5 Kapitel 11-12

Aufgabe 1

Die Zeit zwischen zwei Anrufen bei einer Telefon-Hotline sei (näherungsweise) exponentialverteilt. Im Durchschnitt kommt alle 2 Minuten ein Anruf.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Zeit zwischen zwei Anrufen mehr als 3 Minuten?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Erwartungswert der Exponentialverteilung beträgt $\frac{1}{\alpha}$ nach Angabe ist Erwartungswert 2, also $\alpha = 0,5$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = e^{-\frac{3}{2}} = 22,3\,\%$$

b) Wie lautet das 25%-Quantil der Verteilung der Zeit zwischen zwei Anrufen? Was bedeutet diese Zahl inhaltlich?

Setze Verteilungsfunktion gleich 25 % und löse nach x auf

$F(x) = 25\,\%$, also $1 - e^{-\frac{x}{2}} = 0,25$; daraus ergibt sich

$x = -2 \ln(0,75) = 0,575$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Zeit zwischen zwei Anrufen zwischen einer und zwei Minuten?

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = 23,9\,\%$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgende reelle Funktion F (mit vorgegebenen reellen Zahlen a < b < c):

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x-b}{c-b} & \text{für } b \leq x \leq c \\ 1 & \text{für } x > c \end{cases}$$

a) Warum handelt es sich hier um eine Verteilungsfunktion? Ist es die Verteilungsfunktion einer diskreten oder einer stetigen Zufallsvariablen?

Es handelt sich um eine Verteilungsfunktion, weil

- Fkt gegen 0 geht, wenn x gegen minus unendlich geht,
- Fkt gegen 1 geht, " " " plus unendlich geht,
- Fkt monoton steigend.
- Fkt rechtsseitig stetig

Es handelt sich um die Verteilungsfkt. einer stetigen Zufallsvariablen, da F stetig

b) Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion.

Dichtefunktion ist Ableitung der Verteilungsfkt.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x < b \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c-b} & \text{für } b \leq x < c \\ 0 & \text{für } c \leq x \end{cases}$$

c) Wie lautet das 20%-Quantil der Verteilung?

setze $F(x) = 20\%$ und löse nach x auf

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x_{20\%}-a}{b-a} = 20\%$$

$$\Leftrightarrow x_{20\%} = (b-a)\cdot 40\% + a$$

d) Wie lautet der Erwartungswert der Verteilung?

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx = \int_a^b x\cdot\frac{1}{2(b-a)}\,dx + \int_b^c x\cdot\frac{1}{2(c-b)}\,dx$$

$$= \frac{a+2b+c}{4}$$

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter α. Zeigen Sie, dass für alle positiven x und y gilt:

$$\mathrm{P}(X \geq x + y | X \geq x) = \mathrm{P}(X \geq y).$$

(Man sagt deswegen, die Exponentialverteilung ist gedächtnislos. Es ist die einzige stetige Verteilung mit dieser Eigenschaft.)

$$P(X \geq X + Y \mid X \geq x) = \frac{P(X \geq X + Y)}{P(X \geq X)} = \frac{1 - (1 - e^{-\alpha(X+Y)})}{1 - (1 - e^{-\alpha X})}$$

$$= e^{-\alpha Y} = P(X \geq Y).$$

Aufgabe 4

(Klausur SS 2012)
Eine stetige Zufallsvariable X besitze folgende Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{für x} < 1 \\ 2 \cdot (x-1) & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für x} > 2 \end{cases}$$

a) Wie lautet die Verteilungsfunktion von X?

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert an, der größer als 1,5 ist?

$$P(X > 1{,}5) = 1 - P(X \leq 1{,}5) = 1 - (1{,}5-1)^2 = \frac{3}{4}$$

c) Wie lautet der Median von X?

Median der Verteilung: setze $F(x) = 50\,\%$

$$x_{50\%} = 1 + \sqrt{2}/2$$

d) Wie lautet der Erwartungswert von X?

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{1}^{2} \underbrace{x \cdot 2(x-1)}_{\text{integrieren}}\,dx = \frac{5}{3}$$

Dichtefkt.

$$= 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} - 2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} - 1\right]_1^2$$

Aufgabe 5

(Klausur WS 2013/14)
Eine stetige Zufallsvariable X besitze folgende Verteilungsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{für x} < 0 \\ 0,0625 \cdot x^4 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für x} > 2 \end{cases}$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert an, der größer als 1,5 ist?

$P(X > 1,5) = 1 - F(1,5) = 1 - F(1,5) = 1 - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$

$= 1 - 0,316 = 68,4\,\%$

b) Wie lautet der Median von X?

Setze $F(x) = 50\,\%$

$x_{50\%} = 8^{1/4} = 1,68$

c) Wie lautet der Erwartungswert von X?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{4} x^3 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{4} x^3 = \frac{32}{20} = 1,6$

Aufgabe 6

(Klausur SS 2013) Die Anzahl der Zugriffe pro Minute auf eine Datenbank sei (zumindest näherungsweise) Poisson-verteilt mit einem bestimmten Parameter $\lambda > 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute genau ein Zugriff erfolgt, ist halb so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute genau zwei Zugriffe erfolgen. Wie viele Zugriffe erfolgen im Durchschnitt pro Minute?

