1. Aufgabe E1

Es soll eine neugezüchtete Kartoffelsorte getestet werden. Dazu wird ein Testfeld ausgewählt, das auf der gesamten Fläche gleiche Wachstumsvoraussetzungen (Bodenqualität, Sonneneinstrahlung etc.) bietet. Nachdem eine gleichmäßige Pflege der Pflanzen erfolgte (Bewässerung, Düngung etc.), wurde von der ersten Ernte auf dem Versuchsfeld eine Stichprobe entnommen, die die folgende Urliste (für das Gewicht der Kartoffeln in g) lieferte:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	132	145	172	151	152	136	143	112	159	152

a). Bestimmen Sie die geordnete Stichprobe.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	112	132	136	143	145	151	152	152	159	172

b). Klassieren Sie die obigen Daten (wählen Sie 4 gleichlange Intervalle) und zeichnen Sie das dazugehörige Histogramm.

Intervalle	Anzahl
$I_1 = [112, 127[$	1
$I_2 = [127, 142[$	2
$I_3 = [142, 157[$	5
$I_4 = [157, 172[$	2

c). Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion der unklassierten Daten (F(x) = Anteil der Kartoffeln mit einem Gewicht kleiner gleich x).

Lösung:

d). Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion der klassierten Daten (wie bei unklassierten Daten außer, dass innerhalb einer Klasse der Anteil als gleichmäßig wachsend betrachtet wird).

Lösung:

e). Berechnen Sie den Mittelwert (=arithmetisches Mittel) der Daten.

Lösung:

$\overline{x} = \dfrac{1}{10} \sum_{n=0}^{N} x_k$

f). Wie gross ist der Modalwert (der am häufigsten vorkommende Wert) der Stichprobe. Ist diese Information brauchbar?

Lösung:
Modalwert $= 152$

g). Bestimmen Sie den Median (der Wert, so dass mind. 50% der Daten kleiner gleich und mind. 50% der Daten größer gleich diesem sind). Ist dieser Wert eindeutig?

Lösung:
$x_{0,5} \in [x_{(5)}, x_{(6)}] = [145, 151]$
$x_{0,5} = \dfrac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2}$

h). Bestimmen Sie das 0,25 Quantil (der Wert, so dass mind. 25% der Daten kleiner gleich und mind. 75% der Daten größer gleich diesem sind). Ist dieser Wert eindeutig?

Lösung:
$x_{0,25} = x_3 = 136$

i). Bestimmen Sie das 0,75 Quantil (der Wert, so dass mind. 75% der Daten kleiner gleich und mind. 25% der Daten größer gleich diesem sind).

Lösung:
$x_{0,75} = x_{(8)} = 152$

j). Bestimmen Sie den Quartilsabstand (die Differenz zwischen dem 0,75 und dem 0,25 Quantil)

Lösung:
Quartilsabstand $x_{0,75} - x_{0,25} = 152 - 136 = 16$

k). Bestimmen Sie das 0,3 Quantil (der Wert, so dass mind. 30% der Daten kleiner gleich und mind. 70% der Daten größer gleich diesem sind). Ist dieser Wert eindeutig?

Lösung:
$x_{0,3} \in [x_{(3)}, x_{(5)}]$

l). Bestimmen Sie die empirische Varianz und daraus die empirische Standardabweichung.

Lösung:
empirische Varianz $s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})$

empireische Standartabweichung $\sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}}$

Index	Gewicht	$x(i) - \overline{x}$	Index	Gewicht	$x(i) - \overline{x}$
1	112	$[112 - 145,4]^2$	1	112	$1115,56$
2	132	$[132 - 145,4]^2$	2	132	$179,56$
3	136	$[136 - 145,4]^2$	3	136	$88,36$
4	143	$[143 - 145,4]^2$	4	143	$5,76$
5	145	$[145 - 145,4]^2$	5	145	$0,16$
6	151	$[151 - 145,4]^2$	6	151	$31,36$
7	152	$[152 - 145,4]^2$	7	152	$43,56$
8	152	$[152 - 145,4]^2$	8	152	$43,56$
9	159	$[159 - 145,4]^2$	9	159	$182,96$
10	172	$[172 - 145,4]^2$	10	172	$707,56$
Summe	1454	-	-	Summe	$2400,4$
Mittelwert	145,4	-	-	s^2	$240,04$
-	-	-	-	s	$15,49$

m). Zeichnen Sie den zu dieser Verteilung (unklassierte Daten) passende Boxplot.

