

SIMULACIÓN DE LOS MODOS DE VIBRACIÓN DE LA TAPA SUPERIOR DE LA CAJA DE UNA GUITARRA ACÚSTICA

Proyecto de materia

EDXAIDYS HERNANDEZ YANES
CAMILO DAVID ÁLVAREZ BRAVO

Docente:
NICOLÁS GUARÍN ZAPATA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS FÍSICAS
INGENIERÍA FÍSICA
UNIVERSIDAD EAFIT
2021-1

TABLA DE CONTENIDO

1. RESUMEN.....	3
2. INTRODUCCIÓN.....	3
3. METODOLOGÍA.....	4
3.1. Formulación y definición del problema.....	4
3.2. Diseño del modelo conceptual.....	4
3.2.1. Modelo matemático	4
3.2.2. Modelamiento numérico e implementación.....	6
5. CONCLUSIONES.....	11
6. REFERENCIAS	12

1. RESUMEN

En el siguiente documento se presentan los resultados del análisis numérico computacional de los modos de vibración para la tapa armónica de una guitarra acústica por medio del método de elementos finitos. Para dicho análisis se evalúa el comportamiento de diferentes materiales (caoba, cedro y pino) usados en la construcción de la tapa superior y se contrastan los resultados obtenidos para cada uno de ellos.

2. INTRODUCCIÓN

La acústica musical persigue como objetivo fundamental el estudio de la audición musical, buscando mejorar los sonidos producidos por los diferentes instrumentos musicales, la voz y el análisis computacional de la melodía [1].

En la mayoría de los instrumentos, la producción de sonido depende del comportamiento colectivo de varios osciladores, que pueden estar acoplados débil o fuertemente [2]. En general, los instrumentos musicales son sistemas compuesto por una estructura de tres diferentes partes o procesos: [3] osciladores, amplificadores y la fuente de excitación o energía. En el grupo de los instrumentos de cuerda o cordófonos acústicos (no eléctricos) el oscilador u osciladores son cuerdas, las cuales se encargan de emitir diferentes sonidos dependiendo de la frecuencia que se produzca al posicionar los dedos sobre el diapason. Como amplificador se cuenta con una caja de es la caja de resonancia, y la fuente de energía o excitación es el elemento que causa el movimiento en las cuerdas [3]. Los cordófonos se pueden dividir en tres grupos: instrumentos de cuerdas frotadas, de cuerda pulsada y de cuerdas percutidas [4]. La guitarra acústica, la cual es el foco de estudio del proyecto propuesto, se encuentra dentro de los instrumentos de cuerdas frotadas.

Para lograr que en una guitarra acústica el sonido pueda ser escuchado, la caja de resonancia de misma debe absorber suficiente energía proveniente de la excitación de las cuerdas, por lo que en su fabricación se dedica especial cuidado en la construcción de la tapa superior, pues es la parte más determinante para modificar el sonido que generará el instrumento [5], especialmente porque esta deberá transmitir ondas a diferentes frecuencias y con la misma intensidad [6].

Por lo tanto, se plantea la realización de un análisis numérico computacional por medio del método de elementos finitos, que permita el estudio del comportamiento de la tapa armónica de la guitarra acústica sometida a diferentes frecuencias, y así evaluar su viabilidad como elemento de construcción.

A continuación, se presenta el desarrollo, resultados y conclusiones de un modelo numérico-computacional implementado en *Python* para hallar los modos de vibración de la tapa superior de la guitarra acústica.

3. METODOLOGÍA

La metodología propuesta para el desarrollo del proyecto se presenta a continuación:

3.1. Formulación y definición del problema

Recolección de información relevante para el desarrollo del proyecto, lo que conlleva a la selección del problema a resolver. Seguido a esto se realiza una minuciosa investigación del estado del arte del problema y se plantean los objetivos, así como los alcances y limitaciones

3.2. Diseño del modelo conceptual

En este se encuentra el desarrollo del modelo matemático y la implementación numérica en *Python*.

3.2.1. Modelo matemático

Un análisis modal es un estudio (computacional o experimental) de las propiedades dinámica de estructuras respecto a su comportamiento vibratorio durante la exposición a cargas operativas. Estas propiedades dinámicas (frecuencias naturales y modos de vibración), dependerán de la masa, la rigidez y la distribución de la amortiguación en la estructura [6].

