Hochschule Regensburg
Studiengänge Technische Informatik,
Informatik und Wirtschaftsinformatik

Dr. G. Tapken

SS 2014

Zusatzblatt zur Statistik

Lösung zu Aufgabe Z 1

$W_1 =$ Ereignis, dass Würfel 1 geworfen wird
$W_2 =$ Ereignis, dass Würfel 2 geworfen wird
$W_3 =$ Ereignis, dass Würfel 3 geworfen wird
$A =$ Ereignis, dass eine 6 geworfen wird

Damit ergibt sich:

$$P[A\,|\,W_1] = \frac{1}{6}$$
$$P[A\,|\,W_2] = \frac{1}{3}$$
$$P[A\,|\,W_3] = 1$$

Da die Würfel mit Gleichverteilung ausgesucht werden ergibt sich

$$\begin{aligned} P[A] &= P[W_1]\cdot P[A\,|\,W_1] + P[W_2]\cdot P[A\,|\,W_2] + P[W_3]\cdot P[A\,|\,W_3] \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Gefragt ist in der Aufgabe nach $P[W_1\,|\,A], P[W_2\,|\,A], P[W_3\,|\,A]$, was man mit der Bayesformel berechnen kann:

$$P[W_i\,|\,A] = \frac{P[A\,|\,W_i]\cdot P[W_i]}{P[A]}$$

$$P[W_1\,|\,A] = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$$
$$P[W_2\,|\,A] = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$$
$$P[W_3\,|\,A] = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Lösung zu Aufgabe Z 2
Wir betrachten den Grundraum

$$\Omega \;=\; \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \,:\, \omega_1, \omega_2 \in \{0,1\}\} \;=\; \{0,1\}^2$$

mit der Interpretation

$$\omega_1 \;=\; \begin{cases} 1 & : \quad \text{Komponente ist fehlerhaft,} \\ 0 & : \quad \text{Komponente ist nicht fehlerhaft,} \end{cases}$$
$$\omega_2 \;=\; \begin{cases} 1 & : \quad \text{Prüfverfahren sortiert Komponente aus,} \\ 0 & : \quad \text{Prüfverfahren sortiert Komponente nicht aus,} \end{cases}$$

sowie die Ereignisse

$$F \;=\; \{(1,0),(1,1)\} \;=\; \{\text{Komponente ist fehlerhaft}\},$$
$$A \;=\; \{(0,1),(1,1)\} \;=\; \{\text{Komponente wird aussortiert}\}.$$

Aus den Annahmen folgt

$$P[F] = 0.2, \quad P[F^C] = 0.8, \quad P[A|F] = 0.95, \quad P[A|F^C] = 0.02\;,$$

und somit

$$P[A^C|F] = 0.05, \quad P[A^C|F^C] = 0.98\;.$$

Die Bayes–Formel liefert dann

$$P[F|A^C] \;=\; \frac{P[A^C|F] \cdot P[F]}{P[A^C|F] \cdot P[F] + P[A^C|F^C] \cdot P[F^C]}$$
$$\;=\; \frac{0.05 \cdot 0.2}{0.05 \cdot 0.2 + 0.98 \cdot 0.8} \;=\; 0.0126\;.$$

Lösung zu Aufgabe Z 3
Situation: 32 Mäuse, davon 24 Merkmalsträger,
8 nicht Merkmalsträger.

Gesucht ist die Anzahl n der durchzuführenden Experimente; bei jedem dieser Experimente werde genau eine Maus ausgewählt.

Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl derjenigen unter den n ausgewählten Mäusen, die Merkmalsträger sind.

Forderung in a) und in b): $P(X \geq 2) \overset{!}{\geq} 0.9.$

Wegen

$$P(X \geq 2) \;=\; 1 - P(X \leq 1) \;=\; 1 - P(X=0) - P(X=1) \;\overset{!}{\geq} 0.9$$

ist diese Forderung äquivalent zu

$$P(X=0) + P(X=1) \;\overset{!}{\leq} 0.1.$$

a) Ziehen ohne Zurücklegen:

Von den 32 Mäusen sind $r = 24$ Merkmalsträger und $s = 8$ nicht Merkmalsträger, d.h. wir haben das Modell

$$X \sim Hyp(n, 24, 8) \quad , \quad P(X = k) = \frac{\binom{24}{k}\binom{8}{n-k}}{\binom{32}{n}}.$$

Speziell ist

$$P(X = 0) = \frac{\binom{8}{n}}{\binom{32}{n}} \quad , \quad P(X = 1) = \frac{24 \cdot \binom{8}{n-1}}{\binom{32}{n}},$$

und es ergibt sich für die ersten Werte von n:

n	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=0)+P(X=1)$				
2	$\frac{7}{124}$	$\frac{12}{31}$	$\frac{55}{124}$	$=$	$0.443548\ldots$	$>$	0.1
3	$\frac{7}{620}$	$\frac{21}{155}$	$\frac{91}{620}$	$=$	$0.146774\ldots$	$>$	0.1
4	$\frac{7}{3596}$	$\frac{168}{4495}$	$\frac{707}{17980}$	$=$	$0.039321\ldots$	$\leq$	0.1

Man muss also mindestens $n = 4$ Experimente durchführen.

b) Ziehen mit Zurücklegen:

Definiert man einen „Erfolg“ als „Maus ist Merkmalsträger“, so erhält man mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ das Modell

$$X \sim Bin(n, \frac{3}{4}) \quad , \quad P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}.$$

Speziell ist

$$P(X = 0) = \frac{1}{4^n} \quad , \quad P(X = 1) = \frac{3n}{4^n},$$

und es ergibt sich für die ersten Werte von n:

n	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=0)+P(X=1)$				
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$=$	0.4375	$>$	0.1
3	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{5}{32}$	$=$	0.15625	$>$	0.1
4	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{13}{256}$	$=$	0.05078125	$\leq$	0.1

Man muss also auch hier mindestens $n = 4$ Experimente durchführen.