Lösung:
Minimum $x_{min} = 112$
Maximum $x_{max} = 172$
unteres Quantil $x_{0,25} = 136$
unteres Quantil $x_{0,75} = 152$
Median $x_{0,5} = 148$
arithmetisches Mittel $\overline{x} = 1145,4$

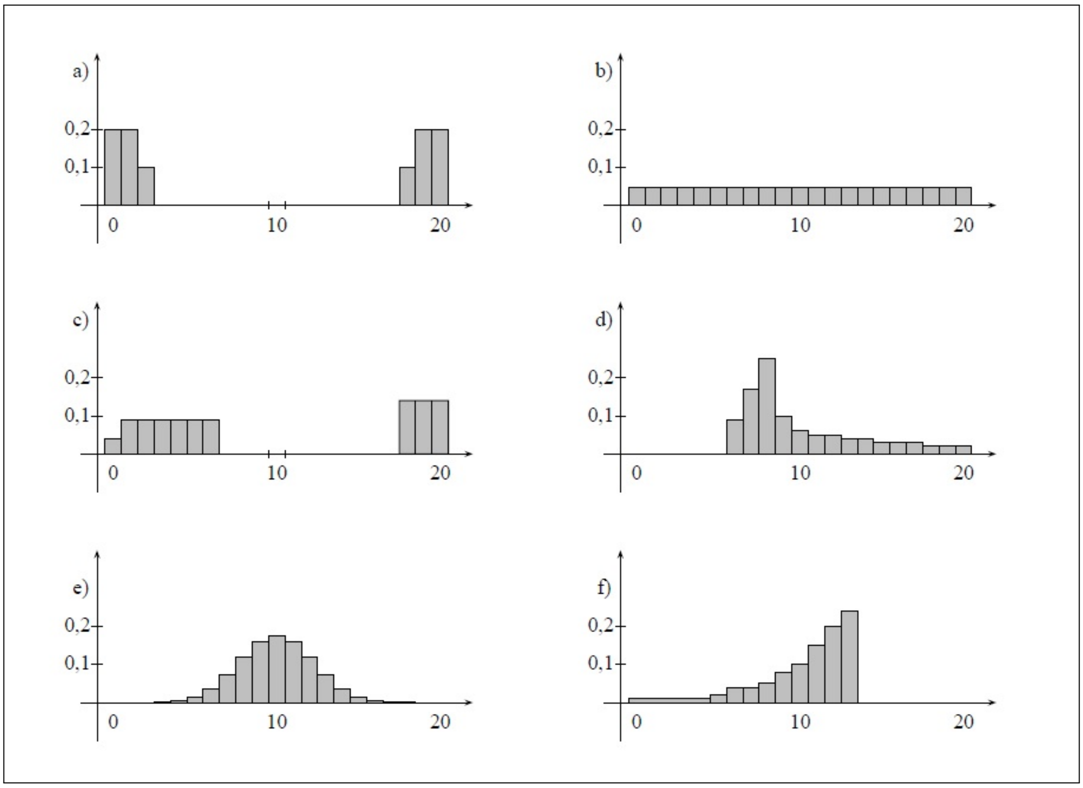
n). Wenn man den Wert 136 durch 316 ersetzt (Schreibfehler), wie wirkt das dann auf den Mittelwert, die Standardabweichung, den Median und die Quantile aus (nur qualitativ: also wächst/fällt leicht/stark)?

