

2022 年远光杯程序设计竞赛

正式赛试题集

2022 年 5 月 29 日



计算机科技协会
Computer Science Association

题目列表

- A 三生万物
- B 不只是阶乘
- C 最长重复子序列
- D 两点确定一条直线
- E 白羊的完美算术教室
- F 随机播放
- G 递推数列的协奏曲
- H 平衡二叉搜索树
- I 再挑战转生瞬间移动
- J 洗牌
- K 双端队列
- L 旋转升天

请勿在比赛开始前翻阅试题册！

问题 A. 三生万物

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 1 秒
内存限制: 128 MiB

问题描述

一个 n 位的二进制数 (可能含前导零), 其中恰好有 m 位为 1。

请问它是否有可能是 3 的倍数?

输入格式

输入由多组数据构成。

第一行一个正整数 T ($1 \leq T \leq 10^5$), 表示共有 T 组数据。

对于每组数据, 有一行两个整数 n ($1 \leq n \leq 10^9$) 和 m ($0 \leq m \leq n$), 用一个空格隔开, 表示二进制数的位数为 n , 其中恰好有 m 位为 1。

输出格式

对于每组数据, 输出一行一个字符串 s 表示答案。

如果这个数一定是 3 的倍数, 则 $s = \text{MUST}$ 。

如果这个数可能但不一定是 3 的倍数, 则 $s = \text{MAYBE}$ 。

如果这个数不可能是 3 的倍数, 则 $s = \text{IMPOSSIBLE}$ 。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
4	MUST
3 0	IMPOSSIBLE
3 1	MAYBE
3 2	IMPOSSIBLE
3 3	

问题 B. 不只是阶乘

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 4 秒
内存限制: 256 MiB

问题描述

现有一个长度为 n 的数列 a (元素编号为 1 到 n)，与一个询问常数 k ，你需要支持以下两种操作。

- $1\ p\ x$: 将数列 a 中第 p 个元素修改为 x
- $2\ l\ r$: 询问 $\prod_{i=l}^r a_i!$ 中有多少个因子 k

输入格式

第一行三个正整数 n ($1 \leq n \leq 10^5$)， m ($1 \leq m \leq 10^5$) 和 k ($2 \leq k \leq 10^9$)，用一个空格隔开，表示数列的长度，操作的次数，及给定的询问常数。

随后一行 n 个非负整数 a_i ($0 \leq a_i \leq 10^9$)，用一个空格隔开，第 i 个数 a_i 表示数列 a 中第 i 个元素的初始值。

随后 m 行，每行有三个整数，用一个空格隔开，表示一次操作。格式如下：

- $1\ p\ x$ ($1 \leq p \leq n, 0 \leq x \leq 10^9$)，表示将数列 a 中第 p 个元素修改为 x
- $2\ l\ r$ ($1 \leq l \leq r \leq n$)，表示询问 $\prod_{i=l}^r a_i!$ 中有多少个因子 k

保证操作 2 在每组数据中至少出现 1 次。

输出格式

对于每次操作 2，输出一行一个非负整数 y ，表示当前 $\prod_{i=l}^r a_i!$ 中有 y 个因子 k 。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
3 3 4	1
2 2 2	2
2 1 3	
1 2 4	
2 1 3	

说明

正整数 z 中因子 k ($k \geq 2$) 的个数 c 定义为：最大的非负整数 c 使得 z 被 k^c 整除。

问题 C. 最长重复子序列

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 1 秒
内存限制: 256 MiB

问题描述

从一个字符串 s 中选择若干 (可以为零) 个字符, 将其按原先的顺序连接成为一个新字符串, 则称其为 s 的一个子序列。

若这个子序列恰好可以被划分为完全相等的两部分, 则称其为 s 的一个重复子序列。

例如: “”, “aa”, “abab” 都是字符串 “ababb” 的重复子序列, 但 “aabb” 不是。

现在, 请你找出给定字符串 s 最长的重复子序列的长度。

输入格式

一行一个字符串 s (其长度 $|s|$ 不超过 5,000), 仅包含小写英文字母。

输出格式

输出一行一个非负整数 k , 表示 s 最长的重复子序列的长度。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
ababb	4

问题 D. 两点确定一条直线

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 1 秒
内存限制: 128 MiB

问题描述

现有一个 $n \times n$ 的正方形点阵, 即 n^2 个点排成 n 行 n 列, 同一行的点之间水平对齐, 同一列的点之间垂直对齐, 相邻的行和相邻的列之间的距离都为常数。

这 n^2 个点两两之间都可以确定一条在二维平面中无限延伸的直线, 请你计算共有多少条直线呢?