Para un sistema lineal con múltiples grados de libertad como lo es la tapa superior de una guitarra acústica, se puede definir un modo de vibración como una configuración deformada en la que el movimiento de cada masa es una vibración armónica alrededor de la posición de equilibrio. Lo que matemáticamente puede describirse como:

$$[M]\{x''(t)\} + [C]\{x'(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

Donde $[M]$, $[C]$, $[K]$ son las matrices de dimensión $(N \times N)$ de masa, amortiguamiento y de rigidez del sistema, y $\{x''(t)\}$, $\{x'(t)\}$, $\{x(t)\}$ y $\{f(t)\}$ son vectores $(N \times 1)$ que representan la aceleración, velocidad, desplazamiento y fuerza de excitación respectivamente.

La ecuación 1 descrita anteriormente considera que sólo la viscosidad contribuye a la disipación de energía y los modos de vibración del sistema se determinan considerando que la excitación es nula y suponiendo que la respuesta es de la forma:

$$\{x(t)\} = \{\Psi_r\} e^{\lambda_r t} \quad (2)$$

Con lo que se obtiene un problema de valores y vectores propios. Existe $2N$ valores propios λ_r dados en forma de pares complejos conjugados, y, para cada uno de ellos,

aparece asociado un vector propio $\{\Psi_r\}$ también en forma de pares complejos conjugados debido a que el grado de multiplicidad de cada autovalor es 1. Por tanto, la solución se puede escribir como:

$$\lambda_r, \lambda_r^* \quad (3)$$

$$\{\Psi_r\}\{\Psi_r^*\}_r$$

Para valores de $r = 1$ hasta N ,

$$\lambda_r = \sigma_r + j\omega_r \quad (4)$$

Donde σ_r representa el amortiguamiento asociado al modo r y la parte imaginaria ω_r , representa la frecuencia natural amortiguada de dicho modo.

Las relaciones de ortogonalidad de la matriz de masa y de rigidez en el caso de un sistema sin amortiguamiento (como lo es nuestro caso de estudio) se definen matemáticamente como:

$$(\lambda_r, \lambda_r^*)\{\Psi_r\}_r^T[M]\{\Psi_r\} - \{\Psi_r\}_r^T[K]\{\Psi_r\} = 0 \quad (5)$$

Con lo cual se definen la masa modal, m_r , y la rigidez modal, k_r , asociada a cada modo de vibración.

$$m_r = \{\Psi_r\}_r^T[M]\{\Psi_r\} \quad (6)$$

$$k_r = \{\Psi_r\}_r^T[K]\{\Psi_r\}$$

Y, a partir de la ecuación 6 se define la frecuencia natural de vibración asociada al modo r como:

$$\omega_{or}^2 = \frac{\{\Psi_r\}_r^T[M]\{\Psi_r\}}{\{\Psi_r\}_r^T[K]\{\Psi_r\}} = \frac{m_r}{k_r} \quad (7)$$

Así, la respuesta de un sistema con múltiples grados de libertad puede ser descrita como una superposición lineal de sistemas con un único grado de libertad.

Ahora, aplicando el método de elementos finitos para la ecuación 1 (pero sin tener en cuenta la matriz de amortiguamiento), podemos obtener las diferentes matrices de masa y rigidez globales ensamblando las matrices elementales de cada elemento e .

De manera que, la matriz de rigidez de cada elemento se define como:

$$[m]_e = \int_v [N]^T \rho [N] dv \quad (8)$$

Donde $[N]$ es la matriz de las funciones de forma que relaciona las coordenadas de un punto interior del elemento con las coordenadas nodales.

Y, la matriz de rigidez para cada elemento se define como:

$$[k]_e = \int_v [B]^T [D] [B] dv \quad (9)$$

Siendo $[D]$ el tensor elástico del material y $[B]$ la matriz de deformaciones nodales obtenida a partir de las funciones de forma del elemento.