Lösung:
$136 \rightarrow 316$ $x_{(0,5)}$ wächst leicht
Quantile wachsen langsam oder nicht
Quartilsabstand wächst leicht
$\overline{x}$ wächst stark
s sehr stark

2. Aufgabe E2

Ordnen Sie die Werte den passenden Histogrammen zu:

Nr.	Mittelwert	Median	Standartabweichung
1	10	6	7,9
2	10	8	3,7
3	10	10	2,2
4	10	10	6,1
5	10	10	9,2
6	10	11	6,2



Lösung:

Nr.	Mittelwert	Median	Standartabweichung
a)	10	10	9,2
b)	10	10	6,1
c)	10	6	7,9
d)	10	8	3,7
e)	10	10	2,2
f)	10	11	3,2

3. Aufgabe E3

a) Fünf medizinische Untersuchungsinstitute gaben als erforderlichen Zeitaufwand für die Bestimmung der Blutbestandteile die folgenden Zeitdauern je Blutprobe in Minuten an:

Institut	1	2	3	4	5
Dauer	8	1	2	3	6

1) Berechnen Sie den mittleren Zeitaufwand, falls jedes Institut gleich viele Untersuchungen vornimmt.

2) Berechnen Sie den mittleren Zeitaufwand für die Bestimmung der Blutbestandteile, falls alle Institute über denselben Zeitraum von 8 Stunden ununterbrochen Blutproben untersuchen.

b) Man beobachtet das Wachstum von Schnittlauch, der zu Beginn des Beobachtungszeitraumes 5 cm hoch ist. Nach einer Woche ist er um 150% gewachsen. Während der zweiten Woche wächst er um 20% und während der dritten Woche um 45%.Berechnen Sie das durchschnittliche Wachstum der Pflanze pro Woche.

4. Aufgabe E4

Über eine Person sei bekannt, dass sie viel liest und zwar:

Jahr	Anz. Bücher	Median d. Seit.	M-wert d. Sz.	0,95-Quantil d. Sz.	Standartabw. d. Sz.
2008	90	350	400	710	90
2009	55	450	500	800	100

Bestimmen Sie so genau wie möglich: den Mittelwert, den Median, das 0,95-Quantil und die Standardabweichung des gesamten Zeitraumes 2008-2009.

Lösung:

$\overline{x}$, x_j, ..., für 2008
$\overline{y}$, y_j, ..., für 2009
$\overline{z}$, z_j, ..., für Gesamtzeitraum

$\overline{z} = \frac{(nx \cdot \overline{x} + n_y \cdot \overline{y})}{n_x + n_y} = \frac{1}{145} \cdot (90 \cdot 400 + 55 \cdot 500) = 438$

$\overline{z}_{0,5} \in [min(x_{0,5}, y_{0,5)}, max(x_{0,5}, y_{0,5)}] = [350, 450]$
$\overline{z}_{0,95} \in [min(x_{0,95}, y_{0,95}), max(x_{0,95}, y_{0,95}] = [710, 800]$
$s_z^2 = \frac{1}{n_x + n_y} \cdot (n_x \cdot sx^2 + n_y \cdot s_y^2) + \frac{1}{n_x + n_y} \cdot (n_x(\overline{x} - \overline{z})^2) + ny \cdot (\overline{y} - \overline{z})$
$s_z = 106 \geq min(s_x, x_y)$
$\geq$ bedeutet: immer Bestimmen Sie so genau wie möglich: den Mittelwert, den Median, das 0,95-Quantil und die Standardabweichung des gesamten Zeitraumes 2008-2009.

5. Aufgabe E5

Gegeben sei die Kontingenztafel für die Merkmale X Baumart (Ulme, Kiefer, Fichte) und Y Schädlingsbefall durch Borkenkäfer (kein, gering, mittel, groß)

X \ Y	kein	gering	mittel	groß
Ulme	8	6	5	1
Kiefer	7	10	3	0
Fichte	2	6	15	8

a). Berechnen Sie die Randverteilungen in Wahrscheinlichkeiten

b). Man bestimme die bedingte Verteilung von Y bedingt auf X =Ulme.

c). Sind die Merkmale unabhängig?

