将题目中的二阶连续可导改为二阶可导, 结论照样成立, 但证明的难度会变大.

令 $K = -\frac{12}{(b-a)^3} \int_a^b f(x) dx$, 用反证法, 假设不存在 ξ 使得 $f''(\xi) = K$ 成立, 根据 Darboux 定理有 $f''(x) > K$ 或者 $f''(x) < K$ 恒成立. 不妨设 $f''(x) > K$, $x \in [a, b]$. 那么由 Taylor 公式可得

$$0 = f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\eta_x)}{2}(a-x)^2,$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + f'(x)(a-x)] dx &= 2 \int_a^b f(x) dx \\ &= - \int_a^b \frac{f''(\eta_x)}{2} (a-x)^2 dx < -\frac{K}{2} \int_a^b (a-x)^2 dx \\ &= -\frac{K}{6} (b-a)^3 = 2 \int_a^b f(x) dx,\end{aligned}$$

矛盾, 因此原结论成立.

再谈行列式降阶公式

在两年前的博文中, 其实我们已经很详细探讨过矩阵 AB 与 BA 的关系, 最近在上课的时候又碰到类似的问题, 我们简单介绍一下.

定理 5 (行列式降阶公式). 设 $A_{m \times n}, B_{n \times m}$, 则 $\lambda^n |\lambda E_m \pm AB| = \lambda^n |\lambda E \pm BA|$.

证明. 在等式

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ A & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E_n & B \\ O & \lambda E_m \pm AB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O \\ -A & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_n \pm BA & B \\ O & \lambda E_m \end{pmatrix}$$

两边取行列式即可得到.

☆

对于数学系的同学这个公式应用还是非常广的, 比如下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & \lambda + a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & \lambda + a_n b_n \end{vmatrix}$$

记 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, \dots, b_n)^T$, 那么有 $|\lambda E_n + \alpha \beta^T| = |\lambda + \beta \alpha^T| = \lambda + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.

对于非数学类的学生而言, 更多的是在 $n = m$ 的条件下应用. 行列式的降阶公式其实等价于 $\lambda^n \varphi_{AB}(\lambda) = \lambda^m \varphi_m(BA)$, 也就是 AB 与 BA 的特征多项式其实就相差一个因子 λ^{n-m} , 这说明 AB 与 BA 的所有非零特征值连同其重数都是相同的. 由迹与特征值的关系可知 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. 事实上, 令 $A_{m \times n} = (a_{ij}), B = (b_{ji})$, 则 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$. 应用这个性质可知 $\text{tr}(A^T A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$, 于是

$A = O \Leftrightarrow \text{tr}(A^T A) = 0$. 比如我们可以解决一道很简单的征解题: 如果 $A^T A = A^2$, 则 $A = A^T$. 这只需证明 $\text{tr}(A - A^T)(A - A^T)^T = 0$ 即可, 显然.

最后我们看一个非数类的一道考题: 设 A, B 都是 n 阶方阵, 已知 $E + AB$ 可逆, 证明 $E + BA$ 可逆.

证明. 这道题利用降阶公式直接秒杀, 而原题则是构造一些列的方程组, 写了一大堆. 不过这里我们用另一种写法, 先证明 AB 与 BA 具有相同的非零特征值: 设 $ABX = \lambda X, \lambda \neq 0, X \neq 0$, 则 $BX \neq 0$, 于是 $(BA)BX = \lambda BX$, 这说明 AB 的非零特征值都是 BA 的非零特征值, 反之也对. 那么 $E + AB$ 可逆说明 AB 没有特征值 -1 , 于是 BA 也没有特征值 -1 , 即 $E + BA$ 可逆. ☆

四道颇有意思的不定积分

最近在贴吧看到一道不定积分题如下

$$\int \frac{x \sin x}{(x + \sin x)^2} dx.$$

这题原则上讲, 还是小有难度的, 然后我用 MMA 简单算了一下, 确实是有初等原函数的. 像这种构造的函数, 能够有初等原函数确实不容易, 同时我还发现, 下面几个积分都是一样的

$$\int \frac{x \sin x}{(x + \sin x)^2} dx, \int \frac{x \sin x}{(x - \sin x)^2} dx, \int \frac{x \cos x}{(x + \cos x)^2} dx, \int \frac{x \cos x}{(x - \cos x)^2} dx.$$