为了使题目更难答案不至于过大, 如果多条直线可以通过平移重合, 则只计算一次。

输入格式

一行一个正整数 n ($2 \leq n \leq 10^6$), 表示正方形点阵的大小为 n 行 n 列。

输出格式

一行一个整数 m , 表示共有 m 条直线。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
3	8

问题 E. 白羊的完美算术教室

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 1 秒
内存限制: 128 MiB

问题描述

接种新冠疫苗是防控新冠肺炎最有效、最安全、最经济、最简单的措施。

今天, 白羊学姐来到了接种点, 捂着眼睛接种了第三针疫苗。

接种后, 工作人员告知白羊学姐: 需要留观 30 分钟后方可离开接种点, 以避免不良反应造成严重后果。

留观处有一块屏幕, 上面会显示每个人还需要留观多久方可离开。细心的白羊学姐发现, 屏幕上显示的剩余时间以分钟为单位。最初, 屏幕显示白羊学姐的剩余留观时间为 30 分钟。即将结束时, 屏幕显示剩余留观时间为 1 分钟, 接着屏幕上的信息马上变成了“留观结束”字样。

于是, 科班出身的白羊学姐马上猜想: 系统内部的算法实现是通过以秒计的剩余时间除以 60 再向上取整得到的, 便造成了上述现象。

过了几天, 若若也要去同一个接种点接种疫苗了。白羊学姐想知道, 当若若的剩余留观时间为 s 秒的时候, 屏幕上会显示剩余多少分钟呢?

这么简单的问题白羊学姐当然会算啦, 但是她想考考你。

输入格式

一行一个正整数 s ($1 \leq s \leq 1,800$), 表示若若的剩余留观时间为 s 秒。

输出格式

一行一个正整数 m , 表示屏幕上显示剩余 m 分钟。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
1620	27

说明

向上取整: 一个实数 x 向上取整的结果为不小于 x 的最小整数。

问题 F. 随机播放

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 6 秒
内存限制: 256 MiB

问题描述

若若的听歌口味很杂, 所以若若通常采用随机播放的方式。

具体来说, 若若的歌单中有 n 首歌。由于若若对每首歌的喜爱程度不同, 所以每首歌都有一个权值, 第 i 首歌的权值为 p_i 。

当若若打开随机播放的模式后, 播放器首先会随机选出一首歌, 第 i 首歌被选中的概率为 $\frac{p_i}{\sum p}$ 。

由于若若不想将一首歌连续听多遍, 所以从第二首歌开始, 每首歌都一定与前一首歌不同 (但可能和更早播放的歌曲重复), 即第 i 首歌被选中的概率是:

$$\begin{cases} \frac{p_i}{(\sum p) - p_{last}}, & i \neq last \\ 0. & i = last \end{cases}$$

$last$ 为前一首被选出歌曲的编号。

现在若若想知道: 当播放了 m 首歌后, 第 t 首歌恰好被选中 k 次的概率。

输入格式

第一行四个非负整数, n ($2 \leq n \leq 10$), m ($1 \leq m \leq 8,000$), t ($1 \leq t \leq n$), k ($0 \leq k \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$), 用一个空格隔开, 分别表示若若的歌单中有 n 首歌曲, 询问播放了 m 首歌后, 第 t 首歌被选中 k 次的概率。

第二行有 n 个正整数, 用一个空格隔开, 第 i 个数 p_i ($1 \leq p_i \leq 10^6$) 表示第 i 首歌的权值。

输出格式

设答案为 $\frac{x}{y}$, 请输出一个非负整数 z ($0 \leq z < 10^9 + 7$) 满足 $x \equiv y \cdot z \pmod{10^9 + 7}$ 。

可以证明这样的非负整数 z 是唯一的。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
2 3 1 2 2 1	666666672

问题 G. 递推数列的协奏曲

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 2 秒
内存限制: 128 MiB

问题描述

若若最近学会了常系数齐次线性递推! 他非常开心, 每天对着各种数列算啊算。
不过这一天, 他遇到了两个奇怪的数列:

$$A_i = (a - 1) \cdot A_{i-1} + a \cdot B_{i-1}$$

$$B_i = b \cdot A_{i-1} + (b - 1) \cdot B_{i-1}$$

现在, 若若已经知道一个数字 n , 以及常数 a 和 b , 还有数列 A 和 B 的初值 (A_0, B_0) , 他想请你帮忙算出 A_n 。

输入格式

输入由多组数据构成。

第一行一个正整数 T ($1 \leq T \leq 10^5$), 表示共有 T 组数据。

对于每组数据:

第一行三个整数 n ($0 \leq n \leq 10^9$), a ($1 \leq a \leq 10^9$), b ($1 \leq b \leq 10^9$), 用一个空格隔开, 含义如题目描述所示。

第二行两个正整数 A_0 ($1 \leq A_0 \leq 10^9$) 和 B_0 ($1 \leq B_0 \leq 10^9$), 用一个空格隔开, 表示数列 A 和 B 的初值。

输出格式

对于每组数据, 输出一行一个非负整数 x , 表示 A_n 对 $10^9 + 7$ 取模的值。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
1 1 5 7 2 3	23

问题 H. 平衡二叉搜索树

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 3 秒
内存限制: 128 MiB

问题描述

当一棵二叉树满足对于任意子树, 其左子树 (若有) 中节点的值均不大于该节点的值, 右子树 (若有) 中节点的值均不小于该节点的值, 则我们称这棵树为二叉搜索树。

进一步地, 若这棵树还满足对于任意节点, 其左子树高度与右子树高度的差的绝对值均不大于 1, 则我们称这棵树为一棵 AVL 树。

若左 (或右) 子树不存在, 则我们视其高度为 0。

现在请你对于指定的一棵二叉树, 找出它最大 (即节点最多) 的一棵满足 AVL 树性质的子树的大小。

输入格式

第一行一个正整数 n ($1 \leq n \leq 5 \cdot 10^5$), 表示这棵二叉树有 n 个节点, 从 1 到 n 进行编号。

第二行 n 个正整数, 用一个空格隔开, 第 i 个数 a_i ($1 \leq a_i \leq 10^6$) 表示编号为 i 的节点的权值。

接下来 $n-1$ 行, 每行三个整数 u ($1 \leq u \leq n$), v ($1 \leq v \leq n, u \neq v$), w ($0 \leq w \leq 1$), 用一个空格隔开, 表示编号为 v 的节点是编号为 u 的节点的子节点。若 $w=0$ 则它是左儿子, 否则为右儿子。

输入数据保证这是一棵合法的二叉树。

输出格式

一行一个正整数 x , 表示给定二叉树最大的 AVL 子树的大小。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
6 7 6 5 7 3 8 2 4 1 1 6 1 3 5 0 1 2 0 3 1 1	4

问题 1. 再挑战转生瞬间移动

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 2 秒
内存限制: 128 MiB

问题描述

再挑戦・転生・テレポーテーション

— 妄想感傷代償連盟, DECO*27

若若又在机厅打舞萌 DX 了!

今天她打的歌曲是妄想感傷代償連盟。哼着“再挑战 转生 瞬间移动”的歌词, 她想到了这样一道题:

你有一个长度为 n 的仅包含大、小写英文字母的字符串 S , 其中第 i ($1 \leq i \leq n$) 个字符为 S_i 。

如果 S_i 和 S_j ($1 \leq i < j \leq n$) 满足它们都是大写字母或小写字母, 或者它们是同一个字母大小写不同的表示, 则你可以在 S_i 和 S_j 之间进行传送, 每次传送需要 1 秒钟。

此外, 你也可以在相邻两个字符之间移动, 即从 S_i ($1 \leq i \leq n$) 移动到 S_j ($1 \leq j \leq n, |i - j| = 1$), 每次移动也需要 1 秒钟。

假设你现在的位置在 S_x 处, 你至少需要多久才能到达 S_y 呢?

输入格式

第一行两个正整数 n ($2 \leq n \leq 10^5$) 和 q ($1 \leq q \leq 10^5$), 用一个空格隔开, 表示字符串 S 的长度为 n , 有 q 次询问。

第二行一个长度为 n 的字符串 S , 仅包含大、小写英文字母。

之后 q 行, 每行两个正整数 x ($1 \leq x \leq n$) 和 y ($1 \leq y \leq n, x \neq y$), 表示询问从 S_x 移动到 S_y 至少需要多久。

输出格式

对于每次询问, 输出一行一个正整数 t , 表示从 S_x 移动到 S_y 至少需要 t 秒钟。

Examples

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
5 1 WOruo 5 1	2
7 1 BaiYang 2 5	1

问题 J. 洗牌

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 1 秒
内存限制: 128 MiB

问题描述

_rqy 得到了一副魔法卡牌!