6. Aufgabe E6

Drei Stichproben mit den Umfängen 10, 30 und 60 werden zu einer Gesamtstichprobe vom Umfang 100 zusammengefasst. Die Mittelwerte dieser Stichproben seien 64, 50 und 58. Konstruieren Sie ein möglichst einfaches Beispiel, für das der empirische Median der Gesamtstichprobe in obiger Situation gleich 0 ist.

7. Aufgabe E7

Um den absoluten Nullpunkt der Temperatur zu bestimmen, kann man in einem eingeschlossenen Gas bei konstantem Volumen die Temperatur und den Druck messen. Die nachfolgende Tabelle gibt die Messwerte an. Es gilt: Wenn der Druck auf Null gesenkt wird, ist der absolute Nullpunkt der Temperatur erreicht.

T:=Temperatur in Grad Celsius	D:=Druck in mbar
25	990.9
30	1008.5
35	1023.4
40	1035.6
50	1064.4
60	1095.2
70	1126.3
80	1153.4
85	1177.8
90	1207.6
93	1226.6

Hilfe: Sie dürfen verwenden, dass

$\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} t_i = 59,8;$ $\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} (t_i)^2 = 4156,7;$ $\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} d_i = 1100,8;$

$\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} (d_i)^2 = 1218115;$ $\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} t_i * d_i = 67742;$

a) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizient.

b) Bestimmen Sie eine zur Frage passende Regressionsgerade und bestimmen Sie damit einen Näherungswert für die Temperatur am absoluten Nullpunkt in Grad Celsius.

8. Aufgabe E8

In einer Studie soll der Zusammenhang zwischen den Merkmalen Farbenblindheit und Geschlecht untersucht werden. Der Anteil der M¨ anner an der Bevölkerung beträgt ungefähr 48.6Farbenblinden unter den Männern 7

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine rein zufällig ausgewählte Person farbenblind ist? (Kurz: Wieviel Prozent der Bevölkerung sind farbenblind?)

b) Sind die Ereignisse Person ist weiblichen Geschlechts und Person ist farbenblind unabhängig?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person männlichen Geschlechts ist, unter der Bedingung, dass die Person farbenblind ist? (Kurz: Wie groß ist der Anteil an Männern unter den Farbenblinden?)

9. Aufgabe E9

Der Tutor kennt die Arbeitsgruppe der Studenten A,B,C schon seit längerem und weiß, dass Student A 80%, Student B 15% und Student C lediglich 5% der Aufgaben bearbeitet und die Studenten so organisiert sind, dass keine Aufgabe doppelt bearbeitet wird. Aufgrund ihrer unterschiedlicher Erfahrung lösen sie die Aufgaben mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%, 50% bzw. lediglich 10% richtig. Der Tutor hat von der Arbeitsgruppe eine fehlerhafte Lösung bekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt die Lösung von welchem der drei Studenten?

10. Aufgabe E10

In einer Bevölkerungsgruppe werden Personen zufällig ausgewählt und ihre Cholesterinmenge im Blut ermittelt. Es sei X das Alter der untersuchten Person, Y die Cholesterinmenge (in mg/l) im Blut und Z gebe an, ob die Person Diabetiker ist ($Z = 1$, falls Diabetiker; $Z = 0$, sonst). Es sind folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$
\begin{aligned}
&P(\{50 < X \leq 60\}) = 0.13,\\
&P(\{X \leq 60\} \cap \{Z = 1\}) = 0.05,\\
&P(\{X \leq 60\} \cap \{Z = 0\}) = 0.75,\\
&P(\{X \leq 60\} \cap \{Y \leq 150\} \cap \{Z = 1\}) = 0.01,\\
&P(\{50 < X \leq 60\} \cap \{Z = 0\}) = 0.01.
\end{aligned}
$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a) $\{X > 60\}$

