

Simulación de un filtro DBR en zona IR utilizando matrices de transferencia

Camilo David Álvarez Bravo

Universidad EAFIT, Departamento de Ciencias Físicas, Medellín, Colombia

email: cdalvarezb@eafit.edu.co

Mayo 25, 2022

1 ¿Qué son las matrices de transferencia?

Las matrices de transferencia son una herramienta que permite transformar las ecuaciones que tradicionalmente se plantean para describir el comportamiento de la luz al interactuar con un sistema óptico en un sistema matricial [1]. La idea principal del método radica en que los campos eléctricos de dos medios contiguos pueden relacionarse haciendo uso de dos tipos de matrices que llamaremos (1) matriz de transmisión y (2) matriz de propagación.

El primer tipo de matrices mencionado previamente, relaciona la transmisión de los campos eléctricos a través de una interfaz, mientras que el segundo tipo de matrices conecta los campos eléctricos que se propagan una distancia d dentro de un medio homogéneo [2].

2 Caso de estudio

Consideremos el siguiente arreglo conformado por 3 capas de materiales de índices de refracción n_1 , n_2 y n_3 . Supongamos que la luz fluye del material 1 al 2 tal y como se observa en la figura 1,

Ahora bien, si quisiéramos evaluar la relación entre el campo eléctrico incidente y el campo eléctrico de salida en pro de conocer la reflectancia del sistema para cada longitud de onda, debemos evaluar la transmisión y propagación de los campos eléctricos en las interfaces y en los medios. Obsérvese que en la figura 2 se representa dicho comportamiento. Para este caso, tomaremos los campos eléctricos que van hacia la derecha y que inciden por la izquierda de las interfaces como E_{nB}^d , donde n es el número de capas del medio. De manera similar, definimos los campos eléctricos transmitidos que van hacia la derecha como E_{nA}^d , los reflejados por la izquierda como E_{nB}^i y los reflejados por la derecha como E_{nA}^i .

Una vez que hemos definido los campos eléctricos, podemos comenzar a relacionarlos matricialmente. Denotaremos como D las matrices de transmisión y como P las matrices de propagación.

Para la transmisión en el medio 1-2:

$$\begin{bmatrix} E_{1B}^d \\ E_{1B}^i \end{bmatrix} = D_{12} \begin{bmatrix} E_{2A}^d \\ E_{2A}^i \end{bmatrix}$$

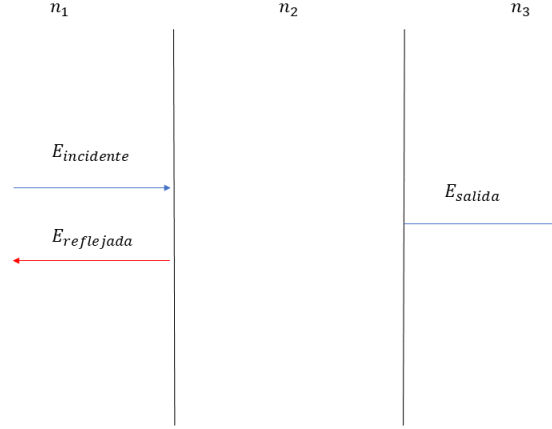


Figure 1: Campo incidente, reflejado y de salida en un medio 3-capas

Para la propagación en el medio 2:

$$\begin{bmatrix} E_{2A}^d \\ E_{2A}^i \end{bmatrix} = P_2 \begin{bmatrix} E_{2B}^d \\ E_{2B}^i \end{bmatrix}$$

Para la transmisión en el medio 2-3:

$$\begin{bmatrix} E_{2B}^d \\ E_{2B}^i \end{bmatrix} = D_{23} \begin{bmatrix} E_{3A}^d \\ E_{3A}^i \end{bmatrix}$$

Podemos observar claramente que existe una relación directa entre las ecuaciones anteriores que nos permite relacionar los campos eléctricos incidente, reflejados y de salida. Igualmente, debe tenerse en cuenta que E_{3A} sólo tiene una componente de propagación hacia delante, por tanto, $E_{3A}^i = 0$.

$$\begin{bmatrix} E_{1B}^d \\ E_{1B}^i \end{bmatrix} = D_{32} P_2 D_{12} \begin{bmatrix} E_{3A}^d \\ 0 \end{bmatrix}$$

