Hochschule Regensburg SS 2014
Studiengänge Technische Informatik,
Informatik und Wirtschaftsinformatik

Dr. G. Tapken

Lösung zu Aufgabe 25

Verteilungsfunktion

f ist sicher keine Verteilungsfunktion, da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \neq 1$
dies folgt sofort alleine daraus, dass f nur einen endlichen Träger hat (also nur einem endlichen Intervall ungleich 0 ist)

g ist sicher keine Verteilungsfunktion, da $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0 \neq 1$
dies folgt sofort alleine daraus, dass f nur einen endlichen Träger hat (also nur einem endlichen Intervall ungleich 0 ist)

Wir zeigen, dass h eine Verteilungsfunktion ist (dies war nicht explizit gefordert).

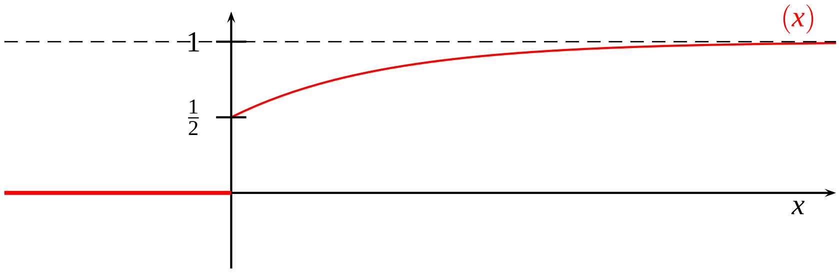
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 \qquad \checkmark$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}) = 1 \qquad \checkmark$$

$$h'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Da h' in ihrem gesamten Definitionsbereich nichtnegativ ist, ist h in $[-\infty, 0[$ und in $]0,\infty[$ monoton wachsend.
Da der Sprung von h in 0 von 0 auf $\frac{1}{2}$ nach oben ist, ist h auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend.

Prinzipiell müsste man noch die Rechtsstetigkeit zeigen (was man von Informatik-Studenten aber kaum verlangen würde). Da h auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sogar differenzierbar ist, ist sie dort auch rechtsstetig. Da in der Definition von h der Funktionswert in 0 zur Funktionsdefinition rechts der 0 geschlagen wird, ist h auch dort rechtsstetig.



D.h. die zu h gehörige Zufallsvariable X ist weder stetig noch diskret, sondern von gemischtem Typ.

Dichte

g ist keine Dichte, da $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \neq 1$

h ist sicher keine Dichte, da $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}) = 1 \neq 0$ und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty}(1 - \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x = \infty \neq 1$$

Wir zeigen, dass f eine Dichte ist (dies war nicht explizit gefordert).

$$f(x) = \begin{cases} \overbrace{4 \cdot e^{-2x}}^{\geq 0} & \text{für } x \in [0, \frac{\ln(2)}{2}] \\ \underbrace{0}_{\geq 0} & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist f insgesamt nichtnegativ $\checkmark$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\ln(2)}{2}} 4 \cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{-2} \cdot e^{-2x}\right]_0^{\frac{\ln(2)}{2}} = (-2) \cdot e^{-2\frac{\ln(2)}{2}} - (-2) \cdot e^{-0} = (-2) \cdot e^{-\ln(2)} + 2$$
$$= (-2) \cdot \frac{1}{e^{\ln(2)}} + 2 = (-2) \cdot \frac{1}{2} + 2 = -1 + 2 = 1 \quad \checkmark$$

Lösung zu Aufgabe 28

a) Randverteilungen von X

$$\begin{aligned} P(X=-1) &= P(X=-1, Y=1) + P(X=-1, Y=0) = \frac{3}{8}, \\ P(X=0) &= \frac{1}{4}, \qquad P(X=1) = \frac{1}{8}, \qquad P(X=2) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

b) $EX \;=\; (-1) \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{4}$
$EX^2 \;=\; 1 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} \;=\; \frac{3}{2}$
$\mathrm{Var}(X) \;=\; EX^2 - (EX)^2 \;=\; \frac{23}{16}$

c)

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x,y \in \mathbb{R}} x \cdot y \cdot P(X=x, Y=y), = (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$$
$$E\left((X \cdot Y)^2\right) = \sum_{x,y \in \mathbb{R}} x^2 \cdot y^2 \cdot P(X=x, Y=y) = (-1)^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot (-1)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$
$$\mathrm{Var}(X,Y) = E\left((X \cdot Y)^2\right) - \left(E(X \cdot Y)\right)^2 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4-1}{16} = \frac{3}{16}$$

d) Wir bestimmen zunächst den Erwartungswert von Y

$$\begin{aligned} P(Y=-1) &= \frac{1}{4} \\ P(Y=0) &= \frac{1}{2} \\ P(Y=1) &= \frac{1}{4} \\ E(Y) &= (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

