1 Kapitel 1-3

Aufgabe 1

Die folgende Tabelle enthält die Merkmalswerte zweier Merkmale X und Y an 5 Merkmalsträgern. Bestimmen Sie (ohne einen Taschenrechner zu benutzen!) die arithmetischen Mittelwerte, Varianzen, Mediane und oberen Quartile von X und Y.

i	1	2	3	4	5
x_i	0	1	2	1	2
y_i	1	0	1	2	3

Aufgabe 2 (⇒ Keine Klausuraufgabe!)

Am 11. Juli 2012 gab das Statistische Bundesamt bekannt, dass 20% der Bevölkerung in Deutschland allein im Haushalt leben, also einen Single-Haushalt bilden. Andererseits seien 40,4% aller Haushalte derartige Single-Haushalte. Bestimmen Sie aus diesen Informationen die durchschnittliche Haushaltsgröße!

Aufgabe 3

Für die Messung von (wirtschaftlicher) Armut gibt es mehrere Definitionen. Häufig wird ein Haushalt (vereinfacht) als arm definiert, wenn das Haushaltseinkommen weniger als 60% des Medianhaushaltseinkommens beträgt. Alternativ könnte man einen Haushalt als arm definieren, wenn das Haushaltseinkommen weniger als 60% des arithmetischen Mittels aller Haushaltseinkommen beträgt. Erläutern Sie, nach welcher dieser beiden Armutsdefinitionen in Deutschland mehr Haushalte als arm bezeichnet würden!

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Merkmal X in einer Gesamtheit vom Umfang n mit arithmetischen Mittel x und Standardabweichung s. Das Merkmal Y sei definiert durch: $y_i = \frac{x_i * \overline{x}}{s}$ für i = 1, ..., n
Zeigen Sie: das arithmetische Mittel von Y beträgt 0, und die Varianz von Y beträgt 1.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 Zeigen Sie: Für eine gegebene Häufigkeitsverteilung eines metrischen Merkmals X mit Ausprägungen x_1, x_2, ..., x_k und relativen Häufigkeiten f_1, f_2, ..., f_k besitzt die Funktion:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \to f(t) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - t)^2 * f_i$

in $t_0 = \overline{x}$ (arithmetisches Mittel von X) das globale Minimum.

a; Geben Sie die tatsächlich vorkommenden Merkmalsausprägungen und die jeweiligen relativen Häufigkeiten an!
b; Welcher Anteil der Mütter ist älter als 26 Jahre?

Aufgabe 6

Die folgende empirische Verteilungsfunktion beschreibt die Verteilung des Merkmals 'Alter' in der aktuellen Gesamtheit aller Mütter auf der Entbindungsstation einer großen Klinik.

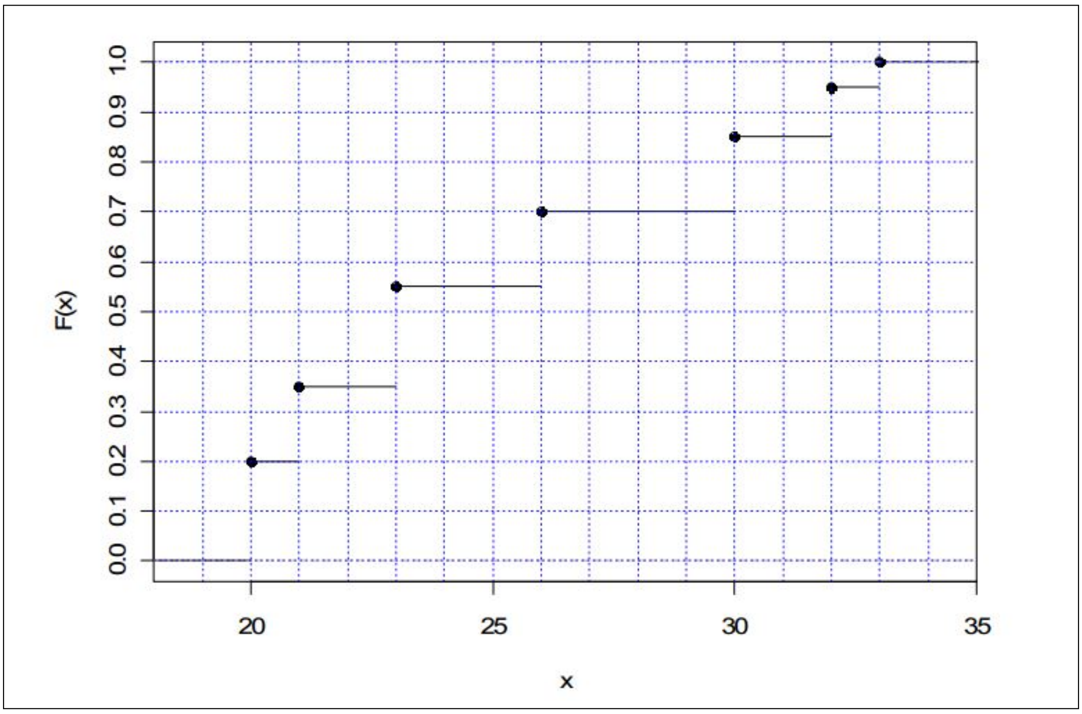


Abbildung 1: Erklärung

a) Geben Sie die tatsächlich vorkommenden Merkmalsausprägungen und die jeweiligen relativen Häufigkeiten an!

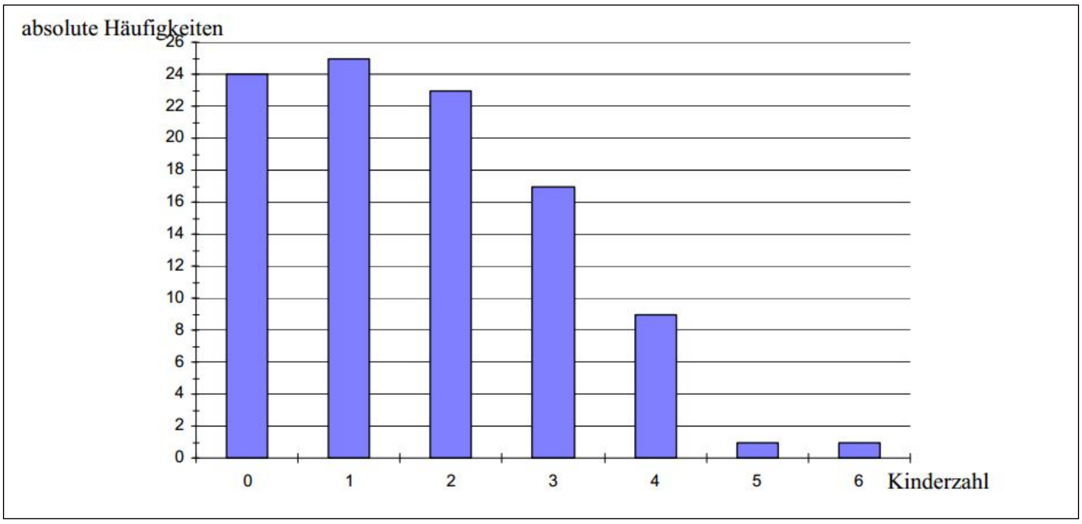
b) Welcher Anteil der Mütter ist älter als 26 Jahre?