Por tanto, la obtención de las frecuencias naturales y de los modos de vibración en un problema dinámico se reduce a resolver la ecuación:

$$[M]\{\ddot{\delta}^*\} + [K]\{\delta^*\} = \{0\} \quad (10)$$

Existen numerosos algoritmos para obtener los autovalores del sistema, los más utilizados son: el método de subespacios, el método de Lanczos y el método reducido. Y ya conocidos los autovalores se utiliza el método de superposición modal para determinar la respuesta dinámica del sistema a analizar.

El modelo matemático se encuentra detallado en [7],

Otro paso importante para la simulación son los parámetros propios del material [8,9, 10]. Para esto se seleccionaron diferentes tipos de madera con el fin de contrastar los resultados obtenidos con el material original de la guitarra comercial (caoba) y determinar cuál tiene un mejor comportamiento. En la tabla 1 se muestra cada uno de los parámetros a considerar a la hora de la simulación.

Tabla 1. Parámetros del material

Tipo de madera	Densidad básica Kg/m^3	Módulo de elasticidad (Kg/cm^2)
Caoba	570	89.000
Cedro	420	89.700
Pino	572	94.000

3.2.2. Modelamiento numérico e implementación

Para obtención de los modos de vibración por medio del método de elementos finitos, es necesario generar el mallado de la geometría, para ello se hizo uso del software libre *Gmsh*.

La geometría seleccionada para la tapa superior corresponde a la guitarra comercial *Guild Jumbo Junior Caoba*. La modelación CAD obtenida y sus respectivas medidas se presentan en la ilustración 1.

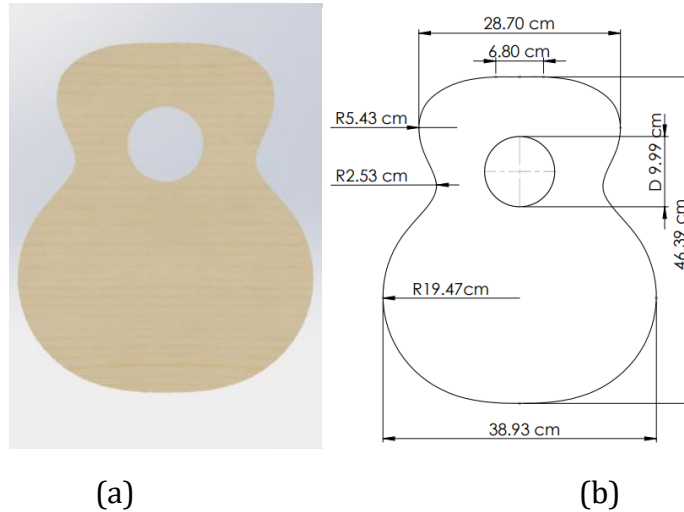


Ilustración 1. (a) Simulación CAD de la tapa superior de la guitarra; (b) medidas de la tapa modelada

A partir de la geometría diseñada en el software *SolidWorks* se genera en *Gmsh* la malla de elementos triangulares correspondiente (ver ilustración 2) y se exporta en formato .xlsx.

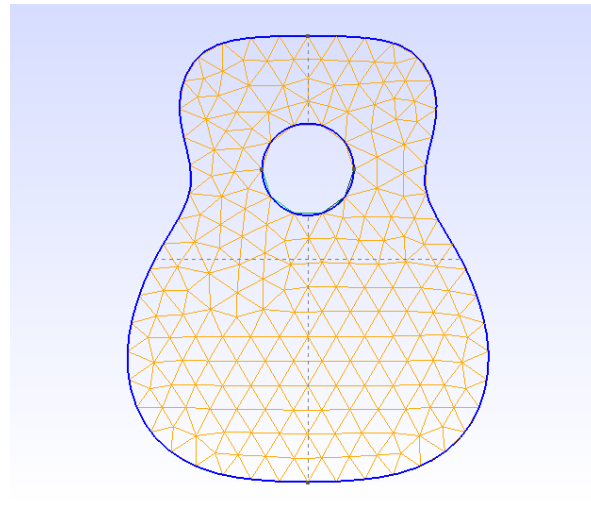


Ilustración 2. Malla de elementos triangulares en gmsh. Nodos = 569, elementos = 1040.