El producto de matrices $D_{32} P_2 D_{12}$ lo llamaremos M_T o matriz de transferencia. Entonces podemos afirmar que,

$$\begin{bmatrix} E_{1B}^d \\ E_{1B}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{3A}^d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema matricial,

$$E_{1B}^d = M_{11} E_{3A}^d \quad (2.1)$$

$$E_{1B}^i = M_{21} E_{3A}^d \quad (2.2)$$

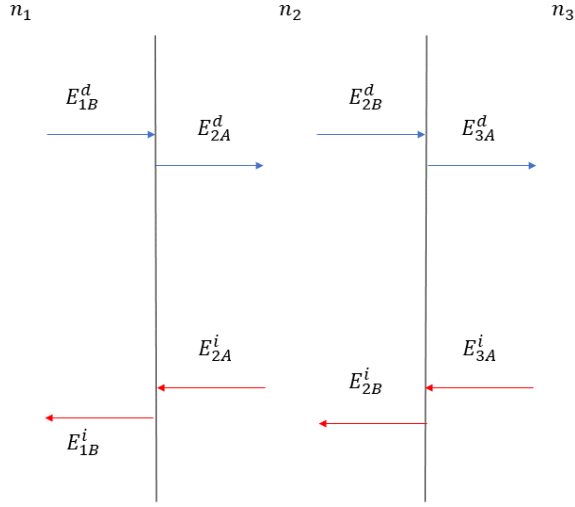


Figure 2: Campos eléctricos en un medio 3-capas

Dividiendo el campo eléctrico reflejado entre el campo eléctrico de entrada podemos hallar la reflectancia r del sistema multicapa,

$$r = \frac{E_{1B}^i}{E_{1B}^d} = \left| \frac{M_{21}}{M_{11}} \right| \quad (2.3)$$

3 Matrices de transferencia para un DBR

Ahora, consideremos el caso que se muestra en la figura 3, en donde se tiene un par alternante de material $n_H - n_L$ que se repite N veces. Esta estructura multicapa periódica es llamada Reflector Distribuidor de Bragg" o DBR.

Los items mencionados en la figura 3, son: n_a : Índice de refracción del aire; n_H : Material de alto índice de refracción; n_L : Material de bajo índice de refracción; t_H : Grosor de la capa de alto índice de refracción; t_L : Grosor de la capa de bajo índice de refracción; n_s : Índice de refracción del soporte o substrato.

Siguiendo la misma lógica presentada en el caso de estudio, podemos analizar el comportamiento de los campos eléctricos para $N = 2$ tal y como se muestra en la figura 4.

Para la transmisión en el medio $n_a - n_H$:

$$\begin{bmatrix} E_{1B}^d \\ E_{1B}^i \end{bmatrix} = D_{aH} \begin{bmatrix} E_{2A}^d \\ E_{2A}^i \end{bmatrix}$$

Para la propagación en el medio n_H :

$$\begin{bmatrix} E_{2A}^d \\ E_{2A}^i \end{bmatrix} = P_H \begin{bmatrix} E_{2B}^d \\ E_{2B}^i \end{bmatrix}$$

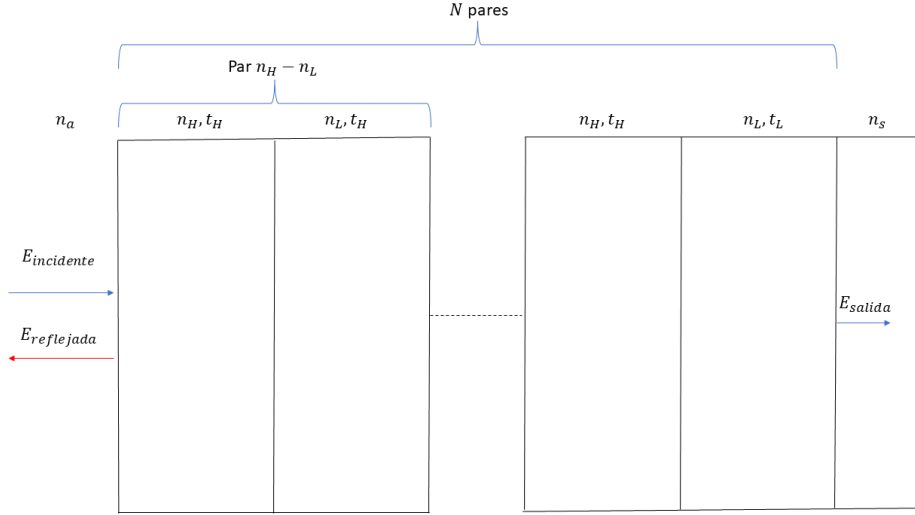


Figure 3: Campo incidente, reflejado y de salida en un DBR N capas

Para la transmisión en el medio $n_H - n_L$:

$$\begin{bmatrix} E_{2B}^d \\ E_{2B}^i \end{bmatrix} = D_{HL} \begin{bmatrix} E_{3A}^d \\ E_{3A}^i \end{bmatrix}$$