Aufgabe 7

Ein Merkmal X besitze nur die beiden Ausprägungen 0 und 1. Die relative Häufigkeit der Ausprägung 1 wird in diesem Fall auch mit π(Anteil, Anteilswert) bezeichnet. Zeigen Sie, dass in diesem Fall für die Varianz von X gilt:

Aufgabe 8

Das folgende Säulendiagramm zeigt die Verteilung des Merkmals "Kinderzahl"für alle Haushalte eines bestimmten Wohnviertels.



a) Berechnen Sie für diese Verteilung das arithmetische Mittel, die Varianz, die Spannweite, den Median und den Quartilsabstand! Skizzieren Sie den zugehörigen Boxplot!

b) Im daneben liegenden Wohnviertel mit 100 Haushalten gibt es insgesamt 250 Kinder; die Varianz des Merkmals "Kinderzahl"beträgt unter diesen Haushalten 3. Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und die Varianz dieses Merkmals in der Gesamtheit aller Haushalte, wenn man die beiden Wohnviertel zusammen betrachtet!

Aufgabe 9

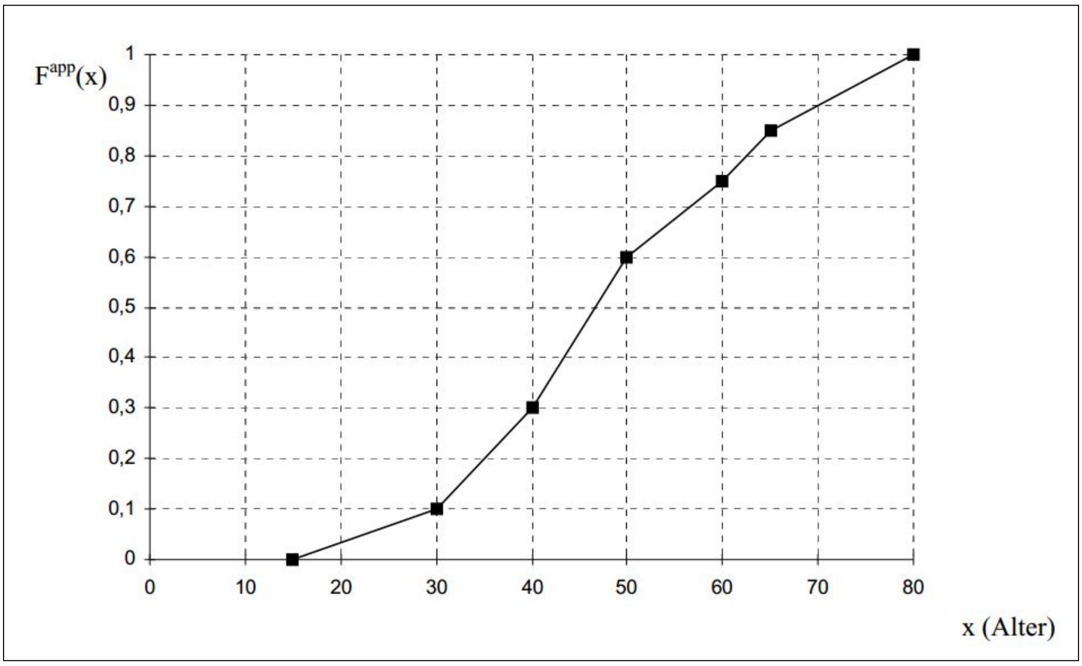
Sechs Schüler haben eine Prüfung absolviert; jede der (ganzzahligen) Noten von 1 bis 6 wurde dabei vergeben. Bestimmen Sie mit dem Taschenrechner oder einer Software Ihrer Wahl die Varianz des Merkmals "Prüfungsnote". Versuchen Sie durch Ausprobieren herauszufinden, bei welcher Notenverteilung die Varianz maximiert worden wäre!

Aufgabe 10

Die so genannte Lebenserwartung einer Personengruppe ist (vereinfacht) das arithmetische Mittel der (prognostizierten) vollendeten Lebensjahre zum Sterbezeitpunkt der einzelnen Personen (Sterbealter in ganzen Jahren). Nach einem Zeitungsartikel lag 1871 die Lebenserwartung eines Neugeborenen (im damaligen Deutschen Reich) bei 38 Jahren; 230 von 1000 Säuglingen starben dabei schon während des ersten Lebensjahres. Im Jahr 2011 lag die Lebenserwartung eines Neugeborenen in Deutschland bei 80 Jahren; nur 4 von 1000 Säuglingen starben während des ersten Lebensjahres. Wie hat sich die Lebenserwartung von Personen, die das erste Lebensjahr überlebt haben, von 1871 bis 2011 verändert?

Aufgabe 11

Die folgende approximierende Verteilungsfunktion beschreibt die Verteilung des Merkmals Älterïn der aktuellen Gesamtheit aller Mitglieder des Kreisverbands einer Partei. Zur Bestimmung dieser Verteilungsfunktion wurde das Merkmal in sechs Klassen eingeteilt.



a) Geben Sie die Klassengrenzen und die jeweiligen relativen Häufigkeiten innerhalb der Klassen an!

b) Bestimmen Sie approximativ anhand der Grafik (keine Rechnung nötig!) den Median dieser Verteilung!

c) Welcher (approximative) Anteil der Parteimitglieder ist 70 Jahre oder älter? (Keine Rechnung nötig!)

Aufgabe 12

Ein metrisches Merkmal X wird in zwei verschiedenen Teilgruppen beobachtet. In beiden Teilgruppen wurden Minimum, Maximum, Median und arithmetisches Mittel berechnet:

Minimum	Maximum	Median	arithmetisches Mittel	Größe der Teilgruppe
0	4	3	2	20
3	9	5	6	30

Berechnen Sie, falls möglich, aus den angegebenen Werten das gesamte arithmetische Mittel, den gesamten Median, die gesamte Spannweite und die gesamte Varianz von X, wenn die 50 betrachteten Merkmalsträger als Gesamtheit angesehen werden. Falls Ihnen die Berechnung einiger oder aller Maßzahlen nicht möglich ist, geben Sie an, welche zusätzlichen Informationen Sie dazu jeweils bräuchten. Geben Sie für alle Maßzahlen, die Sie nicht berechnen können, möglichst kleine Intervalle an, in denen die Maßzahlen mit Sicherheit liegen.

Aufgabe 13

Das folgende Stabdiagramm zeigt die Verteilung des Merkmals X=?Anzahl der Ausfälle in einem Netzwerk pro Woche? innerhalb eines bestimmten Zeitraums.