En cuanto al código fuente, el desarrollo de la lógica del programa realizado en *Python* es como sigue:

1. Se importan las librerías necesarias para el funcionamiento del programa (Numpy, Pandas, Matplotlib)
2. Lectura y definición de los elementos característicos de la malla (puntos, nodos y elementos)

3. Con la información anterior se procede a dibujar los nodos y los triángulos de malla, De esta forma se comprueba que la importación de los datos ha sido exitosa
4. Se definen los parámetros propios del material: (densidad básica, módulo de elasticidad)
5. Se resuelve el problema por elementos finitos, obteniendo los valores (λ) y vectores propios (V) del sistema, siendo la frecuencia igual a $\frac{\lambda}{2\pi}$ y las deformaciones producidas en la estructura.
6. Por último, se realiza el grafico de la deformación producida en cada iteración, representando estos valores por medio de una barra de colores

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los sistemas dinámicos (como una guitarra acústica) pueden describirse en términos de una matriz de rigidez que conecta los desplazamientos (o respuesta del sistema) y las fuerzas (o entradas del sistema). Estas frecuencias se conocen como frecuencias naturales del sistema (o de resonancia) y las proporcionan los vectores propios de la matriz de rigidez.

Todo sistema, ya sea acústico, térmico o electromagnético, tiene sus propias frecuencias de resonancia en las que se produce el fenómeno de resonancia, que no es más que el acercamiento de la frecuencia de la carga aplicada a la frecuencia resonante; y, cuando esto ocurre, la amplitud de respuesta tenderá a infinito. Llevando esto al caso del diseño de una guitarra acústica, es deseado que la frecuencia de las cuerdas sea muy similar a las frecuencias de resonancia de la estructura, pues así se permite una mejor amplificación de los sonidos y claramente, un sonido más armonioso [11].

Con el fin de visualizar los modos de vibración y analizar el comportamiento de las estructuras diseñadas con 3 diferentes materiales, se decidió realizar el análisis modal para cada uno de ellos. El primer paso para obtener los resultados es el de tomar la malla obtenida en gmsb y exportar la información de nodos y elementos a Python; posteriormente, la malla es dibujada tal y como se muestra en la ilustración 3.

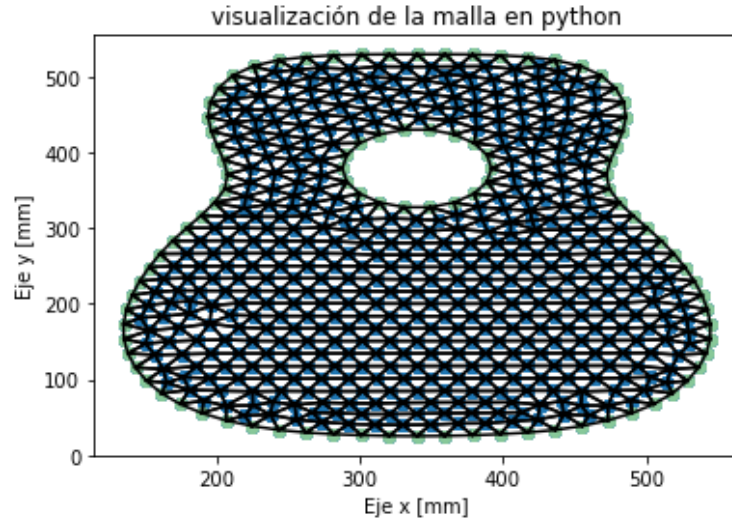


Ilustración 3. Visualización de la malla en Python.

Luego se resuelve el método de elementos finitos, que, como se mencionó en el apartado 3.2.1, se reduce a un problema de valores y vectores propios con los cuales podemos saber los modos de vibración de la tapa armónica de la guitarra acústica.