魔法卡牌共有 n 张, 每张卡牌上都写着一个数字, 没有两张卡牌上的数字相同。

最初, 卡牌被摆成一叠, 从上到下的第 i 张卡牌上的数字为 a_i 。

随后, _rqy 对卡牌进行了 q 次洗牌。洗牌的方法是这样的: 将写有数字 l 的卡牌与写有数字 r 的卡牌之间的所有卡牌 (包含写有数字 l 和 r 的卡牌) 从牌堆中取出, 再插入到牌堆的最下方。

洗牌结束后, _rqy 告诉你, 她能把现在的牌序倒背如流! 你心想: ~~如果我能写出一个程序实现同样的功能, 四舍五入我就和 _rqy 一样厉害!~~

请你向 _rqy 发起挑战吧!

输入格式

第一行两个正整数 n ($2 \leq n \leq 10^5$) 和 q ($1 \leq q \leq 10^5$), 用一个空格隔开, 表示有 n 张卡牌, 进行了 q 次洗牌。

第二行 n 个正整数, 用一个空格隔开, 第 i 个数 a_i ($1 \leq a_i \leq n$) 表示最初从上到下的第 i 张卡牌上的数字。保证没有两张卡牌上的数字相同。

随后 q 行, 每行两个正整数 l ($1 \leq l \leq n$) 和 r ($1 \leq r \leq n$), 用一个空格隔开。若 $l \neq r$, 保证此时写有数字 l 的卡牌位于写有数字 r 的卡牌上方。

输出格式

一行 n 个正整数 p_i , 用一个空格隔开, 表示最终的牌序。

由于 _rqy 对牌序倒背如流, 所以你需要从下到上输出最终的牌序。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
5 1 3 1 2 5 4 1 5	5 2 1 4 3

说明

若写有数字 r 的卡牌已经在牌堆最下方, 则该次洗牌对牌序无影响。

问题 K. 双端队列

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 2 秒
内存限制: 128 MiB

问题描述

设想你有一个初始为空的双端队列。

首先, 你将 1 到 n 这 n 个正整数逐个 push 进队列中。当然, 你可以自由选择每次从队首入队还是从队尾入队。

接着, 你将它们依次从队首取出, 显然你可以得到一个长度为 n 的排列。

虽然这样构造出的数列一定是长度为 n 的排列, 但不是每个长度为 n 的排列都能用这种方式构造出来。

请你判断给定数列是否能够通过上述方法构造得到。

输入格式

输入由多组数据构成。

第一行一个正整数 T ($1 \leq T \leq 10^6$), 表示共有 T 组数据。

对于每组数据:

第一行一个正整数 n ($1 \leq n \leq 10^6$), 表示排列的长度。

第二行 n 个两两不同的正整数 p_i ($1 \leq p_i \leq n$), 用一个空格隔开, 表示需要判断的给定排列。

数据保证 $\sum n \leq 10^6$ 。

输出格式

对于每组数据, 输出一行一个字符串 s 表示答案。

如果这个排列可以通过上述方法构造得到, 则 $s = \text{YES}$, 否则 $s = \text{NO}$ 。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
2	YES
4	NO
4 3 1 2	
5	
4 5 3 1 2	

问题 L. 旋转升天

输入方式: 标准输入流 (stdin)
输出方式: 标准输出流 (stdout)
时间限制: 2 秒
内存限制: 128 MiB

问题描述

汽车绕着盘山公路爬山时

或许也是一种旋转升天吧

在本题中, 我们要求盘山公路的长度。

为了简单起见, 我们把山峰视为一个高为 h 米, 底面半径为 r 米的圆锥。为了在爬山过程中能看到四处的风景, 车辆从山底沿一条螺线爬升到山顶。汽车的爬升能力 (即汽车的速度在母线方向上的分量) 为 s 米每秒, 而汽车的线速度为 v 米每秒。

请问当汽车爬到山顶时, 行驶的总距离是多少米?

输入格式

输入由多组数据构成。

第一行一个正整数 T ($1 \leq T \leq 10^5$), 表示共有 T 组数据。

对于每组数据:

第一行两个正整数 h ($1 \leq h \leq 1,000$) 和 r ($1 \leq r \leq 1,000$), 用一个空格隔开, 表示圆锥 (山峰) 的高度和底面半径。

第二行两个正整数 s ($1 \leq s \leq 1,000$) 和 v ($s \leq v \leq 1,000$), 用一个空格隔开, 表示汽车的爬升能力和线速度。

输出格式

对于每组数据, 输出一行一个实数 d 表示答案。

当且仅当与标准答案的相对误差或绝对误差不大于 10^{-6} 时, 你的答案被视为正确。

样例

标准输入流 (stdin)	标准输出流 (stdout)
1 23 39 17 19	50.6036228308

说明

汽车爬升的螺线如图所示。