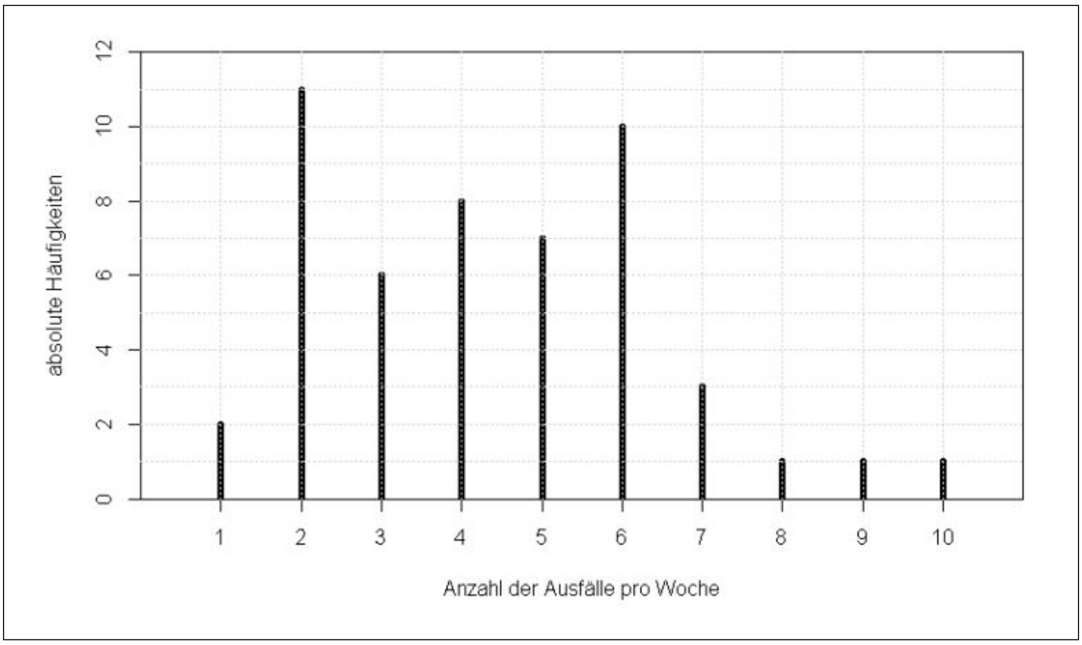


Abbildung 2: Entity-Relation Diagramm der Datenbank

a) Bestimmen Sie die beiden Quartile und den Median von X!

b) Insgesamt sind im betrachteten Zeitraum 217 Ausfälle beobachtet werden. Die Summe der quadrierten Ausfallzahlen (pro Woche) beträgt 1155. Bestimmen Sie daraus die Varianz von X!

Aufgabe 14

Ein kleiner Betrieb stellt 5 verschiedene Artikel her. Die folgende Tabelle zeigt die Jahresumsätze der jeweiligen Artikel. Skizzieren Sie die Lorenzkurve, die die Konzentration der Umsätze veranschaulicht.

Minimum	Maximum
A	100
B	80
C	150
D	30
E	30

Zusatzaufgabe 1

Ein Fortbildungsseminar wird von zehn Personen besucht. Über das Merkmal „Kinderzahl"der Seminarteilnehmer sind folgende Informationen bekannt:

- das untere Quartil beträgt 1,
- der Quartilsabstand beträgt 3,
- der eindeutige Median beträgt 3,
- die Spannweite beträgt 4.

Geben Sie eine Verteilung des Merkmals „Kinderzahl"unter den betrachteten Personen an, die mit diesen Angaben verträglich ist! Berechnen Sie für Ihre Verteilung den Median, die beiden Quartile,das arithmetische Mittel und die Standardabweichung!

2 Kapitel 4-5

Aufgabe 1

Die folgenden Tabellen zeigen Alter und Gewicht von sechs beobachteten Personen. Das Alter ist für alle sechs Personen bekannt, das Gewicht nur für zwei der sechs Personen. Ergänzen Sie die vier unbekannten Gewichtswerte jeweils so, dass

a) die Merkmale Alter und Gewicht negativ korreliert sind,

b) die Merkmale Alter und Gewicht unabhängig sind,

c) die Merkmale Alter und Gewicht einen Korrelationskoeffizienten von 1 aufweisen,

d) die Merkmale Alter und Gewicht unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

Es ist nur die Ergänzung der Tabellen verlangt, keine Begründungen oder Berechnungen!

a)

Nummer der Person	1	2	3	4	5	6
Alter in Jahren	20	20	30	30	40	40
Gewicht in kg	60				70	

b)

Nummer der Person	1	2	3	4	5	6
Alter in Jahren	20	20	30	30	40	40
Gewicht in kg	60				70	

c)

Nummer der Person	1	2	3	4	5	6
Alter in Jahren	20	20	30	30	40	40
Gewicht in kg	60				70	

d)

Nummer der Person	1	2	3	4	5	6
Alter in Jahren	20	20	30	30	40	40
Gewicht in kg	60				70	

Aufgabe 2

Aus langjähriger Beobachtung sei bekannt, dass nur 10% aller Studierenden, die eine einführende Statistikvorlesung besuchen, regelmäßig während des Semesters den Vorlesungsstoff nachbereiten. Von diesen Fleißigen bestehen erfahrungsgemäß 5% die Klausur am Ende des Semesters nicht; außerdem ist bekannt, dass im Durchschnitt nur 2% der Studierenden, die die Klausur nicht bestehen, zu diesen Fleißigen gehören. Welcher Anteil der Studierenden, die nicht regelmäßig den Vorlesungsstoff nachbereiten, besteht die Klausur?

Aufgabe 3

(Klausur WS 2011/12) In einer Umfrage wurden 500 Studierende der HS Regensburg (darunter 300 Männer und 200 Frauen) nach ihrer Zufriedenheit mit dem Studium an der Hochschule gefragt.

Die folgende Kreuztabelle zeigt die erhaltenen Antworthäufigkeiten:

		Männer	Frauen
Zufriedenheit mit Studium in Regensburg	Sehr zufrieden	50	40
	Zufrieden	90	100
	Unentschieden	60	20
	Unzufrieden	50	20
	Sehr unzufrieden	50	20

a) Berechnen Sie die bedingten Verteilungen (relative Häufigkeiten) der Zufriedenheit unter den Männern bzw. den Frauen. Wählen Sie jeweils einen beliebigen Wert aus jeder der beiden bedingten Verteilungen, und beschreiben Sie in jeweils einem Satz, was diese Zahlen inhaltlich aussagen.

b) Sind die beiden Merkmale statistisch unabhängig? Wenn nein: wie müsste die Kreuztabelle bei Unabhängigkeit aussehen, wenn die Randverteilungen mit denen der obigen Tabelle übereinstimmen sollen?

c) Zeichnen Sie (nebeneinander) Box-Plots für die beiden bedingten Verteilungen aus a)! Kodieren Sie dazu die Zufriedenheit mit den ganzen Zahlen von 1 bis 5!

