

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Тан Ин

Задача Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области

Суперкомпьютерное моделирование и технологии

Группа 616, Вариант 2

Москва, 2024

Содержание

1	Постановка задачи	3
1.1	Математическая постановка задачи	3
1.2	Метод фиктивных областей	3
1.3	Разностная схема решения	4
1.4	Метод минимальных невязок	6
2	Решение	8
3	Результаты	10

1 Постановка задачи

Требуется приближенно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.

1.1 Математическая постановка задачи

В области $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной контуром γ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона:

$$-\Delta u = 1 \quad (1.1)$$

с граничным условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (1.2)$$

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в области D и краевому условию (1.2) на ее границе.

Область D - остроугольный треугольник с вершинами в точках $C(-3, 0)$, $A(3, 0)$, $B(0, 4)$, $D(0, 3)$.

1.2 Метод фиктивных областей

Пусть область D принадлежит прямоугольнику $\Pi = \{(x, y) \mid A.x < x < B.x, A.y < y < C.y\}$. Обозначим границу прямоугольника Π как Γ .

Разность множеств $\hat{D} = \Pi \setminus \bar{D}$ называется фиктивной областью.

В прямоугольнике Π рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F(x, y) \quad (2.1)$$

Где $v(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma$,

$k(x, y)$ - кусочно-постоянный коэффициент:

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ \frac{1}{\varepsilon}, & (x, y) \in \hat{D}. \end{cases} \quad (2.2)$$

и правой частью:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in \hat{D}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Требуется найти непрерывную в Π функцию $v(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (2.1) всюду в $\Pi \setminus \gamma$, равную нулю на границе Γ прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока:

$$W(x, y) = -k(x, y) \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.4)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области D и прямоугольника Π .

Последнее означает, что в каждой точке $(x_0, y_0) \in \gamma \cap \Pi$ должно выполняться равенство:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0), (x,y) \in D} \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0), (x,y) \in \hat{D}} \frac{\partial v}{\partial \nu}. \quad (2.5)$$

Известно [2], что функция $v(x, y)$ равномерно приближает решение $u(x, y)$ задачи (1) в области D , а именно,

$$\max_{(x,y) \in \bar{D}} \|v(x, y) - u(x, y)\| \leq C\varepsilon, \quad C > 0 \quad (2.6)$$

Таким образом, решение новой задачи (2.1) позволяет получить решение исходной задачи (1) с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$, решая при этом задачу Дирихле с кусочно-постоянным коэффициентом $k(x, y)$, но в прямоугольнике Π , содержащем исходную область, что существенно упрощает вычисления.

1.3 Разностная схема решения

В замыкании прямоугольника Π определим равномерную прямоугольную сетку $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A.x + ih_1, i = 0, \dots, M\}, \quad h_1 = (B.x - A.x)/M, \quad (1)$$

$$\bar{\omega}_2 = \{y_j = A.y + jh_2, j = 0, \dots, N\}, \quad h_2 = (C.y - A.y)/N. \quad (2.7)$$

Множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_h$ обозначим ω_h .

Рассмотрим линейное пространство H функций, заданных на сетке ω_h . Обозначим через w_{ij} значение сеточной функции H в узле сетки $(x_i, y_j) \in \omega_h$. Определим скалярное произведение и норму в пространстве сеточных функций H :

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}. \quad (2.8)$$

Будем использовать метод конечных разностей, который заключается в замене дифференциальной задачи математической физики на конечно-разностную операторную задачу вида:

$$Aw = B, \quad (2.9)$$

где $A : H \rightarrow H$. Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением:

$$-\frac{1}{h_1} \left(a_{i+1,j} \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{h_1} - a_{i,j} \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{h_1} \right) - \frac{1}{h_2} \left(b_{i,j+1} \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{ij}}{h_2} - b_{i,j} \frac{\omega_{ij} - \omega_{i,j-1}}{h_2} \right) = F_{ij}, \quad (2.10)$$

при всех $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$.

Коэффициенты:

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_j - h_2/2}^{y_j + h_2/2} k(x_i, y) dt, \quad (2)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_i - h_1/2}^{x_i + h_1/2} k(t, y_j) dt. \quad (2.11)$$

Правая часть разностного уравнения:

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy, \quad (2.12)$$

где $\Pi_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\}$, $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N - 1$.