Para la madera de caoba, cuyos parámetros se muestran en la tabla 1, se obtuvieron los siguientes 4 primeros modos de vibración:

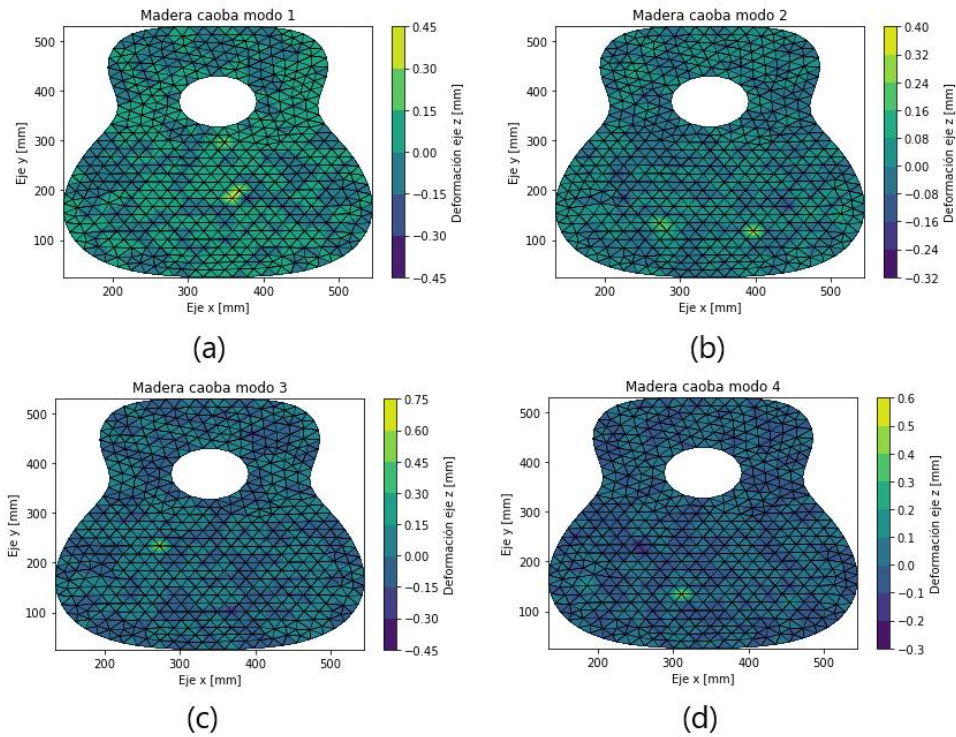


Ilustración 4. Modos de vibración para la tapa de caoba (a) $\omega_1 = 47.756\text{Hz}$, (b) $\omega_2 = 45.801\text{Hz}$, (c) $\omega_3 = 41.094\text{Hz}$, (d) $\omega_4 = 41.022\text{Hz}$

Y el rango de modos de frecuencias abarcado fue de $[2.572Hz - 47.756Hz]$.

Para la madera de cedro, se obtuvieron los 4 primeros modos de vibración que se observan en la ilustración 5.