Aufgabe 4

An Kassen von Einzelhändlern und Tankstellen sind oft Prüfgeräte zu finden, mit denen die Echtheit von Geldscheinen getestet werden soll. Diese Geräte arbeiten nicht in jedem Fall zuverlässig. Nehmen Sie an, dass von einem derartigen Gerät 95% aller falschen Scheine als Fälschung erkannt und 0,1% aller echten Scheine zu Unrecht als Fälschung verdächtigt werden. Welcher Anteil der vom Prüfgerät als Fälschung zurückgewiesenen Scheine ist tatsächlich gefälscht, wenn man davon ausgeht, dass 0,15% aller im Umlauf befindlichen Scheine gefälscht sind?

Aufgabe 5

(Klausur SS 2013)
In einer bestimmten Gruppe von Personen (die alle im Internet surfen) nutzen 70% eine aktuelle Anti-Viren-Software auf ihrem Computer. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine Person mit aktueller Anti-Viren-Software innerhalb eines Jahres trotzdem einen Virus im Internet einfängt, sei 5%. Diejenigen, die ohne solche Software im Netz surfen, haben dagegen eine Wahrscheinlichkeit von 30%, sich innerhalb eines Jahres einen Virus einzufangen. Welcher (ungefähre) Anteil der Personen, die sich innerhalb des Jahres einen Virus eingefangen haben, hatte eine Anti-Viren-Software installiert?

Aufgabe 6

Für den Zusammenhang zwischen der monatlichen Spendenbereitschaft in €(Merkmal Y) und dem monatlichen Nettoeinkommen in Tausend €(Merkmal X) wurde für einen bestimmten Teil der Bevölkerung folgende Regressionsgerade ermittelt:

$$Y = 1{,}8 + 16{,}4 \cdot X.$$

Interpretieren Sie die Parameter der Regressionsgeraden inhaltlich, sofern dies sinnvoll ist!

Aufgabe 7

Gegeben seien zwei Merkmale X und Y in einer Gesamtheit vom Umfang n mit Varianzen s_X^2 und s_Y^2, Kovarianz s_{XY} und Korrelation r_{XY}. Die beiden Merkmale U und V seien wie folgt definiert: U := aX + b, V := cY + d mit beliebigen reellen Zahlen a,b,c,d aus R. Wie lauten Kovarianz s_{UV} und Korrelationskoeffizient r_{UV} von U und V in Abhängigkeit der entsprechenden Zusammenhangsmaße von X und Y?

Aufgabe 8

(Klausur SS 2013) Gegeben seien zwei Merkmale X und Y in einer Gesamtheit von Merkmalsträgern. Die Merkmale U und V seien definiert durch $U = 5X + 3$, $V = 6Y + 2$. Die Kovarianz zwischen U und V beträgt 240. Wie groß ist die Kovarianz zwischen X und Y?

Aufgabe 9

Ein Teppichunternehmer will den Zusammenhang zwischen der Ladenverkaufsfläche und dem Jahresumsatz in seinen sechs Filialen untersuchen. Im vergangenen Jahr lieferten die Filialen folgende Daten.

Filiale	Verkaufsfläche (in 1000m^2)	Jahresumsatz (in Mio. €)
1	0,24	1,52
2	0,31	2,95
3	0,78	4,33
4	0,98	5,27
5	1,20	7,01
6	1,49	8,35

Stellen Sie die Daten (z.B. mit R oder Excel) in einem Streuungsdiagramm dar. Bestimmen Sie (von Hand oder mit einer geeigneten Software) die Parameter einer Regression des Jahresumsatzes auf die Verkaufsfläche. Interpretieren Sie die Parameter der Regressionsgerade inhaltlich, sofern dies sinnvoll ist. Welchen Jahresumsatz würde man in einer neuen Filiale mit 1100 qm erwarten?

Zusatzaufgabe 1

(Klausur SS 2012) In einer Stadt werden zwei Lokalzeitungen A und B verlegt. Von den Einwohnern der Stadt lesen 25 % nur Zeitung A und nicht Zeitung B. Dagegen lesen 40 % nur Zeitung B und nicht Zeitung A. Des Weiteren ist bekannt, dass 55 % der Einwohner Zeitung A nicht lesen.

a) Welcher Anteil der Einwohner liest beide Zeitungen?

b) Welcher Anteil der Leser von Zeitung B liest auch gleichzeitig Zeitung A?

Zusatzaufgabe 2

Wegen einer herannahenden Grippewelle lassen sich 10 % der Bevölkerung impfen. Unter allen Personen, die sich impfen lassen, erkranken erfahrungsgemäß nur etwa 3 % in der Grippe. Von denjenigen, die sich nicht impfen lassen, werden schätzungsweise 20 % erkranken

a) Welcher Anteil der Bevölkerung wird wohl an Grippe erkranken?

b) Welcher Anteil derjenigen, die an Frippe erkranken, war vorher dagegen geimpft?

3 Kapitel 6-8

Aufgabe 1

Es seien Ω eine nicht-leere Menge, (Ω,P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und A,B,C Teilmengen von Ω. Zeigen Sie unter Verwendung der Rechenregeln aus der Vorlesung:
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Aufgabe 2

(Klausur SS 2012) Es seien A, B, C $\subset \Omega$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum. Geben Sie die Mengenschreibweise für folgende Ereignisse an:

a) Es tritt A, aber weder B noch C ein.

b) Es treten genau zwei der drei Ereignisse ein.

c) Es tritt höchstens eines der drei Ereignisse ein.

Aufgabe 3

Ein Würfel mit den ganzen Zahlen 1 bis 6 wird so ?gezinkt?, dass die Wahrscheinlichkeit für jede Seite des Würfels proportional ist zu der aufgedruckten Zahl. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt eine gerade Zahl?

Aufgabe 4

Ein paar kurze (!) Kombinatorik-Aufgaben; Angaben der Lösungsformeln reicht, es ist keine Berechnung nötig

a) Auf ein Schachbrett (mit 64 Feldern, davon je die Hälfte schwarz und weiß) werden 6 identische Spielsteine auf 6 verschiedene Felder gesetzt. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

b) Auf einem Schachbrett werden 6 verschiedene Felder ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Felder schwarz?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt ein Spieler beim Lotto mit einem Tipp mindestens 4 Richtige?

d) Auf einem Schachbrett werden 3 verschiedene Felder ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die Felder nicht alle von der gleichen Farbe?

e) Eine Gruppe besteht aus 10 Mathematikern, 12 Informatikern und 15 Soziologen. Nun sollen drei verschiedene Aufgaben vergeben werden; je eine Aufgabe soll von einem Mathematiker, einem Informatiker und einem Soziologen durchgeführt werden. Auf wie viele Arten können die drei Aufgaben verteilt werden?

f) Im Dunkeln werden aus einer Schublade mit 10 schwarzen und 16 blauen Socken zufällig zwei Socken entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Socken dieselbe Farbe?

g) 5 Würfel werden gleichzeitig geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden nur verschiedene Zahlen geworfen?