Краевые условия Дирихле в задаче (2.1) аппроксимируются точно равенством

$$w_{ij} = w(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma. \quad (2.13)$$

Полученные узлы означают $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0.5h_1$, $y_{j\pm 1/2} = y_j \pm 0.5h_2$.

Полученная система является линейной относительно неизвестных величин и может быть представлена в виде $Aw = B$ с самосопряженным и положительно определенным оператором A . Построенная разностная схема линейна и имеет единственное решение при любой правой части.

Интегралы a_{ij} , b_{ij} будут вычисляться аналитически:

$$a_{ij} = h_2^{-1}l_{ij} + (1 - h_2^{-1}l_{ij})/\varepsilon, \quad (3)$$

$$b_{ij} = h_1^{-1}l_{ij} + (1 - h_1^{-1}l_{ij})/\varepsilon, \quad (2.14)$$

где l_{ij} - длина части отрезка $[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$, которая принадлежит области D .

Аналогично для b_{ij} , где l_{ij} - длина части отрезка $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, которая принадлежит области D .

Для вычисления l_{ij} проверяется пересечение соответствующего интеграла интегрирования с прямой, проходящей через вершины трапеции CB .

Правую часть разностной схемы считаем как $F_{ij} = s/(h_1h_2)$, где s - часть площади прямоугольника с центром (x_i, y_j) и сторонами h_1h_2 , принадлежащая области D .

1.4 Метод минимальных невязок

Приближенное решение разностной схемы предлагается вычислять методом наименьших невязок. Метод позволяет получить последовательность сеточных функций $\omega^{(k)} \in H$, $k = 1, 2, \dots$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы.

$$\|\omega - \omega^{(k)}\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

Начальное приближение $\omega^{(0)}$ выберем равным нулю во всех точках сетки, кроме одной в центре. В центральной устанавливаем значение $= 1$.

Итерация $\omega^{(k+1)}$ вычисляется по итерации $\omega^{(k)}$ по формуле:

$$\omega_{ij}^{(k+1)} = \omega_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1}r_{ij}^{(k)} \quad (2.17)$$

где невязка $r^{(k)} = A\omega^{(k)} - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|^2} \quad (4)$$

В качестве критерия останова используется условие:

$$\|r^{(k)}\| < \delta \quad (2.18)$$

с некоторой положительной константой $\delta > 0$, задающей точность приближенного решения.

Для вычислений использовалась $\delta = 10^{-6}$.

2 Решение

Требовалось приближенно найти решение задачи (1), (2) для случая, когда $f(x, y) = 1$ при всех $(x, y) \in D$. Где область D является внутренностью эллипса $\{(x, y) : |4x| + 3y - 12 \leq 0 \text{ and } y \geq 0\}$.

- Реализация последовательного кода программы, вычисляющая приближенное решение разностной схемы:
 - вычисление матриц F_{ij} , a_{ij} , b_{ij} ;
 - реализация итерационного метода наименьших невязок;
 - выполнение расчетов на сгущающихся сетках $(M, N) = (10, 10), (20, 20), (40, 40)$;
- Разработка параллельного кода программы, вычисляющего приближенное решение разностной схемы, используя средства OpenMP;
- Разработка параллельного кода программы, вычисляющего приближенное решение разностной схемы, используя средства OpenMP.
- Выполнение расчетов на сетке $(M, N) = (40, 40)$ на одном, четырех, восьми и шестнадцати нитях, сравнение с последовательным вариантом алгоритма.
- Выполнение расчетов на сетках $(M, N) = (80, 90), (160, 180)$ на 2, 4, 8, 16 и 32 нитях, сравнение с последовательным вариантом алгоритма

Матрицы F_{ij} , a_{ij} , b_{ij} вычислялись аналитически:

$$F_{ij} = \begin{cases} 0, & \Pi_{ij} \in \hat{D}, \\ 1, & \Pi_{ij} \in D, \\ \frac{S_{ij}}{h_1 h_2}, & \Pi_{ij} \text{ содержит точки оригинальной и фиктивной областей} \end{cases}$$

где $S_{ij} = \text{mes}(\Pi_{ij} \cap D)$ - площадь пересечения областей.