Wegen der Additivität (1. Schritt) und der Homogenität (2.Schritt) des Erwartungswertes ergibt sich mit den Resultaten aus den vorangehenden Aufgabenteilen:

$$\begin{aligned} E(6 \cdot X^2 - 8X + 5Y - 4 \cdot XY) &= E(6 \cdot X^2) - E(8X) + E(5Y) - E(4 \cdot XY) \\ &= 6 \cdot E(\cdot X^2) - 8 \cdot E(X) + 5 \cdot E(Y) - 4 \cdot E(XY) \\ &= 6 \cdot \frac{3}{2} - 8 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot 0 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 9 - 2 + 0 - 1 = 6 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 29
Wir betrachten den Grundraum

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega = (a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \{g, b\}\} = \{g,b\}^3 \\ & \quad (a_j \text{ „Kartenfarbe im } j\text{–ten Zug“}, \quad j = 1,2,3)\end{aligned}$$

mit der durch die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{array}{rclcrclcrclcrcl} p_1(g) &=& \frac{1}{7} &,& p_1(b) &=& \frac{6}{7}, \\ p_2(g|g) &=& \frac{1}{7} &,& p_2(b|g) &=& \frac{6}{7} &,& p_2(g|b) &=& \frac{2}{7} &,& p_2(b|b) &=& \frac{5}{7}, \\ p_3(g|g,g) &=& \frac{1}{7} &,& p_3(b|g,g) &=& \frac{6}{7} &,& p_3(g|g,b) &=& \frac{2}{7} &,& p_3(b|g,b) &=& \frac{5}{7}, \\ p_3(g|b,g) &=& \frac{2}{7} &,& p_3(b|b,g) &=& \frac{5}{7} &,& p_3(g|b,b) &=& \frac{3}{7} &,& p_3(b|b,b) &=& \frac{4}{7}. \end{array}$$

bestimmten Verteilung. Bezeichnet die Zufallsvariable X die Auszahlung an den Spieler, so ist

$$EX = 100 \cdot P(\text{„3 gelbe Karten“}) + 5 \cdot P(\text{„2 gelbe Karten“}) + 2 \cdot P(\text{„1 gelbe Karte“}),$$

und wegen

$$\begin{array}{rcl} q_3 &:=& P(\text{„3 gelbe Karten“}) &=& p_1(g) \cdot p_2(g|g) \cdot p_3(g|g,g) = \frac{1}{7^3}, \\ q_2 &:=& P(\text{„2 gelbe Karten“}) &=& \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{42}{7^3}, \\ q_0 &:=& P(\text{„3 blaue Karten“}) &=& \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{7^3} = \frac{120}{7^3}, \\ q_1 &:=& P(\text{„1 gelbe Karte“}) &=& 1 - q_3 - q_2 - q_0 = 1 - \frac{1}{7^3} - \frac{42}{7^3} - \frac{120}{7^3} = \frac{180}{7^3}, \end{array}$$

folgt

$$EX = 100 \cdot q_3 + 5 \cdot q_2 + 2 \cdot q_1 = \frac{670}{7^3} \approx 1.95e$$

Die Bank muss also mindestens 3 € Einsatz verlangen.

Lösung zu Aufgabe 31
Es gilt

$$X \cdot Y \in \{0,1,2,3,4,6,8,9,12,16\}$$

und somit

$$Z_1 \in \{0,1,2,3,4,6,8,9\} \text{ und } Z_2 \in \{0,1\}.$$

Mit der Unabhängigkeit von X und Y folgt

$$\begin{aligned} P(Z_2 = 1) &= P(XY = 12) + P(XY = 16) = P(X = 3, Y = 4) + P(X = 4, Y = 3) + P(X = 4, Y = 4) \\ &= P(X = 3) \cdot P(Y = 4) + P(X = 4) \cdot P(Y = 3) + P(X = 4) \cdot P(Y = 4) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{25} \\ P(Z_2 = 0) &= 1 - P(Z_2 = 1) = \frac{22}{25} \\ E(Z_2) &= P(Z_2 = 0) \cdot 0 + P(Z_2 = 1) \cdot 1 = \frac{3}{25} \\ E\left((Z_2)^2\right) &= P(Z_2 = 0) \cdot 0^2 + P(Z_2 = 1) \cdot 1^2 = \frac{3}{25} \\ \mathrm{Var}(Z_2) &= E\left((Z_2)^2\right) - (E(Z_2))^2 = \frac{3}{25} - \left(\frac{3}{25}\right)^2 = \frac{75 - 9}{625} = \frac{66}{625} \end{aligned}$$