这里我们给出最后一个积分的计算, 其他都类似.

$$\begin{aligned} \int \frac{x \cos x}{(x - \cos x)^2} dx &= \int \frac{x \cos x}{1 + \sin x} \frac{1 + \sin x}{(x - \cos x)^2} dx \\ &= - \int \frac{x \cos x}{1 + \sin x} d\left(\frac{1}{x - \cos x}\right) \\ &= - \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)(x - \cos x)} + \int \frac{1}{x - \cos x} d\left(\frac{x \cos x}{1 + \sin x}\right) \\ &= - \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)(x - \cos x)} + \int \frac{1}{x - \cos x} \frac{-x + \cos x}{1 + \sin x} dx \\ &= - \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)(x - \cos x)} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} + C \\ &= - \frac{\cos^2 x}{(x - \cos x)(1 + \sin x)} + C = \frac{\sin x - 1}{x - \cos x} + C. \end{aligned}$$

2019 年全国高中数学联赛一试 A 卷

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 已知正实数 a 满足 $a^a = (9a)^{8a}$, 则 $\log_a(3a)$ 的值为_____.

答案: $\frac{9}{16}$.

2. 若实数集合 $\{1, 2, 3, x\}$ 的最大元素与最小元素之差等于该集合的所有元素之和, 则 x 的值为_____.

答案: $-\frac{3}{2}$.

3. 平面直角坐标系中, \vec{e} 是单位向量, 向量 \vec{a} 满足 $\vec{a} \cdot \vec{e} = 2$, 且 $|\vec{a}|^2 \leq 5|\vec{a} + t\vec{e}|$ 对任意实数 t 成立, 则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是_____.

答案: $[\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$.

4. 设 A, B 为椭圆 Γ 的长轴顶点, E, F 为 Γ 的两个交点, $|AB| = 4, |AF| = 2 + \sqrt{3}$, P 为 Γ 上一点, 满足 $|PE| \cdot |PF| = 2$, 则 $\triangle PEF$ 的面积为_____.

答案: 1.

5. 在 $1, 2, 3, \dots, 10$ 中随机选出一个数 a , 在 $-1, -2, \dots, -10$ 中随机选出一个数 b , 则 $a^2 + b$ 被 3 整除的概率为_____.

答案: $\frac{37}{100}$.

6. 对任意闭区间 I , 用 M_I 表示函数 $y = \sin x$ 在 I 上的最大值, 若正数 a 满足 $M_{[0, a]} = 2M_{[a, 2a]}$, 则 a 的值为_____.

答案: $\frac{5}{6}\pi$ 或 $\frac{13}{12}\pi$.

7. 正方体 $ABCD - EFGH$ 的一个截面经过顶点 A, C 及棱 EF 上一点 K , 且将正方体分成体积比为 $3:1$ 的两部分, 则 $\frac{EK}{KF}$ 的值为_____.

答案: $\sqrt{3}$.

8. 将 6 个数 $2, 0, 1, 9, 20, 19$ 按任意次序排成一行, 拼成一个 8 位数 (首位不为 0), 则产生的不同的 8 位数的个数为_____.

答案: 498.

二、解答题: 本大题共 3 小题, 满分 56 分.

9. (本题满分 16 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = a, CA = b, AB = c$. 若 b 是 a 与 c 的等比中项, 且 $\sin A$ 是 $\sin(B - A)$ 与 $\sin C$ 的等差中项, 求 $\cos B$ 的值.

答案: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 Ω 与抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$ 恰有一个公共点, 且圆 Ω 与 x 轴相切于 Γ 的焦点 F . 求圆 Ω 的半径.

答案: $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

11. 称一个复数列 $\{z_n\}$ 为“有趣的”, 若 $|z_1| = 1$, 且对任意正整数 n , 均有 $4z_{n+1}^2 + 2z_n z_{n+1} + z_n^2 = 0$. 求最大的常数 C , 使得对一切有趣的数列 $\{z_n\}$ 及任意正整数 m , 均有 $|z_1 + z_2 + \cdots + z_m| \geq C$.