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & [P_{ij}, P_{i,j+1}] \in \hat{D}, \\ 1, & [P_{ij}, P_{i,j+1}] \in D, \\ \frac{l_{ij}}{h_2} + \left(1 - \frac{l_{ij}}{h_2}\right) / \epsilon, & [P_{ij}, P_{i,j+1}] \text{ содержит точки оригинальной и фиктивной областей} \end{cases}$$

где l_{ij} - длина той части отрезка $[P_{ij}, P_{i,j+1}]$, которая принадлежит области D . Аналогичным образом вычисляются коэффициенты b_{ij} .

- Для реализации параллельного кода программы используются директивы OpenMP для распараллеливания циклов и редукций. Использование директив OpenMP позволяет ускорить вычисления на каждом шаге итерационного метода при запуске программы на системах, поддерживающих параллельные вычисления.
- Результаты работы программы демонстрируют эффективность использования параллельного кода для вычисления приближенного решения итерационным методом на системах с многопоточностью по сравнению с использованием последовательного кода.

3 Результаты

Число нитей	Размер сетки	Время (s)	Ускорение
Последовательный вариант	80×90	114	—
2	80×90	91	1.26
4	80×90	74	1.54
8	80×90	63	1.80
16	80×90	49	2.29
Последовательный вариант	160×180	1514	—
4	160×180	811	1.86
8	160×180	575	2.63
16	160×180	513	2.94
32	160×180	433	3.49

Таблица 1: Таблица с результатами расчётов на разном числе нитей и размерах сетки.

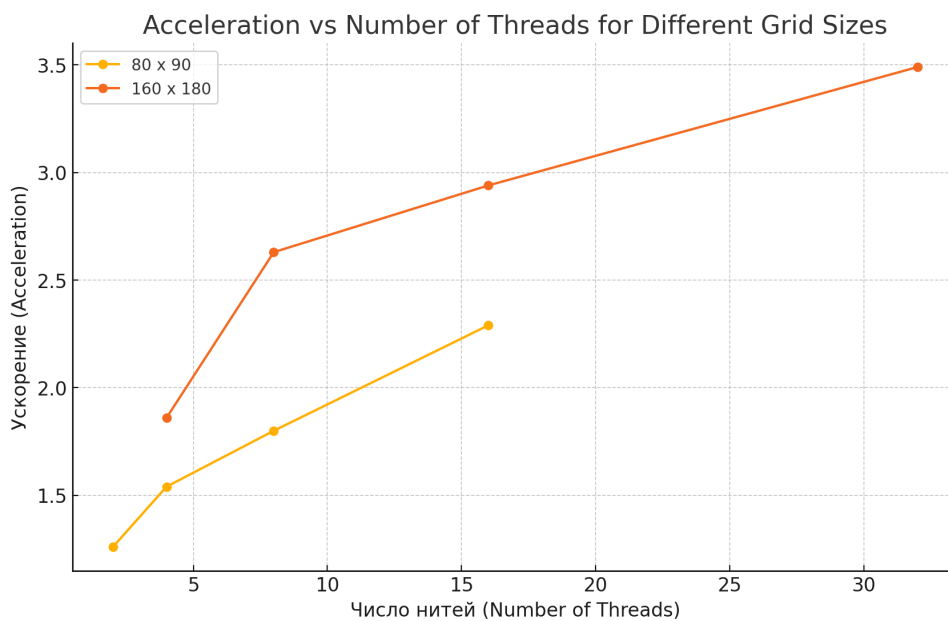


Рис. 1: Ускорение на OPENMP

Function $w(x,y)$ - Transposed

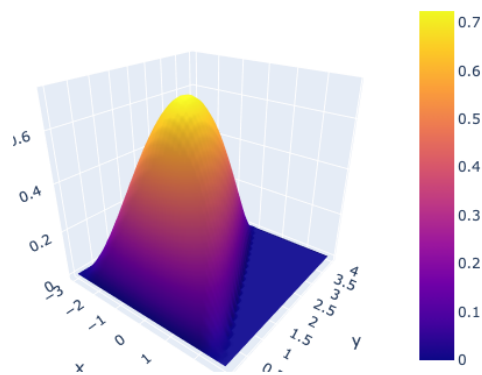


Рис. 2: Итоговый результат на сетке 40×40 (ansplot)