Und nun die Verteilung von Z_1

$$\begin{aligned}
P(Z_1=1) &= \mathbb{P}(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}\\
P(Z_1=2) &= P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=4)+P(X=4,Y=3)=\frac{4}{25}\\
P(Z_1=3) &= P(X=1,Y=3)+P(X=3,Y=1)=\frac{2}{25}\\
P(Z_1=4) &= P(X=1,Y=4)+P(X=4,Y=1)+P(X=2,Y=2)=\frac{3}{25}\\
P(Z_1=6) &= P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=2)+P(X=4,Y=4)=\frac{3}{25}\\
P(Z_1=8) &= P(X=2,Y=4)+P(X=4,Y=2)=\frac{2}{25}\\
P(Z_1=9) &= P(X=3,Y=3)=\frac{1}{25}\\
P(Z_1=0) &= 1-\sum_{k\in\{1,2,3,4,6,8,9\}}P(Z_1=k)=\frac{9}{25}
\end{aligned}$$

und daraus:

$$\begin{aligned}
E(Z_1) &= \sum_{k=0}^{9}k\cdot P(Z_1=k)=0\cdot\frac{9}{25}+1\cdot\frac{1}{25}+2\cdot\frac{4}{25}+3\cdot\frac{2}{25}+4\cdot\frac{3}{25}+6\cdot\frac{3}{25}+8\cdot\frac{2}{25}+9\cdot\frac{1}{25}=\frac{70}{25}=\frac{14}{5}=2.8\\
E\left((Z_1)^2\right) &= \sum_{k=0}^{9}k^2\cdot P(Z_1=k)=0\cdot\frac{9}{25}+1\cdot\frac{1}{25}+4\cdot\frac{4}{25}+9\cdot\frac{2}{25}+16\cdot\frac{3}{25}+36\cdot\frac{3}{25}+64\cdot\frac{2}{25}+81\cdot\frac{1}{25}=\frac{400}{25}=\frac{80}{5}\\
\mathrm{Var}(Z_1) &= E\left((Z_1)^2\right)-\left(E\left(Z_1\right)\right)^2=\frac{14}{5}-\left(\frac{80}{5}\right)^2=\frac{400-196}{25}=\frac{204}{25}=8.16
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
P(Z_1Z_2=2) &= P(Z_1=2,Z_2=1)=P(XY=12)=P(X=3,Y=4)+P(X=4,Y=3) = \frac{2}{25},\\
P(Z_1Z_2=6) &= P(Z_1=6,Z_2=1)=P(XY=16)=P(X=4,Y=4)=\frac{1}{25},\\
P(Z_1Z_2=0) &= \frac{22}{25}
\end{aligned}$$

folgt

$$E(Z_1Z_2)=0\cdot\frac{22}{25}+2\cdot\frac{2}{25}+6\cdot\frac{1}{25}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

und somit

$$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)\cdot E(Z_2)=\frac{2}{5}-\frac{14}{5}\frac{3}{25}=\frac{8}{125}=0.064$$

Bem: Man könnte die gesuchten Größen auch berechnen ohne die genaue Verteilung von Z_1 hinzuschreiben, indem man die Gleichung $X\cdot Y=10\cdot Z_2+Z_1$ und die Eigenschaften des Erwartungswertes und er Varianz verwendet.

Lösung zu Aufgabe 34

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 - e^{-2t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(2X \leq t) = P\left(X \leq \frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 - e^{-2\frac{t}{2}} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

d.h. Y ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$

Lösung zu Aufgabe 35

a)

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{9} \cdot (16.0 + 16.5 + 17.0 + 17.5 + 18.0 + 18.5 + 19.0 + 19.5 + 20.0) = 18 \\
\overline{x^2} &= \frac{1}{9} \cdot \left((16.0)^2 + (16.5)^2 + (17.0)^2 + (17.5)^2 + (18.0)^2 + (18.5)^2 + (19.0)^2 + (19.5)^2 + (20.0)^2\right) \\
&= \frac{977}{3} = 325.\overline{6} \\
(s_X)^2 &= \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{977}{3} - 18^2 = \frac{5}{3} = 1.\overline{6} \\
s_X &= \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.2910 \\
\overline{y} &= \frac{1}{9} \cdot (22.5 + 19.0 + 20.0 + 18.5 + 19.5 + 17.0 + 16.0 + 16.5 + 15.0) = \frac{164}{9} = 18.\overline{2} \\
\overline{y^2} &= \frac{1}{9} \cdot \left((22.5)^2 + (19.0)^2 + (20.0)^2 + (18.5)^2 + (19.5)^2 + (17.0)^2 + (16.0)^2 + (16.5)^2 + (15.0)^2\right) \\
&= \frac{3032}{9} = 336.\overline{8} \\
(s_Y)^2 &= \overline{y^2} - \overline{y}^2 = \frac{3032}{9} - \left(\frac{164}{9}\right)^2 = \frac{392}{81} = 4.8395 \\
s_Y &= \sqrt{\frac{392}{81}} = 2.1999 \\
\overline{xy} &= \frac{1}{9} \cdot \big(16.0 \cdot 22.5 + 16.5 \cdot 19.0 + 17.0 \cdot 20.0 + 17.5 \cdot 18.5 + 18.0 \cdot 19.5 + 18.5 \cdot 17.0 + 19.0 \cdot 16 \\
&\quad + 19.5 \cdot 16.5 + 20.0 \cdot 15\big) = \frac{5857}{18} = 325.3\overline{8} \\
s_{XY} &= \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{5857}{18} - 18 \cdot \frac{164}{9} = -\frac{47}{18} = -2.6\overline{1} \\
r_{XY} &= \frac{s_{XY}}{s_X \cdot s_Y} = -0.91939
\end{aligned}$$