h) 7 Personen spielen zusammen Badminton. Zur Verfügung steht ein Spielfeld; es soll Einzel gespielt werden. Wie viele Spiele finden statt, wenn jeder genau einmal gegen jeden anderen spielen will?

i) 7 Personen spielen zusammen Badminton. Zur Verfügung steht ein Spielfeld; es soll Doppel gespielt werden. Wie viele Spiele finden statt, wenn jedes mögliche Paar genau einmal gegen jedes andere mögliche Paar spielen will? (Achtung: etwas schwieriger.)

j) 32 Spielkarten (darunter 4 Damen) werden auf 4 Spieler (darunter Spieler A) verteilt (jeder erhält 8 Karten). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Spieler A keine Dame?

k) 32 Spielkarten (darunter 4 Damen) werden auf 4 Spieler (darunter Spieler A) verteilt (jeder erhält 8 Karten). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Spieler A mindestens eine Dame?

l) Wie viele ganze Zahlen gibt es, die in Dualdarstellung höchstens 10 Ziffern umfassen, wobei darin genau sechsmal die Ziffer 1 vorkommt?

m) Wie viele 20-stellige natürliche Zahlen gibt es, in deren Ziffernfolge (in Dezimalschreibweise) genau achtmal die 1, viermal die 2 und fünfmal die 3 vorkommt und zusätzlich drei verschiedene andere Ziffern ungleich 0 je einmal vorkommen?

n) Wie viele Stellen werden in binärer Darstellung mindestens benötigt, um die ganzen Zahlen von 0 bis 999999999 als Dualzahlen darzustellen?

Aufgabe 5

Ein Informatik-Student besitzt genau 20 Bücher, davon 4 Kochbücher, 6 Fachbücher und 10 Kriminalromane. Alle 20 Bücher stehen nebeneinander im Regal. Auf wie viele Weisen können die 20 Bücher im Regal angeordnet werden, wenn sichergestellt sein soll, dass jeweils alle Kochbücher, alle Fachbücher und alle Krimis unmittelbar nebeneinander stehen?

Aufgabe 6

Bei einer Lottoziehung werden nacheinander 6 aus 49 Kugeln ohne Zurücklegen ausgewählt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl 10 unter den gezogenen Kugeln?

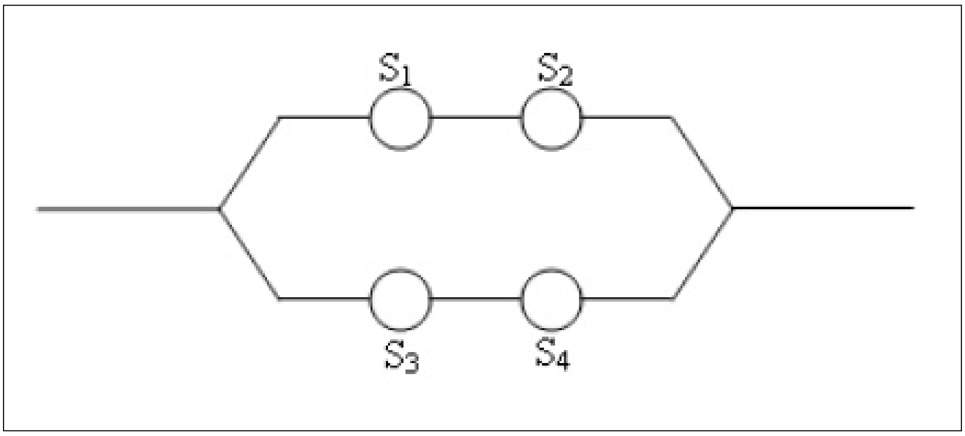
b) Sei A das Ereignis ?Die letzten beiden gezogenen Kugeln tragen gerade Zahlen?, und sei B das Ereignis ?Auf den ersten drei gezogenen Kugeln stehen höchstens zwei einstellige Zahlen.? Beschreiben Sie verbal die Ereignisse $\overline{A} \cup B und A \cap \overline{B}$!

Aufgabe 7

In einem europäischen Fußballwettbewerb sind drei deutsche Mannschaften ins Viertelfinale eingezogen. Bei der Auslosung der nächsten Spiele wird wie folgt vorgegangen: Die insgesamt acht Mannschaften werden aus einem Lostopf nach und nach zufällig gezogen und so die vier Spiele des Viertelfinales festgelegt (erste gezogene Mannschaft spielt gegen die zweite, die dritte gegen die vierte usw.). Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielen zwei deutsche Mannschaften gegeneinander?

Aufgabe 8

Zwischen zwei Punkten befindet sich eine elektrische Leitung mit vier Schaltelementen S_1, S_2, S_3 und S_4 (siehe Skizze).



Die Leitung fällt genau dann aus, wenn sowohl (mindestens) eines der beiden Elemente S_1, S_2 als auch (mindestens) eines der beiden Elemente S_3, S_4 ausfällt. Nehmen Sie an, dass alle Ausfälle unabhängig voneinander stattfinden! Machen Sie sich klar, was diese Annahme inhaltlich bedeutet!

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Leitung aus, wenn die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Schaltelemente (innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls) alle identisch sind und jeweils 1% betragen?

b) Für die vier Schaltelemente stehen jeweils drei Ausführungen A1, A2, A3 zur Auswahl mit Preisen $x_1 < x_2 < x_3$ ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 10$). Die Ausführung Ai fällt in einer bestimmten Zeiteinheit mit Wahrscheinlichkeit pi aus ($p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}05$, $p_3 = 0{,}01$). Welches ist der niedrigstmögliche Preis für die gesamte Anordnung, wenn 0,005 als obere Schranke für die Ausfallwahrscheinlichkeit der gesamten Leitung vorgeschrieben ist? Verwenden Sie Software zur Lösung der Aufgabe!

Aufgabe 9

Sie werfen n-mal einen völlig symmetrischen Würfel. Wie groß muss n mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine 6 gewürfelt wird, größer als 99% ist?

Aufgabe 10

Über einen binären Kommunikationskanal werden die Signale ?0? und ?1? übertragen. Aufgrund eines Rauschens werden die Signale manchmal verfälscht, d.h. eine gesendete ?0? wird manchmal als ?1? empfangen und umgekehrt. Eine ?0? wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,94, eine ?1? mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,91 korrekt übertragen. 55% der gesendeten Zeichen sind eine ?1?.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei Übertragung eines Zeichens eine ?0? empfangen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine ?1? empfangen?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine ?1? gesendet wurde, wenn eine ?0? empfangen wurde.

c) Welcher Anteil der empfangenen Zeichen wurde anders verschickt als empfangen?

Lösen die Aufgabe auf zwei Arten: Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie und alternativ durch Aufstellen einer Kreuztabelle.