b) $\{X \leq 50\}$

c) $\{X \leq 50\} \cap \{Z = 0\}$

d) $\{X \leq 60\} \cap \{Y > 150\} \cap \{Z = 1\}$

e) Eine zufällig ausgewählte Person ist

   i) älter als 60 Jahre oder Diabetiker

   ii) höchstens 50 Jahre alt, oder höchstens 60 Jahre alt und nicht Diabetiker

11. Aufgabe E11

In einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien zwei Ereignisse A und B mit $A \cup B = \Omega$ gegeben. Zeigen Sie:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) - P(A^C)P(B^C)$$

Hinweis: Formen Sie die beiden Seiten so um, dass nur noch $P(A), P(B)$ vorkommen

12. Aufgabe E12

a) Wieviele verschiedene nur aus Nullen und Einsen bestehenden Wörter der Länge 15 gibt es, die genau 4 Einsen haben?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es auf einem Schachbrett mit Seitenlänge n genau n Türme zu platzieren, die sich gegenseitig nicht schlagen können (Zwei Türme können sich schlagen, wenn sie in der selben Zeile oder der selben Spalte stehen)?

c) Wenn ein Autokennzeichen aus 2 Buchstaben (keine Umlaute) und 3 Ziffern besteht (einschließlich 000), wie viele Autos kann man damit kennzeichnen?

13. Aufgabe E13

Es seien A, B, C, D Ereignisse in einem Grundraum Ω. Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise?

a) Es tritt **nur** das Ereignis B ein.

b) Es treten genau zwei der vier Ereignisse ein.

c) Es tritt höchstens eines der vier Ereignisse ein.

14. Aufgabe E14

Ein Würfel wird 7-mal nacheinander geworfen. Geben Sie die Grundmenge Ω, sowie die gesuchten Mengen/Ereignisse in geeigneter Form an und bestimmen Sie deren Mächtigkeit bzw. daraus folgend deren Wahrscheinlichkeiten.

a) Es wird nie eine 6 gewürfelt.

b) Beim 3. und 4. Wurf wird die gleiche Augenzahl gewürfelt.

c) Beim 2. und 5. Wurf werden unterschiedliche Augenzahlen gewürfelt.

d) Die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist 3 und die Summe des 5. und 7. Wurfes ist 8.

e) Die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist 3 und die Summe des 2. und 3. Wurfes ist 8.

f) Mindestens einmal wird eine 6 gewürfelt, aber nie eine 1.

15. Aufgabe E15

Bei der ersten Ziehung der Lotterie ?Glücksspirale 1971? wurden für die Ermittlung einer 7−stelligen Gewinnzahl aus einer Trommel, die Kugeln mit den Ziffern 0,1, . . . ,9 je 7-mal enthält, nacheinander rein zufällig 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Zahlen 3333333, 1234567 und 9962902.

16. Aufgabe E16

Gegeben sei die Menge $M := 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dieser Menge mit $P(i) = \frac{1}{8}$ für alle $i \in M$.

a) Geben Sie zwei Ereignisse A, B an, für die gilt: A, B sind disjunkt, unabhängig und ergeben vereint die gesamte Grundmenge.

b) Geben Sie drei Ereignisse A, B, C an, für die gilt: A, B sind unabhängig, A, C sind unabhängig, B, C sind unabhängig, aber $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

17. Aufgabe E17

Gegeben sei eine Urne mit 5 roten und 2 schwarzen Kugeln.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Kugeln keine schwarze Kugel gezogen zu haben.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim gleichzeitigen Ziehen von vier Kugeln höchstens eine schwarze gezogen zu haben.