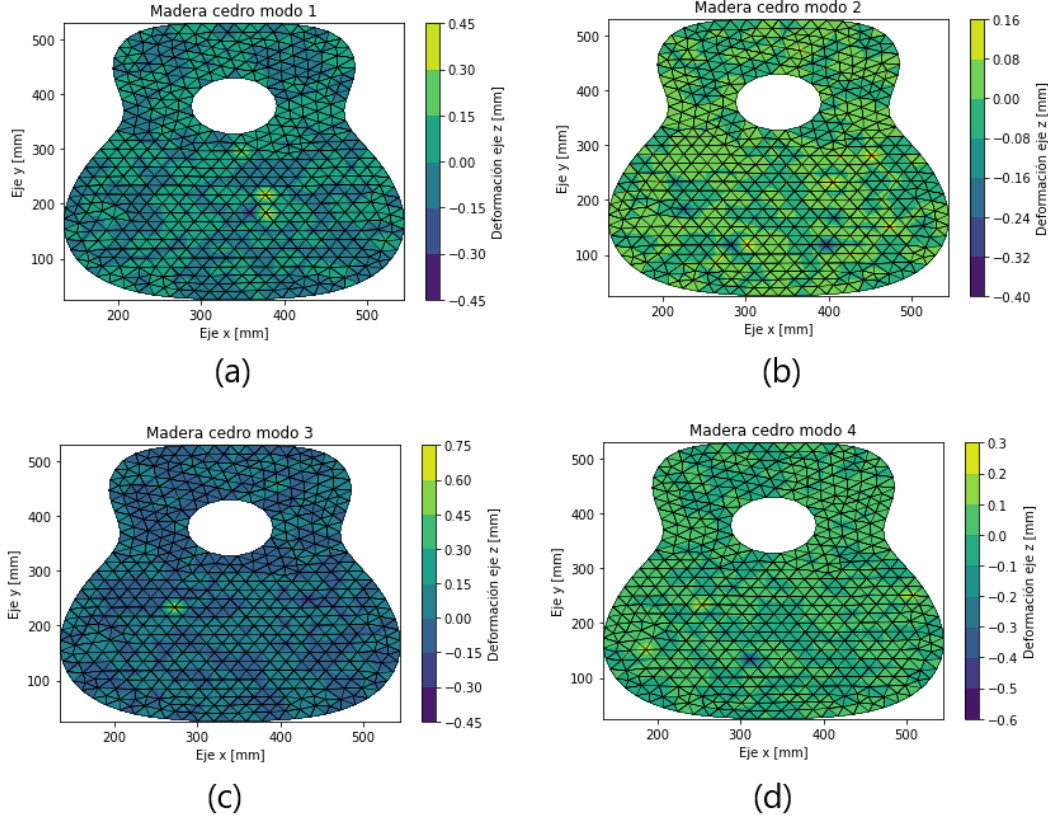


Ilustración 5. Modos de vibración para la tapa de cedro (a) $\omega_1 = 55.852Hz$, (b) $\omega_2 = 53.567Hz$, (c) $\omega_3 = 48.061Hz$, (d) $\omega_4 = 47.977Hz$

Y el rango de modos de frecuencias abarcado fue de $[3.008Hz - 55.852Hz]$.

Por último, para la madera de pino, se obtuvieron los 4 primeros modos de vibración que se observan en la ilustración 6.

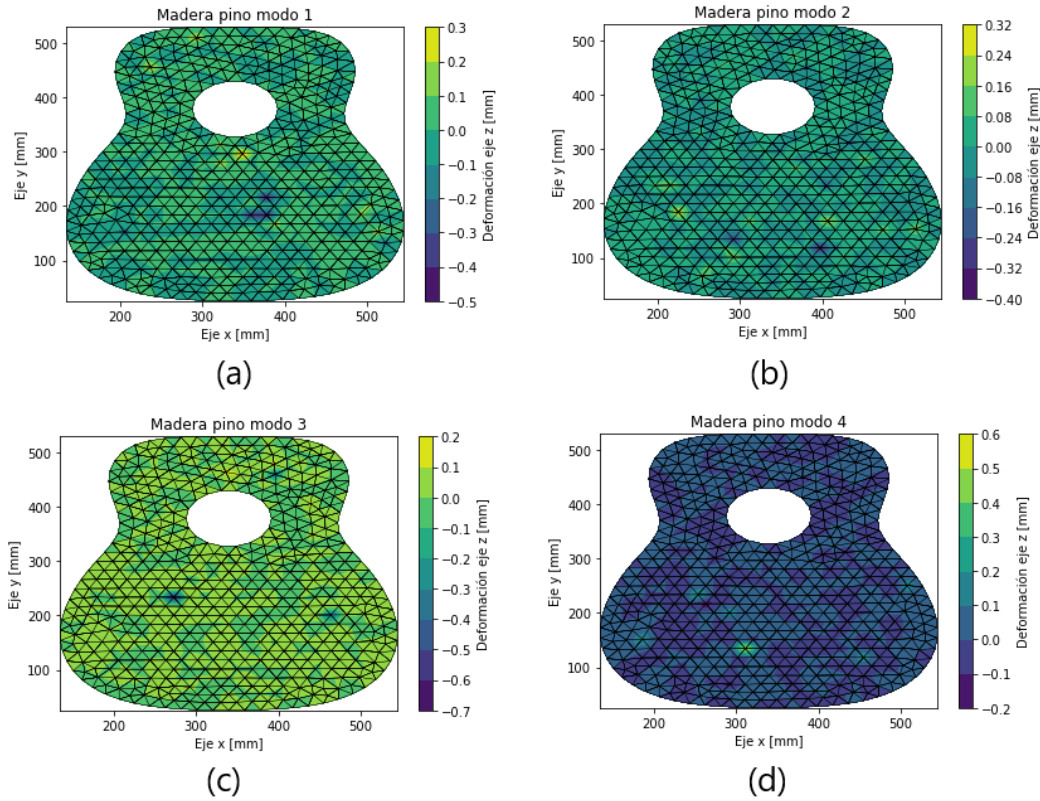


Ilustración 6. Modos de vibración para la tapa de pino (a) $\omega_1 = 48.993\text{Hz}$, (b) $\omega_2 = 46.988\text{Hz}$, (c) $\omega_3 = 42.158\text{Hz}$, (d) $\omega_4 = 42.085\text{Hz}$