答案: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2019 年全国高中数学联赛二试 A 卷

一、(本题满分 40 分) 如图 1, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 边的中点. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 使得 AP 平分 $\angle BAC$, 直线 MP 与 $\triangle ABP$, $\triangle ACP$ 的外接圆分别相交于不同于点 P 的两点 D , E . 证明: 若 $DE = MP$, 则 $BC = 2BP$.

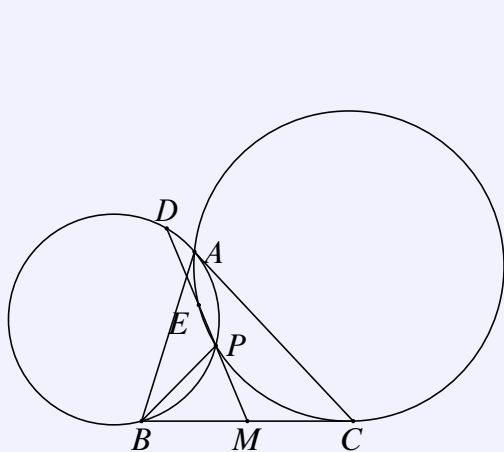


图 1

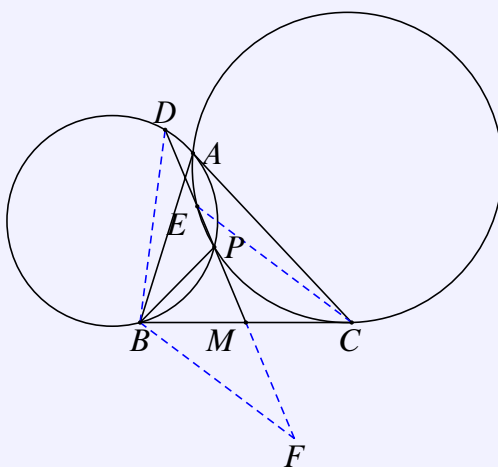


图 2

证明. 如图 2, 延长 PM 到点 F , 使得 $MF = ME$, 连接 BF, BD, CE . 由条件可知

$$\angle BDP = \angle BAP = \angle CAP = \angle CEP = \angle CEM.$$

因为 $BM = CM$ 且 $EM = FM$, 所以 $BF = CE$ 且 $BF \parallel CE$, 于是 $\angle F = \angle CEM = \angle BDP$, 进而 $BD = BF$. 又 $DE = MP$, 故 $DP = EM = FM$. 于是在等腰 $\triangle ABC$ 中, 由对称性得 $BP = BM$, 从而 $BC = 2BM = 2BP$. ☆

二、(本题满分 40 分) 设整数 $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ 满足 $1 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2019} =$

99. 记

$$f = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2019}^2) - (a_1a_3 + a_2a_4 + a_3a_5 + \cdots + a_{2017}a_{2019}),$$

求 f 的最小值 f_0 , 并确定使 $f = f_0$ 成立的数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2019})$ 的个数.

答案: $f_0 = 7400$, 使 $f = f_0$ 成立的数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2019})$ 的个数为 C_{1968}^{48} .

三、(本题满分 50 分) 设 m 为正整数, $|m| \geq 2$. 整数列 a_1, a_2, \cdots , 满足: a_1, a_2 不全为零, 且对任意正整数 n , 均有 $a_{n+2} = a_{n+1} - ma_n$. 证明: 若存在整数 r, s ($r > s \geq 2$) 使得 $a_r = a_s = a_1$, 则 $r - s \geq |m|$.

证明: 略.

四、(本题满分 50 分) 设 V 是空间中 2019 个点构成的集合, 其中任意四点不共线. 某些点之间连有线段, 记 E 为这些线段构成的集合. 试求最小的正整数 n , 满足条件: 若 E 至少有 n 个元素, 则 E 一定含有 908 个二元子集, 其中每个二元子集中的两条线段有公共端点, 且任意两个二元子集的交为空集.

答案: 2795.

几个有趣的结果

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \pi, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \pi, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^3 = \frac{3\pi}{4}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^4 = \frac{2\pi}{3}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^5 dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^5 = \frac{115\pi}{192}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^6 dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^6 = \frac{11\pi}{20}. \end{aligned}$$

数值结果显示, 上述等式从 7 次方开始就不再成立了.