18. Aufgabe E18

Ein Kartenspiel (französisches Blatt) besteht aus 32 Karten, darunter 4 Asse. Die Karten werden gut gemischt und nacheinander aufgedeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die zweite aufgedeckte Karte ein As ist?

b) die zehnte aufgedeckte Karte das zweite aufgedeckte As ist?

19. Aufgabe E19

Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega, 0 < P(B) < 1$ und $A \cap B = \emptyset$. Beweisen Sie:

$$P(A^C|B) = P(A|B^C) \Leftrightarrow P(A) + P(B) = 1$$

Hinweis: Wenden Sie die Definition der Bedingten Wahrscheinlichkeit auf die linke Aussage an.

20. Aufgabe E20

Aufgrund von Erfahrungen geht man davon aus, dass 96% der neugeborenen Mädchen einen Kopfumfang von weniger als 36.5 cm und 98% der neugeborenen Mädchen eine Körpergröße von weniger als 53 cm haben. Was lässt sich über die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis ?Ein neugeborenes Mädchen hat einen Kopfumfang von weniger als 36.5 cm und ist kleiner als 53 cm? aussagen?

21. Aufgabe E21

Das Blut eines Patienten soll auf Antikörper des Typs α untersucht werden. Zu diesem Zweck entnimmt der Arzt eine Blutprobe, teilt sie in drei gleichgroße Teile und schickt diese an drei Labors. Die Testqualität der Labors ist gleich gut. Jedes Labor erhält bei Vorliegen von Antikörpern des Typs α den Befund ?positiv? mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. Sind keine Antikörper vorhanden, so ergibt sich in jedem Labor das Ergebnis ?negativ? mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%.

Nach einer Woche liegen die Analysen der drei Labors beim Arzt vor. Das Ergebnis lautet: Zwei positive Befunde und ein negatives Testergebnis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Blut des Patienten Antikörper des Typs α enthalten sind, wenn man davon ausgeht, dass allgemein 15% aller Personen solche Antikörper besitzen.

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die drei Labors unabhängig voneinander arbeiten.

22. Aufgabe E22

a) Ein Hobby Fußballer schießt auf eine Torwand mit drei Löchern. Er schießt insgesamt 10 mal, davon trifft er 1 mal Loch A, 3 Mal Loch B und 4 mal Loch C, 2 mal trifft er nicht. Wie viele Spielverläufe gibt es?

b) Bei einem WM-Tippspiel kann bei jedem Gruppen-Spiel nur Sieg, Niederlage oder Unentschieden und ab den Achtel-Finalen nur noch Sieg bzw. Niederlage getippt werden (Für die Fußball-Laien es gibt insgesamt 48 Gruppen-Spiele und 15 Endrunden-Spiele). Wie viele verschiedene Tipp-Möglichkeiten gibt es?

c) Ein Sprachfan hat in seinem Stapel ungelesener Bücher fünf französische, sieben italienische und 11 englische Bücher.Wie viele Möglichkeiten hat er, sich daraus zwei Bücher in verschiedenen Sprachen für seinen Urlaub auszusuchen?

23. Aufgabe E23

Zwei Zahlen werden zufällig und unabhängig voneinander aus der Menge 1-100 ausgesucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die größere > 80 unter der Bedingung, dass die kleinere ≤ 20 ist?

24. Aufgabe E24

Ein Medikament zeigt unabhängig voneinander zwei Wirkungen: die nicht sofort erkennbare Heilwirkung mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ und die sofort erkennbare Nebenwirkung mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{10}$. Durch ein Versehen habe 1% dieses Medikamentes eine falsche Dosierung, die eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ für die Heilwirkung bzw. $\frac{1}{2}$ für die Nebenwirkung besitzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Heilwirkung bei Eintritt bzw. Ausbleiben der Nebenwirkung?