Aufgabe 11(Geburtstagsparadoxon)

Für das Folgende nehmen wir an, dass es 365 verschiedene Geburtstage gibt (d.h. wir ignorieren den 29. Februar), die alle gleich häufig sind (stimmt auch nicht exakt). Außerdem nehmen wir an, dass Geburtstage verschiedener Personen voneinander unabhängig sind (d.h. wir ignorieren z.B. Zwillingsgeburten oder gemeinsame Geburtstagsfeiern).

a) Nehmen Sie an, Sie sind zu einer Party eingeladen, an der noch 10 andere Personen teilnehmen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat mindestens eine der anderen Personen am selben Tag Geburtstag wie Sie? Wie viele Personen müssten an der Party teilnehmen, damit diese Wahrscheinlichkeit größer als 50% ist?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es mindestens zwei Personen unter den 11 Teilnehmern der Party, die am gleichen Tag Geburtstag haben (egal wann)?

c) Geben Sie einen Tipp ab: Wie viele Personen müssen an der Party teilnehmen, damit die Wahrscheinlichkeit aus b) größer als 50% ist? Das Ergebnis wird in der Vorlesung berechnet. Weil das Ergebnis (vermutlich) viel kleiner als Ihr Tipp ist, nennt man diese Aufgabe ein Paradoxon.

Aufgabe 12)

(Klausur WS 2011/12) Um mit einer Geldkarte am Geldautomaten Bargeld abzuheben, ist die Eingabe der so genannten PIN (Persönliche Identifikationsnummer) erforderlich. Eine PIN besteht aus vier Ziffern zwischen 0 und 9 (die beliebig oft vorkommen können).

a) Üblicherweise hat man zur Eingabe der PIN an einem Geldautomaten nur eine bestimmte Zahl falscher Versuche, bevor die Karte einbehalten wird.

   Nehmen Sie an, jemand findet Ihre Geldkarte und probiert auf gut Glück (also: Laplace-Experiment) einige unterschiedliche PIN-Nummern an einem Geldautomaten aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann diese Person Ihr Konto anzapfen, wenn nach drei falschen PIN-Eingaben die Karte einbehalten wird?

b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit aus a), wenn die Person weiß, dass Ihre PINNummer aus lauter verschiedenen Ziffern besteht?

c) Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit aus a), wenn die Person aus irgendeinem Grund weiß, dass in Ihrer PIN genau zweimal die Ziffer 8 vorkommt?

Aufgabe 13

(Klausur WS 2013/14)

a) Aus einem Karton mit 10 Losen, darunter 4 Treffern, werden vier Lose ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mehr als zwei Treffer?

b) 10 Personen werden zufällig auf die 10 Plätze an einem runden (!) Tisch gesetzt, so dass jede mögliche Sitzordnung gleichwahrscheinlich ist. Unter den 10 Personen sind nur zwei Personen, die sich kennen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen diese beiden Personen nebeneinander?

Aufgabe 14

(Klausur WS 2013/14) Es soll ein binäres Wort, das aus 4 Bit besteht, über einen Kommunikationskanal übertragen werden. Dazu werden die einzelnen Bit nacheinander verschickt und in derselben Reihenfolge empfangen. Allerdings kann bei der Übertragung eines Bit ein Fehler passieren (so dass eine gesendete 0 als 1 empfangen wird oder umgekehrt). Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler bei der Übertragung eines Bit sei p; Fehler bei der Übertragung verschiedener Bit passieren unabhängig voneinander.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) wird ein aus vier Bit bestehendes Wort korrekt übertragen?

b) Um die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Übertragung zu erhöhen, kann ein 7-Bit Hamming-Code verwendet werden. Details sind hier uninteressant, es genügt zu wissen, dass ein 4-Bit-Wort dabei in ein 7-Bit-Wort (also ein aus 7 Bit bestehendes Wort) umgeformt und dieses dann verschickt wird. Aus dem empfangenen 7-Bit-Wort kann das ursprüngliche 4-Bit-Wort korrekt rekonstruiert werden, wenn bei der Übertragung des 7-Bit-Worts bei höchstens einem Bit ein Fehler passiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) lässt sich mit dieser Methode ein ursprünglich 4 Bit langes Wort korrekt über den Kommunikationskanal verschicken?

Aufgabe 15

Wahrscheinlichkeiten für ein Ereignis lassen sich approximieren, indem man das entsprechende Zufallsexperiment häufig durchführt und die relative Häufigkeit betrachtet, mit der das Ereignis eintritt. Natürlich führt man das Experiment nicht wirklich durch, sondern lässt es den Rechner simulieren. Wir betrachten zunächst die Lotto-Ziehung, bei der 6 aus 49 Zahlen ohne Zurücklegen ausgewählt werden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die kleinste der 6 ausgewählten Zahlen gleich 17? (Hinweis: Überlegen Sie, wie viele Ziehungen es gibt, bei denen die 17 und zusätzlich 5 Zahlen zwischen 18 und 49 gezogen werden.)

b) Das Ergebnis aus a) wollen wir nun durch Simulation überprüfen. Der entscheidende R-Befehl ist $sample(N, n)$:

   $sample(N, n)$ erzeugt einen Vektor, der eine zufällige Ziehung ohne Zurücklegen von n Elementen aus den ganzen Zahlen von 1 bis N simuliert.

   $sample(N, n, replace = T)$ zieht mit Zurücklegen,

   $sample(N, N)$ erzeugt eine zufällige Permutation der ganzen Zahlen von 1 bis N.

   Betrachten Sie folgenden R-Code:

```
simlaeufe = 100000  # Anzahl der Simulationen, d.h. der
                    # simulierten Ziehungen

minima = rep(NA, simlaeufe)
                    # Ein Vektor, der die Simulationsergebnisse
                    # speichern wird und am Anfang mit NA
                    # (= "not assigned") vorbelegt wird.

for (i in 1:simlaeufe){
    a = sample(49,6)
    minima[i] = min(a)
}

anteil17 = mean(minima == 17)

print(anteil17)
```

Versuchen Sie zu verstehen, was in jedem Schritt passiert. Lassen Sie den Code mehrmals ausführen und beobachten Sie, welche Nachkommastellen des Ergebnisses stabil bleiben. Erhöhen oder verkleinern Sie den Wert von $simlaeufe$, und beobachten Sie die Ergebnisse. Vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus a).

4 Kapitel 9-10

Aufgabe 1

Beim Roulette gibt es im so genannten Kessel kleine Fächer mit den ganzen Zahlen zwischen 0 und 36. Eine Kugel wird nun in den Kessel geworfen; sie fällt in genau eines dieser Fächer. Wir nehmen an, dass die Kugel bei einem Spiel mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedes der 37 Fächer fällt. Setzt man nun 100 Euro auf die Zahl 36, so verliert man diesen Einsatz,wenn eine andere Zahl fällt; man erhält den Einsatz zurück und zusätzlich 3500 Euro Gewinn, wenn die Zahl 36 fällt. Man könnte auch 100 Euro auf eine gerade Zahl setzen; in diesem Fall verliert man den Einsatz, wenn eine ungerade Zahl oder die 0 fällt, man erhält den Einsatz zurück und zusätzlich 100 Euro, wenn eine geradeZahl größer gleich 2 fällt. Die Zufallsvariablen X und Y sollen den Gewinn beschreiben, den man bei einem Spiel der ersten bzw. zweiten oben genannten Variante macht (Verlust ist dabei negativer Gewinn). Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der beiden Zufallsvariablen an und berechnen Sie ihre Erwartungswerte und Varianzen.