解答一道贴吧级数题

今天逛了一下贴吧,看到一道级数题如下:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[k^2 \ln \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right) + \frac{1}{4} \right].$$

好久没做这种题了,还有点手生了. 解答此题我们需要利用 ζ 函数的母函数与 $\ln \sin x$ 的傅里叶级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^{2n} = \frac{1 - \pi x \cot \pi x}{2}, \quad \ln \sin x = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n}.$$

下面就是计算了.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^2 \ln \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right) + \frac{1}{4} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 4^n k^{2n}} + \frac{1}{4} \right] \\ &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n 4^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n-2}} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(2n-2)}{n \cdot 4^n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{(n+1) 2^{2n+2}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n+1} dx \\ &= -2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^{2n+1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (\pi x^2 \cot \pi x - x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \pi x^2 \cot \pi x dx - \frac{1}{8} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cot t dt - \frac{1}{8} \\ &= \frac{\ln 2}{4} - \frac{7}{8\pi^2} \zeta(3) - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cot t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 d(\ln \sin t) = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \ln \sin t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \ln 2 dt - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos 2nt dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1 + (-1)^n}{4n^2} = \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - \frac{7}{8} \zeta(3). \end{aligned}$$

美国数学月刊征解题 12143

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^k.$$

解 首先 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}$, 对每个固定的 k , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k} = e^{-k}.$$

因此

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}.$$

另一方面, 对每个固定的 m ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \left(\frac{n-k}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^m e^{-k} = \frac{e - e^{-m}}{e - 1},$$

令 $m \rightarrow \infty$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e - e^{-m}}{e - 1} = \frac{e}{e - 1}$, 因此所求的极限值就是 $\frac{e}{e - 1}$.

美国数学月刊征解题 12145

证明:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(t) \sin(\sqrt{1+t^2})}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

证明

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos(t) \sin(\sqrt{1+t^2})}{\sqrt{1+t^2}} dt &\stackrel{t=\sinh x}{=} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sinh x) \sin(\cosh x)}{\cosh x} \cosh x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\sin(\cosh x + \sinh x) + \sin(\cosh x - \sinh x)) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (\sin(e^x) + \sin(e^{-x})) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(e^x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

2019 年 12 月 8 日美国普特南大学生数学竞赛题

设

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right) \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)},$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3}$.

解 首先我们有三角恒等式

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta &= (\cos \alpha + \cos \beta)(\cos \alpha - \cos \beta) \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \\ &= \sin(\beta - \alpha) \sin(\beta + \alpha). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{\pi}{2n} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right) \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right) - \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right) \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{n-1}{2n} \pi} - 1 \right) = \frac{\sin^2 \frac{n-1}{2n} \pi}{\sin \frac{\pi}{2n} \cos^2 \frac{n-1}{2n} \pi} \\ &= \frac{\sin^2 \frac{n-1}{2n} \pi}{\sin^3 \frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{n-1}{2n} \pi}{n^3 \sin^3 \frac{\pi}{2n}} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^3 = \frac{8}{\pi^3}$$

Ovidiu Furdui 的一道征解题

求出所有的函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得其满足如下函数方程:

$$f(-x) = 1 + \int_0^x \sin(t) f(x-t) dt.$$

解 由所给的等式可知 $f(x)$ 具有足够可导性, 且 $f(0) = 1$. 换元 $x-t = u$ 可得

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + \int_0^x \sin(x-u) f(u) du \\ &= 1 + \left[\sin x \int_0^x f(u) \cos u du - \cos x \int_0^x f(u) \sin u du \right]. \end{aligned}$$

等式两边求导得

$$-f'(-x) = \cos x \int_0^x f(u) \cos u du + \sin x \int_0^x f(u) \sin u du,$$

于是 $f'(0) = 0$. 再求导得

$$\begin{aligned} f''(-x) &= \left[-\sin x \int_0^x f(u) \cos u du + \cos x \int_0^x f(u) \sin u du \right] + f(x) \\ &= f(x) - f(-x) + 1. \end{aligned}$$

于是 $f''(0) = f(0) = 1$, 且 $f''(x) = f(-x) - f(x) + 1 = 2 - f''(-x)$. 等式两边再继续求导得

$$\begin{aligned} -f'''(-x) &= f'(x) + f'(-x), \\ f^{(4)}(-x) &= f''(x) - f''(-x) = 2 - 2f''(-x), \end{aligned}$$

即 $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(x) + 2f''(x) = 1$, 解此四阶常系数线性微分方程可得 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

北京大学 2020 年考研数学分析第三题解答

已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 单调增加且 $f(x) \geq 0$. 记

$$s = \frac{\int_0^1 x f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}.$$

(1) 证明 $s \geq \frac{1}{2}$.