X ist Poisson-verteilt mit $\lambda > 0$; Es ist $P(X=1) = \frac{1}{2} P(X=2)$, also

$$\frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$$ Auflösen nach λ liefert $\lambda = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda^1}{1!} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{2!}$$

$$\Leftrightarrow 1! = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2!}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \cdot 1! \cdot 2!$$

$$\lambda = 4$$

Aufgabe 7

(Klausur WS 2013/14) Die Anzahl der Zugriffe pro Minute auf eine Datenbank sei (zumindest näherungsweise) Poisson-verteilt mit einem bestimmten Parameter $\lambda > 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute genau zwei Zugriffe erfolgen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute genau drei Zugriffe erfolgen. Welche Werte kann λ unter diesen Umständen annehmen?

X ist Poisson-verteilt mit $\lambda > 0$

Es ist $P(X=2) > P(X=3)$, also

$$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} > \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$$

Auflösen nach λ liefert $\lambda = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{2!} > \frac{\lambda^3}{3!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2!} > \frac{\lambda}{3!}$$

$$\lambda < \frac{3!}{2!}$$

$$\lambda < 3$$

Aufgabe 8

X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 10 und Standardabweichung 5.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert an, der größer als 12 ist?

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - F_Z\left(\frac{12-10}{5}\right) =$$

$$= 1 - F_Z(0{,}4) = 1 - 0{,}6554 \approx 34\,\%$$

b) Wie lauten das 10%-Quantil und das 75%-Quantil von X?

$$X_{10\%} = 10 + 5 \cdot Z_{10\%} = 10 - 5 \cdot 1{,}2816 = 3{,}59$$

$$X_{75\%} = 10 + 5 \cdot Z_{75\%} = 10 + 5 \cdot 0{,}6745 = 13{,}37$$

c) Wie sieht das zentrale 95%- Schwankungsintervall von X aus?

95% – Schwankungsintervall: $\mu \pm \sigma \cdot Z_{97{,}5\%} = 10 \pm 5 \cdot 1{,}96 =$

$= 10 \pm 9{,}8$ – oder als Intervall: $[0{,}2 ; 19{,}8]$

Aufgabe 9

X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Der Absolutbetrag der Differenz zwischen dem Erwartungswert von X und dem 95%-Quantil von X beträgt 2. Der Median von X ist halb so groß wie die Varianz von X. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen negativen Wert an?

(Etwas trickreich)

Die folgenden Informationen über X sind gegeben:

1) $|E(X) - x_{95\%}| = 2$

Da der Erwartungswert hier gleich dem Median (die Normalverteilungsdichte ist symmetrisch!) und der Median kleiner als das 95%-Quantil ist, ergibt sich:

$$x_{95\%} - x_{50\%} = 2$$

Verwendet man die Formel aus dem Skript für Quantile von Normalverteilungen, erhält man:

$$\mu + \sigma \cdot z_{95\%} - (\mu + \sigma \cdot z_{50\%}) = \sigma \cdot 1{,}6449 = 2 \text{, also}$$

$$\sigma = \frac{2}{1{,}6449} = 1{,}216$$

2) $x_{50\%} = \frac{1}{2}\sigma^2$

Daraus folgt

$\mu = \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}216^2$. Damit folgt

$$P(X < 0) = P(X \leq 0) = F_Z\left(\frac{0 - 0{,}739}{1{,}216}\right)$$

$$= F_Z(-0{,}61) = 1 - F_Z(0{,}61) = \underline{\underline{27{,}09\%}}$$

Aufgabe 10

In einer bestimmten Bevölkerungsgruppe folgt die Verteilung der Körpergröße (näherungsweise) einer Normalverteilung mit Mittelwert 1,75 m und einer Standardabweichung von 9 cm. Aus dieser Gruppe werden 10 Personen zufällig ausgewählt (gehen Sie von einer Auswahl mit Zurücklegen aus). Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mehr als zwei der ausgewählten Personen nicht größer als 1,68 m?

Sei X die Zufallsvariable „Zahl der ausgewählten Personen, die nicht größer als 1,68 m sind". Gesucht ist $P(X>2)$. Um dies zu berechnen, braucht man die Verteilung von X.

Da mit Zurücklegen ausgewählt wird, sind die Ergebnisse der einzelnen Züge unabhängig. Also ist X (als Zahl der „Treffer" bei unabhängigen Versuchen) binomialverteilt mit Parametern n = 10 und π = P(eine Person, die zufällig ausgewählt wird, ist nicht größer als 1,68 m)

Somit gilt:

$$P(X>2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - \binom{10}{0}\cdot\pi^0\cdot(1-\pi)^{10} - \binom{10}{1}\cdot\pi^1\cdot(1-\pi)^9 - \binom{10}{2}\cdot\pi^2\cdot(1-\pi)^8$$

Um das auszurechnen, muss aber zunächst π bestimmen. Sei dazu Y die Körpergröße einer zufällig ausgewählten Person. Da die Körpergrößen näherungsweise normalverteilt sind, gilt (zumindest näherungsweise):

$$\pi = P(Y \le 1{,}68) = F_Z\left(\frac{1{,}68-1{,}75}{0{,}09}\right) = F_Z(-0{,}78) = 1 - F_Z(0{,}78)$$

$$= 1 - 0{,}7823 = 21{,}77\,\%$$

Also ist

$$P(X>2) =$$

$$1 - \binom{10}{0}\cdot 21{,}77\% \cdot 78{,}23\%^{10} - \binom{10}{1}\cdot 21{,}77\%^1\cdot 78{,}23\%^9$$

$$- \binom{10}{2}\cdot 21{,}77\%^2\cdot 78{,}23\%^8 = 37{,}6\,\%$$