Aufgabe 2

Betrachten Sie folgende Strategie beim Roulette: Sie setzen wiederholt auf eine gerade Zahl größer gleich 2, und zwar genau so lange, bis eine solche Zahl fällt. Beim ersten Spiel setzen Sie 1 ?; in jedem Spiel verdoppeln Sie Ihren Einsatz. Wenn Sie ein Spiel gewinnen, erhalten Sie das Doppelte des letzten Einsatzes zurück.

a) Überlegen Sie, dass Sie im Gewinnfall alle bisherigen Einsätzezurückerhalten und zusätzlich genau 1 ? gewonnen haben. (Klingt also nach einer todsicheren Strategie!)

b) Nehmen Sie an, die Zahl der Spiele ist auf N beschränkt (entweder durch die Öffnungszeiten des Casinos oder durch Ihr Bankkonto), d.h. wenn Sie nach N Spielen noch nicht gewonnen haben, müssen Sie aufhören, und Ihr gesamter Einsatz ist verloren. Bestimmen Sie für diesen Fall den Erwartungswert der Zufallsvariable $X =$?Gewinn bzw.Verlust bei dieser Strategie?.

Aufgabe 3

Eine Zufallsvariable X besitze den Erwartungswert 5 und die Varianz 9. Wie groß sind

a) $E\left(4X+3\right)$

b) $Var\left(3X+4\right)$

c) $E\left(X^2\right)$

Aufgabe 4

Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass im Durchschnitt 10% der gebuchten Flugtickets storniert oder nicht in Anspruchgenommen werden. Daher verkauft sie für ein Flugzeug mit 100 Sitzplätzen von vornherein 5% mehr Flugtickets als Sitzplätze vorhanden sind (so genannte Überbuchung). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr Personen zum Abflug erscheinen, als Sitzplätze vorhanden sind, wenn alle angebotenen Tickets verkauft wurden? Nehmen Sie an, dass die Personen mit gekauften Tickets unabhängig voneinander erscheinen (Ist das realistisch? Wie würden Sie in der Praxis vorgehen, um diese Annahme zu überprüfen bzw. zu umgehen?)

Aufgabe 5

In einer Kaffeeküche stehen N identische Kaffeetassen. M Personen (mit $M \leq N$) holen sich nacheinander jeweils eine Tasse. Am Abend werden alle Tassen wieder zurückgebracht, gespült und zu den nicht benutzten Tassen gestellt. Am nächsten Tag holen sich dieselben M Personen wieder jeweils eine Tasse, die sie jeweils völlig zufällig aus den vorhandenen Tassen auswählen. Betrachten Sie die Zufallsvariable X = „Zahl der Personen, die am zweiten Tag dieselbe Tasse gewählt haben wie am ersten Tag“. Welchen Erwartungswert hat X?

Aufgabe 6

Die natürlichen Zahlen von 1 bis n werden zufälligsortiert; der entstehende Vektor sei mit a $= (a_1, a_2, ..., a_n)$ bezeichnet. Ein Paar (i, j) $(1 \leq i \leq j \leq n)$ mit ai $>$ aj heißt eine Inversion. X sei die Anzahl der Inversionen im Vektor a. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X; betrachten Sie dazu für $1 \leq i < j \leq n$ die binären Zufallsvariablen X_{ij} mit $X_{ij} = 1$ genau dann, wenn (i, j) eine Inversion ist. (Das Ergebnis ist die durchschnittliche Zahl der nötigen „Swaps“beim Sortieralgorithmus Bubble Sort.)

Aufgabe 7

Aus einer Lostrommel mit zehn Kugeln, die von 1 bis 10 nummeriert sind, werden 3 Kugeln gezogen. Die Zufallsvariable X ist definiert als die größte der drei gezogenen Zahlen. Bestimmen Sie die Verteilung von X (durch Angabe der Trägermenge und der Wahrscheinlichkeitsfunktion) für den Fall, dass die drei Kugeln

a) ohne Zurücklegen

b) mit Zurücklegen

gezogen werden.

Aufgabe 8

Genau einer von sechs sehr ähnlichen Schlüsseln passt in eine bestimmte Tür. Sie probieren in zufälliger Reihenfolge die Schlüssel, bis einer passt. Wie viele Schlüssel müssen Sie im Durchschnitt ausprobieren? Wie ändert sich die Antwort, wenn Sie jedes Mal wieder aus allen sechs Schlüsseln zufällig auswählen (also „mit Zurücklegen"), zum Beispiel weil Sie den Schlüsselbund nach jedem Versuch aufgrund übermäßigen Alkoholkonsums fallen lassen?

Aufgabe 9

Eine Urne enthält zehn rote und fünf schwarze Kugeln. Es werden nun vier Kugeln entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens zwei rote darunter, wenn die Kugeln

a) ohne Zurücklegen

b) mit Zurücklegen

gezogen werden?

Aufgabe 10

Bei einem häufig durchgeführten Routinetest auf eine bestimmte Krankheit wird eine Blutprobe auf die Anwesenheit von bestimmten Antikörpern getestet. Da es sich um eine seltene Krankheit handelt (der Anteil der Kranken in der Bevölkerung sei p) und der Test daher fast immer negativ ausfällt, wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen (so genanntes Gruppen-Screening): Nicht jede Blutprobe wird einzeln untersucht, sondern es werden immer bestimmte Mengen aus n verschiedenen Blutproben zusammengeschüttet und gut durchmischt. Anschließend wird ein Test mit dieser neuen (Misch-)Probe gemacht. Fällt der Test negativ aus, folgt damit, dass alle n Blutproben negativ sind. In diesem Fall hat man n?1 Tests eingespart. Fällt der Test mit der gemischten Probe hingegen positiv aus, werden anschließend alle n ursprünglichen Proben einzeln getestet; in diesem Fall braucht man insgesamt n + 1 Tests. Bestimmen Sie den Erwartungswert der nötigen Tests beim GruppenScreening von n Proben in Abhängigkeit von p und n. Für welche Werte von p lohnt sich das Gruppenscreening, wenn n = 20 gesetzt wird?

Aufgabe 11

Zwei Würfel werden wiederholt gleichzeitig geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss man die Würfel mindestens 40mal werfen, bis ein Sechserpasch (d.h. gleichzeitig zwei Sechsen) gewürfelt wird? Wie lange muss man dafür im Durchschnitt würfeln?