(2) 比较 $\int_0^s f(x) dx$ 与 $\int_s^1 f(x) dx$ 的大小. (可以用物理或几何直觉)

证明 这题我很早前在贴吧见过解答. 第一问属于比较简单的问题, 第二问则是非常难, 当然, 如果是只要猜答案, 应该时可以用直觉猜出来的, 我们给出严格的证明. 对于这样的积分不等式问题, 函数的连续性条件往往是多余的, 这里直接去掉这个条件进行证明.

(1) 由 Chebyshev 不等式得

$$\int_0^1 x f(x) dx \geq \int_0^1 x dx \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx.$$

(2) 我们先猜一下答案, 考虑一根在区间 $[0, 1]$ 上的密度为 $f(x)$ 的棒, s 就是其重心所在的位置, 重心的左右两侧保持杠杆平衡, 也就是满足重力与重力臂的乘积相等, $F_1 l_1 = F_2 l_2$. s 的左边更长, 其力臂更长, 对应的重力小一些, 也就是质量轻一点, 因此 $\int_0^s f(x) dx \leq \int_s^1 f(x) dx$. 下面我们来严格证明:

$$\int_0^s f(x) dx \leq \int_s^1 f(x) dx.$$

令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 由题意知 $F(x)$ 是单调递增的(下)凸函数, 为方便, 我们不妨假定

$$F(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1.$$

于是有

$$s = \int_0^1 x f(x) dx = 1 - \int_0^1 F(x) dx,$$

那么原不等式则等价于

$$F(s) \leq 1 - F(s).$$

等价于证明 $F(s) \leq \frac{1}{2}$. 那么由 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned} F(s) &= F\left(1 - \int_0^1 F(x) dx\right) = F\left(\int_0^1 (1 - F(x)) dx\right) \\ &= \int_0^1 F\left(\int_x^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \int_x^1 F(f(t)) dt dx \\ &\leq \int_0^1 \int_x^1 1 dt dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

College Mathematics Journal 期刊征解题 1167 解答

证明以下等式:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(n+1)} = 2,$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(n+1)^2} = 4 - 4 \ln 2,$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(n+1)^3} = 4 \ln^2 2 - 8 \ln 2 - \frac{\pi^2}{3} + 8.$$

证明 首先我们有

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n} = \frac{1}{1-x}.$$

于是两边从 0 到 x 积分得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{4^n(n+1)} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2 - 2\sqrt{1-x}.$$

取 $x = 1$ 得等式 1. 等式两边除以 x 再从 0 到 x 积分得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{4^n(n+1)^2} &= \int_0^x \frac{2 - 2\sqrt{1-t}}{t} dt \\ &= 4 - 4 \ln 2 + 4 \ln(1 + \sqrt{1-x}) - 4\sqrt{1-x}. \end{aligned}$$

取 $x = 1$ 得等式 2. 两边再除以 x , 再从 0 到 1 积分得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(n+1)^3} &= 4 \int_0^1 \frac{1 - \ln 2 + \ln(1 + \sqrt{1-x}) - \sqrt{1-x}}{x} dx \\ &= 4 \ln^2 2 - 8 \ln 2 - \frac{\pi^2}{3} + 8. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos t}{\sin^2 t} 2 \sin t \cos t dt = 2 - 2 \ln 2, \\ \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{1-x}) - \ln 2}{x} dx &= \ln^2 2 - \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

其中最后一个积分参见我的积分级数文档 34 题.

解答李雅老师微博一题

证明 $\sin x + \sin \pi x$ 不是周期函数.

证明 要证明这个问题, 我们首先承认一个事实: π 是一个无理数, 当然, π 是无理数这个结论已经远远超出了本题的难度, 我们姑且承认它.