b) Aufgrund dessen, dass $|r_{XY}|$ nahe an 1 liegt, ist es gerechtfertigt eine Regressionsgerade in diese Daten reinzulegen.
Die Regressionsgerade hat die Form $Y = a + b \cdot X$. Wir schätzen a und b.

$$\widehat{b} = \frac{s_{XY}}{(s_X)^2} = \frac{-\frac{47}{18}}{\frac{5}{3}} = \frac{47}{30} = 1.5\overline{6}$$
$$\widehat{a} = \overline{y} - \widehat{b} \cdot \overline{x} = \frac{164}{9} + \frac{47}{30} \cdot 18 = 46.4\overline{2}$$

Lösung zu Aufgabe 36

a) Da schon 5 Leute unbedingt vorwärts sitzen wollen, kann man aus den 3en denen es egal ist wie sie sitzen noch einen aussuchen $\binom{3}{1} = 3$ und dann ist die Sitzrichtung eindeutig festgelegt. Innerhalb einer Sitzrichtung hat man jeweils 6! Anordnungsmöglichkeiten der dort sitzenden Personen. Es ergibt sich also:
$$6! \cdot 6! \cdot 3 = 1'555'200$$

b) Es ist schon mal klar, das die Zahl hier viel kleiner sein muss als diejenige in Teilaufgabe a), da hier weniger Unterscheidungen interessant sind.
Wir unterscheiden zunächst die Abteile (das behebt man indem man am Schluss durch 2 teilt). Wir suchen die 6 Leute für Abteil 1 aus (der Rest sitzt dann automatisch im 2.Abteil). Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, indem man mehr oder weniger von denen beimischt, denen es egal ist wo sie sitzen. Es ergibt sich:
$\frac{1}{2} \cdot \left(\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{0} + \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{1} + \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} + \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3} \right) = 280$

Lösung zu Aufgabe 37

X ist $N(4000, 10^6)$- verteilt. d.h. $\mu = 4000, \sigma = 1000$
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist $N(0,1)$-verteilt.
Φ sei die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

a)
$$\begin{aligned} P(X \leq 3000) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{3000-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq -1) \\ &= P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1.0.8413 = 0.1587 \\ P(X > 6000) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{6000-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

b) Gesucht ist $x_{0.33}$, also das 0.33-Quantil. Es gilt
$$z_{0.33} = \frac{x_{0.33} - \mu}{\sigma} \qquad (\star)$$
$$\begin{aligned} & P(Z \leq z_{0.33}) = 0.33 \\ \Leftrightarrow \quad & P(Z \geq -z_{0.33}) = 0.33 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - P(Z < -z_{0.33}) = 0.33 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - 0.33 = P(Z < -z_{0.33}) \\ \Leftrightarrow \quad & 0.67 = \Phi(-z_{0.33}) \end{aligned}$$

Wir wenden nun auf beiden Seiten Φ^{-1} an und erhalten:

$$\Leftrightarrow \qquad 0.44 = -z_{0.33}$$

daraus ergibt sich mit der Formel $(\star)$

$$x_{0.33} = z_{0.33} \cdot \sigma + \mu = -0.44 \cdot 1000 + 4000 = 3560$$

c) Die Milchleistung der i-te Kuh werde durch X_i beschrieben. X_i ist $N(4000,\, 10^6)$- verteilt. Die Milchleistung verschiedener Kühe sei unabhängig.

$$E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 100 \cdot E(X_1) = 100 \cdot 4000 = 400\,000\text{Liter}$$

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} \operatorname{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{100} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{100} \underbrace{\operatorname{Cov}(X_i, X_j)}_{=0} = 100 \cdot \operatorname{Var}(X_1) = 100 \cdot 10^6 = 10^8$$

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sqrt{\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)} = 10^4 = 10 \cdot \sigma$$