Y el rango de modos de frecuencias abarcado fue de $[2.639\text{Hz} - 48.993\text{Hz}]$.

Según [12], la frecuencia de la cuerda de una guitarra acústica afinada se encuentra en un rango de entre $[55\text{Hz} - 329.63\text{Hz}]$. Por tanto, los modos de frecuencias encontrados en este artículo deberán ser contrastados con un experimento real para determinar su validez. Es notable que la simulación llevada a cabo para la tapa de Cedro fue la única que entró en el intervalo deseado, sin embargo, sólo con el valor mínimo.

5. CONCLUSIONES

- Se logró desarrollar un modelo físico matemático para hallar los modos de vibración de la tapa armónica de una guitarra acústica.
- Se consiguió implementar un código de elementos finitos para analizar las frecuencias modales de la tapa armónica de una guitarra acústica.
- Se consiguió observar cómo los parámetros inherentes a los materiales influyen en los modos de vibración de estructuras.

- El tamaño de la malla realizada influyó negativamente en la obtención de los intervalos de frecuencia, pues al aumentar los nodos de la discretización, hubiese sido posible obtener un mayor número de modos de vibración y por tanto un rango de frecuencias naturales más alto que hubiesen entrado en el rango de frecuencias de la cuerda de la guitarra, sin embargo, para lograr dicha convergencia, se requiere de una capacidad de cómputo mayor a las que se tenían al momento de la simulación.

6. REFERENCIAS

- [1]"Acústica musical", *Es.wikipedia.org*. [Online]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Ac%C3%BAstica_musical.
- [2] N. Fletcher and T. Rossing, *The Physics of Musical Instruments*. Springer Science & Business, 2008.
- [3]J. Jiménez, "La ciencia de la música - Organología de la guitarra. — Steemit", *Steemit.com*, 2018. [Online]. Available: <https://steemit.com/spanish/@leonardoj333/la-ciencia-de-la-musica-organologia-de-la-guitarra>.
- [4] A. Al-Majdalawi, "Instrumentos de Cuerda", *Universidad de Valladolid*. [Online]. Available: https://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_05_06/io2/public_html/cuerda/clasificacion_cuerda.html.
- [5]J. Torres, "Modos de vibración simulados por computadora y experimentales de una tapa de guitarra en sus etapas de construcción", Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.
- [6] "Análisis modal", *Siemens Digital Industries Software*, 2021. [Online]. Available: <https://www.plm.automation.siemens.com/global/es/our-story/glossary/modal-analysis/13172>.
- [7] M. Elejabarrieta and A. Ezcurra, "Estudio de la tapa armónica de la guitarra por el método de elementos finitos".
- [8]"Tabla de Densidad de maderas - Forestal Maderero", *Forestal Maderero*. [Online]. Available: <https://www.forestalmaderero.com/articulos/item/tabla-de-densidad-de-maderas.html>.
- [9]"Pino sivestre ficha técnica y características de su madera", *Maderasmedina.com*. [Online]. Available: <https://www.maderasmedina.com/fichas-propiedades/madera-de-coniferas/pino-silvestre.html>.

[10]"Las propiedades y usos de la madera de caoba", *Castor.es*. [Online]. Available: <https://www.castor.es/caoba.html>.

[11] M. Stanciu, S. Vlase and M. Marin, "Vibration Analysis of a Guitar considered as a Symmetrical Mechanical System", 2019.

[12] "What Are the Guitar String Frequencies? Explanation and Sound Samples | Sound Adventurer", *Sound Adventurer*, 2021. [Online]. Available: <https://soundadventurer.com/what-are-the-guitar-string-frequencies/>.