Para la propagación en el medio n_L :

$$\begin{bmatrix} E_{3A}^d \\ E_{3A}^i \end{bmatrix} = P_L \begin{bmatrix} E_{3B}^d \\ E_{3B}^i \end{bmatrix}$$

Para la transmisión en el medio $n_L - n_H$:

$$\begin{bmatrix} E_{3B}^d \\ E_{3B}^i \end{bmatrix} = D_{LH} \begin{bmatrix} E_{4A}^d \\ E_{4A}^i \end{bmatrix}$$

Para la propagación en el medio n_H :

$$\begin{bmatrix} E_{4A}^d \\ E_{4A}^i \end{bmatrix} = P_H \begin{bmatrix} E_{4B}^d \\ E_{4B}^i \end{bmatrix}$$

Para la transmisión en el medio $n_H - n_L$:

$$\begin{bmatrix} E_{4B}^d \\ E_{4B}^i \end{bmatrix} = D_{HL} \begin{bmatrix} E_{5A}^d \\ E_{5A}^i \end{bmatrix}$$

Para la propagación en el medio n_L :

$$\begin{bmatrix} E_{5A}^d \\ E_{5A}^i \end{bmatrix} = P_L \begin{bmatrix} E_{5B}^d \\ E_{5B}^i \end{bmatrix}$$

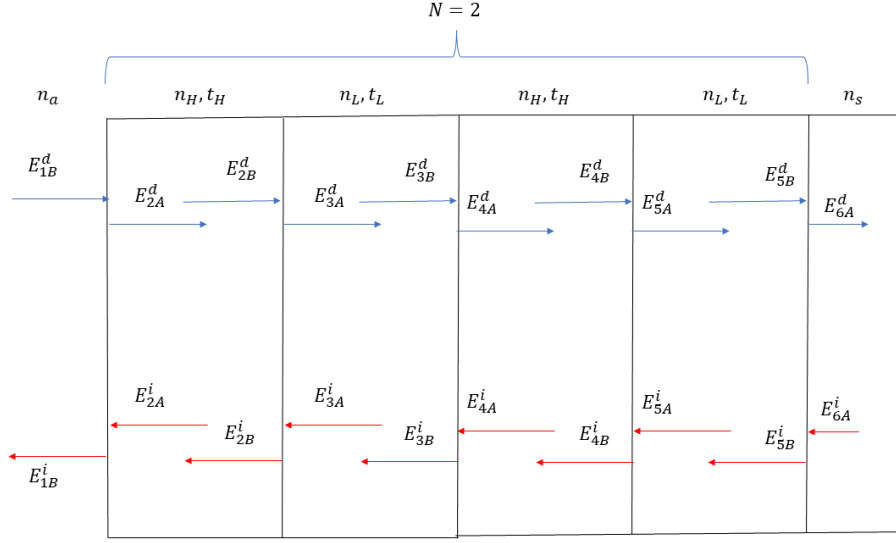


Figure 4: Campos eléctricos en un DBR 2-capas

Para la transmisión en el medio $n_L - n_s$:

$$\begin{bmatrix} E_{5B}^d \\ E_{5B}^i \end{bmatrix} = D_{Ls} \begin{bmatrix} E_{6A}^d \\ E_{6A}^i \end{bmatrix}$$

Relacionando los campos, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} E_{1B}^d \\ E_{1B}^i \end{bmatrix} = D_{Ls} P_L D_{HL} P_H D_{LH} P_L D_{HL} P_H D_{aH} \begin{bmatrix} E_{6A}^d \\ E_{6A}^i \end{bmatrix}$$

Podemos notar de la ecuación anterior que los términos $P_L D_{HL} P_H D_{LH}$ se repiten periódicamente a medida que aumento el número de pares alternantes, es decir, que, para el caso $N = 3$, la relación entre los campos eléctricos es:

$$\begin{bmatrix} E_{1B}^d \\ E_{1B}^i \end{bmatrix} = D_{Ls} P_L D_{HL} P_H D_{LH} P_L D_{HL} P_H D_{LH} P_L D_{HL} P_H D_{aH} \begin{bmatrix} E_{6A}^d \\ E_{6A}^i \end{bmatrix}$$