25. Aufgabe E25

Ein Kommilitone hat Ihnen seinen Notizzettel zu den Statistik-Aufgaben überlassen. In den entsprechenden Aufgaben waren eine Dichte bzw. eine Verteilungsfunktion gesucht, welche der drei Funktionen, die Sie auf dem Zettel finden, könnte wozu passen? Bestimmen Sie im Falle einer Dichte die zugehörige Verteilungsfunktion. Skizzieren Sie im Falle der Verteilungsfunkton diese Funktion, was folgt daraus für die zugehörige Zufallsvariable?

a) $f(x) = \begin{cases} 4 \cdot e^{-2x} & \text{für } x \in [0, \frac{\ln 2}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

c) $hf(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} & \text{für } x \in [0, \infty] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Fortsetzung:

26. Aufgabe E26

Eine Fluggesellschaft nimmt Sitzplatzbuchungen für ein kleines Flugzeug mit 20 Plätzen entgegen. Da sie aus Erfahrung weiß, dass jeder Passagier (unabhängig von den anderen Passagieren) mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ nicht erscheint, nimmt sie 25 Anmeldungen entgegen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen mehr Passagiere als das Flugzeug Sitzplätze hat?

b) Wenn Sie jedem Fluggast den Sie nicht transportieren können einen Betrag von 500 € ausbezahlen, wieviel müssen Sie dann im Mittel als Entschädigung bezahlen?

27. Aufgabe E27

Gegeben seien zwei geometrische Zufallsvariablen X, Y mit Parameter p bzw. q
(d.h. $P(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ für $k \in \{1, 2, 3, ...\}$).
Die beiden Zufallsvariablen seien unabhängig, d.h. $P(X = k, Y = j) = P(X = k) \cdot P(Y = j)$.
Bestimmen Sie:

a) $P(X > k)$ für $k \in \{1, 2, 3, ...\}$

b) $P(\min(X, Y) \leq k)$ für $k \in \{1, 2, 3, ...\}$

28. Aufgabe E28

Die Verteilung des Zufallsvektors (X, Y) sei gegeben durch

$$P(X = -1, Y = 1) = \tfrac{1}{8} = P(X = 0, Y = 1)$$
$$P(X = 1, Y = -1) = \tfrac{1}{8} = P(X = 0, Y = -1)$$
$$P(X = 2, Y = 0) = \tfrac{1}{4} = P(X = -1, Y = 0).$$

Bestimmen Sie

a) Die (Rand-)Verteilung von X

b) $E(X)$ und $Var(X)$

c) $E(X \cdot Y)$ und $Var(X \cdot Y)$

d) $E(6 \cdot X^2 - 8X + 5Y - 4 \cdot XY)$

29. Aufgabe E29

Ein Kartenspiel bestehe aus sechs blauen und einer gelben Karte. Aus diesem Stapel wird wiederholt eine Karte zufällig gezogen. Ist die gezogene Karte gelb, wird sie in den Stapel zurückgelegt; ist sie blau, wird sie beiseite gelegt und im Stapel durch eine neue gelbe Karte ersetzt. In jedem Fall wird der Kartenstapel vor jeder neuen Ziehung gut gemischt.
Eine Spielbank bietet folgendes Spiel an: Nach einem Einsatz von k € wird nach obiger Regel dreimal gezogen. Ein Spieler erhält von der Bank

100 €	für	drei	gezogene	gelbe	Karten,
5 €	für	genau zwei	gezogene	gelbe	Karten,
2 €	für	genau eine	gezogene	gelbe	Karte.

Wird keine gelbe Karte gezogen, so ist der Einsatz für den Spieler verloren. Wie groß muss die Bank den Einsatz k (in ganzen €) mindestens bemessen, um langfristig pro Spiel mindestens 1 € Gewinn zu machen?

Hinweis: Sei X die Anzahl gezogener gelber Karten und Y der Auszahlungsbetrag.

Fortsetzung:

30. Aufgabe E30

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim wiederholten Werfen einer Münze, zum ersten Mal Kopf in einem ungeraden Wurf auftritt?