Function $w(x,y)$ - Transposed Heatmap

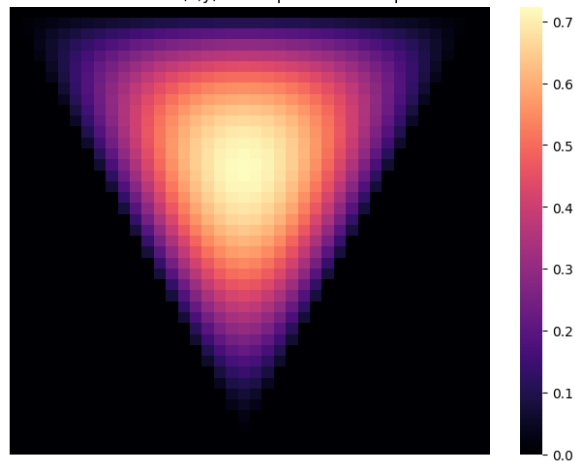


Рис. 3: Итоговый результат на сетке 40×40 (ansretu)

Function $w(x,y)$ - Transposed

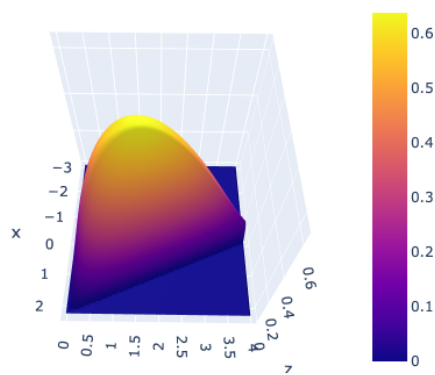


Рис. 4: Итоговый результат на сетке 40×40 (ansplot)

Function $w(x,y)$ - Transposed Heatmap

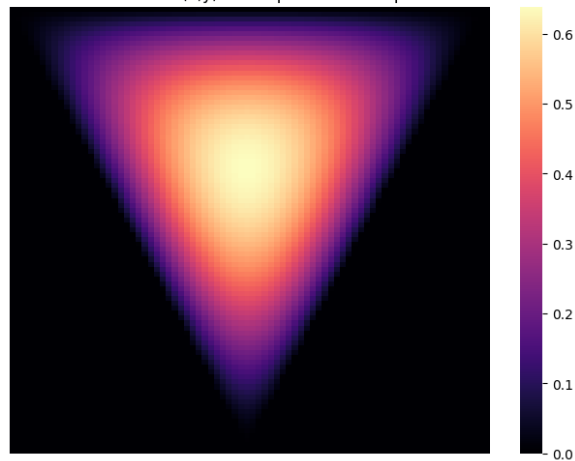


Рис. 5: Итоговый результат на сетке 80×90 (ansretu)

Function $w(x,y)$ - Transposed

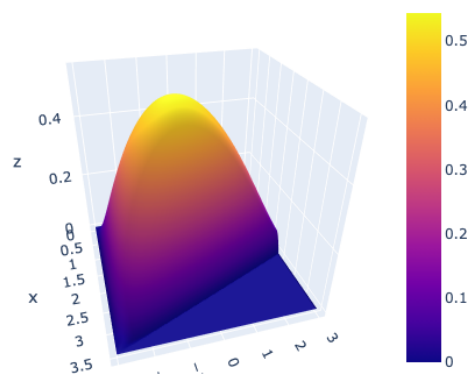


Рис. 6: Итоговый результат на сетке 40×160 (ansplot)

Function $w(x,y)$ - Transposed Heatmap

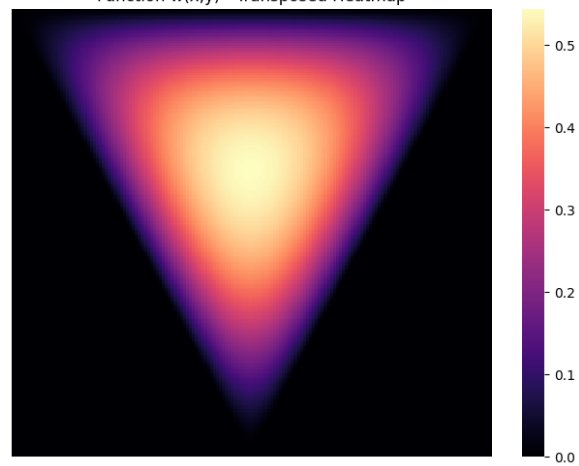


Рис. 7: Итоговый результат на сетке 40×180 (ansretu)