Si queremos generalizar las ecuaciones anteriores para $N \in \mathbb{Z}$ tal que $N = (1, \infty)$, podemos tomar $M = P_L D_{HL} P_H D_{LH}$

De tal manera que la ecuación de los campos eléctricos se simplifica en:

$$\begin{bmatrix} E_{1B}^d \\ E_{1B}^i \end{bmatrix} = D_{Ls} M^N D_{LH}^{-1} D_{aH} \begin{bmatrix} E_{6A}^d \\ E_{6A}^i \end{bmatrix}$$

De esta manera, la matriz de transferencia del sistema DBR multicapa se simplifica en $M_T = D_{Ls} M^N D_{LH}^{-1} D_{aH}$, por tanto,

$$\begin{bmatrix} E_{1B}^d \\ E_{1B}^i \end{bmatrix} = M_T \begin{bmatrix} E_{6A}^d \\ E_{6A}^i \end{bmatrix}$$

Ahora, representaremos las matrices de transmisión y propagación en términos de los coeficientes de fresnel y la ecuación de propagación de una onda plana respectivamente. Por tanto, las matrices de transmisión serán:

$$D_{LS} = \begin{bmatrix} \frac{n_s + n_L}{2n_s} & \frac{n_s - n_L}{2n_s} \\ \frac{n_s - n_L}{2n_s} & \frac{n_s + n_L}{2n_s} \end{bmatrix}, \quad D_{HL} = \begin{bmatrix} \frac{n_L + n_H}{2n_L} & \frac{n_L - n_H}{2n_L} \\ \frac{n_L - n_H}{2n_L} & \frac{n_L + n_H}{2n_L} \end{bmatrix}$$

$$D_{LH} = \begin{bmatrix} \frac{n_H + n_L}{2n_H} & \frac{n_H - n_L}{2n_H} \\ \frac{n_H - n_L}{2n_H} & \frac{n_H + n_L}{2n_H} \end{bmatrix}, \quad D_{aH} = \begin{bmatrix} \frac{n_H + n_a}{2n_H} & \frac{n_H - n_a}{2n_H} \\ \frac{n_H - n_a}{2n_H} & \frac{n_H + n_a}{2n_H} \end{bmatrix}$$

Mientras que las matrices de propagación son:

$$P_H = \begin{bmatrix} e^{ik_H t_H} & 0 \\ 0 & e^{-ik_H t_H} \end{bmatrix}, \quad P_L = \begin{bmatrix} e^{ik_L t_L} & 0 \\ 0 & e^{-ik_L t_L} \end{bmatrix}$$

Si desea más información acerca de la obtención paso a paso de las matrices de transmisión y propagación, puede visitar [3] y [4].

4 Algoritmo en Python

De esta manera, podemos codificar el algoritmo encargado de graficar el comportamiento del DBR (reflectancia) en función de la longitud de onda.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

nH = 2.32 # ZnS
nL = 1.38 # MgF2
ns = 1.5 # ndice de refracci n del substrato
na = 1 # Aire , n4
N = 5 # N mero de pares DBR
lo = 1500e-9 # Longitud de onda central

i = 0
r= [] # Almacenar los valores de reflectancia
      # para cada longitud de onda

l1 = [] # Almacenar los valores de cada longitud
        # de onda a evaluar

for l in np.arange(250e-9, 2100e-9, 1e-9):
    r.append([])
    l1.append([])

    kH = (2*np.pi*nH)/l # N mero de onda de la capa H
```

```

dH = lo/(4*nH) # Grosor de la capa H
pH = kH*dH # Propagaci n en el material H

kL = (2*np.pi*nL)/l # N mero de onda de la capa L
dL = lo/(4*nL) # Grosor de la capa L
pL = kL*dL # Propagaci n en el material L

# Coeficientes matrices de transmisi n DHL
A1 = (nL+nH)/(2*nL)
A2 = (nL-nH)/(2*nL)
# Coeficientes matrices de transmisi n DLH
A3 = (nH+nL)/(2*nH)
A4 = (nH-nL)/(2*nH)

# Matrices de transmisi n DHL y DLH
DHL = np.array([[A1, A2], [A2, A1]])
DLH = np.array([[A3, A4], [A4, A3]])

# Matrices de propagaci n PH Y PL
PH = np.array([[np.exp(1j*pH), 0], [0, np.exp(-1j*pH)]])
PL = np.array([[np.exp(1j*pL), 0], [0, np.exp(-1j*pL)]])