反证法, 假定 $T \neq 0$ 是 $f(x) = \sin x + \sin \pi x$ 的一个周期, 那么 T 也是 $f'(x) = \cos x + \pi \cos \pi x$ 的一个周期, 于是

$$f'(0) = f'(T) \Rightarrow 1 + \pi = \cos T + \pi \cos \pi T.$$

因此有 $\cos T = 1, \pi \cos \pi T = \pi$, 前者说明 $T = 2k_1\pi$, 后者说明 $\pi T = 2k_2\pi$, 这里 k_1, k_2 都是整数, 从而 $\pi = \frac{k_2}{k_1}$, 这说明 π 是一个有理数, 矛盾, 因此 $f(x)$ 不是周期函数.

关于这题, 南京师范大学宣立新老师早期给过更一般的结论.

一道不等式证明

对实数 $\lambda < e$, 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{dz}{e^z - \lambda z} < \pi \sqrt{\frac{2}{e(e-\lambda)}}.$$

证明 最近出现在贴吧的这个不等式相当火, 当然难度相当的大. 这题的不等式是非常 sharp 的, 当 $\lambda \rightarrow e^-$ 时, 可以用数值检验, 两边几乎相等, 所以并不能随意放缩. 这道题我也是做错了好久, 在一些网友的帮助下做出来的.

首先, 我们将两边均展开为级数的形式:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{e^z - \lambda z} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{1 - \lambda z e^{-z}} dz = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^n e^{-(n+1)z} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \lambda^n z^n e^{-(n+1)z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \lambda^n}{(n+1)^{n+1}}, \\ \pi \sqrt{\frac{2}{e(e-\lambda)}} &= \frac{\pi}{e} \sqrt{2} \left(1 - \frac{\lambda}{e}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{e} \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{\lambda}{e}\right)^n \\ &= \frac{\pi}{e} \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^n. \end{aligned}$$

注意, 上述结果只对 $|\lambda| < e$ 成立. 当 $|\lambda| < e$ 时, 要证明原不等式, 只需要证明

$$\frac{n! \lambda^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{\pi}{e} \sqrt{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立即可. 令

$$a_n = \frac{\sqrt{2}\pi}{e^{n+1}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n!},$$

利用 Stirling 公式和 Wallis 公式很容易得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 我们要证明 $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$, 只需要证明 a_n 单调递减即可. 注意到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(n+2)^{n+2}}{e(n+1)^{n+2}}$$

要证 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 取对数, 则等价于证明

$$\ln(2n+1) - \ln(2n+2) + (n+2) \ln(n+2) - (n+2) \ln(n+1) < 1.$$

也就是

$$\ln(1+2n) - n \ln(1+n) - 3 \ln(1+n) + (n+2) \ln\left(1 + \frac{n}{2}\right) + n \ln 2 - \ln 2 < 1.$$

令 $f(x) = \ln(1+2x) - x \ln(1+x) - 3 \ln(1+x) + (x+2) \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + x \ln 2 - \ln 2, x > 0$,
那么

$$f'(x) = \frac{2}{1+2x} - \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} - \frac{3}{1+x} + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + 1 + \ln 2,$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(1+2x)^2} - \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{1}{2+x} = \frac{-7x-5}{(2+x)(1+3x+2x^2)^2} < 0.$$

因此 $f'(x)$ 单调递减, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 这说明 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 单调递增.
又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 所以 $f(x) < 1$, 那么到这里就完成了 $|\lambda| < e$ 部分的证明⁴. 当 $\lambda \leq -e$ 时, 令 $-\lambda = ke$, 则 $k \geq 1$, 原不等式等价于

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+k}}{e^{z-1} + kz} dz < \sqrt{2}\pi$$

再令 $t = \sqrt{1+k} \geq \sqrt{2}$, 则 $k = t^2 - 1$, 令

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^{z-1} + (t^2-1)z} dz,$$

则

$$g'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-t)e^{z-1} - (t^2+1)z}{[e^{z-1} + (t^2-1)z]^2} dz < 0,$$

于是 $g(t)$ 单调递减,

$$g(t) \leq g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{e^{z-1} + z} < \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{e^{z-1}} = \sqrt{2}e < \sqrt{2}\pi,$$

证毕.

⁴特别鸣谢积分群 QQ 小冰同学!