31. Aufgabe E31

Es seien X, Y unabhängige auf $0, 1, 2, 3, 4$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Die $0, ..., 9$-wertigen Zufallsvariablen Z_1 und Z_2 seien durch die Dezimaldarstellung

$$X \cdot Y = 10 \cdot Z_2 + Z_1$$

definiert. Berechnen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen von Z_1 und Z_2 sowie den Korrelationskoeffizient zwischen Z_1 und Z_2.

Fortsetzung:

32. Aufgabe E32

Sei X die Lebensdauer einer Glühbirne. Nehmen Sie an, dass X eine mit Parameter $1/2$ exponentialverteilte Zufallsvariable sei, d.h. die Dichte sieht wie folgt aus:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot exp(-\frac{1}{2}x) & \text{für } x >= 0 \\ 0 & \text{für x} < 0 \end{cases}$$

(wobei eine Einheit einem Jahr entspreche).

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit lebt die Glühbirne länger als 10 Jahre?

b) Berechnen Sie den Median von X (also den Zeitpunkt andem die Wahrscheinlichkeit, dass die Glühbirne bereits kaputt gegangen ist, genau 50% beträgt).

33. Aufgabe E33

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot x^2 & \text{für } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{für x} < 0 \end{cases} \quad \text{Bestimmen Sie}$$

a) die Verteilungsfunktion von X,

b) den Erwartungswert und die Varianz von X,

c) $E[\frac{1}{X}]$

34. Aufgabe E34

X sei eine Exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 2$. Die Zufallsvariable Y sei definiert durch Y := 2X. Bestimmen Sie die Verteilung (Dichte oder Verteilungfunktion von Y).

35. Aufgabe E35

Um herauszufinden, wie die Entwicklungsdauer des Bachflohkrebses Gammarus fossarum von der Wassertemperatur abhängt, wurden Laboratoriumsexperimente mit vorgegebenen Temperaturwerten durchgeführt. Die Versuchsergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Beobachtung	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur in C	xj	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.0
Entwicklungsdauer in Tagen	yj	22.5	19.0	20.0	18.5	19.5	17.0	16.0	16.5	15.0

a) die Sitzplätze unterschieden werden?

Fortsetzung:

b) es nur interessant ist, welche Personen ein Abteil teilen?

36. Aufgabe E36

Eine Reisegruppe von 12 Personen hat zwei 6er-Abteile in der Bahn reserviert. Damit haben Sie 6 Sitzplätze in Fahrtrichtung und 6 entgegen der Fahrtrichtung. 5 Personen wollen in Fahrtrichtung und 4 entgegen der Fahrtrichtung sitzen. Wie viele Platzierungsmöglichkeiten gibt es, wenn

a) die Sitzplätze unterschieden werden?

b) es nur interessant ist, welche Personen ein Abteil teilen?

37. Aufgabe E37

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8364	0.8389
1.0	0.8413	0.8437	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8728	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8979	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9146	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9624	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9685	0.9692	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9761	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9908	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9939	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9947	0.9949	0.9950	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9973
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9988	0.9989	0.9990	0.9989	0.9990

Die Laktationsleistung bei einem weiblichen Rind aus einer speziellen Population (Milchleistung zwischen zwei Geburten, gemessen in kg) lasse sich ausreichend genau durch eine $N(4000, 10^6)$ - verteilte Zufallsvariable beschreiben.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus der Population herausgegriffene Kuh eine Laktationsleistung von

   i) weniger als 3000 kg hat

   ii) mehr als 6000 kg hat.

b) Welche Laktationsleistung muss eine Kuh mindestens erbringen, um nicht zu den schlechtesten 33% dieser Population (in Bezug auf die Laktationsleistung) zu gehören?

c) Eine Herde aus Rindern dieser Population bestehe aus 100 Kühen. Welche Mittelwert und welche Varianz besitzt die Milchleistung dieser Herde, falls vorausgesetzt wird, dass die Laktationsleistungen der Kühe stochastisch unabhängig ist?