# Obtenci n de la ecuaci n M = PL*DHL*PH*DLH
dot1 = np.dot(PL,DHL)
dot2 = np.dot(dot1,PH)
M = np.dot(dot2,DLH)

# Matriz M^N
Mn = np.linalg.matrix_power(M,N)

#nL y ns
kL = (2*np.pi*nL)/l # N mero de onda de la capa L
dL = lo/(4*nL) # Grosor de la capa L
pL = kL*dL # Propagaci n en el material L

# Coeficientes de la matriz de transmisi n DLs
A3 = (ns+nL)/(2*ns)
A4 = (ns-nL)/(2*ns)
DLs = np.array([[A3,A4], [A4, A3]])
PL = np.array([[np.exp(1j*pL), 0], [0, np.exp(-1j*pL)]])

# n_H y na
# Coeficientes de la matriz de transmisi n DaH
A3 = (nH+na)/(2*nH)
A4 = (nH-na)/(2*nH)
DaH = np.array([[A3,A4], [A4,A3]])

```

```

# Obtenci n de la matriz de transferencia MT
dot3 = np.dot(DLs,Mn)
dot4 = np.dot(dot3,np.linalg.inv(DLH))
MT = np.dot(dot4,DaH)

''' Aqu se almacenan valores de reflectancia r[i] y su
correspondiente longitud de onda '''

r[i].append(abs(MT[1,0]/MT[0,0]))
l1[i].append(1)
i = i+1

# Gr fico de reflectancia vs Longitud de onda

plt.plot(l1,r)
plt.title("Filtro infrarrojo")
plt.xlabel("Longitud de onda [m]")
plt.ylabel("Reflectancia")
plt.savefig("Filtro_IR_5_Capas.png")
plt.show()

```

5 Resultados

A continuaci3n, se presenta el filtro obtenido a trav3s de las matrices de transferencia. Se observa la respuesta de este ante un espectro de $250nm - 2000nm$, y es posible notar que la reflectancia desde los $1300nm$ hasta aproximadamente los $1800nm$ es superior al 75%, lo que indica un buen filtrado de infrarrojo en esta zona.

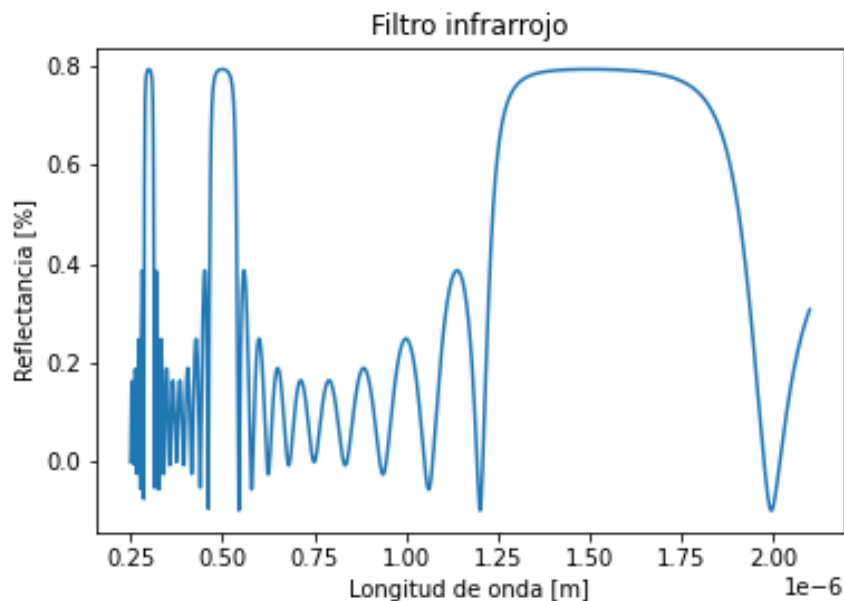


Figure 5: Filtro DBR en la zona IR de 5 capas

6 Referencias

- [1] A. PADRÓN, "Método de matrices de transferencia para análisis de películas delgadas con simetría-PT", Tonantzintla, 2017.
- [2] T. Zhan, X. Shi, Y. Dai, X. Liu and J. Zi, "Transfer matrix method for optics in graphene layers", Iopscience.iop.org, 2013.
- [3] J. Edmunds, Transfer Matrix Method Part 2 (Transmission Matrix). 2018.
- [4] J. Edmunds, Transfer Matrix Method Part 3 (Propagation Matrix). 2018.