Lösung zu Aufgabe Z 4

a) Es gilt

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = -1, X_2 = -1) \;=\; 1/2, \\ P(Z = -1) &= 1 - P(Z = 1) \;=\; 1/2, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
P(X_1=1,Z=1) &= P(X_1=1,X_2=1) = P(X_1=1)\cdot P(X_2=1) = 1/4 \\
&= P(X_1=1)\cdot P(Z=1), \\
P(X_1=-1,Z=1) &= P(X_1=-1,X_2=-1) = 1/4 = P(X_1=-1)\cdot P(Z=1), \\
P(X_1=1,Z=-1) &= P(X_1=1,X_2=-1) = 1/4 = P(X_1=1)\cdot P(Z=-1), \\
P(X_1=-1,Z=-1) &= P(X_1=-1,X_2=1) = 1/4 = P(X_1=-1)\cdot P(Z=-1).
\end{aligned}$$

Also sind X_1 und Z und damit ebenso X_2 und Z unabhängig.

b) Wegen

$$\begin{aligned}
& P(X_1=1,X_2=1,Z=1) = P(X_1=1,X_2=1) = 1/4 \\
\neq\; & P(X_1=1)\cdot P(X_2=1)\cdot P(Z=1) = 1/8
\end{aligned}$$

sind X_1, X_2, Z nicht stochastisch unabhängig.

c) Wie in Teil b) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& P(X_1=1,X_2=1,Z=1) = P(X_1=-1,X_2=-1,Z=1) \\
=\; & P(X_1=-1,X_2=1,Z=-1) = P(X_1=1,X_2=-1,Z=-1) = 1/4,
\end{aligned}$$

alle anderen Wahrscheinlichkeiten sind 0. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
E(X_1\cdot X_2\cdot Z) &= \sum_{(x_1,x_2,z)\in\mathbb{R}^3} x_1\cdot x_2\cdot z\cdot P(X_1=x_1,X_2=x_2,Z=z) = 1 \quad \text{bzw.} \\
E(X_1\cdot X_2\cdot Z) &= E(Z^2) = E(1) = 1.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe Z 5

a) Die Verteilung von X ist eine Binomialverteilung zu $p=1/6$ und $n=5$, da es sich um fünf unabhängige Versuche mit Erfolgswahrscheinlichkeit 1/6 handelt.
Explizit ergibt sich also:

$$P(X=k)=\begin{cases}
(\frac{5}{6})^5 & \text{für } k=0 \\
5\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4 & \text{für } k=1 \\
\binom{5}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3 & \text{für } k=2 \\
\binom{5}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^2 & \text{für } k=3 \\
5(\frac{1}{6})^4\frac{5}{6} & \text{für } k=4 \\
(\frac{1}{6})^5 & \text{für } k=5.
\end{cases}$$

b) Die Verteilung von $X+Y$ eine $B(5,1/3)$-Verteilung,da es sich um fünf unabhängige Versuche mit Erfolgswahrscheinlichkeit 2/6 handelt.

Explizit ergibt sich also:

$$P(X=k)=\begin{cases} (\frac{2}{3})^5 & \text{für } k=0 \\ 5\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^4 & \text{für } k=1 \\ \binom{5}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3 & \text{für } k=2 \\ \binom{5}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2 & \text{für } k=3 \\ 5(\frac{1}{3})^4\frac{2}{3} & \text{für } k=4 \\ (\frac{1}{3})^5 & \text{für } k=5. \end{cases}$$

Somit ist

$$E(X+Y)=5\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$
$$\operatorname{Var}(X+Y)=5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$$

c) Schreibt man $X=\sum_{i=1}^{5}X_i$ und $Y=\sum_{i=1}^{5}Y_i$, wobei X_i bzw. Y_i die Indikatoren für eine 3 bzw. eine 5 im i'ten Wurf sind, so ist

$$\operatorname{cov}(X_i,Y_j)=0 \qquad \text{für } i\neq j\text{, da die Zufallsvariablen dann unabhängig sind}$$
$$\operatorname{cov}(X_i,Y_i)=E[X_iY_i]-E[X_i]E[Y_i]=0-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{36}$$

da die Indikatoren für eine 3 bzw. 5 nie gleichzeitig 1 sein können

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\operatorname{cov}(X_i,Y_j)=\sum_{i=1}^{5}\operatorname{cov}(X_i,Y_i)=5\cdot-\frac{1}{36}=-\frac{5}{36}$$

Die Zufallsvariablen sind somit korreliert und somit nicht unabhängig.