Aufgabe 12

(Klausur WS 2013/14) Vor zwei Jahren wurden anlässlich der Fußball-Europameisterschaft wieder Panini-Sammelbilder verkauft. Insgesamt gab es 540 verschiedene Bilder (nummeriert von 1 bis 540); die Bilder wurden nicht einzeln, sondern in (blickdichten) Päckchen mit je 5 verschiedenen (!) Bildern verkauft. (Welche Bilder in einem Päckchen sind, wusste man natürlich erst, wenn man es geöffnet hat.) Nehmen Sie an, dass die Inhalte verschiedener Päckchen voneinander unabhängig sind, und dass jede mögliche Kombination aus 5 verschiedenen Bildern mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einem Päckchen zu finden ist. Geben Sie für die nachfolgenden Zufallsvariablen an, welche Verteilung sie besitzen (Name und konkrete Parameter der Verteilung reichen aus), und berechnen Sie jeweils den Erwartungswert.

a) Zahl der Päckchen, die man kaufen muss, bis man das Bild mit der Nummer 1 erhält.

b) Zahl der Bilder mit der Nummer 1, die man beim Kauf von 270 Päckchen erhalten wird.

Aufgabe 13

Bestimmen Sie das 10%-Quantil, den Median, den Erwartungswert, die Varianz und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert größer oder gleich 4 realisiert wird, für folgende Verteilungen:

a) Binomialverteilung mit Parametern $n = 10$ und $\pi = 0,6$.

b) diskrete Gleichverteilung auf den natürlichen Zahlen von 3 bis (einschließlich) 15.

c) Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 2$.

Aufgabe 14

(Klausur SS 2013) Bei einem bestimmten Kartenspiel werden 32 Karten (darunter vier Asse) zufällig auf vier Spieler verteilt, d.h. jeder Spieler erhält 8 Karten. Geben Sie Verteilung und Erwartungswert der folgenden Zufallsvariablen an:

a) Zahl der Asse, die ein bestimmter Spieler bei einem Spiel erhält.

b) Zahl der Spiele, die ein bestimmter Spieler spielen muss, bis er einmal alle vier Asse gleichzeitig erhält.

c) Zahl der Spiele, die dieselben vier Spieler spielen müssen, bis irgendeiner der Spieler alle vier Asse gleichzeitig erhält.

d) Anzahl der Spiele, bei denen ein bestimmter Spieler kein einziges Ass erhält, wenn genau 50 Spiele gespielt werden.

Aufgabe 15

Gegeben seien 10 unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 5. X sei definiert als das Minimum dieser 10 Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist X größer als 5?

Aufgabe 16

Zwei Personen würfeln (unabhängig voneinander) so lange, bis sie jeweils zum ersten Mal eine 6 gewürfelt haben. Zeigen Sie: die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden genau gleich oft würfeln müssen, bis sie jeweils eine 6 haben, beträgt $1/11$.

Zusatzaufgabe 1

Eine Urne enthält zehn rote und fünf schwarze Kugeln. Es werden nun vier Kugeln entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindesten zwei rote darunter, wenn die Kugeln mit

- mit Zurücklegen
- ohne Zurücklegen

Zusatzaufgabe 2

Zeigen Sie, dass für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt:

$P(X = x + y | X > x) = P(X = y)$ für natürliche Zahlen x und y.

Warum sagt man wegen dieser Beziehung, die geometrische Verteilung sei „gedächtnislos“?

5 Kapitel 11-12

Aufgabe 1

Die Zeit zwischen zwei Anrufen bei einer Telefon-Hotline sei (näherungsweise) exponentialverteilt. Im Durchschnitt kommt alle 2 Minuten ein Anruf.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Zeit zwischen zwei Anrufen mehr als 3 Minuten?

b) Wie lautet das 25%-Quantil der Verteilung der Zeit zwischen zwei Anrufen? Was bedeutet diese Zahl inhaltlich?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Zeit zwischen zwei Anrufen zwischen einer und zwei Minuten?

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgende reelle Funktion F (mit vorgegebenen reellen Zahlen a < b < c):

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{für x} < \text{a} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x-b}{c-b} & \text{für } b \leq x \leq c \\ 1 & \text{für x} > \text{c} \end{cases}$$

a) Warum handelt es sich hier um eine Verteilungsfunktion? Ist es die Verteilungsfunktion einer diskreten oder einer stetigen Zufallsvariablen?

b) Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion.

c) Wie lautet das 20%-Quantil der Verteilung?

d) Wie lautet der Erwartungswert der Verteilung?

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter α. Zeigen Sie, dass für alle positiven x und y gilt:

$$\mathrm{P}(X \geq x + y | X \geq x) = \mathrm{P}(X \geq y).$$

(Man sagt deswegen, die Exponentialverteilung ist gedächtnislos. Es ist die einzige stetige Verteilung mit dieser Eigenschaft.)

Aufgabe 4

(Klausur SS 2012)
Eine stetige Zufallsvariable X besitze folgende Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\text{f(x)=}\begin{cases} 0 & \text{für x} < 1 \\ 2 \cdot (x-1) & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für x} > 2 \end{cases}$$

a) Wie lautet die Verteilungsfunktion von X?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert an, der größer als 1,5 ist?

c) Wie lautet der Median von X?

d) Wie lautet der Erwartungswert von X?

Aufgabe 5

(Klausur WS 2013/14)
Eine stetige Zufallsvariable X besitze folgende Verteilungsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\text{F(x)}=\begin{cases} 0 & \text{für x} < 0 \\ 0,0625 \cdot x^4 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für x} > 2 \end{cases}$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert an, der größer als 1,5 ist?

b) Wie lautet der Median von X?

c) Wie lautet der Erwartungswert von X?

Aufgabe 6

(Klausur SS 2013) Die Anzahl der Zugriffe pro Minute auf eine Datenbank sei (zumindest näherungsweise) Poisson-verteilt mit einem bestimmten Parameter $\lambda > 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute genau ein Zugriff erfolgt, ist halb so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute genau zwei Zugriffe erfolgen. Wie viele Zugriffe erfolgen im Durchschnitt pro Minute?

Aufgabe 7

(Klausur WS 2013/14) Die Anzahl der Zugriffe pro Minute auf eine Datenbank sei (zumindest näherungsweise) Poisson-verteilt mit einem bestimmten Parameter $\lambda > 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute genau zwei Zugriffe erfolgen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute genau drei Zugriffe erfolgen. Welche Werte kann λ unter diesen Umständen annehmen?

Aufgabe 8

X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 10 und Standardabweichung 5.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert an, der größer als 12 ist?

b) Wie lauten das 10%-Quantil und das 75%-Quantil von X?

c) Wie sieht das zentrale 95%- Schwankungsintervall von X aus?

Aufgabe 9

X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ . Der Absolutbetrag der Differenz zwischen dem Erwartungswert von X und dem 95%-Quantil von X beträgt 2. Der Median von X ist halb so groß wie die Varianz von X. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen negativen Wert an?

Aufgabe 10

In einer bestimmten Bevölkerungsgruppe folgt die Verteilung der Körpergröße (näherungsweise) einer Normalverteilung mit Mittelwert 1,75 m und einer Standardabweichung von 9 cm. Aus dieser Gruppe werden 10 Personen zufällig ausgewählt (gehen Sie von einer Auswahl mit Zurücklegen aus). Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mehr als zwei der ausgewählten Personen nicht größer als 1,68 m?